С. Н. Бернштейнъ.

КУРСЪ ЛЕКЦІЙ ПО ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ

Составленъ подъ редакціей профессора студентомъ В. Жуковскимъ.

Изданіе С-ва Вз. Вспом. Студ. Мат. при Харьковскомъ Университетѣ.

Типо-литографія С. Иванченко. Харьковъ, Костюринскій п. 2.

1917

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

§ I.Типичнымъ научнымъ сужденіемъ является слѣдующее:если существуетъ A,то существуетъ B.Однако такое сужденіе имѣетъ практическое значеніе только тогда,когда связь между A и B устойчива,т.е.когда незначительное измѣненіе A влечетъ за собой лишь незначительное отклоненіе отъ B.Намъ извѣстно,напримѣръ,что тѣла,подверженныя дѣйствію силы тяжести,должны падать и притомъ съ одинаковой скоростью /въ пустотѣ/.Однако въ дѣйствительности на движеніе оказываютъ вліяніе такіе факторы,какъ сопротивленіе воздуха , влажность,атмосферныя теченія и проч.,такъ что законъ движенія,даваемый теоретической механикой,въ дѣйствительности наблюдается лишь приближенно.Если мы бросаемъ игральную кость,то хотя теоретически мы и можемъ рѣшить вопросъ,какъ будетъ двигаться кость и на какую грань она упадетъ,если дана ея на-

Теорія вѣроятностей. Листъ I

чальная скорость,положеніе ея въ моментъ бросанія и т.д.,но на практикѣ это безполезно,ибо мы не можемъ учесть вліянія всѣхъ факторовъ,какъ напр.,сопротивленіе воздуха,несовершенство формы кости и проч.-Мы имѣемъ здѣсь примѣръ неустойчиваго явленія,ибо безконечно малаго измѣненія одной изъ производящихъ явленіе причинъ,напр.,толчка руки,достаточно,чтобы измѣнить въ значительной степени само явленіе.

Неуловимыя причины,вліяющія въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ,часто не играютъ роли въ массовыхъ явленіяхъ.Тѣ причины,благодаря которымъ солдатъ остался живъ въ бою,тогда какъ его товарищъ былъ убитъ,не имѣютъ значенія для исхода боя.Точно также причины,вызвавшія смерть отдѣльнаго лица,не вліяютъ на ходъ дѣлъ страхового общества,въ которомъ данное лицо было застраховано.Вся общественная жизнь возможна только вслѣдствіе устойчивости массовыхъ явленій.Изслѣдованіе законовъ массовыхъ явленій,связанныхъ съ отдѣльными случайными явленіями,составляетъ предметъ теоріи вѣроятностей.

§ 2.Вѣроятность есть основное понятіе,подобно тому,какъ прямая линія есть основное по -

нятіе въ геометріи. Мы должны указать тѣ аксіомы, которымъ подчиняется понятіе вѣроятности.

Когда мы бросаемъ игральную кость, то считаемъ, что вѣроятности паденія кости на каждую отдѣльную грань одинаковы. Отмѣченная равновозможность паденія кости на каждую отдѣльную грань приводитъ, какъ увидимъ дальше, къ слѣдствію, что число паденій на какую-нибудь одну грань будетъ приблизительно $1/6$ общаго числа бросаній. Это не будетъ имѣть мѣста, если кость будетъ имѣть неправильную форму, такъ какъ тогда паденія на отдѣльныя грани не будутъ равновозможны. Мы замѣчаемъ кромѣ того, что вѣроятность выпаденія числа напр. 5 меньше вѣроятности невыпаденія этого числа.

Два факта A и B мы считаемъ равновозможными, если причины, вызывающія появленіе этихъ фактовъ, отличаются между собою безконечно мало. Слѣдуетъ замѣтить, что нельзя считать явленія равновозможными только потому, что неизвѣстны ихъ причины, ибо относительно послѣднихъ мы не можемъ утверждать, что они отличаются неизмѣримо мало; если напр., въ урнѣ лежитъ неизвѣстное намъ число бѣлыхъ шаровъ и неизвѣстное число черныхъ, то мы не вправѣ считать что при выниманіи наудачу шара изъ урны появленіе бѣлаго и появленіе чернаго шаровъ суть явленія равновозможныя,на томъ основаніи, что у насъ нѣтъ причинъ отдать предпочтеніе тому или иному цвѣту.Если число бѣлыхъ шаровъ не было одинаково съ числомъ черныхъ,то,вынимая изъ урны шары,мы чаще бы вынимали шары одного какого-нибудь цвѣта.Въ этомъ примѣрѣ мы не можемъ опредѣлить вѣроятность появленія бѣлаго или чернаго шара.Если мы имѣемъ 2 одинаковыхъ урны, A и B и въ обѣихъ бѣлые и черные шары,при чемъ число бѣлыхъ шаровъ въ одной урнѣ равно числу черныхъ въ другой,и наоборотъ,и если мы вынимаемъ наугадъ изъ той или иной урны шаръ,то вѣроятности появленія бѣлаго или чернаго шара будутъ одинаковы. Но если напримѣръ въ урнѣ A будетъ больше бѣлыхъ шаровъ чѣмъ черныхъ и если мы уже опустили руку въ урну A ,то вѣроятность вынуть бѣлый шаръ будетъ больше вѣроятности вынуть черный.

Если два солдата отправляются на войну, то мы можемъ думать,что вѣроятности быть убитымъ для того и другого одинаковы.Однако мы не можемъ утверждать этого въ томъ случаѣ,если одинъ изъ нихъ служитъ въ артиллеріи, а другой въ пѣхотѣ.

Если какое-нибудь явленіе должно и сизой.

ти обязательно,то мы говоримъ,что оно достовѣрно.Если же намъ извѣстно,что явленіе навѣрное не произойдетъ,то мы говоримъ,что оно невозможно.Между этими отдѣльными случаями заключаются всѣ остальные,когда явленіе можетъ или произойти или нѣтъ.Такимъ явленіямъ мы приписываемъ большую или меньшую вѣроятность.

§ 3.Мы теперь приведемъ тѣ аксіомы,на которыхъ основывается теорія вѣроятностей.

I.А к с і о м а с у щ е с т в о в а н і я в ѣ р о я т н о с т и.Она состоитъ въ томъ,что вѣроятность наступленія какого-либо событія можетъ быть выражена числомъ;это число называется математической вѣроятностью.

2.А к с і о м а с р а в н е н і я в ѣ р о я т н о с т е й.Неравенство вѣр.$(A) > $ вѣр. (B) означаетъ,что событіе B есть частный случай событія A ,или же,что существуетъ такое событіе A_1 , вѣр.котораго равна вѣр. (A) и такое событіе B_1 , вѣр.котораго равна вѣр. (B) ,причемъ событіе B_1 является частнымъ случаемъ событія A_1 .Отсюда слѣдуетъ,что достовѣрное событіе имѣетъ наибольшую вѣроятность,а невозможное - наименьшую.

3.А к с і о м а н е с о в м ѣ с т и м ы х ъ с о б ы т і й.Если событія A и A_1 несовмѣстимы/т.е.

Символомъ вѣр. (A) мы обозначаемъ математическую наступленіе одного изъ нихъ исключаетъ возможность наступленія другого/, точно также какъ и событія B и B_1 и если вѣр. (A) = вѣр. (B), а вѣр. (A_1) = вѣр. (B_1), то если будемъ разсматривать событіе, состоящее въ появленіи A или A_1, и другое, состоящее въ появленіи B или B_1, будемъ имѣть: вѣр. / A или A_1/ = вѣр./ B или B_1 /. Эту аксіому можно формулировать иначе: если событіе C происходитъ при наступленіи одного изъ двухъ несовмѣстимыхъ событій, то вѣр. (C) зависитъ только отъ вѣроятностей этихъ событій, въ отдѣльности каждаго. Напр., если вѣроятность вынуть изъ колоды картъ карту пиковой масти равна вѣроятности вынуть карту бубновой масти, а вѣроятность вынуть карту трефовой масти равна вѣроятности вынуть карту червовой, то вѣроятность вынуть карту черной масти равна вѣроятности вынуть карту красной масти.

Аксіому 3-ю можно было бы замѣнить такою: если вѣр. $(A) \geqslant$ вѣр. (B), а вѣр. $(A_1) \geqslant$ вѣр. (B_1), то вѣр. / A или A_1 / $\geqslant$ вѣр./ B или B_1 /, при чемъ знакъ равенства въ послѣднемъ неравенствѣ имѣетъ мѣсто, если имѣетъ мѣсто знакъ равенства въ двухъ первыхъ. Тогда вмѣсто аксіомы 2-й достаточно допустить, что вѣроятность достовѣрнаго событія болѣе, чѣмъ недостовѣрнаго. Изъ этихъ трехъ аксіомъ можно вывести опредѣленіе математической вѣроятности.

4. Аксіома совмѣстимыхъ событій. Эта аксіома относится къ вѣроятностямъ сложныхъ событій и будетъ приведена впослѣдствіи.

§ 4. Докажемъ, что если вѣр. $(A) >$ вѣр. (B), а вѣр. $(A_1) =$ вѣр. (B_1), то вѣр. / A или A_1 / $>$ вѣр. / B или B_1 /, при чемъ событія A и A_1, B и B_1 несовмѣстимы. На основаніи аксіомы 2 неравенство вѣр. $(A) >$ вѣр. (B) свидѣтельствуетъ о томъ, что существуютъ такія событія A_2 и B_2, гдѣ B_2 есть частный случай A_2 и вѣр. $(A) =$ вѣр. (A_2), вѣр. $(B) =$ вѣр. (B_2). По аксіомѣ 3 вѣр. / A_2 или A_1 / $=$ вѣр. / A или A_1 / и вѣр. / B_2 или B_1 / $=$ вѣр. / B или B_1 /; но вѣр. / B_2 или B_1 / $=$ вѣр. / B_2 или A_1 / по той же аксіомѣ, и событіе / B_2 или A_1 / есть частный случай событія / A_2 или A_1 /. Поэтому вѣр. / A_2 или A_1 / $>$ вѣр. / B_2 или A_1 /, т.е. вѣр. / A или A_1 / $>$ вѣр. / B или B_1 /.

Легко вывести, что, если вѣр. / A / $>$ вѣр. / B /, а вѣр. / A_1 / $>$ вѣр. / B_1 /, то вѣр. / A или A_1 / $>$ вѣр. / B или B_1 /. Достаточно примѣнить два раза доказанную теорему, именно: вѣр. / A или A_1 / $>$

вѣр./ B или A_1 /, вѣр./ B или A_1 /> вѣр. / B или B_1 /, откуда вѣр./ A или A_1 /> вѣр./ B или B_1 /. Напр., если вѣроятность выиграть 200000 р. съ однимъ билетомъ I-го займа больше вѣроятности выиграть ту же сумму съ однимъ билетомъ 2-го займа, то вѣроятность выиграть 200000 р. съ двумя билетами I-го займа больше вѣроятности выиграть съ двумя билетами 2-го займа.

§ 5. Если имѣемъ рядъ несовмѣстимыхъ между собой событій

$$A_1, A_2, \ldots\ldots A_n, \text{————————} (1)$$

и рядъ событій

$$B_1, B_2, \ldots\ldots B_n \text{————————} (2)$$

тоже несовмѣстимыхъ между собой и если

вѣр./ A_1 /= вѣр./ B_1 /, вѣр./ A_2 /= вѣр./ B_2 / и т. д. вѣр./ A_n /= вѣр./ B_n /, то вѣр./ A_1 или A_2 или ---- A_n /= вѣр./ B_1 или B_2 или ---- B_n /.

Это можно доказать отъ n къ $n+1$. Предложеніе очевидно вѣрно для $n=1$ /Аксіома 3 /. Допустимъ, что теорема вѣрна для n событій. Присоединимъ къ ряду /I/ еще одно событіе A_{n+1}, несовмѣстимое со всѣми остальными событіями ряда /I/, а къ ряду /2/ событіе B_{n+1} несовмѣстимое съ событіями ряда /2/. Событіе, состоящее въ появленіи одного изъ событій A_1,

A_2, --- A_n ,можно разсматривать,какъ одно событіе α ,а событіе,состоящее въ появленіи одного изъ событій B_1, B_2, --- B_n, можно разсматривать какъ одно событіе β , такъ что

вѣр./ A_1 или A_2 или - - - - - A_n или A_{n+1} /=

= вѣр./ α или A_{n+1}/,а

вѣр./ B_1 или B_2 или--- B_n или B_{n+1}/ = вѣр. / β или B_{n+1}/.Но согласно нашему допущенію вѣр. /α/ вѣр./β/ .Поэтому если будетъ вѣр./A_{n+1}/= = вѣр./B_{n+1}/,то по аксіомѣ 3 будемъ имѣть:вѣр./ α или A_{n+1} / = вѣр./β или B_{n+1}/. Теорема доказана.

Если бы мы пользовались тѣмъ опредѣленіемъ равновозможныхъ событій,которое мы дали выше, то послѣднее предложеніе было бы слѣдствіемъ этого опредѣленія.Мы говоримъ,что факты A_i и B_i равновозможны,если причины,вызывающія наступленіе событій A_i или B_i неизмѣримо мало отличаются.Если мы примемъ такое опредѣленіе, то причины,вызывающія событія /A_1 или A_2 или - - - . A_n /,будутъ неизмѣримо мало отличаться отъ причинъ,вызывающихъ событіе /B_1 или B_2 или--- B_n /.Такъ что событія / A_1 или A_2 или --- A_n / и / B_1 или B_2 или --- B_n/ будутъ по опредѣленію равновозможны.Примѣръ:если мы бросаемъ кость, то вѣроятности выпаденія любого числа оченъ одинаковы. Примѣняя доказанную теорему, заключаемъ, что вѣроятность выпаденія четнаго числа одинакова съ вѣроятностью выпаденія нечетнаго.

§ 6. Докажемъ слѣдующее предложеніе: если мы имѣемъ рядъ несовмѣстимыхъ событій:

$$A_1, A_2, - - - - A_n$$

и другой рядъ несовмѣстимыхъ событій

$$B_1, B_2, - - - - B_n$$

и если вѣр. $/A_i/ \geq$ вѣр. $/B_i/$ $(i=1,2,\dots n)$

при чемъ хоть для одного i имѣетъ мѣсто неравенство, то

вѣр. $/A_1$ или A_2 или $--- A_n/ >$ вѣр. $/B_1$ или B_2 или $-- B_n/$. Мы уже доказали это для $n=2$ /§ 4/.

Допустимъ теперь, что теорема справедлива для n событій, такъ что

вѣр. $/A_1$ или A_2 или $--- A_n/ \geq$ вѣр. $/B_1$ или B_2 или $--- B_n/$, причемъ знакъ равенства имѣетъ мѣсто только тогда, когда вѣр. $/A_i/=$ $=$вѣр. $/B_i/$ для всѣхъ значеній i отъ I до n. Будемъ разсматривать событія $/A_1$ или A_2 или $-- A_n/$ и $/B_1$ или B_2 или $--- B_n/$, какъ нѣкоторыя событія α и β. Разсмотримъ еще два событія A_{n+1} и B_{n+1}, такія, что вѣр. $/A_{n+1}/ \geq$ вѣр. $/B_{n+1}/$, если вѣр. $/\alpha/ >$ вѣр. $/\beta/$ и

$вѣр./A_{n+1}/ >$ вѣр.$/B_{n+1}/$, если вѣр.$/\alpha/ =$ вѣр.$/\beta/$
Тогда на основанiи § 4 заключаемъ, что въ обоихъ случаяхъ вѣр.$/\alpha$ или $A_{n+1}/ >$ вѣр.$/\beta$ или $B_{n+1}/$. Что и требовалось доказать.

§ 7. Сказанное позволяетъ намъ прiйти къ доказательству основной теоремы теорiи вѣроятностей. Но предварительно докажемъ слѣдующую лемму: если событiя $A_1, A_2, --- A_n$ несовмѣстимы, равновозможны и единственно возможны /т.е. обязательно должно произойти одно изъ этихъ событiй/; если событiя $B_1, B_2, --- B_n$ обладаютъ тѣми же свойствами, то вѣр.$/A_i/ =$ вѣр.$/B_i/$ и эта вѣроятность зависитъ только отъ числа n.
Такъ какъ событiя $A_1, A_2, --- A_n$ равновозможны, то

вѣр.$/A_1/ =$ вѣр.$/A_2/ = --- =$ вѣр.$/A_n/$.

Такъ же точно

вѣр.$/B_1/ =$ вѣр.$/B_2/ = --- =$ вѣр.$/B_n/$

Допустимъ, что вѣр.$/A_i/ >$ вѣр.$/B_i/$; тогда на основанiи предыдущаго §-а мы имѣли бы:

вѣр.$/A_1$ или A_2 или $\cdots A_n/ >$ вѣр.$/B_1$ или B_2 или $\cdots B_n/$.

Но так какъ событiя $A_1, A_2, --- A_n$ суть событiя единственно возможныя, то событiе $/A_1$ или A_2 или $\cdots A_n/$ достовѣрно; подобнымъ же [illegible]зомъ достовѣрно событiе $/B_1$ или B_2 или...

$\cdots B_n$/. Поэтому необходимо должно быть: вѣр./A_1 или A_2 или $\cdots A_n$/ = вѣр. /B_1 или B_2 или $\cdots B_n$/.

Отсюда слѣдуетъ, что должно быть: вѣр./A_i/= =вѣр./B_i/. Эта лемма даетъ возможность говорить о равенствѣ вѣроятностей и тогда, когда физическія условія, необходимыя для появленія разсматриваемыхъ событій, совершенно различны. Такимъ образомъ вѣроятность того, что при бросаніи кости выпадетъ напр. число 5 равна вѣроятности вытащить изъ 6 перенумерованныхъ шаровъ, находящихся въ урнѣ, шаръ, напр., подъ номеромъ 3.

Изъ этой же леммы мы можемъ вывести опредѣленіе математической вѣроятности. Если нѣкоторое событіе A происходитъ при какихъ нибудь m случаевъ изъ n несовмѣстимыхъ, единственновозможныхъ и равновозможныхъ случаевъ, то вѣроятность этого событія A есть нѣкоторая функція только этихъ двухъ чиселъ m и n, вѣр./A/= $f(m,n)$. Дѣйствительно, пусть $A_1, A_2, \cdots A_m, A_{m+1}, \cdots A_n$ будутъ n возможныхъ событій и первыя m изъ нихъ - событія, при которыхъ происходитъ событіе A. Пустъ $B_1, B_2, \cdots B_m, B_{m+1}, \cdots B_n$ будетъ рядъ другихъ событій несовмѣстимыхъ, равновозможныхъ и единственновозможныхъ. Событіе A заключается въ появленіи одного изъ событій: $A_1, A_2, \ldots A_m$. Назовемъ черезъ B событіе, заключающееся въ появленіи одного изъ событій $B_1, B_2, \ldots B_m$ Изъ предидущей леммы заключаемъ: вѣр. $/A_i/=$ вѣр. $/B_i/$ $[i=1,2,\ldots n]$ Но тогда какъ мы видѣли выше /§ 5/ вѣр. $/A_1$ или A_2 или $\ldots A_m/=$ вѣр. $/B_1$ или B_2 или $\ldots B_m/$ т.е. вѣр. $/A/=$ вѣр. $/B/$. Отсюда ясно, что вѣроятность зависитъ исключительно отъ чиселъ m и n. Докажемъ далѣе, что вѣр. $/A/$ есть функція только отношенія $\frac{m}{n}$. Пусть $A_1, A_2, \ldots A_m, A_{m+1} \ldots A_n$ рядъ событій несовмѣстимыхъ, единственновозможныхъ и равновозможныхъ. Пусть $B_1, B_2, \ldots B_{m_1}, B_{m_1+1}, \ldots B_{n_1}$ другой рядъ событій, обладающихъ такими же свойствами. Среди перваго ряда событій мы разсматриваемъ событіе A, состоящее въ появленіи одного изъ первыхъ m событій $A_1, A_2, \ldots A_m$. Среди второго ряда мы разсматриваемъ событіе B, состоящее въ появленіи одного изъ первыхъ m_1 событій $B_1, B_2, \ldots B_{m_1}$ Докажемъ, что если

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n_1}=\frac{M}{N}$$

гдѣ $\frac{M}{N}$ есть несократимая дробь, то вѣр. $/A/=$ $=$ вѣр. $/B/$ Пусть $m=kM$, $n=kN$, $m_1=k_1M$, $n_1=k_1N$

Расположимъ рядъ событій $A_1, A_2, \ldots A_n$ въ видѣ такой таблицы:

$$
\begin{array}{|l|}
A_1,\ A_2 - - - - - \quad - - A_k \\
A_{k+1},\ A_{k+2} - - - - - \quad A_{2k} \\
- - - - - - - - \\
- - - - - - - A_m \\
\hline
A_{m+1} - - - - - - - \\
- - - - - - - - \\
- - - - - - - A_n
\end{array}
$$

Въ каждой строкѣ напишемъ K событій въ порядкѣ номеровъ.Число всѣхъ строкъ будетъ N, а число строкъ,въ которыхъ написаны событія $A_1, A_2 --- A_m$ есть M Вѣроятность появленія событія изъ первой строки одинакова съ вѣро - ятностью появленія событія изъ второй строки, изъ третьей,и т.д.Пусть $a_1, a_2, --- a_m --- a_N$ будутъ событія,состоящія въ появленіи одного какоко-нибудь событія изъ $1^{ой}, 2^{ой} \dots N^{ой}$ строки.Имѣемъ всего N возможныхъ случаевъ.Собы - тію A благопріятствуетъ M случаевъ.По дока - занному вѣр.$/A/$ зависитъ только отъ чиселъ M и N .Такимъ же точно образомъ убѣдимся, что вѣр.$/B/$ зависитъ только отъ чиселъ M и N. Значитъ,вѣр.$/A/$ = вѣр.$/B/$.Итакъ,вѣроятность какого-нибудь событія A есть функція $f(\frac{m}{n})$ отъ отношенія $\frac{m}{n}$. Если бы въ предыдущемъ случаѣ было $\frac{m}{n} > \frac{m_1}{n_1}$, то былобы:вѣр.$/A/ >$ вѣр.$/B/$

Дѣйствительно очевидно

$$\frac{m}{n} = \frac{mn_1}{nn_1}, \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1 n}{n_1 n}, \quad mn_1 > m_1 n$$

Будемъ разсматривать рядъ какихъ либо nn_1 событій $C_1, C_2, \dots C_{nn_1}$ Положимъ, что событіе C' заключается въ появленіи одного изъ mn_1 первыхъ событій C_i, а событіе C''—въ появленіи одного изъ $m_1 n$ первыхъ событій. По аксіомѣ 2 вѣр./C'/ > вѣр./C''/ а по только что доказанной теоремѣ вѣр./A/= вѣр./C'/ ,вѣр./B/= =вѣр./C''/ Поэтому вѣр./A/ > вѣр./B/.

Итакъ, функція $f(\frac{m}{n})$ есть функція возрастающая. Дальше выборъ функціи $f(\frac{m}{n})$ зависитъ только отъ насъ. Мы можемъ назвать математической вѣроятностью любую возрастающую функцію $f(\frac{m}{n})$ Мы могли бы назвать математической вѣроятностью, напр., слѣдующія функціи:

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m^2}{n^2}, \quad \frac{m}{n-m} = \frac{m/n}{1-\frac{m}{n}}, \text{ и т. д.}$$

Но мы не могли бы взять, напр. $\frac{m}{n^2}$ т.к. эта дробь зависитъ не только отъ отношенія $\frac{m}{n}$. Такъ же точно мы не могли бы принять за математическую вѣроятность дробь $\frac{n}{m}$ ибо эта дробь есть убывающая функція отъ $\frac{m}{n}$.

Итакъ, выборъ функціи f произволенъ и опредѣляется техническими удобствами. Выводы теоріи вѣроятностей не зависятъ отъ этого выбора. Мы выберемъ простѣйшій видъ функціи f. Подъ вѣроятностью событія A будемъ разумѣть отношеніе $\frac{m}{n}$. Итакъ, математическая вѣроятность событія A есть отношеніе числа случаевъ,при которыхъ событіе A происходитъ,къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ въ данномъ опытѣ.При этомъ предполагается,что всѣ случаи равновозможны и несовмѣстимы.По этому опредѣленію достовѣрное событіе имѣетъ вѣроятность равную единицѣ,а вѣроятность невозможнаго событія равна нулю.Вѣроятности всѣхъ остальныхъ событій заключаются между 0 и I.Найдемъ,напримѣръ,какова вѣроятность вынуть изъ колоды картъ карту бубновой масти?Число всѣхъ возможныхъ случаевъ есть 52,число благопріятствующихъ появленію карты бубновой масти случаевъ есть I3.Искомая вѣроятность поэтому равна $\frac{13}{52}$. Возьмемъ затѣмъ такой случай:допустимъ,что при выниманіи сразу изъ колоды напр.,5 картъ,всѣ возможныя комбинаціи равновозможны.Спрашивается,какова вѣроятность,что въ вынутыхъ 5 картахъ окажется напр.бубновый тузъ?Общее число всѣхъ возможныхъ случаевъ-C_{52}^{6}. Благопріятствующими комбинаціями будутъ только тѣ,гдѣ есть бубновый тузъ.Отбросимъ въ этихъ комбинаціяхъ бубноваго туза.Оставшіяся 4 карты могутъ быть любыми изъ всѣхъ картъ колоды за исключеніемъ бубноваго туза.Онѣ слѣдовательно могутъ образовать всѣ сочетанія изъ 51 карты по 4. Поэтому число комбинацій благопріятствующихъ появленію бубноваго туза есть C_{51}^4 Такимъ образомъ искомая вѣроятность есть

$$\frac{C_{51}^4}{C_{52}^5} = \frac{5}{52}$$

§ 8. Во многихъ случаяхъ вѣроятность можно опредѣлить простымъ подсчетомъ. Положимъ, напр., что изъ сосуда, гдѣ находится N билетовъ, мы вынимаемъ l билетовъ. Какова вѣроятность, что среди этихъ вынутыхъ билетовъ окажется α напередзаданныхъ нумеровъ? Число всѣхъ возможныхъ случаевъ есть очевидно число сочетаній изъ N элементовъ по l т. е. C_N^l. Возьмемъ тѣ сочетанія, которыя благопріятствуютъ появленію разсматриваемаго событія, т. е. тѣ, которыя заключаютъ α заданныхъ билетовъ. Если мы изъ этихъ сочетаній выключимъ α заданныхъ билетовъ, то оставшіеся $l-\alpha$ билетовъ должны быть взяты изъ $N-\alpha$ остальныхъ билетовъ. Мы поэтому получимъ всѣ случаи, благопріятствующіе данному событію, подсчитавъ число сочетаній изъ $N-\alpha$ элементовъ по $l-\alpha$. Значитъ, число случаевъ благопріятствующихъ есть $C_{N-\alpha}^{l-\alpha}$; искомая вѣроятность есть

$$\frac{C_{N-\alpha}^{l-\alpha}}{C_N^l}$$

Важно обратить вниманіе на то обстоятельство, что случаи, которые мы подсчитываемъ, должны быть равновозможны, единственновозможны и несовмѣстимы.

Положимъ, что мы имѣемъ въ урнѣ m черныхъ и n бѣлыхъ шаровъ. Какова вѣроятность, что въ числѣ вынутыхъ l шаровъ будетъ ровно α черныхъ? Откинемъ въ комбинаціяхъ изъ l шаровъ, среди которыхъ ровно α черныхъ, всѣ черные шары. Остающіеся $l-\alpha$ бѣлыхъ шаровъ образуютъ сочетанія изъ n элементовъ по $l-\alpha$. α черныхъ шаровъ могутъ быть взяты C_m^α способами. Ясно, что число благопріятствующихъ случаевъ есть $C_m^\alpha \cdot C_n^{l-\alpha}$ Число всѣхъ возможныхъ случаевъ есть C_{m+n}^l Искомая вѣроятность равна, слѣдовательно:

$$\frac{C_m^\alpha \cdot C_n^{l-\alpha}}{C_{m+n}^l}$$

Теорія вѣроятностей имѣетъ большое примѣненіе въ вопросахъ, относящихся къ карточной игрѣ. Въ карточной игрѣ игрокъ опредѣляетъ вѣроятность какъ бы особаго рода глазомѣромъ, и искусство играть въ карты въ большой степени зависитъ отъ этого глазомѣра, т.е. отъ способности игрока опредѣлять приблизительно вѣроятность, не производя вычисленія.

Рѣшимъ, напр., такой вопросъ: какова вѣроятность, что изъ 10 картъ, данныхъ игроку, окажется 4 карты бубновой масти? Эта задача есть очевидно частный случай предыдущей. Здѣсь $m=13$, $n=39$ $l=10$, $\alpha=4$.

а потому для вѣроятности получаемъ слѣдующее значеніе:

$$\frac{C_{13}^{4}\cdot C_{39}^{6}}{C_{52}^{10}}=\frac{27418}{185932}$$

Рѣшимъ еще такой вопросъ.Допустимъ,что избираемый кандидатъ имѣетъ абсолютное большинство голосовъ.Пусть m голосовъ будетъ за него,а n противъ,причемъ $m>n$. Какова вѣроятность,что за все время выниманія шаровъ среди вынутыхъ шаровъ большинство все время будетъ въ пользу кандидата?Будемъ обозначать черезъ A вообще избирающій шаръ,а черезъ B неизбирающій.Расположивъ всѣ $m+n$ шаровъ въ порядкѣ ихъ появленія,получимъ группу изъ $m+n$ буквъ,напр.:

$$A,\ B,\ A,\ A,\ \ldots\ B,\ A$$

Въ случаѣ,если ожидаемое событіе имѣетъ мѣсто, этотъ рядъ долженъ удовлетворять тому условію, что если мы,идя слѣва направо,остановимся гдѣнибудь,то въ полученной группѣ буквъ A должно быть больше,чѣмъ буквъ B. Такимъ образомъ,напр., написанная группа не удовлетворяетъ этому условію,потому что,взявъ два первыхъ элемента этой группы A, B, мы видимъ,что здѣсь число буквъ A равно числу буквъ B. Мы принимаемъ,что всѣ возможные порядки буквъ равновозможны.Чтобы получить всѣ возможные случаи,мы должны разставить m элементовъ A на $m+n$ мѣстахъ. Ясно,что

общее число всѣхъ возможныхъ случаевъ будетъ:
$C_{m+n}^{m} = C_{m+n}^{n}$. Замѣтимъ, что иногда бываетъ проще опредѣлить вѣроятность непоявленія событія вмѣсто вѣроятности его появленія. Въ данномъ случаѣ неблагопріятными случаями будутъ, во-первыхъ всѣ тѣ группы, которыя начинаются буквой B. Число этихъ группъ будетъ: $C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m}$
Остальные неблагопріятные случаи образуютъ группы, начинающіяся буквой A въ которыхъ, идя слѣва направо, мы всегда дойдемъ до такого мѣста, гдѣ число буквъ A будетъ равно числу буквъ B. Возьмемъ какую-нибудь группу, гдѣ число буквъ A и B одинаково, напр.:

$$A, A, B, A, B, B.$$

Если замѣнимъ въ этой группѣ букву A буквой B а букву B буквой A то группа, начинавшаяся буквой A будетъ начинаться буквой B и наоборотъ. Поэтому ясно, что всѣ тѣ группы, въ которыхъ число буквъ A равно числу буквъ B дѣлятся на двѣ категоріи: группы первой категоріи начинаются съ A а группы второй - съ B. Число группъ въ обѣихъ категоріяхъ одинаково. Но ясно, что въ тѣхъ группахъ, которыя начинаются буквой B, мы всегда, идя слѣва направо, получимъ такую группу, гдѣ число буквъ A будетъ равняться числу буквъ B. Поэтому число группъ, начинающихся буквой A.

и такихъ, въ которыхъ, идя слѣва направо, мы можемъ получить группу, въ которой число буквъ A равно числу буквъ B будетъ равно числу группъ, начинающихся буквой B т.е. C^{m}_{m+n-1}.

Итакъ, число неблагопріятныхъ случаевъ есть $2C^{m}_{m+n-1}$, а значитъ число благопріятныхъ случаевъ будетъ $C^{n}_{m+n}-2C^{m}_{m+n-1}$ и искомая вѣроятность равна

$$\frac{C^{n}_{m+n}-2C^{m}_{m+n-1}}{C^{n}_{m+n}}=1-2\frac{C^{m}_{m+n-1}}{C^{m}_{m+n}}=$$

$$=1-\frac{2\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}}=1-2\frac{n}{m+n}=\frac{m-n}{m+n}.$$

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНІЯ И УМНОЖЕНІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.

§ 9. Мы перейдемъ теперь къ изложенію другихъ методовъ вычисленія вѣроятности. Докажемъ, во-первыхъ, такъ называемую т е о р е м у с л о ж е н і я в ѣ р о я т н о с т е й.

Если имѣемъ два несовмѣстимыхъ событія A и B имѣющія вѣроятности соотвѣтственно P_A и P_B то вѣроятность P появленія одного изъ событій A или B равна

$$P=P_A+P_B$$

Допустимъ сперва, что P_A и P_B числа раціональныя, $P_A=\frac{m_1}{n_1}$, $P_B=\frac{m_2}{n_2}$. Мы можемъ предполагать, что знаменатели дробей P_A и P_B одинаковы, т.к. въ противномъ случаѣ мы могли бы всегда привести обѣ дроби къ одному знаменателю.

Итакъ, положимъ, что: $n_1 = n_2 = n$. Положимъ теперь, что въ урнѣ находится n шаровъ; m_1 бѣлыхъ, m_2 черныхъ, а остальные шары - красные. Мы вынимаемъ изъ урны наудачу шаръ. Назовемъ черезъ α событіе, состоящее въ появленіи бѣлаго шара, а черезъ β событіе, состоящее въ появленіи черного шара. Очевидно:
вѣр. $/\alpha/ = \frac{m_1}{n} =$ вѣр. $/A/$, вѣр. $/\beta/ = \frac{m_2}{n} =$ вѣр. $/B/$.
По аксіомѣ 3 вѣроятность α или β равна вѣроятности A или B. Въ урнѣ находится $m_1 + m_2$ бѣлыхъ и черныхъ шаровъ; поэтому, если будемъ разсматривать событіе, состоящее въ появленіи бѣлаго или черного шара, то его вѣроятность будетъ равна $\frac{m_1 + m_2}{n}$ Итакъ, вѣр./ α или β /=
$= \frac{m_1 + m_2}{n}$ т.е. вѣр./ A или B /= $\frac{m_1 + m_2}{n}$,

$$P = P_A + P_B$$

Пусть теперь числа P_A и P_B будутъ ирраціональны /мы увидимъ впослѣдствіи примѣры такихъ событій, которымъ надо приписать ирраціональную вѣроятность/. Образуемъ двѣ послѣдовательности раціональныхъ чиселъ:

$$P_A', P_A'', \dots P_A^{(n)}, \dots$$
$$P_B', P_B'', \dots P_B^{(n)}, \dots$$

имѣющія предѣлами P_A и P_B. Выберемъ эти ряды такъ, чтобы всегда было:

$$P_A^{(n)} > P_A, \quad P_B^{(n)} > P_B$$

Разсмотримъ событіе $A_{н}$ имѣющее вѣроятность $P_A^{(n)}$. Тогда /аксіома 2/ существуютъ два таких событія α и $\alpha_н$ имѣющія вѣроятности P_A и $P_A^{(n)}$, что событіе α есть частный случай событія $\alpha_н$. Аналогичнымъ образомъ существуютъ событія β и $\beta_н$ имѣющія вѣроятности P_B и $P_B^{(n)}$ такія, что β является частнымъ случаемъ $\beta_н$. Мы имѣемъ:

вѣр./A или B/ = вѣр./α или β/

вѣр./$A_н$ или $B_н$/ = вѣр./$\alpha_н$ или $\beta_н$/

но /§.4/

вѣр./$\alpha_н$ или $\beta_н$/ > вѣр./α или β/

слѣдовательно:

вѣр./$A_н$ или $B_н$/ > вѣр./A или B/.

т.е. вѣр./A или B/ < $P_A^{(n)} + P_B^{(n)}$

Аналогично, если образуемъ послѣдовательности:

$\Pi_A^{'}, \Pi_A^{''}, \ldots \Pi_A^{(n)}, \ldots$

$\Pi_B^{'}, \Pi_B^{''}, \ldots \Pi_B^{(n)}, \ldots$

такія, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_A^{(n)} = P_A$, $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_B^{(n)} = P_B$

$\Pi_A^{(n)} < P_A$, $\Pi_B^{(n)} < P_B$

то найдемъ: вѣр./A или B/ > $\Pi_A^{(n)} + \Pi_B^{(n)}$.

Итакъ: $\Pi_A^{(n)} + \Pi_B^{(n)}$ < вѣр./A или B/ < $P_A^{(n)} + P_B^{(n)}$

а такъ какъ:

$$\lim_{n\to\infty}(\Pi_A^{(n)} + \Pi_B^{(n)}) = \lim_{n\to\infty}(P_A^{(n)} + P_B^{(n)}) = P_A + P_B$$

то: вѣр./A или B/ = $P_A + P_B$ = вѣр./A/ + вѣр./B/.

Эту теорему легко распространить на какое угодно конечное число событій. Допустимъ, что теорема вѣрна для K событій $A_1, A_2, \dots A_k$ и докажемъ, что она будетъ въ такомъ случаѣ вѣрна и для $k+1$ событій. Разсмотримъ $k+1^{ое}$ событіе A_{k+1} несовмѣстимое ни съ однимъ изъ предыдущихъ. Если будемъ разсматривать событіе состоящее въ появленіи одного изъ событій: $A_1, A_2, \dots A_k$, то по доказанному можно написать:

вѣр.$[(A_1$ или A_2 или $\dots A_k)$ или $A_{k+1}]=$ вѣр. $/A_1$ или A_2 или $\dots A_k/+$ вѣр.$/A_{k+1}/$

а такъ какъ, согласно допущенію

вѣр.$/A_1$ или A_2 или $\dots A_k/=$ вѣр.$/A_1/+$вѣр.$/A_2/+$ $+\dots+$ вѣр.$/A_k/$,

то вѣр.$[(A_1$ или A_2 или $\cdot A_k)$ или $A_{k+1}]=$ вѣр.$/A_1$ или A_2 или $\dots A_k$ или $A_{k+1}/=$ вѣр.$/A_1/+$ $+$вѣр.$/A_2/+\dots+$вѣр.$/A_k/+$вѣр.$/A_{k+1}/$.

Сумма вѣроятностей единственновозможныхъ и несовмѣстимыхъ событій равна I, потому что событіе, состоящее въ появленіи одного изъ этихъ событій достовѣрно, а вѣроятность достовѣрнаго равна I. Въ частности пусть A есть какое нибудь событіе и $\bar{A}$ событіе, состоящее въ непоявленіи событія A Пусть $p=$ вѣр.$/A/$, $q=$вѣр.$/\bar{A}/$ События A и $\bar{A}$ насовмѣстимы и единстненно - возможны, ибо событіе обязательно произойдетъ или не произойдетъ. Слѣдовательно:

$$p+q=1$$

Если $p=q$, то $p=q=\frac{1}{2}$ Если, слѣдовательно, событіе имѣетъ одинаковые шансы произойти и не произойти, то вѣроятность его появленія равна $\frac{1}{2}$. Если $p>q$, то $p>\frac{1}{2}$, $q<\frac{1}{2}$, а если $p<q$, то $p<\frac{1}{2}$, $q>\frac{1}{2}$. Въ первомъ случаѣ о событіи говорятъ, что оно вѣроятно, а во второмъ, - что оно мало вѣроятно.

§ 10. Мы будемъ разсматривать совмѣстимыя событія.

АКСІОМА СОВМѢСТИМЫХЪ СОБЫТІЙ.

Даны событія: A и B, A_1 и B_1. Если вѣр. /A/ = вѣр. /A_1/, а вѣр. /B/ послѣ того какъ наступило[1] событіе A равна вѣр. /B_1/ послѣ того какъ наступило событіе A_1, то вѣроятность совмѣщенія событій A и B равна вѣроятности совмѣщенія событій A_1 и B_1, вѣр. /A и B/ = вѣр. /A_1 и B_1/. Подъ совмѣщеніемъ событій A и B разумѣемъ наступленіе обоихъ событій A и B. Положимъ, что для ребенка даннаго возраста и въ данныхъ условіяхъ вѣроятность заболѣть скарлатиной выражается нѣкоторнмъ

- -

[1] Послѣдовательность во времени здѣсь роли не играетъ: вмѣсто, того, чтобы говорить о вѣроятности B "послѣ того, какъ наступило A ", можно сказать "послѣ того, какъ A становится достовѣрнымъ". -

числомъ. Послѣ того, какъ ребенокъ заболѣлъ, вѣроятность умереть отъ скарлатины также выражается нѣкоторымъ числомъ. Вѣроятность, что этотъ ребенокъ заболѣетъ и умретъ отъ скарлатины есть нѣкоторое число, зависящее отъ двухъ первыхъ чиселъ. Если теперь для другого ребенка первыя два числа такія же, какъ и для перваго ребенка, то вѣроятность заболѣть скарлатиной и умереть для него будетъ такая же, какъ и для перваго ребенка. Если событія A_1 и B_1 независимы, но таковы, что вѣр./ A_1 /= вѣр./ A /, а вѣр./ B_1 /= = вѣр./ B /, причемъ вѣр./ B / есть вѣроятность событія B въ предположеніи, что событіе A уже произошло, то вѣр./ A и B /= = вѣр./ A_1 и B_1 /. Такъ напр., вѣроятность, что какой нибудь ребенокъ заболѣетъ скарлатиной, а другой уже больной умретъ равна вѣроятности заболѣть скарлатиной и умереть какому - нибудь третьему ребенку. Мы здѣсь имѣемъ примѣры зависимыхъ и независимыхъ событій. Если мы имѣемъ два событія такихъ, что вѣроятность одного не зависитъ отъ наступленія или ненаступленія другого, то о такихъ событіяхъ говорятъ, что они независимы. Если же вѣроятность событія зависитъ отъ наступленія или ненаступленія другого, то такія событія называются зависимыми.

§11. Теорема умноженія вѣроятностей.

Имѣемъ два событія A и B. Вѣроятность события, состоящаго въ появленіи обоихъ событій A и B равна произведенію вѣроятностей обоихъ событій, причемъ, если вѣроятность события B зависитъ отъ наступленія или ненаступленія событія A, то подъ вѣр./ B / мы должны разумѣть вѣроятность событія B въ предположеніи, что событіе A уже произошло, /т.е. достовѣрно/. Допустимъ сначала, что обѣ вѣроятности суть числа раціональныя. Пусть

$$\text{вѣр.}/A/=\frac{m_1}{n_1}, \quad \text{вѣр.}/B/=\frac{m_2}{n_2}$$

Разсмотримъ два такія событія. Событіе α состоитъ въ томъ, что изъ n_1 шаровъ, среди которыхъ m_1 черныхъ, вынимается черный шаръ; событіе β состоитъ въ томъ, что изъ n_2 шаровъ, среди которыхъ m_2 черныхъ, вынимается черный шаръ. Тогда:

$$\text{вѣр.}/\alpha/=\frac{m_1}{n_1}=\text{вѣр.}/A/, \text{вѣр.}/\beta/=\frac{m_2}{n_2}=\text{вѣр.}/B/.$$

На основаніи аксіомы совмѣстимыхъ событій

$$\text{вѣр.}/A \text{ и } B/=\text{вѣр.}/\alpha \text{ и } \beta/.$$

Событіе, состоящее въ совмѣщеніи событій α и β заключается въ томъ, что будутъ вынуты два черныхъ шара. Число случаевъ благопріятствующихъ этому событію есть очевидно $m_1 m_2$ при -

чемъ всѣ эти случаи на основанiи аксiомы 4 равновозможны. Число всѣхъ возможныхъ случаевъ есть $n_1 n_2$ и значитъ

$$\text{вѣр.}/A \text{ и } B/ = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

то-есть:

$$\text{вѣр.}/A \text{ и } B/ = \text{вѣр.}/A/ \cdot \text{вѣр.}/B/.$$

Посредствомъ перехода къ предѣлу можно доказать теорему и для случая ирраціональныхъ вѣроятностей подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ теоремѣ сложенія вѣроятностей. Наконецъ, пользуясь методомъ математической индукціи, легко распространить теорему на какое угодно число событій. Вѣроятность совмѣщенія нѣсколькихъ независимыхъ между собой событій равна произведенію вѣроятностей отдѣльныхъ событій. Но если событія не независимы, то при вычисленiи вѣроятности мы должны поступать такимъ образомъ. Распологаемъ событія въ какомъ нибудь порядкѣ: $A_1, A_2, \dots A_k$. Разсматриваемъ событіе A_i въ предположенiи, что всѣ предыдущія событія $A_1, A_2, \dots A_{i-1}$ произошли. Тогда для полученія вѣроятности совмѣщенія событій $A_1, A_2, \dots A_k$ надо перемножить вычисленныя при указанномъ предположенiи вѣроятности отдѣльныхъ событій. Въ зависимости отъ порядка расположенія событій получимъ различныя выраженія для вѣроятности, но числовыя значенія вѣроятности получатся во всѣхъ случаяхъ одинаковыя. Рѣшимъ, напримѣръ, такую задачу. Если мы бросаемъ двѣ игральныхъ кости, то какова вѣроятность, что на обѣихъ костяхъ окажется цыфра 6 ? Эта задача легко рѣшается на основаніи предыдущей теоремы. Вѣроятность того, что при бросаніи одной кости выпадетъ число 6, есть $\frac{1}{6}$. Значитъ, вѣроятность того, что при бросаніи двухъ ко - стей выпадетъ двѣ шестерки, равна $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ Далѣе, какова вѣроятность того, что сумма очекъ, выпавшихъ на обѣихъ костяхъ, будетъ равна 7 ? Будемъ обозначать черезъ /a, b / случай, ко - гда на первой кости оказывается цыфра a, а на второй - цыфра b. Тогда случаи, когда сумма очекъ на обѣихъ костяхъ равна 7 будутъ слѣдующіе: /1,6/,/2,5/,/3,4/,/4,3/,/5,2/,/6,1/. Все - го имѣемъ 6 случаевъ, благопріятствующихъ данному событію. Число же всѣхъ возможныхъ случаевъ есть очевидно 36. Значитъ, для вѣроятности получается значеніе $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ Однако, не для любого числа получится такая вѣроятность. Напр., вѣроятность, что сумма очекъ будетъ 2, равна очевидно $\frac{1}{36}$ потому что только одинъ случай /1,1/ благопріятствуетъ этому событію. Число всѣхъ возможныхъ суммъ есть 11, но мы не вправѣ отсюда заключать, что вѣроятность появленія каждой суммы равна $\frac{1}{11}$ такъ какъ не всѣ суммы равновозможны.

§ 12. Положимъ, что мы бросаемъ двѣ монеты и хотимъ узнать, какова вѣроятность, что на обѣихъ монетахъ будетъ орелъ, или на одной орелъ, а на другой рѣшетка, или на обѣихъ рѣшетка? Даламберъ, который не могъ понять принциповъ теоріи вѣроятностей, рѣшилъ этотъ вопросъ такъ: всѣ три событія равновозможны и потому вѣроятность каждаго равна $\frac{1}{3}$. Но это не вѣрно, тк. кк. мы имѣемъ здѣсь дѣло съ неравновозможными событіями. Вѣроятность того, что на одной монетѣ будетъ орелъ /или рѣшетка/ равна $\frac{1}{2}$; поэтому на основаніи теоремы умноженія вѣроятностей вѣроятность того, что на обѣихъ монетахъ будетъ орелъ /или рѣшетка/ равна $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Очевидно также, что вѣроятность того, что на первой монетѣ будетъ орелъ, а на второй рѣшетка есть $\frac{1}{4}$, точно также, какъ и вѣроятность того, что на первой монетѣ будетъ рѣшетка, а на второй орелъ. Отсюда слѣдуетъ /теор. слож. вѣр./, что вѣроятность того, что на одной изъ монетъ будетъ рѣшетка, а на другой орелъ, равна $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Это можно было бы и прямо видѣть, ибо сумма вѣроятностей двухъ первыхъ событій /два орла или двѣ рѣшетки/ есть $\frac{1}{2}$, а событія, состоящія въ появленіи двухъ орловъ или двухъ рѣшетокъ и одного орла и одной рѣшетки единственно возможны и сумма ихъ вѣроятностей должна быть равна единицѣ.

Обобщимъ вопросъ о бросанiи костей. Допустимъ, что бросаютъ сразу n костей. Какова вѣроятность, что выкинутыя числа очекъ дадутъ въ суммѣ нѣкоторое число l ? Для рѣшенiя этой задачи разсмотримъ полиномъ:

$$S_{(x)} = \left[\frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}{6}\right]^n$$

Это есть многочленъ степени $6n$, низшiй членъ котораго будетъ степени n. Коэфицiентъ при членѣ степени l равенъ искомой вѣроятности. Это не трудно доказать. Каждое опредѣленное совмѣщенiе очекъ на n костяхъ имѣетъ вѣроятность $\frac{1}{6^n}$ Многочленъ имѣетъ видъ:

$$S_{(x)} = \sum_{i=n}^{i=6n} A_i x^i$$

Членъ со степенью x^l получаемъ перемножая n множителей, которые суть степени отъ $x, x^2, \dots x^6$.

Предположимъ, что степень каждаго множителя соотвѣтствуетъ числу очекъ при одномъ бросанiи. При возведенiи въ степень намъ приходится n разъ перемножать какiе нибудь изъ множителей $x, x^2, \dots \dots x^6$, взятые въ томъ или иномъ числѣ. Такъ какъ при умноженiи показатели степеней складываются, то если мы получаемъ послѣ переумноженiя x^l это значитъ, что сумма очекъ въ n костяхъ оказалась равной l. Если бы мы, не пользуясь биномомъ Ньютона, произвели возведеніе въ степень, не дѣлая приведенія подобныхъ членовъ, то получили бы нѣсколько членовъ съ x^l. Каждый изъ этихъ членовъ соотвѣтствовалъ бы какой нибудь опредѣленной комбинаціи чиселъ очекъ на костяхъ. При этомъ каждый разъ перемножая двѣ какія либо степени x^a мы должны были бы множить $\frac{1}{6}$ на $\frac{1}{6}$ и послѣ возведенія въ степень коэфиціентъ при каждомъ членѣ былъ бы $(\frac{1}{6})^n$ т.е. былъ бы равенъ вѣроятности каждой отдѣльной комбинаціи. Далѣе вѣроятность полученія суммы чиселъ очекъ l равна суммѣ вѣроятностей отдѣльныхъ комбинацій, при которыхъ сумма чиселъ очекъ равна l т.е. равна тому коэфиціенту, который будетъ при x^l послѣ приведенія подобныхъ членовъ. Что касается вычисленія коэфиціентовъ, то оно можетъ быть упрощено слѣдующимъ образомъ. Мы имѣемъ:

$$\mathfrak{Z}(x) = \frac{x^n}{6^n}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^n = \frac{x^n}{6^n}(1-x^6)^n(1-x)^{-n} =$$

$$= \frac{x^n}{6^n}\left[1 - nx^6 + \frac{n(n-1)}{2!}x^{12} - \dots \pm x^{6n}\right]\left[1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \dots\right]$$

Коэфиціентъ при x^λ въ первыхъ скобкахъ обозначимъ черезъ α_λ а во вторыхъ скобкахъ - черезъ β_λ Тогда коэффиціентъ при x^μ въ произведеніи многочленовъ, стоящихъ въ скобкахъ, будетъ равенъ:

$$B_\mu = \alpha_0\beta_\mu + \alpha_1\beta_{\mu-1} + \dots = C^{\mu}_{n+\mu-1} - nC^{\mu-6}_{n+\mu-7} + \frac{n(n-1)}{2!}C^{\mu-12}_{n+\mu-13} - \dots$$

Коэффиціентъ же при x^l въ $\Phi(x)$ будетъ равенъ:

$$A_l = \frac{B_{l-n}}{6^n} = \frac{1}{6^n}\left[C^{l-n}_{l-1} - nC^{l-n-6}_{l-7} + \frac{n(n-1)}{2!}C^{l-n-12}_{l-13} - \dots\right]$$

Этотъ рядъ, какъ легко сообразить, имѣетъ конечное число членовъ.

Найдемъ далѣе, какова вѣроятность W того, что сумма очекъ на n костяхъ не превыситъ числа l. Очевидно

$$6^n W = \sum_0^{l-n} B_l = C^0_{n-1} + C^1_n + C^2_{n+1} + \dots + C^{l-n}_{l-1} - n\sum_n^l C^{l-n-6}_{l-7} + \dots =$$

$$= C^{n-1}_{n-1} + C^{n-1}_n + C^{n-1}_{n+1} + \dots + C^{n-1}_{l-1} - n\sum_n^l C^{n-1}_{l-7} + \dots, \text{ т. е.:}$$

$$W = \frac{1}{6^n}\left[C^n_l - nC^n_{l-6} + \frac{n(n-1)}{2!}C^n_{l-12} + \dots\right].$$

Найдемъ, напр., какова вѣроятность W что при 5 бросаніяхъ сумма очекъ не превыситъ 15 ? $W = \frac{1}{6^5}\left[C^5_{15} - 5C^5_9\right] = \frac{791}{2592}$

§ 13. Рѣшимъ теперь следующую задачу объ урнахъ. Имѣется K урнъ съ бѣлыми и черными шарами. Назовемъ ихъ /урны/ черезъ $A_1, A_2, \dots A_k$.

Вынимаемъ наудачу шаръ изъ какой-нибудь урны. Положимъ, что вѣроятность вынуть шаръ изъ урны A_i есть α_i. Пусть далѣе вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ урны A_i когда уже извѣстно, что выниманіе производится изъ этой урны, будетъ p_i. Спрашивается, какова вѣроятность вынуть бѣлый шаръ вообще? Вѣроятность, что изъ урны A_i будетъ вынутъ бѣлый шаръ по теоремѣ умноженія вѣроятностей равна $p_i\alpha_i$. Поэтому на основаніи теоремы сложенія вѣроятностей вѣроятность вынуть бѣлый шаръ вообще будетъ

$$W = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_k p_k = \sum_1^k \alpha_i p_i$$

Если въ частности всѣ урны одинаковы и нѣтъ основаній думать, что выниманіе скорѣе будетъ произведено изъ одной урны чѣмъ изъ другой, то $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = \frac{1}{k}$ и

$$W = \frac{p_1 + p_2 + \cdots p_k}{k}.$$

Пусть напримѣръ $k=3$, $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{6}$.

Пусть затѣмъ въ урнѣ A_1 находится 4 бѣлыхъ шара и I черный, въ урнѣ A_2 –2 черныхъ и 3 бѣлыхъ, въ A_3 –2 бѣлыхъ и 3 черныхъ. Тогда $p_1 = \frac{4}{5}$, $p_2 = \frac{3}{5}$, $p_3 = \frac{2}{5}$ и

$$W = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{5} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{2}{5} = \frac{19}{30}.$$

§ I4. Въ предыдущей задачѣ мы имѣли дѣло съ зависимыми событіями. Перейдемъ къ разсмотрѣнію примѣра съ независимыми событіями. Положимъ, что производится рядъ опытовъ. Событіе A имѣетъ вѣроятность p_1 въ первомъ опытѣ, p_2 -во второмъ и т.д -- p_n - въ n'омъ и пусть вѣроятности непоявленія событія A въ первомъ, второмъ --- n'омъ опытахъ будутъ $q_1, q_2, \dots q_n$ такъ что $p_i + q_i = 1$. При этомъ всѣ опыты независимы между собой и число ихъ - n.

Какова вѣроятность, что событіе A произойдетъ при этихъ n опытахъ ровно m разъ? Для рѣшенія этого вопроса разсмотримъ произведеніе

$$(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\cdots(p_nx+q_n)=B_nx^n+B_{n-1}x^{n-1}+\cdots+B_0$$

Коэффиціентъ B_m при x^m и будетъ искомой вѣроятностью. Дѣйствительно, члены съ x^m получаются отъ перемноженія въ биномахъ m членовъ, содержащихъ x и $n-m$ членовъ, не содержащихъ x. Возьмемъ какой нибудь такой членъ, напр.:

$$p_1p_2\cdots p_mq_{m+1}\cdots q_nx^m$$

Произведеніе $p_1p_2\cdots p_mq_{m+1}\cdots q_n$ есть вѣроятность того, что при первыхъ m опытахъ событіе A произойдетъ, а при $n-m$ остальныхъ не произойдетъ. Аналогичное значеніе имѣютъ и иные коэффиціенты при x^m. Значитъ, сумма всѣхъ коэффиціентовъ при x^m т.е. B_m равна суммѣ всѣхъ этихъ вѣроятностей, т.е. равна вѣроятности того, что событіе A появится ровно m разъ.

$B_0 = q_1 q_2 \cdots q_n$ и $B_n = p_1 p_2 \cdots p_n$ суть вѣроятности того, что событіе A совсѣмъ не появится и что оно появится во всѣхъ опытахъ. Разсмотримъ въ частности случай когда $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$ а, слѣдовательно, и $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = q = 1-p$

Тогда, примѣняя формулу бинома, получимъ:

$$(px+q)^n = p^n x^n + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{m} p^m q^{n-m} x^m + \cdots + q^n.$$

Для вѣроятности получаемъ такое значеніе:

$$\binom{n}{m} p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

Впрочемъ, въ этомъ частномъ случаѣ вѣроятность можно вычислить иначе. Обозначимъ черезъ $\bar{A}$ событіе, состоящее въ ненаступленіи событія A. Для того, чтобы событіе A произошло m разъ, надо, чтобы m разъ изъ n произошло событіе A и $n-m$ разъ событіе $\bar{A}$ Если разсматриваемъ какую-нибудь послѣдовательность событій, то ей будетъ соотвѣтствовать соединеніе напр. такое:

$$A, \bar{A}, \bar{A}, A \cdots A$$

Въ этомъ соединеніи буква A должна встрѣчаться m разъ, а буква $\bar{A}$ — $n-m$ разъ. Возьмемъ какую нибудь опредѣленную послѣдова -

тельность событій, при которой событіе A происходитъ m разъ, напр., написанную. Вѣроятность того, что событія произойдутъ именно въ такой послѣдовательности равна

$$pqqp \cdots p = p^m q^{n-m}$$

Всю вѣроятность найдемъ дѣлая перестановки буквъ p и q и умножая $p^m q^{n-m}$ на число различныхъ перестановокъ Число перестановокъ съ повтореніемъ изъ m буквъ p и $n-m$ буквъ q есть $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ и искомая вѣроятность равна слѣдовательно

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m q^{n-m}$$

Сумма вѣроятностей, что событіе произойдетъ 0,1,2.....n разъ есть вѣроятность того, что событіе произойдетъ или ни разу, или I разъ... или n разъ, а такъ какъ это достовѣрно, то эта сумма равна I, т.е.

$$p^n + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + \cdots + \binom{n}{1} p q^{n-1} + q^n = 1.$$

Дѣйствительно, сумма этого ряда равна: $(p+q)^n$ а $p+q=1$.

§ 15. Теорема умноженія вѣроятностей позволяетъ уяснить переходъ отъ вѣроятности къ достовѣрности. Если p есть вѣроятность событія, то вѣроятность, что событіе произойдетъ n разъ подрядъ, на основаніи теор. умнож. вѣр. равна p^n; это число можетъ быть сдѣлано сколь

угодно малымъ, если взять достаточно боль-
шое n. Поэтому вѣроятность, что событіе
не произойдетъ n разъ подрядъ будетъ
какъ угодно близка къ достовѣрности. При
этомъ само p можетъ быть близко къ I.
Напр., вѣроятность, что при бросаніи кости
не выпадетъ число 6 равна $\frac{5}{6}$. Слѣдователь-
но, вѣроятность, что при n-кратномъ броса-
ніи кости не выпадетъ ни разу число 6 ра-
вна $(5/6)^n$. Чтобы вѣроятность этого послѣд-
няго событія была напр. меньше 0,01, доста-
точно, чтобы было

$$(5/6)^n < 0,01$$

откуда

$$n > \frac{\lg 0,01}{\lg 5 - \lg 6} = 25,25.$$

Итакъ, если будемъ бросать кость 26 или
больше разъ, то вѣроятность, что цифра не
выпадетъ ни при одномъ бросаніи будетъ
меньше 0,01. Наоборотъ, при 26 бросаніяхъ
вѣроятность появленія числа 6 будетъ
весьма велика - больше 0,99.
Событіе, вѣроятность котораго очень ма-
ла, на практикѣ можно часто считать не-
возможнымъ. Напр. если бы кто-нибудь взял-
ся угадать названія всѣхъ книгъ, находя-
щихся въ библіотекѣ, по ихъ номерамъ, то

мы бы считали это невозможнымъ. Въ дѣйствительности однако мы должны сказать, что успѣхъ такого предпріятія возможенъ, но имѣетъ крайне малую вѣроятность. Пусть данное лицо угадываетъ названіе какого-нибудь №. Вѣроятность, что онъ вѣрно укажетъ первую букву названія книги есть $\frac{1}{36}$ /считая въ алфавитѣ 36 буквъ/. Вѣроятность того, что онъ вѣрно укажетъ двѣ первыя буквы есть $\frac{1}{36^2}$ и т.д. Если названіе книги состоитъ въ среднемъ изъ 15 буквъ, то вѣроятность угадать названіе одной только книги равна $\frac{1}{36^{15}}$. Эту величину надо еще возвести въ степень, равную числу книгъ всей библіотеки.

Если вѣроятность выиграть 100.000 руб. какому нибудь лицу равна 0,000001, то хотя практически можно считать эту вѣроятность равной 0, заинтересованное лицо не будетъ игнорировать совершенно возможность выигрыша. Съ другой стороны если извѣстно, что вѣроятность данному лицу погибнуть, если оно пойдетъ въ указанное мѣсто, равна 0,000001 то это лицо конечно не будетъ считаться съ этой опасностью. Изъ этого примѣра видно, что одна и та же математическая вѣроятность на практикѣ оцѣнивается различнымъ образомъ, но такая оцѣнка не можетъ разсматриваться въ теоріи вѣроятности.Теорія вѣроятности можетъ дать только величину математической вѣроятности;практическая же оцѣнка ея производится заинтересованнымъ лицомъ,въ зависимости отъ его личныхъ желаній и душевныхъ свойствъ.

§ 16.Разсмотримъ еще одинъ вопросъ,который приведетъ насъ къ особому способу выясненій вѣроятностей при помощи уравненій въ конечныхъ разностяхъ.Допустимъ,что два игрока A и B играютъ рядъ партій.Пусть вѣроятность выиграть партію для игрока A равна p, а для игрока B равна q причемъ розыгрыша быть не можетъ,такъ что $p+q=1$ Положимъ,что игрокъ A ,выигрывая партію получаетъ I рубль,такъ же,какъ и игрокъ B. Допустимъ,что въ началѣ игры у A имѣется a руб. а у B - b руб.Игра ведется до тѣхъ поръ,пока одинъ изъ игроковъ не проиграетъ всѣхъ своихъ денегъ.Мы желаемъ узнать,какова вѣроятность,что всѣ деньги въ концѣ игры будутъ напр. у A Мы предполагаемъ такимъ образомъ,что $a>0$, $b>0$ тк. кк.если бы напр. b было бы равно 0,то игра бы и не начиналась.Если игрокъ A въ результатѣ выигрываетъ,то у него оказывается $a+b$ руб ,а у B ничего.Обозначимъ черезъ P_a вѣроятность того, что игрокъ A имѣющій въ данный моментъ игры x руб. выиграетъ всю игру, такъ что въ началѣ игры вѣроятность выигрыша всей игры для игрока A есть P_a Итакъ, положимъ, что въ какой нибудь моментъ игры у игрока A имѣется x руб. Первую изъ слѣдующихъ партій игрокъ A можетъ или выиграть или проиграть. Вѣроятность выиграть эту партію для A есть p. Вѣроятность же, выигравъ эту партію, выиграть затѣмъ всю игру, есть P_{x+1} ибо у него послѣ выигрыша этой партіи будетъ $x+1$ руб. Отсюда заключаемъ, что вѣроятность выиграть эту партію и затѣмъ всю игру для игрока A равна $p.P_{x+1}$ Напротивъ, если бы игрокъ A проигралъ эту партію, то у него было бы $x-1$ руб. и вѣроятность для него выиграть послѣ этого всю игру была бы P_{x-1}. Слѣдовательно, вѣроятность проиграть партію и затѣмъ выиграть всю игру для игрока A равна $q\,P_{x-1}$. Ясно, что игрокъ A выигрываетъ всю игру только въ этихъ двухъ случаяхъ и по теор. слож. вѣр.

$$P_x = p\,P_{x+1} + q\,P_{x-1}.$$

Это и есть упомянутое выше уравненіе въ конечныхъ разностяхъ. Замѣчая, что $p+q=1$, получимъ:

$$(p+q)\,P_x = p\,P_{x+1} + q\,P_{x-1},$$

откуда

$$p(P_{x+1} - P_x) = q(P_x - P_{x-1}).$$

Пусть $P_{x+1} - P_x = z_x$. Тогда

$$p z_x = q z_{x-1}$$

откуда

$$z_x = \frac{q}{p} z_{x-1}.$$

Такимъ образомъ, числа z_x образуютъ геометрическую прогрессію. Если черезъ z_0 обозначимъ ея первый членъ, то будемъ имѣть

$$z_x = z_0 \left(\frac{q}{p}\right)^x$$

Суммируя равенства

$$P_{x+1} - P_x = z_x, \quad P_x - P_{x-1} = z_{x-1}, \quad \dots \quad P_1 - P_0 = z_0$$

получимъ

$$P_{x+1} = P_0 + z_0 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{x+1}}{1 - \frac{q}{p}}.$$

P_0 очевидно равно 0, ибо если у игрока A нѣтъ денегъ, то игра прекращается по условію и вѣроятность выиграть игру для игрока A равна 0. Остается еще опредѣлить z_0. Игрокъ A навѣрное выигрываетъ, если у него будетъ $a+b$ руб.; слѣдовательно, $P_{a+b} = 1$ т.е

$$z_0 \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}} = 1$$

и слѣдовательно

$$z_0 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Такимъ образомъ

$$P_x = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

и потому

$$\mathcal{P}_a = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

Такъ же точно найдемъ, что вѣроятность вы - играть всю игру для игрока B равна

$$Q_b = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^b}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}$$

Эти формулы непримѣнимы лишь въ случаѣ, когда $p=q$ ибо тогда онѣ становятся неопре - дѣленными. Однако, полагая $p=q$, мы легко найдемъ при помощи аналогичныхъ разсужденій, что

$$\mathcal{P}_x = \frac{x}{a+b}$$

Это же можно получить и иначе. Мы можемъ счи - тать $\mathcal{P}_x$ непрерывной функціей отъ $\frac{q}{p}$. Поэтому въ случаѣ $p=q$ мы можемъ воспользовааться извѣстнымъ изъ дифференціальнаго исчисленія правиломъ Лопиталя:

$$\lim_{p=q} \mathcal{P}_x = \lim_{p=q} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^x}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}} = \frac{\frac{d}{d\frac{q}{p}}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^x\right]}{\frac{d}{d\frac{q}{p}}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right]}\Bigg|_{p=q} =$$

$$= \frac{-x\left(\frac{q}{p}\right)^{x-1}}{-(a+b)\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b-1}}\Bigg|_{p=q}$$

т.е. $\mathcal{P}_x = \frac{x}{a+b}$ а слѣдовательно

$$\mathcal{P}_a = \frac{a}{a+b}, \quad Q_b = \frac{b}{a+b}$$

Пусть напр., $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$, $a=2$, $b=8$.

Тогда $$\mathcal{P}_a = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1024}{1023}\cdot\frac{3}{4}$$

т.е. приблизительно $\mathcal{P}_a = \frac{3}{4}$.

Можно также поставить такой вопросъ: всегда ли можно такъ распредѣлить капиталы a и b.

чтобы было $P_a = Q_b$ при любыхъ значеніяхъ p и q. Не трудно доказать, что это невозможно, если $\frac{p}{q} > 2$ или $\frac{p}{q} < \frac{1}{2}$.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНІЕ.

§ 17. Переходимъ къ разсмотрѣнію понятія о математическомъ ожиданіи и связанному съ нимъ вопросу о безобидности игръ. Положимъ, что при нѣкоторомъ опытѣ могутъ произойти событія $A_1, A_2, \dots A_k$ причемъ эти событія несовмѣстимы и единственновозможны. Пусть $p_1, p_2, \dots p_k$ будутъ вѣроятности этихъ событій, такъ что: $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ Допустимъ, что появленія событій $A_1, A_2, \dots A_k$ связаны съ нѣкоторыми числами: событіе A_1 съ числомъ x_1, событіе A_2 съ числомъ x_2, и т.д. событіе A_k съ числомъ x_k, причемъ $x_1, x_2, \dots x_k$ могутъ быть положительными или отрицательными. Эти числа мы можемъ разсматривать, кк значенія одной перемѣнной x которая принимаетъ значеніе x_i при наступленіи событія A_i. Такъ, напр., различные исходы какой-нибудь игры можно разсматривать какъ событія $A_1, A_2, \dots A_k$, а выигрыши при различныхъ исходахъ игры какого-нибудь игрока какъ числа $x_1, x_2, \dots x_k$ причемъ отрицательныя значенія x будутъ обозначать проигрыши.

Математическимъ ожиданіемъ величины X называется число

$$М. О.(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k$$

Положимъ, напр., что бросается кость; вѣроятность выпаденія каждаго изъ чиселъ I, 2.....6 будетъ $\frac{1}{6}$ Если съ каждымъ такимъ событіемъ свяжемъ самое число, которое показываетъ кость, то математическое ожиданіе числа, показываемаго костью, будетъ

$$\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \cdots + \frac{1}{6}\, 6 = \frac{7}{2}.$$

Понятіе математическаго ожиданія предполагаетъ теор.слож.вѣр. Положимъ напр., что событіе A_1 имѣющее вѣроятность p_1 состоитъ въ появленіи одного изъ двухъ событій, имѣющихъ вѣроятности π_1 и π_2. тогда мы можемъ считать, что разсматриваемый опытъ можетъ имѣть $k+1$ различныхъ исходовъ, вѣроятности которыхъ $\pi_1, \pi_2, p_2, \dots p_k$ и съ которыми связаны числа $\xi_1, \xi_2, x_2 \dots x_k$ причемъ $\xi_1 = \xi_2 = x_1$

Но тогда

$$М. О.(x) = \pi_1 \xi_1 + \pi_2 \xi_2 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k$$

Съ другой стороны

$$М. О.(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k$$

Слѣдовательно $p_1 x_1 = \pi_1 \xi_1 + \pi_2 \xi_2$ откуда

$$p_1 = \pi_1 + \pi_2$$

§ I8. Теорема сложенія математическихъ ожиданій.

связаны двѣ перемѣнныя величины X и Y то

$$М.О.(X+Y) = М.О.(X) + М.О.(Y)$$

безъ всякихъ ограниченій. Положимъ, что при данномъ опытѣ могутъ произойти событія A_1', A_2', ... A_k' имѣющія вѣроятности p_1', p_2' ... p_k' причемъ $\sum_1^k p_i' = 1$. Съ событіями A_i' связаны числа x_1', x_2', ... x_k'. Допустимъ, что съ другой стороны при томъ же опытѣ могутъ произойти событія A_1'', A_2'', ... A_l'', имѣющія вѣроятности p_1'', p_2'', ... p_l'' съ которыми связаны числа y_1'', y_2'', ... y_l''. Вообразимъ рядъ событій A_1, A_2, ... A_n такихъ, что при наступленіи одного изъ этихъ событій происходитъ только одно событіе изъ ряда событій A_i' и только одно событіе изъ ряда A_i''. При этомъ событія A_g и A_h мы будемъ считать за одно событіе, если наступленіе событія A_g влечетъ за собою наступленіе событій A_μ' и A_ν'' тѣхъ же, которыя происходятъ при наступленіи событія A_h. Иначе говоря, при появленіи двухъ событій изъ ряда A_1, A_2, ... A_n обязательно должны произойти два различныхъ событія или изъ ряда A_1' ... A_k' или изъ ряда A_1'', A_2'' ... A_l''. Очевидно, мы всегда можемъ образовать событія A_1, A_2, ... A_n. Пусть p_1, p_2, ... p_n будутъ вѣроятности этихъ послѣднихъ событій. Съ каждымъ событіемъ A_i будутъ связаны два числа x_i и y_i причемъ x_i равно одному изъ чиселъ $x_1', x_2' \cdots x_k'$ а y_i равно одному изъ чиселъ $y_1'', y_2'' \cdots y_l''$ Разсмотримъ какое-нибудь событіе A_λ'. При его появленіи можетъ произойти нѣсколько событій изъ ряда событій A_i ;положимъ, напр.,что могутъ произойти три событія $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$ /эти событія будутъ отличаться тѣмъ, что при ихъ наступленіи произойдутъ различныя событія изъ ряда A_i'' / Въ такомъ случаѣ $p_\lambda' = p_\alpha + p_\beta + p_\gamma$. и $x_\lambda' = x_\alpha = x_\beta = x_\gamma$ такъ что : $p_\lambda' x_\lambda' = p_\alpha x_\alpha + p_\beta x_\beta + p_\gamma x_\gamma$.

Отсюда ясно,что $M.O.(x') = M.O.(x)$ и подобнымъ же образомъ $M.O.(y'') = M.O.(y)$. Такимъ образомъ можемъ привести вопросъ къ разсмотрѣнію ряда событій $A_1, A_2, \ldots A_n$ такихъ,каждому изъ которыхъ соотвѣтствуетъ одно число изъ ряда $x_1, x_2, \cdots x_n$ и одно число изъ ряда $y_1, y_2, \cdots y_n$ Среди чиселъ x_i могутъ быть равныя,также точно какъ и среди чиселъ y_i. По самому опредѣленію математическаго ожиданія $M.O.(x'+y'') = M.O.(x+y)$. Такимъ образомъ надо доказать,что $M.O.(x+y) = M.O.(x) + M.O.(y)$. Свяжемъ съ событіями A_i числа $x_i + y_i$

тогда

$$\mathcal{M}.O.(x+y)=\sum_1^n p_i(x_i+y_i)=\sum_1^n p_ix_i+\sum_1^n p_iy_i$$

но

$$\mathcal{M}.O.(x)=\sum_1^n p_ix_i\,,\quad \mathcal{M}.O.(y)=\sum_1^n p_iy_i$$

слѣдовательно:

$$\mathcal{M}.O.(x+y)=\mathcal{M}.O.(x)+\mathcal{M}.O.(y).$$

Теорему легко обобщить для любого числа слагаемыхъ.

§ 19. Математическое ожиданіе представляетъ собою прямое расширеніе понятія о вѣроятности и въ одномъ случаѣ оно равно математической вѣроятности. Положимъ, что въ разсматриваемомъ опытѣ ожидается появленіе событія A. Каково математическое ожиданіе числа появленій этого событія въ данномъ опытѣ? Событіе A можетъ произойти или нѣтъ; въ первомъ случаѣ число появленій событія есть 1, а во второмъ - 0. Пусть p и q будутъ вѣроятности появленія и не появленія событія A тогда математическое ожиданіе числа появленій событія A будетъ равно

$$1.p+0.q=p=\text{вѣр.}/A/.$$

Итакъ, математическое ожиданіе числа появленій событія въ какомъ-нибудь опытѣ равно вѣроятности этого событія. Подобнымъ же образомъ, если N есть число появленій событія въ данномъ опытѣ, а $f(N)$ есть какая-нибудь функція обладающая тѣмъ свойствомъ, что $f(0)=0,\ f(1)=1,$

то $M.O.f(N)$ равно вѣроятности p появленія событія.

Такъ напр., $M.O.(N^1)=p$.

Найдемъ, каково математическое ожиданіе числа N появленій событія при n опытахъ, если въ отдѣльныхъ опытахъ вѣроятности появленія событія будутъ $p_1, p_2, \dots p_n$.

Пусть P_m есть вѣроятность появленія m разъ событія въ n опытахъ. Очевидно въ такомъ случаѣ

$$M.O.(N)=\sum_1^n{}_m P_m . m.$$

но можно разсуждать иначе. Математическое ожиданіе числа появленій событія въ первомъ опытѣ есть p_1 во второмъ - p_2 и т.д. Поэтому на основанiи теор. слож. матем. ож.

$$M.O.(N)=\sum_1^n{}_i p_i$$

Такимъ образомъ имѣемъ тождественно

$$\sum_1^n{}_m P_m m \equiv \sum_1^n{}_i p_i$$

Это тождество легко провѣрить. Если въ частности $p_1=p_2=\dots=p_n=p$ то

$$M.O.(N)=np.$$

Такъ какъ $P_m=\binom{n}{m}p^m q^{n-m}$ /§ 14/, то въ этомъ случаѣ имѣемъ

$$\sum_1^n{}_m \binom{n}{m}p^m q^{n-m} m \equiv np.$$

Здѣсь $p+q=1$

§ 20. Математическое ожиданіе встрѣчается въ игрѣ, ибо математическое ожиданіе выигрыша связано съ вопросомъ о безобидности игры. Пусть z есть математическое ожиданіе выигрыша игрока A. Игра называется выгодной для игрока A, если $z>0$ она называется невыгодной, если $z<0$ и безобидной, если $z=0$ На основаніи теор. слож: матем. ож. заключаемъ, что математическое ожиданіе выигрыша для нѣсколькихъ выгодныхъ игръ положительно, для невыгодныхъ - отрицательно и для безобидныхъ - равно 0. Вообще, если $z_1, z_2, \cdots$ суть математическія ожиданія выигрышей для отдѣльныхъ игръ, а R математическое ожиданіе выигрыша для всѣхъ этихъ игръ, то

$$R = z_1 + z_2 + \cdots\cdots$$

Остановимся на случаѣ безобидной игры. Положимъ, что два игрока A и B ведутъ нѣкоторую игру. Игрокъ A можетъ выиграть сумму a а игрокъ B — b. Пусть вѣроятность выиграть для перваго игрока есть p а для второго q при чемъ $p+q=1$ такъ что розыгрыша быть не можетъ. Математическое ожиданіе выигрыша игрока A есть $ap-bq$ и условіе безобидности игры будетъ $ap-bq=0$ Ясно, что математическое ожиданіе выигрыша игрока B равно математическому ожиданію выигрыша игрока A съ обратнымъ знакомъ и въ данномъ случаѣ тоже равно 0. Итакъ, условіе безобидности игры для двухъ игроковъ состоитъ въ томъ, что вѣроятности выигрышей должны быть обратно пропорціональны ожидаемымъ выигрышамъ:

$$\frac{p}{b} = \frac{q}{a}.$$

Напр., если $a=5$, $b=1$, то должно быть $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$

Допустимъ, что два игрока ведутъ безобидную игру. Эту "безобидную" игру они будутъ продолжать до тѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не проиграетъ всѣхъ своихъ денегъ. Какова вѣроятность для каждаго игрока выиграть? Пусть въ началѣ игры у перваго игрока имѣется a руб., а у второго - b руб. Вѣроятность выигрыша всей игры для перваго игрока пусть будетъ p а для второго q причемъ $p+q=1$ Тогда если въ концѣ игры выигрываетъ первый игрокъ, то онъ всего получаетъ b руб., а если выигрываетъ второй, то онъ /второй/ получаетъ a руб. Такъ какъ игра безобидна, то математическое ожиданіе выигрыша каждой отдѣльной партіи для каждаго игрока равно 0. Поэтому и математическое ожиданіе выигрыша всей игры для каждаго игрока равно 0; но математическое ожиданіе выигрыша всей игры, напр., для перваго игрока равно $pb-qa$ и потому $pb-qa=0$

Откуда:

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b}$$

—вѣроятности относятся какъ капиталы, которыми игроки располагаютъ въ началѣ игры.

§ 21. Теорема умноженія математическихъ ожиданій. Если x и y есть двѣ независимыя между собою величины, то

$$M.O.(xy)=M.O.(x)\,.\,M.O.(y).$$

Пусть $x_1, x_2, \dots x_n$ суть значенія, которыя можетъ принимать величина x при различныхъ исходахъ разсматриваемаго опыта, а $p_1, p_2 \dots p_n$ вѣроятности того, что x приметъ одно изъ этихъ значеній. Пусть далѣе y можетъ принимать значенія $y_1, y_2, \dots y_m$ а $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_m$ пусть будутъ соотвѣтственныя вѣроятности этихъ значеній. Тогда

$$M.O.(x)=\sum_1^n p_i x_i\ ,\ M.O.(y)=\sum_1^m \pi_i y_i$$

Обстоятельство, что числа x и y независимы, надо понимать такъ, что если одно изъ перемѣнныхъ x и y приметъ какое-нибудь значеніе, то вѣроятности значеній другого перемѣннаго не измѣнятся. Число xy можетъ прини -

мать $n.m$ слѣдующихъ значенiй:

$$x_1 y_1, \ x_1 y_2, \ x_2 y_1, \ldots \ldots x_n y_m$$

Вѣроятности, соотвѣтствующiя этимъ числамъ, будутъ:

$$p_1 \pi_1, \ p_1 \pi_2, \ p_2 \pi_1, \ldots \ldots p_n \pi_m.$$

и ихъ сумма равна I. Слѣдовательно:

$$M.O.(xy) = \sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_j p_i \pi_j x_i y_j$$

Но ясно, что

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_j p_i \pi_j x_i y_j = \sum_1^n{}_i \left[p_i x_i \sum_1^m{}_j \pi_j y_j \right] =$$

$$= \sum_1^n{}_i p_i x_i \cdot \sum_1^m{}_i \pi_i y_i$$

Слѣдовательно $M.O.(xy) = M.O.(x) \cdot M.O.(y).$

ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА И ЕЯ СЛѢДСТВIЯ.

§ 22. Переходимъ теперь къ доказательству чрезвычайно важной теоремы Чебышева. Предварительно докажемъ такъ называемую л е м м у Чебышева: допустимъ, что величина x можетъ быть только положительной или нулемъ и пусть $M.O.(x) = A$. Въ такомъ случаѣ вѣроятность p того, что $x \leq At^2$ гдѣ t - произвольное число будетъ больше, чѣмъ $1 - \frac{1}{t^2}$

Для $|t|$ меньше единицы это ясно изъ того, что въ этомъ случаѣ $1 - \frac{1}{t^2} < 0$ а по самому опредѣленiю вѣроятности всегда $p \geq 0$. Итакъ, пусть $|t| \geq 1$ Допустимъ, что x можетъ принимать значенiя $x_1, x_2 \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n \ldots$

Этотъ рядъ можетъ быть конечнымъ или безконечнымъ. Мы всегда можемъ предположить, что числа x_i расположены въ возрастающемъ порядкѣ, так что

$$x_1 \geq 0, \quad x_i > 0 \quad (i = 2, 3, \dots)$$

По опредѣленію:

$$A = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n + \dots$$

гдѣ $p_1, p_2 \dots p_n \dots$ суть вѣроятности отдѣльныхъ значеній $x_1, x_2, \dots x_n \dots$. Мы предположили, что числа x_i расположены въ возрастающемъ порядкѣ и что они образуютъ исчислимую совокупность. Послѣднее обстоятельство можетъ не имѣть мѣста, но, какъ выяснится изъ хода доказательства, въ случаѣ неисчислимой совокупности теорема можетъ быть доказана почти также, какъ и въ случаѣ исчислимой совокупности. Положимъ, что всѣ значенія x до x_m включительно удовлетворяютъ неравенству $x_i \leq At^2$ и для $i > m$ имѣемъ $x_i > At^2$. Такъ какъ вообще $x \geq 0$ то

$$A \geq p_{m+1} x_{m+1} + p_{m+2} x_{m+2} + \dots + p_n x_n + \dots$$

Знакъ равенства имѣетъ мѣсто, если $m = 0$ или если $m = 1$ а $x_1 = 0$ Такъ какъ при $i > m$, $x_i > At^2$ то, замѣняя въ послѣднемъ неравенствѣ $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n, \dots$ черезъ меньшую величину At^2 получимъ: $A > At^2 [p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_n + \dots]$

а такъ какъ $X>0$ и слѣдовательно $A>0$ то

$$1>t^2[p_{m+1}+p_{m+2}+\cdots+p_n+\cdots]$$

Вѣроятность того, что $X\leq At^2$ равна вѣроятности, что X получитъ одно изъ значенiй $x_1, x_2, \cdots x_m$ т.е. равна

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_m$$

Напротивъ, вѣроятность, что $X>$ будетъ больше At^2 есть

$$1-p=p_{m+1}+p_{m+2}+\cdots+p_n+\cdots$$

Такимъ образомъ $1>t^2[1-p]$, откуда $p>1-\frac{1}{t^2}$

Положимъ теперь, что мы выбираемъ такiя перемѣнныя величины X что $M.O(X)=A$ стремится къ нулю. Пусть ε и η будутъ произвольно малыя фиксированныя числа. Можно всегда удовлетворить условiямъ, чтобы было $At^2=\varepsilon$ и $\frac{1}{t^2}<\eta$. Для этого беремъ $t^2=\frac{\varepsilon}{A}$ и $\frac{1}{t^2}=\frac{A}{\varepsilon}<\eta$ т.е. $A<\varepsilon\eta$. Тогда вѣроятность, что X будетъ меньше либо равно ε т.е. будетъ какъ угодно мало, будетъ больше, чѣмъ $1-\eta$ т.е. будетъ какъ угодно близка къ достовѣрности.

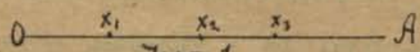
Отсюда заключаемъ слѣдующее. Положимъ, что имѣемъ рядъ неизвѣстныхъ намъ величинъ $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$ относительно которыхъ намъ извѣстно, что

$$M.O.(\alpha_m^2)\underset{m=\infty}{\to} 0.$$

Въ такомъ случаѣ вѣроятность, что будетъ $|\alpha_m|\leq\varepsilon$ будетъ какъ угодно близка къ достовѣрности, когда $m \to \infty$. Вмѣсто x^2 можно взять любую непрерывную функцію $f(x)$ такую, что

$f(x) \geq 0$ и $f(0) = 0$.

§ 23. Предыдущіе выводы имѣютъ примѣненіе въ біологіи именно въ теоріи наслѣдственности. Положимъ, что имѣемъ на прямой OA /черт. 1/



Черт. 1

какое нибудь распредѣленіе точекъ $x_1, x_2, \dots x_m \dots$ и пусть $A = M.O.(x)$. Пусть $p_1, p_2, \dots p_m \dots$ будутъ вѣроятности соотвѣтствующія числамъ $x_1, \dots x_m, \dots$ Распредѣленіе $p_1, p_2 \dots p_m \dots$ будетъ называться закономъ распредѣленія вѣроятностей. Образуемъ новое число:

$$y = \frac{ax' + bx''}{a+b}$$

гдѣ a и b суть постоянныя положительныя числа, x', x'' суть два какія-нибудь значенія изъ ряда $x_1, x_2 \dots x_m, \dots$ Если мы составимъ всѣ возможныя комбинаціи по два изъ чиселъ $x_1, x_2 \dots x_m \dots$ то получимъ новый рядъ чиселъ $y_1, y_2 \dots$ При этомъ:

$$M.O.(y) = M.O.\left(\frac{ax' + bx''}{a+b}\right) = M.O.\left(\frac{ax'}{a+b}\right) + M.O.\left(\frac{bx''}{a+b}\right) =$$

$$= \frac{a}{a+b} M.O.(x') + \frac{b}{a+b} M.O.(x'') = A,$$

потому что $M.O.(x') = M.O.(x'') = M.O.(x)$.

Изъ чиселъ $y_1, y_2, \dots$ составимъ опять новое число z такимъ же способомъ, какъ составлено y изъ ряда $x_1, x_2, \dots$ т.е. положимъ:

$$z = \frac{a_1 y' + b_1 y''}{\dots}$$

Получимъ новый рядъ чиселъ $x_1, x_2, \dots$ для котораго $M.O.(x) = A$. Изъ чиселъ $x_1, x_2 \dots$ составимъ новое число по тому же способу и т.д.Такимъ образомъ мы получимъ рядъ

$$x,\ y,\ z,\ \dots\dots\ u,\ \dots \qquad (1)$$

обладающій тѣмъ свойствомъ,что

$$M.O.(x) = M.O.(y) = \dots = M.O.(u) = \dots = A.$$

Покажемъ,что если взять достаточно удаленный членъ ряда u ,то вѣроятность,что u будетъ имѣть значеніе весьма близкое къ A будетъ весьма близка къ достовѣрности.Назовемъ отклоненіемъ числа x разность $x-A$ Составимъ мат.ожид.квадрата отклоненія числа x т.е. $M.O.(x-a)^2$. Назовемъ его черезъ B, причемъ B есть величина конечная.Возьмемъ достаточно удаленный членъ ряда /I/ u и докажемъ,что $M.O.(u-A)^2 = 0$ Тогда по предыдущему будетъ $\lim(u-A) = 0$ или

$$\lim u = A.$$

Мы имѣемъ:

$$M.O.(y-A)^2 = M.O.\left(\frac{ax'+bx''}{a+b} - A\right)^2 = M.O.\left[\frac{a(x'-A)+b(x''-A)}{a+b}\right]^2 =$$

$$= M.O.\left[\frac{a^2(x'-A)^2 + b^2(x''-A)^2 + 2ab(x'-A)(x''-A)}{(a+b)^2}\right] =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} M.O.(x-A)^2 = B\left[1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}\right],$$

ибо

$$M.O.[(x'-A)(x''-A)] = M.O.(x'-A)\,M.O.(x''-A) =$$

$$= [M.O.(x') - A][M.O.(x'') - A] = 0.$$

Итакъ,

$$M.O.(y-A)^2 = B\left[1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}\right]$$

Отсюда заключаемъ, что

$$M.O.(z-A)^2 = B\left[1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}\right]\left[1 - \frac{2a_1b_1}{(a_1+b_1)^2}\right] \text{ и т.д.}$$

Полагая $1 - \frac{2a_ib_i}{(a_i+b_i)^2} = q_i$, будемъ имѣть $q_i < 1$, и

$$M.O.(u-A)^2 = q\cdot q_1 q_2 \cdots B.$$

Допустимъ, что числа q_i ограничены справа числомъ $Q<1$ Тогда

$$M.O.(u-A)^2 < Q^\lambda B$$

и при $\lambda \to \infty$ будетъ

$$\lim M.O.(u-A)^2 = 0.$$

При такихъ процессахъ слѣдовательно, которыя сходны съ процессомъ образованія чисел $x, y, z, \dots u, \dots$ устанавливается устойчивый типъ, характеризуемый числомъ A и отклоненія отъ A мало вѣроятно. Эта именно точка зрѣнія даетъ возможность примѣнить исчисленіе вѣроятностей къ теоріи наслѣдственности. /Систематическое примѣненіе теоріи вѣроятности къ біологіи сдѣлало крупные успѣхи подъ вліяніемъ Пирсона/.

§ 24. Н е р а в е н с т в о Ч е б ы ш е в а. Если имѣемъ рядъ независимыхъ величинъ $x, y, z, \dots$ если $a, b, c, \dots$ суть ихъ математическія ожиданія, $a_1, b_1, c_1, \dots$

математическія ожиданія ихъ квадратовъ и если t есть произвольное положительное число, то вѣроятность неравенства

$$\left|(x+y+z+\cdots) - (a+b+c+\cdots)\right| \leq t\sqrt{a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \cdots}$$

будетъ больше, чѣмъ $1 - \frac{1}{t^2}$

Неравенство Чебышева эквивалентно такому неравенству

$$[(x+y+z+\cdots) - (a+b+c+\cdots)]^2 \leq t^2[a_1 - a^2 + b_1 - b^2 + \cdots]$$

Вычислимъ математическое ожиданіе μ величины

$$[(x+y+z+\cdots) - (a+b+c+\cdots)]^2$$

Мы имѣемъ

$$\mu = M.O.[(x-a)+(y-b)+(z-c)+\cdots]^2 = M.O.(x-a)^2 +$$
$$+ M.O.(y-b)^2 + M.O.(z-c)^2 + \cdots + 2M.O.(x-a)M.O.(y-b) + \cdots$$

но

$$M.O.(x-a)M.O.(y-b) = [M.O.(x)-a][M.O.(y)-b] = 0, \ldots$$

Слѣдовательно

$$\mu = S\, M.O.(x-a)^2$$

гдѣ знакъ S указываетъ, что надо взять сумму величинъ аналогичныхъ $(x-a)^2$. Что касается $M.O.(x-a)^2 = M.O.[(x-a)(x-a)]$ то оно не равно $[M.O.(x-a)]^2$ потому, что $x-a$ въ первомъ и во второмъ множителяхъ суть величины зависимыя. Но легко видѣть, что $M.O.(x-a)^2 = a_1 - a^2$. Въ самомъ дѣлѣ:

$$M.O.(x-a)^2 = M.O.(x^2) - 2a\, M.O.(x) + a^2 =$$

Изъ этого между прочимъ слѣдуетъ, что если $x \neq a$ то, такъ какъ $M.O.(x-a)^2 > 0$, имѣется мѣсто неравенство $a_1 > a^2$. Такимъ образомъ

$$\mu = S(a_1 - a^2)$$

и потому вѣроятность, что будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\left[(x+y+z+\ldots)-(a+b+c+\ldots)\right]^2 \leq t^2(a_1-a^2+b_1-b^2+c_1-c^2\ldots)$$

или эквивалентное ему неравенство Чебышева будетъ больше, чѣмъ $1-\frac{1}{t^2}$.

Допустимъ теперь, что числа $a_1, b_1, c_1, \ldots$ не превосходятъ нѣкотораго числа L. Пусть n есть число величинъ $x, y, z, \ldots$. Докажемъ, что съ вѣроятностью сколь угодно близкой къ достовѣрности можно утверждать, что при n достаточно большомъ среднее ариѳметическое чиселъ $x, y, z, \ldots$ будетъ какъ угодно близко къ среднему ариѳметическому чиселъ $a, b, c, \ldots$, т.е. что будетъ имѣть мѣсто неравенство:

$$\left|\frac{x+y+z+\ldots}{n} - \frac{a+b+c+\ldots}{n}\right| \leq \varepsilon.$$

Въ самомъ дѣлѣ правая часть неравенства Чебышева меньше чѣмъ $t\sqrt{Ln}$.

Поэтому вѣроятность неравенства

$$\left|(x+y+z+\ldots)-(a+b+c+\ldots)\right| \leq t\sqrt{Ln}$$

т.е. неравенства

$$\left|\frac{x+y+z+\ldots}{n} - \frac{a+b+c+\ldots}{n}\right| \leq t\sqrt{\frac{L}{n}}$$

будетъ больше, чѣмъ $1-\frac{1}{t^2}$. Поэтому достаточно будетъ взять $t\sqrt{\frac{L}{n}}=\varepsilon$ и $\frac{1}{t^2}<\eta$, гдѣ η весьма малое положительное число. Находимъ $t^2=\frac{n\varepsilon^2}{L}>\frac{1}{\eta}$, откуда $n>\frac{L}{\eta\varepsilon^2}$. Итакъ, чтобы выполнилось указанное неравенство, надо взять

$$t>\frac{1}{\sqrt{\eta}},\quad n>\frac{L}{\eta\varepsilon^2}.$$

Это есть та форма теоремы, которая дана была самимъ Чебышевымъ.

§ 25. Изъ послѣдняго предложенія вытекаетъ правило средняго ариѳметическаго. Положимъ, что измѣряя какую-нибудь величину мы въ различныхъ опытахъ получили различныя числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Въ такомъ случаѣ мы принимаемъ за наиболѣе точное значеніе наблюдаемой величины среднее ариѳметическое $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если только произведенныя отдѣльныя наблюденія одинаково цѣнны. Пусть a будетъ точное значеніе наблюдаемой величины. Разность x_i-a есть ошибка въ i-омъ опытѣ. Допустимъ, что ошибка Δ_i также вѣроятна, какъ и ошибка $-\Delta_i$. Иными словами мы предполагаемъ отсутствіе систематическихъ ошибокъ. Другое допущеніе состоитъ въ томъ, что $|\Delta_i|$ не можетъ превышать опредѣленнаго предѣла. Послѣднее на практикѣ всегда быва -

етъ выполнено. Въ такомъ случаѣ при достаточно большомъ числѣ n наблюденій среднее ариѳметическое всѣхъ наблюденныхъ чиселъ будетъ отличаться отъ истинной величины a какъ угодно мало. Докажемъ во-первыхъ, что математическое ожиданіе числа x равно a /подъ x мы разумѣемъ вообще возможныя значенія наблюденной величины въ какомъ-либо опытѣ/. Очевидно

$$M.O.(x-a) = \sum p^{(k)}(x^{(k)}-a)$$

гдѣ $p^{(k)}$ есть вѣроятность того, что x приметъ значеніе $x^{(k)}$. Но мы предполагали, что $x-a$ можетъ съ одинаковой вѣроятностью принять значеніе какъ $x^{(k)}-a$ такъ и $-(x^{(k)}-a)$. Поэтому

$$\sum p^{(k)}(x^{(k)}-a)=0,$$

такъ какъ каждому члену $p^{(k)}(x^{(k)}-a)$ въ суммѣ $\sum$ будетъ соотвѣтствовать членъ $-p^{(k)}(x^{(k)}-a)$. Слѣдовательно, $M.O.(x-a)=0$ откуда $M.O.(x)=a$. Далѣе, числа $x_1, x_2, \ldots x_n$ ограничены, т.е.

$$|x_1|, |x_2|, \ldots\ldots |x_n| < L;$$

поэтому

$$|M.O.(x^2)| = \left|\sum px^2\right| < L^2\left|\sum p\right| = L^2$$

Слѣдовательно, мы можемъ примѣнить теорему Чебышева и сказать, что при достаточно большомъ n будетъ имѣть мѣсто неравенство ибо здѣсь среднее ариѳметическое математическихъ ожиданій чиселъ x для n опытовъ равно $\frac{na}{n}=a$.

§ 26. Изъ теоремы Чебышева вытекаетъ еще одно чрезвычайно важное слѣдствіе - теорема Пуассона /или законъ большихъ чиселъ въ узкомъ смыслѣ/. Допустимъ, что имѣемъ рядъ независимыхъ опытовъ. При каждомъ опытѣ ожидается появленіе событія A. Вѣроятность его появленія въ i-омъ опытѣ есть p_i, а вѣроятность непоявленія - q_i. Всего производится n опытовъ. Если n достаточно велико, то можно утверждать съ вѣроятностью какъ угодно близкой къ достовѣрности, что отношеніе $\frac{m}{n}$ числа m опытовъ, въ которыхъ произошло событіе A, къ общему числу опытовъ n отличается сколь угодно мало отъ средней ариѳметической всѣхъ вѣроятностей, т.е. вѣроятность неравенства

$$\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+\dots+p_n}{n}\right|<\varepsilon$$

какъ угодно близка къ единицѣ.

Пусть x_i есть число появленій событія A въ i-омъ опытѣ, такъ что x_i принимаетъ значенія I и 0. Тогда $M.O.(x_i)=p_i$ и $x_1+x_2+\dots+x_n=m$. По теоремѣ Чебышева слѣдовательно,для достаточно большого,вѣроятность неравенства

будетъ произвольно близкой къ достовѣрн.

При этомъ математическія ожиданія квадратовъ чиселъ X_i ограничены,ибо $M.O.(x_i^2)=p_i\leq 1$. Частнымъ случаемъ этой теоремы является т е о р е м а Я к о в а Б е р н у л л и, которая есть первая по времени изъ формулировокъ закона большихъ чиселъ.Она опубликована вскорѣ послѣ смерти Якова Бернулли въ 1713 г.Положимъ,что $p_1=p_2=\cdots=p_n=p$. Тогда при n достаточно большомъ вѣроятность неравенства

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$$

будетъ какъ угодно близка къ I,т.е.при достаточно большомъ числѣ повтореній одного и того же опыта сколь угодно близко къ достовѣрности,что отношеніе числа появленій событія A къ общему числу опытовъ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ вѣроятности появленія событія A въ каждомъ отдѣльномъ опытѣ.Легко опредѣлить то значеніе n , для котораго вѣроятность неравенства $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ будетъ больше напередъ заданнаго числа $1-\eta$.

Мы не будемъ на этомъ останавливаться.

§ 27. Приложимъ предыдущіе выводы къ теоріи азартныхъ игръ. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что если выгодная игра продолжается достаточно долго, то она заканчивается какъ угодно большимъ выигрышемъ. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ суть выигрыши въ каждой отдѣльной игрѣ. Предположимъ, что математическія ожиданія квадратовъ этихъ выигрышей ограничены, что будетъ напр., если ограничены сами эти выигрыши, на практикѣ это всегда выполняется. Пусть $M.O.(x_i)=a_i$. По теоремѣ Чебышева при n достаточно большомъ весьма вѣроятно будетъ неравенство

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\varepsilon.$$

Такъ какъ игра выгодная, то $a_i>0$ и потому

$$\gamma=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>0.$$

Такимъ образомъ при n достаточно большомъ

$$-\varepsilon<\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\gamma<\varepsilon$$

откуда

$$n(\gamma-\varepsilon)<x_1+x_2+\cdots+x_n<n(\gamma+\varepsilon)$$

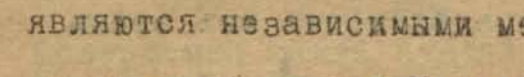
Такъ какъ $\gamma>0$, то взявъ $\varepsilon<\gamma$ достигнемъ того, что оба предѣла $n(\gamma-\varepsilon)$ и $n(\gamma+\varepsilon)$ будутъ стремиться къ безконечности. Поэтому и $\lim\limits_{n=\infty}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\infty$, т.е. общій выигрышъ при достаточно большомъ числѣ игръ превзойдетъ всякое число съ очень большой вѣроятностью.

§ 28. Мы все время предполагали, что числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ независимы. Если это не имѣетъ мѣста, то всѣ предыдущіе выводы могутъ стать невѣрны. Разсмотримъ примѣръ, когда теорема Бернулли не имѣетъ мѣста, если отдѣльные опыты зависимы между собой. Положимъ, что въ двухъ урнахъ лежатъ шары: въ урнѣ A - бѣлые, а въ урнѣ B — черные, при томъ въ одинаковыхъ количествахъ. Вѣроятность вынуть изъ одной изъ этихъ урнъ напр. бѣлый шаръ есть $\frac{1}{2}$ и по теоремѣ Бернулли при n достаточно большомъ должно быть $\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, гдѣ n есть число всѣхъ опытовъ, а m - число появленій бѣлаго шара. Но иначе будетъ обстоять дѣло, если мы будемъ вынимать все время изъ одной и той же урны. Тогда если первый разъ былъ вынутъ шаръ изъ урны A /бѣлый/, то все время будутъ появляться бѣлые шары и $\frac{m}{n} = 1$; если же первый разъ шаръ былъ вынутъ изъ урны B то $\frac{m}{n} = 0$. Вѣроятность же вынуть шаръ въ каждомъ отдѣльномъ опытѣ /при условіи, что мы не знаемъ, изъ какой урны производится выниманіе/ равна $\frac{1}{2}$. Ясно, что въ этомъ случаѣ теорема Бернулли не имѣетъ мѣста. Это происходитъ потому, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ событіями зависимыми; отъ того, изъ какой урны будетъ вынутъ первый шаръ, зависятъ результаты послѣдующихъ опытовъ

Разсмотрѣніемъ условій распространенія закона большихъ чиселъ на опыты, которые не являются независимыми между собой, занимался въ особенности Марковъ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКІЯ ВѢРОЯТНОСТИ.

§ 29. Геометрическими называются вѣроятности событій, при которыхъ совокупности всѣхъ возможныхъ случаевъ представляютъ собой совокупности непрерывныя. Поставимъ такой основной вопросъ: имѣемъ отрѣзокъ прямой AB /черт.2/.



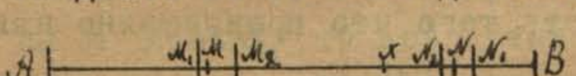
Черт. 2.

Внутри этого отрѣзка точки M и N; какова вѣроятность того, что произвольно взятая точка X отрѣзка AB окажется внутри отрѣзка MN ? Чтобы опредѣлить вѣроятность въ этомъ вопросѣ мы введемъ нѣкоторое соглашеніе. Допустимъ, что вѣроятности того, что точка X будетъ лежать вправо или влѣво отъ середины O отрѣзка AB одинаковы. Это же допущеніе мы сдѣлаемъ относительно отрѣзковъ AO, OB и вообще для любого отрѣзка. Такимъ образомъ, если раздѣлимъ отрѣзокъ AB напр. на

4 равные отрѣзки, то вѣроятность, что точка X будетъ лежать въ одномъ опредѣленномъ отрѣзкѣ изъ этихъ 4-хъ будетъ равна $\frac{1}{4}$ *). Если раздѣлимъ отрѣзокъ AB на 2^n равныхъ частей, то вѣроятность, что точка X будетъ лежать въ одномъ опредѣленномъ изъ этихъ 2^n отрѣзковъ будетъ равна $\frac{1}{2^n}$. Допустимъ, что мы раздѣлили отрѣзокъ AB на 2^n равныхъ частей и допустимъ, что точки M и N совпадаютъ съ какими-нибудь двумя изъ точекъ дѣленія. Если въ отрѣзкѣ MN будетъ K такихъ частей, то вѣроятность того, что точка X будетъ лежать въ отрѣзкѣ MN равна

$$\frac{K}{2^n} = \frac{MN}{AB}.$$

Положимъ теперь, что точки M и N не совпадаютъ съ точками дѣленія /черт.3/. Пусть



Черт. 3.

M_1M_2 будетъ отрѣзокъ, происшедшій отъ дѣленія отрѣзка AB на 2^n частей и заключающій точку M, а N_1N_2 — такой же отрѣзокъ, заключающій точку N. Тогда вѣроятность p того, что точка X будетъ находиться въ отрѣзкѣ MN будетъ меньше вѣроятности того,

---

*) Вѣроятность того, что точка X будетъ лежать внутри отрѣзка AB какъ вѣроятность достовѣрнаго событія мы принимаемъ равной единицѣ

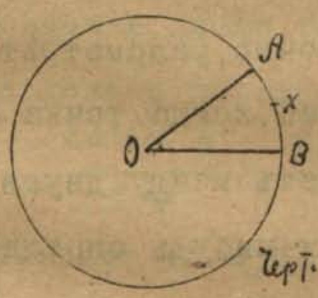
что она окажется въ отрѣзкѣ M_1N_1 и будетъ больше вѣроятности того, что она окажется въ отрѣзкѣ M_2N_2 /аксіома 2^0 /. Такимъ образомъ

$$\frac{M_1N_1}{AB} > p > \frac{M_2N_2}{AB}$$

а въ предѣлѣ, при $n = \infty$,

$$p = \frac{MN}{AB}.$$

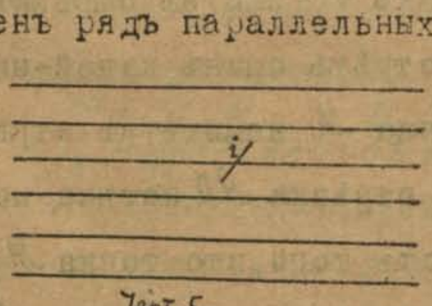
Совершенно также будетъ опредѣляться при аналогичныхъ соглашеніяхъ вѣроятность для случая дугъ окружности и угловъ. Вѣроятность того, что точка X взятая на окружности O /черт. 4/



Черт. 4.

радіуса R окажется на дугѣ AB будетъ равна $\frac{AB}{2\pi R}$. Вѣроятность того, что точка X взятая въ данной плоскости, будетъ заключаться внутри даннаго угла θ будетъ равна $\frac{\theta}{2\pi}$ причемъ θ выражено въ радіальной мѣрѣ.

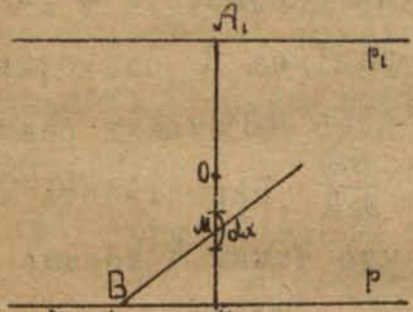
§ 30. Задача Бюффона. На совершенно гладкой горизонтальной плоскости начерченъ рядъ параллельныхъ прямыхъ /черт 5/, отстоящихъ на равныхъ



Черт. 5.

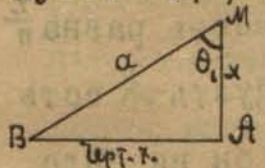
разстояніяхъ другъ отъ друга. На эту плоскость бросаютъ иглу i; длина иглы равна $2a$, а разстояніе между параллельными прямыми равно $2l$. Какова вѣроятность, что игла пересѣчетъ одну изъ параллельныхъ прямыхъ?

Допустимъ сначала $a < l$ такъ что игла можетъ пересѣчь только одну изъ параллельныхъ линій. Мы допустимъ во-первыхъ, что середина M иглы /черт.6/ съ одинаковой вѣроятностью можетъ попасть въ тотъ или другой промежу - токъ между параллельными линіями. Поэтому для



Черт. 6.

рѣшенія вопроса достаточно разсмотрѣть случай, когда точка M упадетъ между двумя какими-нибудь опредѣленными линіями, напр. p и p_1. Черезъ точку M проведемъ перпендикуляръ AA_1 къ прямымъ p и p_1. Пусть O есть середина отрѣзка AA_1. Мы принимаемъ, что точка M съ одинаковой вѣроятностью можетъ лежать въ отрѣзкѣ AO или въ отрѣзкѣ OA_1. Намъ достаточно разсмотрѣть одинъ какой-нибудь случай, напр., когда точка M лежитъ въ отрѣзкѣ AO. Возьмемъ внутри отрѣзка AO весьма малый отрѣзокъ dx. Вѣроятность того, что точка M будетъ лежать внутри этого промежутка есть $\frac{dx}{l}$. Послѣ того, какъ положеніе точки M задано, игла можетъ еще имѣть различныя направленія. Опредѣлимъ для какихъ значеній $x = AM$ и $\theta = \angle AMB$ игла будетъ пересѣкать линію p. Пусть θ_1 /черт.7/ есть наибольшее значе-



ніе угла θ для даннаго x, при которомъ еще происходитъ пересѣченіе, такъ что $MB = a$. Тогда изъ Δ -ка MAB находимъ

$$\theta_1 = \arccos\frac{x}{a}.$$

Такъ какъ точка B можетъ упасть какъ справа такъ и слѣва отъ точки A, то вѣроятность пересѣченія послѣ того какъ точка M заняла опредѣленное положеніе будетъ равна

$$\frac{2\arccos\frac{x}{a}}{2\frac{\pi}{2}} = \frac{2\arccos\frac{x}{a}}{\pi}.$$

Вѣроятность того, что точка M будетъ находиться въ отрѣзкѣ dx и, что при этомъ игла пересѣчетъ линію p будетъ по теор. умнож. вѣр. равна

$$\frac{dx}{l}\cdot\frac{2\arccos\frac{x}{a}}{\pi}$$

а полная вѣроятность будетъ выражаться опредѣленнымъ интеграломъ

$$\int_0^a \frac{2\arccos\frac{x}{a}}{\pi l}\,dx = \frac{2}{\pi l}\int_0^a \arccos\frac{x}{a}\,dx.$$

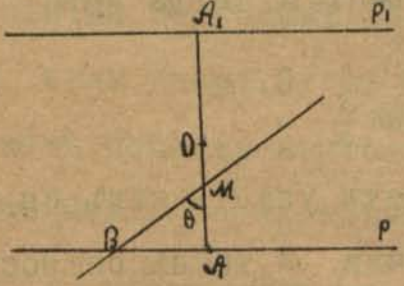
При этомъ верхнимъ предѣломъ интеграціи служитъ a т.к. если $x > a$ то игла навѣрное не пересѣчетъ линію p. Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int_0^a \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a}\Big|_0^a + \int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a = a$$

и значитъ искомая вѣроятность равна

$$\frac{2a}{\pi l}.$$

Въ частности при $a=l$ вѣроятность равна $\frac{2}{\pi}$.
Предположимъ теперь, что $a>l$. Пусть M есть середина иглы /черт. 8/. Каково бы ни было



Черт. 8

ея положенiе, вѣроятность, что уголъ AMB будетъ заключаться между θ и $\theta+d\theta$ будетъ равна $\frac{d\theta}{\pi}$. Если будетъ $\angle AMB \leq \arccos\frac{l}{a}$, то, какъ легко видѣть, пересѣченiе будетъ происходить при всякомъ положенiи точки M. Положимъ теперь, что $\angle AMB > \arccos\frac{l}{a}$. Обозначая черезъ x отрѣзокъ AM имѣемъ: $x = MB\cos\theta$. Если въ этомъ случаѣ игла будетъ пересѣкать прямую p, то должно быть $MB \leq a$ и слѣдовательно $x \leq a\cos\theta$. Вѣроятность того, что будетъ $\theta \leq \arccos\frac{l}{a}$ есть

$\dfrac{\arccos\frac{l}{a}}{\frac{\pi}{2}}$; но такъ какъ точка B можетъ лежать съ обѣихъ сторонъ относительно A, то вѣроятность того, что игла приметъ такое направленiе, при которомъ она обязательно будетъ пересѣкать прямую p равна

$$\frac{2\arccos\frac{l}{a}}{2\frac{\pi}{2}} = \frac{2\arccos\frac{l}{a}}{\pi}.$$

Вѣроятность, что θ приметъ значенiе среднее

между θ и $\theta + d\theta$ равна $\frac{2d\theta}{\pi}$ / $\theta > \arccos \frac{l}{a}$ /.
Чтобы при этомъ значенiи θ имѣло мѣсто пересѣченiе необходимо, чтобы было $x \leq a \cos\theta$. Вѣроятность этого есть $\frac{a\cos\theta}{l}$. Поэтому вѣроятность того, что уголъ AMB будетъ заключаться между θ и $\theta + d\theta$ и, что при этомъ значенiи угла произойдетъ пересѣченiе, будетъ равна

$\frac{2a\cos\theta}{\pi l} d\theta$ /здѣсь $\theta > \arccos \frac{l}{a}$ /.

Мы должны слѣдовательно это выраженiе интегрировать въ предѣлахъ отъ $\arccos \frac{l}{a}$ до $\frac{\pi}{2}$. Получимъ:

$$\int_{\arccos\frac{l}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\cos\theta}{\pi l} d\theta = \frac{2a}{\pi l} \sin\theta \Big|_{\arccos\frac{l}{a}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi l} - \frac{2a}{\pi l}\sqrt{1-\frac{l^2}{a^2}} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{l} - \sqrt{\frac{a^2}{l^2}-1}\right).$$

Поэтому искомая вѣроятность будетъ равна

$$\frac{2}{\pi}\left(\arccos\frac{l}{a} + \frac{a}{l} - \sqrt{\frac{a^2}{l^2}-1}\right).$$

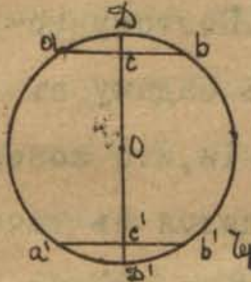
Цюрихскiй астрономъ Вольфъ производилъ опыты съ бросанiемъ иглы. Въ его опытахъ разстоянiе между параллельными прямыми было равно 45 mm. а длина бросаемой иглы -36 mm. Вѣроятность пересѣченiя иглы съ одной изъ прямыхъ была поэтому равна $\frac{2.36}{45\pi} = 0,5093.....$
Было произведено 5000 бросанiй, причемъ 2532 раза произошло пересѣченiе, а 2468 пересѣченiя не было. Принимая на основанiи теоремы Бернулли отношенiе $\frac{2532}{5000} = 0,5064$ за вѣроятность пересѣченiя можно приближенно опре-

дѣлить число π изъ равенства

$$\frac{72}{45\pi}=\frac{2532}{5000}.$$

Изъ этого уравненія π опредѣляется съ точностью до 0,02.

§ 31. Когда мы принимаемъ, что вѣроятность попаданія точки внутри даннаго отрѣзка пропорціональна длинѣ этого отрѣзка, то мы этимъ вводимъ предположеніе равномѣрнаго распредѣленія вѣроятности на прямой. Для безконечныхъ прямыхъ предположеніе о указанной пропорціональности не имѣетъ смысла, т.к. знаменатель дроби, представляющей вѣроятность, будетъ ∞. Но въ нѣкоторыхъ случаяхъ и для конечныхъ прямыхъ приходится допускать иныя предположенія о распредѣленіи вѣроятности. Наконецъ, бываютъ случаи, когда приходится вводить тѣ или иныя предположенія о вѣроятности помимо предположенія о равномѣрномъ распредѣленіи ея, такъ какъ одинъ только фактъ равномѣрнаго распредѣленія не всегда даетъ возможность установить какіе случаи надо считать равновозможными. Такимъ образомъ вычисляя вѣроятность при различныхъ допущеніяхъ /т.е. дѣлая различныя предположенія о равновозможныхъ случаяхъ, хотя и сохраняя равномѣрное распредѣленіе вѣроятности/ мы можемъ получить различные результаты. Это впервые было указано Бертраномъ. Положимъ, что имѣемъ кругъ O /черт. 9/,



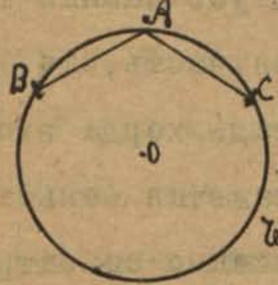
черт. 9.

имѣющій радіусъ равный I. Какова вѣроятность, что взятая наугадъ хорда этого круга окажется меньше радіуса? Такъ какъ кругъ совершенно симметриченъ относительно всякаго діаметра, то достаточно разсмотрѣть хорды, сопряженныя съ какимъ нибудь однимъ діаметромъ напр. $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$. Пусть ab есть сторона правильно вписаннаго 6-угольника, такъ что $ab=1$ и пусть $ab \perp \mathfrak{D}\mathfrak{D}'$. Если хорда будетъ меньше I, то ея середина должна лежать въ отрѣзкѣ $c\mathfrak{D}$, а если она будетъ больше I, то ея середина будетъ въ отрѣзкѣ Oc. Аналогичное заключеніе справедливо и для нижней половины $O\mathfrak{D}'$ діаметра $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$. Вопросъ слѣдовательно сводится къ такому: какова вѣроятность, что точка, взятая на радіусѣ $O\mathfrak{D}$ окажется внутри отрѣзка $c\mathfrak{D}$? Если предположимъ равномѣрное распредѣленіе вѣроятности на діаметрѣ $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'$ то искомая вѣроятность будетъ равна $c\mathfrak{D}$. Очевидно cc' есть сторона правильнаго вписаннаго Δ -ка. Поэтому

$$c\mathfrak{D} = O\mathfrak{D} - \frac{cc'}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,134\ldots.$$

Этотъ же вопросъ можно рѣшить и иначе. Оче -

видно, одинъ изъ концовъ хорды можетъ по - пасть съ одинаковой вѣроятностью въ любую точку A /черт.10/ окружности. Поэтому можемъ рѣшать задачу въ предположенiи, что конецъ хорды находится въ точкѣ

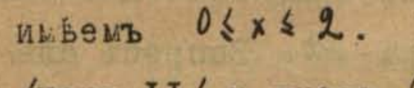


Черт.10.

A. Пусть AB и AC будутъ хорды равныя радiусу. Тогда концы хордъ имѣющихъ одинъ конецъ въ A и меньшихъ 1 будутъ лежать на дугѣ BAC. Предполагая равномѣрное распредѣленiе вѣроятности на окружности, получимъ для искомой вѣроятности такое значенiе:

$$\frac{\smile BAC}{2\pi} = \frac{\frac{2}{6}2\pi}{2\pi} = \frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

Наконецъ можно дать еще такое рѣшенiе вопроса. Обозначая черезъ x длину хорды всегда имѣемъ $0 \leq x \leq 2$. Возьмемъ отрѣзокъ $AB = 2$ /черт.11/ и пусть C будетъ его середина. Отъ



Черт.11.

точки A отложимъ отрѣзокъ $AX = x$. Вопросъ сводится къ тому, попадетъ ли точка X въ отрѣзокъ AC или въ отрѣзокъ CB. Предполагая равномѣрное распредѣленiе вѣроятности на отрѣзкѣ AB для искомой вѣроятности получимъ слѣдовательно значенiе $\frac{1}{2} = 0,5$. Мы получили въ трехъ случаяхъ различныя значенiя для вѣроятности одного и того же событія. Причина этого противорѣчья заключается въ томъ, что мы въ этихъ трехъ случаяхъ дѣлали различныя, противорѣчащія другъ другу, предположенія о равновозможныхъ случаяхъ.

§ 32. Вообще всегда возможно принять, что распредѣленіе вѣроятности на прямой или кривой линіяхъ выражается нѣкоторой постоянно положительной /или во всякомъ случаѣ не отрицательной/ функціей $f(x)$ гдѣ x – абсцисса соотвѣтствующей точки. Кромѣ того естественно выбирать функцію $f(x)$ непрерывной. Разсмотримъ напр. на прямой OX /черт. I2/ отрѣзокъ AB. Пусть a и b будутъ абсциссы точекъ A и B

черт. 12.

отсчитываемыя отъ постоянной точки O. Пусть X_0 и X_1 будутъ двѣ точки внутри отрѣзка AB, x_0 и x_1 – ихъ абсциссы. Тогда вѣроятность, что точка, взятая внутри отрѣзка AB окажется внутри отрѣзка X_0X_1 можно считать равной

$$\frac{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx},$$

какова бы ни была функція $f(x)$ лишь бы только въ промежуткѣ $a \ldots b$ всегда было $f(x) \geqq 0$.

Мы будемъ считать кромѣ того, что эта функція непрерывна.

Чтобы принять это опредѣленіе, надо доказать, что вѣроятность опредѣленная такимъ образомъ обладаетъ тѣми же свойствами, что и вѣроятности, разсмотрѣнныя нами выше. Докажемъ именно, что сумма вѣроятностей всѣхъ возможныхъ несовмѣстимыхъ событій равна I. Это непосредственно вытекаетъ изъ формулы

$$\frac{\int_a^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\ldots\ldots+\int_{x_n}^{b}}{\int_a^b}=1.$$

Изъ формулы

$$\int_{x_0}^{x_1}=\int_{x_0}^{\xi_1}+\int_{\xi_1}^{\xi_2}+\ldots\ldots+\int_{\xi_n}^{x_1},$$

вытекаетъ теор.слож.вѣроятностей. Замѣтимъ еще, что вѣроятность того, что точка попадетъ въ отрѣзокъ напр. $\xi_1\xi_2$ или въ отрѣзокъ $\xi_3\xi_4$ /т.е. въ одинъ изъ двухъ отрѣзковъ, не смежныхъ между собой/ мы опредѣляемъ какъ сумму

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2}+\int_{\xi_3}^{\xi_4},$$

такъ что и здѣсь соблюдается теорема сложенія. Если будетъ

$$\int_a^b f(x)\,dx=1,$$

то вѣроятность попаданія точки въ отрѣзокъ X_0X_1 будетъ выражаться просто интеграломъ $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$.

Это будетъ напримѣръ если примемъ $f(x)=\frac{1}{b-a}$, т.е. равно единицѣ дѣленной на длину отрѣзка AB. Функція $f(x)$ называется плотностью вѣроятности.

Когда разсматриваютъ безконечно большую прямую, то обыкновенно полагаютъ

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{k}},$$

гдѣ $k>0$. Такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{k}}dx=\sqrt{\pi k},$$

то при такомъ выборѣ функціи $f(x)$ вѣроятность попаданія точки въ отрѣзокъ X_0X_1 будетъ равна

$$\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{k}}dx.$$

Этотъ интегралъ называется иногда функціей Л а п л а с а.

Когда разсматриваемъ конечный отрѣзокъ AB въ которомъ можетъ заключаться разсматриваемая точка, то можетъ быть два случая: точка X можетъ заключаться во всемъ отрѣзкѣ AB или только внутри этого промежутка. Если a, b, x будутъ абсциссы точекъ A, B и разсматриваемой точки, то въ первомъ случаѣ x подчинено условію $a\leq x\leq b$ а во второмъ $a<x<b$.

Но вѣроятность получится одна и та же, если функція $f(x)$ будетъ непрерывна. Это слѣдуетъ изъ того, что

$$\lim_{\substack{\alpha=a\\ \beta=b}}\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

§ 33. Пусть $f(x)$ есть плотность вѣроятности, а $\varphi(x)$-какая-нибудь функція x. Математическимъ ожиданіемъ функціи φ называется интегралъ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx.$$

При этомъ предполагаемъ, что $\int_a^b f(x)\,dx=1.$

Такъ напр.

$$M.O.(x)=\int_a^b x f(x)\,dx,$$

а если $f(x)=\frac{1}{b-a}$, то

$$M.O.(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{a+b}{2}.$$

Для безконечно большой прямой, полагая $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi K}}e^{-\frac{x^2}{K}}$,

$$M.O.(x^m)=\frac{1}{\sqrt{\pi K}}\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-\frac{x^2}{K}}\,dx.$$

есть величина конечная. Если m нечетное число, то интегралъ равенъ 0, т.к. под'интегральная функція нечетная. Для $m=2$ имѣемъ

$$M.O.(x^2)=\frac{1}{\sqrt{\pi K}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{K}}\,dx.$$

Дѣлая замѣну $x^2=Ky^2$ получимъ:

$$M.O.(x^2)=\frac{K}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\,dy.$$

Такимъ образомъ $M.O.(y^2)$ пропорціонально K.

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\,dy=-\frac{ye^{-y^2}}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

и слѣдовательно $M.O.(x^2)=\frac{K}{2}$.

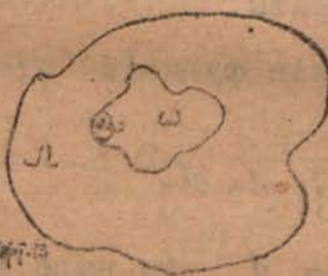
Положимъ, что X есть ошибка, дѣлаемая въ данномъ наблюденіи. Назовемъ $f(x)$ функціей распредѣленія ошибокъ /въ способѣ наименьшихъ квадратовъ принимаютъ $f(x)=e^{-\frac{x^2}{K}}$ /.

По предыдущему въ этомъ случаѣ математическое ожиданіе квадрата ошибки равно $\frac{K}{2}$. Число K иногда называется точностью наблюденія.

Математическое ожиданіе квадрата разности двухъ ошибокъ равно полусуммѣ точностей соотвѣтствующихъ наблюденій. Въ самомъ дѣлѣ: положимъ, что производятся два наблюденія, при чемъ для одного изъ нихъ плотность вѣроятности равна $e^{-\frac{x^2}{K}}$ а для другого - $e^{-\frac{x^2}{K_1}}$ Тогда

$$M.O.(x-y)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-y)^2}{\pi\sqrt{KK_1}}e^{-\frac{x^2}{K}-\frac{y^2}{K_1}}dx\,dy=\frac{K+K_1}{2}$$

§ 34. Переходимъ теперь къ разсмотрѣнію площадей. Имѣемъ двѣ площади Λ и ω причемъ ω есть часть Λ /черт.13/.



черт.13

Какова вѣроятность, что точка A взятая внутри Λ будетъ находиться внутри ω ? Мы условимся считать, что вѣроятность того, что точка A попадетъ въ безконечно малую площадь $d\omega$ есть $f(x,y)$ гдѣ функція $f(x,y)$ не отрицательна въ площади Λ и непрерывна въ этой области. Вѣроятность, что точка A взятая внутри

три Ω будетъ находиться внутри площади ω мы опредѣлимъ какъ отношеніе двойныхъ интеграловъ

$$\frac{\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy}$$

Наиболѣе простымъ предположеніемъ будетъ $f(x,y)=1$ и тогда вѣроятность будетъ равна $\frac{\omega}{\Omega}$. Обыкновенно выбираютъ функцію f такимъ образомъ, чтобы $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=1$ Тогда вѣроятность просто выражается двойнымъ интеграломъ $\iint_\omega f(x,y)\,dx\,dy$. Аналогичнымъ образомъ можемъ ввести понятіе вѣроятности примѣнительно къ объемамъ, разсматривая тройные интегралы.

Математическое ожиданіе функціи $\varphi(x,y)$ есть

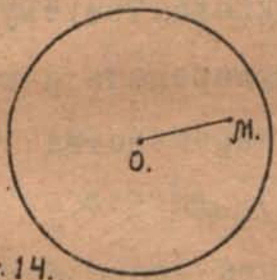
$$\iint_\Omega f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Если $\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy \neq 1$, то надо еще раздѣлить на этотъ послѣдній интегралъ. Такъ напр.

$$M.O.(x)=\frac{\iint_\Omega x\,f(x,y)\,dx\,dy}{\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy}$$

Выраженія для $M.O.(x)$ въ случаѣ линій и площадей совпадаютъ съ выраженіями координатъ центра тяжести тѣла въ Механикѣ, если плотность тѣла равна $f(x,y)$ т.е. плотности вѣроятности.

Разсмотримъ такой примѣръ. Данъ кругъ радіуса R /черт.14/. Требуется найти математическое ожиданіе разстоянія d точки M взятой внутри этого круга до центра O, причемъ началомъ координатъ служитъ точка O и система координатъ прямоугольная.



черт. 14.

Находимъ

$$M.O.(d)=\frac{\iint f(x,y)\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy}{\iint f(x,y)\,dx\,dy}$$

гдѣ двойные интегралы берутся внутри окружности O. Примемъ $f(x,y)=1$ и введемъ полярныя координаты. Тогда получимъ:

$$M.O.(d)=\frac{\iint\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy}{\pi R^2}=\frac{\int_0^{R}\int_0^{2\pi}\rho^2\,d\rho\,d\theta}{\pi R^2}=\frac{2}{3}R.$$

ТЕОРЕМА О ПРЕДѢЛѢ ВѢРОЯТНОСТИ.

§ 35. Въ одной изъ предыдущихъ главъ мы доказали такъ называемое неравенство Чебышева: если имѣемъ рядъ величинъ $x_1, x_2, \dots x_n$ которыхъ математическія ожиданія равны $a_1, a_2, \dots a_n$, а математическія ожиданія квадратовъ которыхъ равны $b_1, b_2, \dots b_n$, то съ вѣроятностью большей чѣмъ $1-\frac{1}{t^2}$ можемъ утверждать, что имѣетъ мѣсто неравенство

$$\left|\sum x - \sum a\right| \leq t\sqrt{\sum(b-a^2)} \quad \ldots \ldots (1)$$

гдѣ t есть произвольное число. Обозначимъ черезъ A величину $\sum(b-a^2)$, стоящую подъ знакомъ радикала. Теорему Чебышева мы можемъ формулировать и такимъ образомъ: вѣроятность неравенства

$$\left|\sum x - \sum a\right| \leq \alpha,$$

гдѣ α есть произвольное число, больше чѣмъ $1-\frac{A}{\alpha^2}$ Итакъ, теорема Чебышева даетъ возможность вычислять нижній предѣлъ вѣроятности того, что разность $\sum x - \sum a$ не превыситъ по абсолютной величинѣ нѣкотораго произвольнаго числа α. Иными словами на основаніи теоремы Чебышева можемъ приблизительно судить о вѣроятности того, что $\sum x$ будетъ заключаться между какими - нибудь предѣлами. Но на основаніи теоремы Чебышева эта вѣроятность опредѣляется лишь очень приближенно. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ только утверждать, что вѣроятность неравенства /I/ больше чѣмъ $1-\frac{1}{t^2}$, она слѣдовательно можетъ имѣть любое знач ніе среднее между $1-\frac{1}{t^2}$ и I. Гораздо болѣе точное значеніе для вѣроятности, что разность $\sum x - \sum a$ по абсолютной величинѣ не превышаетъ нѣкотораго числа даетъ формула Лапласа. Разсмотримъ вмѣсто неравенства /I/ неравенство

$$\left|\sum x - \sum a\right| \leq t\sqrt{2A}.$$

Ясно, что вѣроятность этого неравенства будетъ больше, чѣмъ $1-\frac{1}{2t^2}$. Положимъ теперь, что число n стремится къ безконечности. Является вопросъ, будетъ ли стремиться вѣроятность существованія неравенства къ предѣлу и если будетъ, то къ какому именно? Мы докажемъ немного спустя, что такой предѣлъ существуетъ и равенъ

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

Иначе говоря, вѣроятность существованія неравенства

$$-t\sqrt{2A} \leq \sum x - \sum a \leq t\sqrt{2A}$$

имѣетъ предѣломъ для $n=\infty$ интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-t}^{t} e^{-t^2}dt$$

/Функція e^{-t^2} четная и потому

$$\int_0^t e^{-t^2}dt = -\int_0^{-t} e^{-t^2}dt$$ /

Лапласъ далъ эту формулу для одного

частнаго случая. Въ болѣе общемъ случаѣ теорема, которую мы будемъ называть теоремой о предѣлѣ вѣроятностей, была доказана Чебышевымъ, а затѣмъ Марковымъ и въ наиболѣе общемъ видѣ Ляпуновымъ. Самое доказательство мы приведемъ послѣ, а сейчасъ выведемъ нѣкоторое слѣдствіе изъ этой теоремы. Прежде всего замѣтимъ, что теорема въ общемъ случаѣ можетъ быть формулирована такъ /при нѣкоторыхъ незначительныхъ ограниченіяхъ, о которыхъ рѣчь будетъ впереди/: вѣроятность неравенства

$$t_0\sqrt{2A} \leq \sum x - \sum a \leq t_1\sqrt{2A}$$

имѣетъ предѣломъ для $n=\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt.$$

Введемъ новую перемѣнную интегрированія $z = t\sqrt{2A}$. Тогда можемъ сказать, что вѣроятность неравенства

$$z_0 \leq \sum x - \sum a \leq z_1,$$

гдѣ $z_0 = t_0\sqrt{2A}$; $z_1 = t_1\sqrt{2A}$, имѣетъ предѣломъ для $n=\infty$ интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2A}}\frac{dz}{\sqrt{2A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-\frac{z^2}{2A}}\,dz.$$

Если взять интегралъ въ предѣлахъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, то, какъ и должно быть, получимъ I.

Частнымъ случаемъ теоремы о предѣлѣ вѣроятностей является случай, когда вели - чины x_i связаны съ появленіемъ нѣкото - рыхъ событій такъ, что $x_i = 1$ въ случаѣ появленія событія и $x_i = 0$ въ случаѣ его непоявленія. Пусть $p_1, p_2, \ldots p_n$ будутъ вѣ- роятности наступленія событій въ каждомъ отдѣльномъ опытѣ. Тогда $M.O.(x_i) = p_i$, $M.O.(x_i^2) = p_i$ и слѣдовательно

$$b_i - a_i^2 = p_i - p_i^2 = p_i(1 - p_i),$$

а если q_i есть вѣроятность ненаступленія событія въ i —омъ опытѣ, то $b_i - a_i^2 = p_i q_i$ и потому $2A = 2\sum_{i=1}^{i=n} p_i q_i$. Что касается суммы $\sum x$ то она очевидно равна числу появленій событій во всѣхъ n опытахъ. Слѣдовательно можно сказать, что вѣроят - ность неравенства

$$t_0\sqrt{2\sum pq} \leq m - \sum p \leq t_1\sqrt{2\sum pq}$$

имѣетъ предѣломъ для $n \to \infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}dt$$

Наконецъ, если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, то тотъ же интегралъ является предѣломъ вѣроятно сти существованія неравенства

$$t_0\sqrt{2npq} \leq m - np \leq t_1\sqrt{2npq},$$

гдѣ $q = 1 - p$. Отсюда можно вывести теорему Бернулли.

§ 36. Докажемъ теперь теорему о существованіи предѣла вѣроятности неравенства

$$t_0\sqrt{2A} \leqslant \sum x - \sum a \leqslant t_1\sqrt{2A},$$

при довольно общихъ условіяхъ.

Имѣемъ рядъ независимыхъ величинъ

$$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$$

Пусть

$$a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$$

будутъ ихъ математическія ожиданія и

$$b_1, b_2 \ldots\ldots b_n$$

- математическія ожиданія ихъ квадратовъ. Пусть далѣе

$$A = M.O\,[(x_1+x_2+\ldots+x_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)]^2 =$$

$$= b_1 - a_1^2 + b_2 - a_2^2 + \ldots\ldots + b_n - a_n^2.$$

Обозначимъ черезъ δ_i математическое ожиданіе величины $|x_i - a_i|^3$ и допустимъ, что

$$\lim \frac{\sum^2 \delta_i}{A^3}_{n=\infty} = 0.$$

Тогда вѣроятность существованія неравенства

$$t_0\sqrt{2A} \leqslant \sum_{i=1}^{i=n} x_i - \sum_{i=1}^{i=n} a_i \leqslant t_1\sqrt{2A}$$

имѣетъ предѣломъ для $n=\infty$ опредѣленный интегралъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}dt$$

Разсмотримъ новую перемѣнную величину

$$y_i = \frac{x_i - a_i}{\sqrt{2A}}$$

Очевидно $M.O.(y_i) = 0$, $M.O.(y_i^2) = \frac{M.O.(x_i - a_i)^2}{2A} = \frac{b_i - a_i^2}{2A}$

Обозначимъ последнюю величину черезъ β_i

Полагая $\gamma_i = M.O.(y_i)^3$, имѣемъ $\gamma_i = \frac{\delta_i}{(2A)^{3/2}}$

и слѣдовательно

$$\Sigma^2 \gamma_i = \frac{\Sigma^2 \delta_i}{(2A)^3} \to 0,$$

для $n = \infty$ Тѣмъ болѣе $\gamma_i \to 0$, когда $n \to \infty$. Такимъ образомъ намъ надо будетъ доказать, что вѣроятность существованія неравенства

$$t_0 \leq \Sigma y \leq t_1$$

имѣетъ предѣломъ $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} dt$, когда $n \to \infty$

Основная идея приводимаго нами доказательства была предложена англійскимъ математикомъ Глейшеромъ, и затѣмъ строго обоснована академикомъ Ляпуновымъ. Мы приведемъ доказательство Ляпунова въ нѣсколько измѣненномъ видѣ.

§ 37. Разсмотримъ опредѣленный интегралъ

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \xi}{\xi} d\xi$$

Этотъ интегралъ какъ извѣстно обладаетъ замѣчательнымъ свойствомъ. Если $\alpha > 0$, то онъ равенъ + I, а если $\alpha < 0$, то онъ равенъ -I и если $\alpha = 0$, то онъ очевидно равенъ 0 /см. добавл. I/. Теперь разсмотримъ такой интегралъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi.\operatorname{Cos}\beta\xi}{\xi}d\xi.$$

Замѣчая, что

$$\operatorname{Sin}\alpha\xi.\operatorname{Cos}\beta\xi=\frac{1}{2}\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)\xi+\frac{1}{2}\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\xi$$

видимъ, что интегралъ разбивается на суммму двухъ интеграловъ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}(\alpha+\beta)\xi}{\xi}d\xi+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}(\alpha-\beta)\xi}{\xi}d\xi.$$

Допустимъ, что $\alpha>0$. Если $-\alpha<\beta<\alpha$, то оба интеграла равны $\frac{1}{2}$ и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi.\operatorname{Cos}\beta\xi}{\xi}d\xi=1.$$

Если же $\beta<-\alpha$, или $\beta>\alpha$ то одно изъ слагаемыхъ равно $+\frac{1}{2}$, а другое равно $-\frac{1}{2}$ и слѣдовательно

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi.\operatorname{Cos}\beta\xi}{\xi}d\xi=0.$$

Наконецъ, если $\beta=\alpha$, или $\beta=-\alpha$ то одинъ изъ слагаемыхъ интеграловъ равенъ 0, а другой $\frac{1}{2}$ и слѣдовательно въ этомъ случаѣ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi.\operatorname{Cos}\beta\xi}{\xi}d\xi=1/2.$$

Этотъ интегралъ былъ впервые разсмотрѣнъ Дирихле. Мы имѣемъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi.\operatorname{Cos}\beta\xi}{\xi}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Sin}\alpha\xi}{\xi}e^{i\beta\xi}d\xi,$$

ибо

$$e^{i\beta\xi}=\operatorname{Cos}\beta\xi+i.\operatorname{Sin}\beta\xi$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\operatorname{Sin}\alpha\xi\operatorname{Sin}\beta\xi}{\xi}d\xi=0,$$

такъ какъ подъинтегральная функція нечетная.

§ 38. Послѣ этихъ замѣчаній перейдемъ къ доказательству теоремы.

Разсмотримъ интегралъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi\cdot e^{i(\Sigma y-\frac{t_0+t_1}{2})\xi}}{\xi}d\xi \ldots (\alpha).$$

Такъ какъ $t_1>t_0$, то этотъ интегралъ равенъ I, когда

$$\frac{t_0-t_1}{2}<\Sigma y-\frac{t_0+t_1}{2}<\frac{t_1-t_0}{2},$$

т.е. когда

$$t_0<\Sigma y<t_1 \ldots\ldots\ldots (\beta).$$

Онъ равенъ 0 при $t_0>\Sigma y$, или $t_1<\Sigma y$ и $\frac{1}{2}$ при $t_0=\Sigma y$ или $t_1=\Sigma y$. Мы видимъ, что неравенства / β / совпадаютъ съ тѣмъ неравенствомъ, вѣроятность котораго мы ищемъ По этому намъ достаточно найти вѣроятность того, что интегралъ / α / равенъ I или, что то же, найти математическое ожиданіе интеграла / α /, ибо если неравенство / β / не удовлетворяется, то интегралъ равенъ 0. Впрочемъ, здѣсь надо замѣтить еще слѣдующее. Мы ищемъ вѣроятность неравенства

$$t_0\leq\Sigma y\leq t_1 \ldots\ldots\ldots (\gamma).$$

При $t_0=\Sigma y$ или $t_1=\Sigma y$ интеграл (α) равенъ $\frac{1}{2}$. Поэтому если мы будемъ искать математическое ожиданіе интеграла (α) то мы не получимъ въ точности вѣроятности неравенства (γ), а получимъ сумму вѣроятности неравенства (β) съ половиною вѣроятностей равенства $\Sigma y=t_0$ и равенства $\Sigma y=t_1$, но мы увидимъ дальше, что вѣроятности этихъ равенствъ стремятся къ 0 съ возрастаніемъ n. /§ 40/.

Обозначимъ через φ_Σ вѣроятность того, что сумма Σy имѣетъ значеніе Σ. Математическое ожиданіе интеграла (α) равно

$$\sum \frac{\varphi_\Sigma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi\cdot e^{-i\left(\Sigma y-\frac{t_0+t_1}{2}\right)\xi}}{\xi}\,d\xi$$

Эта сумма можетъ содержать конечное или безконечное число членовъ или можетъ обратиться также въ двойной интегралъ /что будетъ, если Σy можетъ измѣняться непрерывно/. Но во всякомъ случаѣ эта сумма равна

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{t_1-t_2}{2}\xi}{\xi}\cdot e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}\cdot\sum\varphi_\Sigma e^{i\xi\Sigma y}\cdot d\xi =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi}\,e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}\,М.О.\left(e^{i\xi\Sigma y}\right)d\xi$$

Задача сводится къ тому, чтобы вычислить $\mathcal{M}.O.\left(e^{i\xi\Sigma y}\right)$. Мы имѣемъ

$$\mathcal{M}.O.\left(e^{i\xi\Sigma y}\right)=\mathcal{M}.O.\left(e^{iy_1\xi}\cdot e^{iy_2\xi}\cdot\ldots\ldots e^{iy_n\xi}\right),$$

а по теор. умнож. математ. ожид.

$$\mathcal{M}.O.\left(e^{i\xi\Sigma y}\right)=\mathcal{M}.O.\left(e^{iy_1\xi}\right).\mathcal{M}.O.\left(e^{iy_2\xi}\right)\ldots\mathcal{M}.O.\left(e^{iy_n\xi}\right).$$

Здѣсь существенно, что перемѣнныя $x_1, x_2 \ldots x_n$ независимы.

Далѣе мы имѣемъ

$$e^{iv}=\operatorname{Cos}v+i\operatorname{Sin}v$$

и

$$\operatorname{Cos}v=1-\frac{v^2}{2!}+\frac{v^3}{3!}\theta \qquad (0<\theta<1)$$

$$\operatorname{Sin}v=v+\frac{v^3}{3!}\theta_1 \qquad (0<\theta_1<1).$$

Поэтому

$$\mathcal{M}.O.\left(e^{iy_k\xi}\right)=\mathcal{M}.O.\operatorname{Cos}y_k\xi+i\,\mathcal{M}.O.\operatorname{Sin}y_k\xi=$$

$$=1-\frac{1}{2!}\xi^2\mathcal{M}.O.\left(y_k^2\right)+\frac{1}{3!}\xi^3\mathcal{M}.O.\left(y_k^3\theta\right)+\frac{1}{3!}\xi^3\mathcal{M}.O.\left(y_k^3\theta_1\right)$$

такъ какъ $\mathcal{M}.O.(y_k)=0$. Но

$$\mathcal{M}.O.\left(y_k^2\right)=\beta_k\,;\ \mathcal{M}.O.\left(y_k^3\right)\theta\leq\mathcal{M}.O.\left(y_k^3\right)\leq\mathcal{M}.O.\left|y_k^3\right|=\gamma_k,$$

а такъ какъ $\gamma_k\to 0$ при $n\to\infty$,

то и $\mathcal{M}.O.\left(y_k^3\theta\right)\to 0.$

Подобнымъ же образомъ и $\mathcal{M}.O.\left(y_k^3\theta_1\right)\to 0$, такъ что

$$\mathcal{M}.O.\left(e^{-iy_k\xi}\right)=1-\frac{1}{2!}\xi^2\cdot\beta_k+\frac{1}{3!}\xi^3\cdot\eta_k,$$

гдѣ $\lim\eta_k=0$ при $n=\infty$. Обозначимъ черезъ $\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots \omega_p$ абсолютныя величины тѣхъ значенiй, которыя можетъ при-

нимать y_k, а черезъ $f_1, f_2 \dots f_p$ соотвѣтственныя вѣроятности этихъ значеній.
Тогда $\beta_k = \sum_1^p f_l \cdot \omega_l^2$; $\gamma_k = \sum_1^p f_l \cdot \omega_l^3$.
Если y_k можетъ принимать безконечное множество значеній, то суммированіе будетъ безконечнымъ, а если y_k можетъ измѣняться непрерывно, то сумма обратится въ интегралъ. Но мы имѣемъ /см. доб. II/

$$\sum_1^p {}^3 f_l \cdot \omega_l^2 \leq \sum {}^2 f_l \cdot \omega_l^3,$$

если $\sum_1^p f_l = 1$ /при чемъ p можетъ быть равно ∞ / и

$$\left[\int_a^b f(\omega)\,\omega^2 d\omega\right]^3 \leq \left[\int_a^b f(\omega) \cdot \omega^3 d\omega\right]^2,$$

при условіи $b > a > 0$ и $\int_a^b f(\omega)\, d\omega = 1$.
Такимъ образомъ имѣемъ $\beta_k^3 \leq \gamma_k^2$,
а такъ какъ $\gamma_k \to 0$, то и $\beta_k \to 0$.
Итакъ,

$$M.O.(e^{iy_k\xi}) = 1 - \frac{1}{2!}\beta_k \xi^2 + \frac{1}{3!}\eta_k \xi^3,$$

гдѣ $\lim \beta_k = \lim \eta_k = 0$ для $n \to \infty$.
Вмѣсто математическаго ожиданія возьмемъ его натуральный логариемъ:

$$\lg M.O.(e^{i\xi y_k}) = \lg\left(1 - \frac{1}{2!}\beta_k \xi^2 + \frac{1}{3!}\eta_k \xi^3\right)$$

и слѣдовательно

$$\lg M.O.(e^{i\xi \Sigma y}) = \lg\left(1 - \frac{1}{2!}\beta_1 \xi^2 + \frac{1}{3!}\eta_1 \xi^3\right) +$$
$$+ \lg\left(1 - \frac{1}{2!}\beta_2 \xi^2 + \frac{1}{3!}\eta_2 \xi^3\right) + \dots\dots\dots$$

Фиксируемъ заранѣе произвольно большое число $\mathcal{N}$ и возьмемъ $|\xi| \leq \mathcal{N}$.

Пусть

$$\sigma_k = -\frac{1}{2!}\beta_k\xi^2 + \frac{1}{3!}\gamma_k\xi^3.$$

При фиксированномъ $\mathcal{N}$, $\sigma \to 0$ если $n \to \infty$. Поэтому

$$\lg(1+\sigma_k) = \sigma_k - \frac{\sigma_k^2}{2} + \frac{\sigma_k^3}{3} - \ldots = \sigma_k(1+\varepsilon_k),$$

при чемъ $\varepsilon_k \to 0$ вмѣстѣ съ σ_k.

Слѣдовательно

$$\lg \mathcal{M}.O.(e^{i\xi\Sigma y}) = \left(-\frac{1}{2!}\beta_1\xi^2 + \frac{1}{3!}\eta_1\xi^3\right)(1+\varepsilon_1) + \left(-\frac{1}{2!}\beta_2\xi^2 + \frac{1}{3!}\eta_2\xi^3\right)(1+\varepsilon_2) + \ldots\ldots$$

Возьмемъ такое ε, чтобы

$$\sum\left(-\frac{1}{2!}\beta_k\xi^2 + \frac{1}{3}\eta_k\xi^3\right)(1+\varepsilon_k) = (1+\varepsilon)\sum\left(-\frac{1}{2!}\beta_k\xi^2 + \frac{1}{3}\eta_k\xi^3\right).$$

Очевидно $\varepsilon \to 0$. Находимъ

$$\lg \mathcal{M}.O.(e^{i\xi\Sigma y}) = -\frac{\xi^2}{2!}(1+\varepsilon)\sum\beta_k + \frac{\xi^3}{3!}(1+\varepsilon)\sum\eta_k.$$

но

$$\sum\beta_k = \frac{\sum(b_k - a_k^2)}{2A} = \frac{1}{2}; \quad \sum\eta_k \to 0 \ (\text{ибо } \sum\gamma_k \to 0).$$

Значитъ

$$\lg \mathcal{M}.O.(e^{i\xi\Sigma y}) = -\frac{\xi^2}{4}(1+\varepsilon) + \varepsilon',$$

гдѣ $\lim\varepsilon = \lim\varepsilon' = 0$, для $n = \infty$.

Отсюда

$$\mathcal{M}.O.(e^{i\xi\Sigma y}) = e^{-\frac{\xi^2}{4}(1+\varepsilon)+\varepsilon'} = e^{-\frac{\xi^2}{4}}(1+\alpha),$$

гдѣ $\alpha \to 0$. Теперь мы имѣемъ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi}e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}\mathcal{M}.O.(e^{i\xi\Sigma y})\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\mathcal{N}}^{\mathcal{N}}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi}e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}(1+\alpha)\,d\xi + \rho,$$

где

$$\rho=\frac{1}{\pi}\int_N^\infty \frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi} e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}\cdot M.O.\left[e^{i\xi\Sigma y}\right) d\xi+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-N}$$

Разсмотримъ интегралъ

$$\int_{-N}^{N} \frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi} e^{-i\frac{t_1+t_0}{2}\xi}\cdot e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\cdot\alpha\, d\xi.$$

Докажемъ, что этотъ интегралъ стремится къ 0, когда $n\to\infty$. Такъ какъ

$$\left|\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi}\right|<\frac{t_1-t_0}{2};\quad \left|e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}\right|\leq 1,$$

то разсматриваемый интегралъ по абсолютной величинѣ меньше, чѣмъ

$$\int_{-N}^{N} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\cdot|\alpha|\, d\xi.$$

Докажемъ, что этотъ послѣдній интеграл стремится къ 0, когда $n\to\infty$.

По теоремѣ о средней

$$\int_{-N}^{N} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}|\alpha|\, d\xi=\bar{\alpha}\int_{-N}^{N} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi,$$

гдѣ $\bar{\alpha}$ есть средняя между наибольшимъ и наименьшимъ значеніями, которыя принимаетъ $|\alpha|$. Такъ какъ $\bar{\alpha}\to 0$, когда $n\to\infty$ и такъ какъ $\int_{-N}^{N} e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi$ есть величина конечная, то интегралъ

$$\int_{-N}^{N} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\cdot|\alpha|\, d\xi,$$

стремится къ 0, когда $n\quad\infty$.

Итакъ, искомая вѣроятность равна

$$\int_{-N}^{N} e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi} e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}\cdot d\xi+\omega+\beta,$$

гдѣ $\lim \omega = 0$. По опредѣленію $\lim\limits_{N=\infty}\int_{-N}^{N} = \int_{-\infty}^{\infty}$

Поэтому $\int_{-N}^{N}$ можемъ замѣнить суммой $\int_{-\infty}^{\infty}$ и нѣкоторой безконечно малой величины.

Надо доказать только, что $\int_{-\infty}^{\infty}$ существуетъ. Мы имѣемъ

$$\int_{-N}^{N}\left|e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi}e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}\right|d\xi < \int_{-N}^{N}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}d\xi.$$

Но $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}d\xi$ имѣетъ конечное значеніе, а потому, согласно теоріи опредѣленныхъ интеграловъ въ ихъ собственномъ смыслѣ конечное значеніе имѣетъ

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi}e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}d\xi \dots\dots (\delta).$$

Такимъ образомъ для искомой вѣроятности получаемъ такое значеніе

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi}{\xi}e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}d\xi + \Delta + \rho,$$

гдѣ $\Delta \to 0$, когда $n \to \infty$ и $N \to \infty$.

§ 39. Замѣняя въ интегралѣ (δ) $e^{-i\frac{t_0+t_1}{2}\xi}$ черезъ $\cos\frac{t_1+t_0}{2}\xi$, отъ чего значеніе интеграла не измѣнится и представляя произведеніе $\sin$ на $\cos$ въ видѣ разности $\sin$'овъ, разобьемъ интегралъ на сумму двухъ другихъ:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t_1\xi}{\xi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}d\xi - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t_0\xi}{\xi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}d\xi.$$

Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t\xi}{\xi}e^{-\frac{1}{4}\xi^2}d\xi = \Phi(t).$$

Дифференцируя подъ знакомъ интеграла найд демъ:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos t\xi \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi ,$$

или

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\int_{0}^{\infty} \cos t\xi \cdot e^{-\frac{1}{4}\xi^2} d\xi = 4\int_{0}^{\infty} \cos 2tz \cdot e^{-z^2} dz = $$
$$= 2e^{-t^2}\sqrt{\pi},$$

ибо /см.добавл.III/

$$\int_{0}^{\infty} \cos 2tz \cdot e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} e^{-t^2}\sqrt{\pi}$$

Итакъ

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2e^{-t^2}\sqrt{\pi},$$

откуда

$$\Phi(t) = 2\sqrt{\pi}\int_{0}^{t} e^{-t^2} dt$$

Искомая вѣроятность представляется слѣдовательно въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t_1} e^{-t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{t_0} e^{-t^2} dt + \Delta + \rho ,$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2} dt + \Delta + \rho .$$

При этомъ $\lim \Delta = 0$. Остается доказать, что $\lim \rho = 0$, т.е. что при N достаточно большомъ ρ становится меньше напередъ заданнаго числа, каково бы ни было n.

§ 40. Мы имѣемъ

$$\rho = \frac{1}{\pi}\sum \varphi_z \left[\int_{N}^{\infty} \frac{\sin\frac{t_1 - t_0}{2}\xi \cdot \cos\left(\sum y - \frac{t_1 + t_0}{2}\right)\xi}{\xi} d\xi + \int_{-\infty}^{-N}\right] = \frac{2}{\pi}\sum \varphi_z \int_{N}^{\infty}$$

$$\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi \cdot \cos\left(\Sigma y-\frac{t_1+t_0}{2}\right)\xi = \sin(t_1-\Sigma y)\xi + \sin(\Sigma y-t_0)\xi,$$

то остается доказать, что каждый изъ интегра-ловъ

$$\Sigma\varphi_\Sigma\int_N^\infty\frac{\sin(t_1-\Sigma y)\xi}{\xi}d\xi\ ;\ \Sigma\varphi_\Sigma\int_N^\infty\frac{\sin(\Sigma y-t_0)\xi}{\xi}d\xi$$

стремится къ 0. Докажемъ вообще, что

$$\lim_{N=\infty}\int_N^\infty\frac{\sin a\xi}{\xi}d\xi = 0$$

при данномъ a.

Дѣлая замѣну $a\xi = z$, приведемъ этотъ инте-гралъ къ такому:

$$\int_{aN}^\infty\frac{\sin z}{z}dz.$$

Если a стремится къ 0, то нельзя утвер-ждать, что $aN\to\infty$. Поэтому мы рас-членимъ значенія Σy. Во первыхъ возь-мемъ тѣ значенія Σy, для которыхъ $a \geq \varepsilon$, гдѣ ε произвольно малое постоянное число, и затѣмъ тѣ для которыхъ $a < \varepsilon$, т.е. выдѣлимъ значенія Σy мало отличающіяся отъ t_0 и t_1. Какъ извѣст-но,

$$\int_0^\infty\frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi}{2}.$$

Далѣе, если $k\pi < aN \leq (k+1)\pi$, гдѣ k чи-сло цѣлое и положительное, то

$$\int_0^{aN}\frac{\sin z}{z}dz = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \dots \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} + \int_{k\pi}^{aN} = I_0 - I_1 + I_2 - \dots,$$

причемъ

$$I_0 > I_1 > I_2 > \ldots\ldots > 0 .$$

Этотъ знакоперемѣнный рядъ сходится и его сумма стремится къ предѣлу $\int_0^\infty$

Замѣчая, что $\int_0^\infty$ такъ же, какъ и $\int_0^{aN}$ заключенъ между $\int_0^{k\pi}$ и $\int_0^{(k+1)\pi}$ находимъ, что

$$\left|\int_0^\infty - \int_0^{aN}\right| < \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

но

$$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin z}{z} dz\right| < \left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dz}{k\pi}\right| = \frac{1}{k} .$$

Поэтому, если мы будемъ разсматривать тѣ значенія Σy, для которыхъ $a \geqslant \varepsilon$, то будемъ имѣть

$$\lim \int_{aN}^\infty \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

ибо для этихъ значеній Σy, $\lim k = \lim aN = \infty$ когда $N \to \infty$.

Разберемъ теперь случай, когда $a < \varepsilon$ причемъ ε произвольно малое положительное число, независящее отъ N. Докажемъ, что въ этомъ случаѣ

$$\Sigma \int_N^\infty \varphi_z \frac{\sin \frac{t_1 - t_0}{2} z \cdot \cos\left(\Sigma y - \frac{t_1 + t_0}{2}\right) z}{z} dz$$

стремится также къ 0, но происходитъ это потому, что $\Sigma \varphi_z$ становится

Мы разсматриваемъ только тѣ значенія Σy, для которыхъ

$$|t_1 - \Sigma y| < \varepsilon \,, \ |\Sigma y - t_0| < \varepsilon \ \ldots\ldots \ (\varepsilon)$$

Черезъ λ обозначимъ вѣроятность существованія неравенствъ (ε); очевидно

$$\int_N^\infty \varphi_\Sigma \frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi \cdot \cos\left(\Sigma y - \frac{t_1+t_0}{2}\right)\xi}{\xi}\, d\xi =$$

$$= \varphi_\Sigma \int_N^\infty \frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi \cdot \cos\left(\Sigma y - \frac{t_1+t_0}{2}\right)\xi}{\xi}\, d\xi = \varphi_\Sigma \int_N^\infty \frac{\sin(t_1 - \Sigma y)\xi + \sin(\Sigma y - t_0)\xi}{\xi}\, d\xi$$

и такъ какъ согласно предыдущему

$$\left|\int_N^\infty\right| < \int_0^\infty + \int_0^\pi < 3\pi,$$

то

$$\left|\int_N^\infty \frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi \cdot \cos\left(\Sigma y - \frac{t_1+t_0}{2}\right)\xi}{\xi}\, d\xi\right| < 6\pi.$$

Поэтому

$$\left|\Sigma \int_N^\infty \varphi_\Sigma \frac{\sin\frac{t_1-t_0}{2}\xi \cdot \cos\left(\Sigma y - \frac{t_1+t_0}{2}\right)\xi}{\xi}\, d\xi\right| < 6\pi \Sigma \varphi_\Sigma = 6\pi\lambda.$$

Надо доказать теперь, что $\lambda \to 0$, когда $\varepsilon \to 0$. Для $m > 0$ имѣемъ / см. добавл. IУ/:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos m\xi}{\xi^2 + p^2}\, d\xi = \pi \frac{e^{-mp}}{p}$$

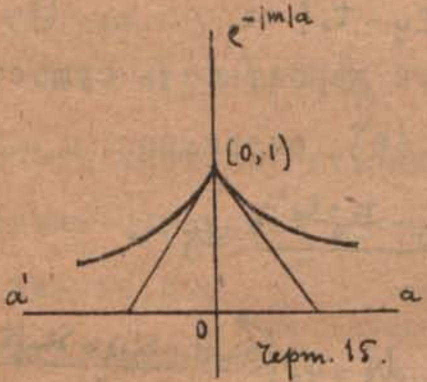
При $m < 0$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos m\xi}{\xi^2 + p^2}\, d\xi = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos |m|\xi}{\xi^2 + p^2}\, d\xi = \pi \frac{e^{-|m|p}}{p}$$

Такимъ образомъ вообще

$$\frac{p}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos m\xi}{\xi^2 + p^2}\, d\xi = e^{-|m|p}$$

Функція $e^{-|m|p}$, рассматриваемая, какъ функція p, непрерывна, но имѣетъ прерывную производную. Именно кривая, представляющая эту функцію, имѣетъ въ точкѣ пересѣченія съ осью ординатъ точку излома./Черт.15/.



Черт. 15.

Мы будемъ разсматривать только одно изъ неравенствъ (ε) напр.

$$|t_0 - \Sigma y| < \varepsilon,$$

такъ что λ будетъ обозначать вѣроятность существованія именно этого неравенства /для другого неравенства доказательство совершенно аналогично/.

Разсмотримъ $M.O.\left(e^{-|\Sigma y - t_0|p}\right)$. Если откинемъ слагаемыя относящіяся къ значеніямъ Σy, неудовлетворяющимъ указанному неравенству, то этимъ мы уменьшимъ разсматриваемую величину. Мы еще больше уменьшимъ ее, если замѣнимъ $e^{-|\Sigma y - t_0|p}$ меньшей величиной $e^{-\varepsilon p}$. Но тогда получимъ $\lambda e^{-\varepsilon p}$.

Слѣдовательно

$$M.O.\left(e^{-|\Sigma y - t_0|p}\right) > \lambda e^{-\varepsilon p}.$$

Значитъ, достаточно доказать, что

$$M.O.\left(e^{-|\Sigma y - t_0|p}\right) \to 0.$$

Установимъ между ε и p соотношеніе $\varepsilon p = 1$. Тогда $\lim p = \infty$ и значитъ, достаточно доказать, что

$$\lim_{p=\infty} M.O.\left(e^{-|\Sigma y - t_0|p}\right) = 0.$$

Очевидно,

$$\mathcal{M}.O.\left(e^{-|\Sigma y-t_0|p}\right)=\mathcal{M}.O.\left(\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos|\Sigma y-t_0|\xi}{\xi^2+p^2}d\xi\right)=$$

$$=\frac{p}{\pi}\sum\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_z\frac{e^{i|\Sigma y-t_0|\xi}}{\xi^2+p^2}d\xi.$$

Разсмотримъ

$$\sum\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_z\frac{e^{i|\Sigma y-t_0|\xi}}{\xi^2+p^2}d\xi=\sum\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_z\frac{e^{i\Sigma y\xi}\cdot e^{-it_0\xi}}{\xi^2+p^2}d\xi;$$

Мы имѣемъ:

$$\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}=\frac{p}{\pi}\int_{-p\mathcal{M}}^{p\mathcal{M}}+R,$$

гдѣ

$$R=\frac{p}{\pi}\int_{p\mathcal{M}}^{\infty}+\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{p\mathcal{M}}$$

Во-первыхъ, $R\to 0$, когда $\mathcal{M}\to\infty$.

Дѣйствительно:

$$\left|\frac{p}{\pi}\int_{p\mathcal{M}}^{\infty}\sum\varphi_z\frac{e^{i\xi\Sigma y}e^{-it_0\xi}}{\xi^2+p^2}d\xi\right|<\left|\frac{p}{\pi}\int_{p\mathcal{M}}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^2+p^2}\right|,$$

ибо

$$\sum\varphi_z=1,\quad\left|e^{i|\Sigma y-t_0|\xi}\right|=1.$$

Но

$$\frac{p}{\pi}\int_{p\mathcal{M}}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi^2+p^2}=\frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{M}}^{\infty}\frac{dz}{z^2+1}=\frac{\operatorname{arctg} z}{\pi}\Big|_{\mathcal{M}}^{\infty}\to 0,$$

когда $\mathcal{M}\to\infty$. Подобнымъ же образомъ $\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{p\mathcal{M}}\to 0$. Такимъ образомъ

$$\mathcal{M}.O.\left(e^{-|\Sigma y-t_0|p}\right)=\frac{p}{\pi}\sum\int_{-a\mathcal{M}}^{a\mathcal{M}}\varphi_z\frac{e^{i|\Sigma y-t_0|\xi}}{\xi^2+p^2}d\xi+R,$$

гдѣ $R\to 0$, когда $\mathcal{M}\to\infty$.

Но совершенно такъ же, какъ въ § 38, докажемъ, что

$$\sum\int_{-p\mathcal{M}}^{p\mathcal{M}}\varphi_z\frac{e^{i|\Sigma y-t_0|\xi}}{\xi^2+p^2}d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2}\cdot e^{-it_0\xi}}{\xi^2+p^2}d\xi+\Omega,$$

гдѣ $\Omega \to 0$, когда $n \to 0$ и $M \to \infty$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\sum \int_{-pM}^{pM} \varphi_x \frac{e^{i|\Sigma y - t_0|\xi}}{\xi^2+p^2} d\xi = \int_{-pM}^{pM} \frac{e^{-it_0\xi}}{\xi^2+p^2} \sum \varphi_x e^{i\xi\Sigma y} d\xi$$

Но

$$\sum \varphi_x e^{i\xi\Sigma y} = M.O.\left(e^{i\xi\Sigma y}\right)$$

и мы видѣли /§ 38/, что

$$M.O.\left(e^{i\xi\Sigma y}\right) = e^{-\frac{1}{4}\xi^2}(1+\alpha),$$

гдѣ $\lim_{n=\infty} \alpha = 0$. Значитъ

$$\sum \int_{-pM}^{pM} \varphi_x \frac{e^{i|\Sigma y - t_0|\xi}}{\xi^2+p^2} d\xi = \int_{-pM}^{pM} \frac{e^{-it_0\xi}}{\xi^2+p^2} e^{-\frac{\xi^2}{4}}(1+\alpha) d\xi$$

и потому

$$\sum \int_{-pM}^{pM} \varphi_x \frac{e^{i|\Sigma y - t_0|\xi}}{\xi^2+p^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2} e^{-it_0\xi}}{\xi^2+p^2} d\xi + \Omega,$$

гдѣ $\Omega \to 0$, когда $n \to \infty$ и $M \to \infty$.

Итакъ, остается доказать, что

$$\lim_{a=\infty} \frac{p}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2} \cdot e^{-it_0\xi}}{\xi^2+p^2} d\xi = 0.$$

Такъ какъ

$$\left| e^{-it_0\xi} \right| = 1.$$

то достаточно доказать, что при $a \to \infty$

стремится къ 0 интегралъ

$$\frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}\xi^2}}{\xi^2+p^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{4}p^2z^2}}{z^2+1} dz.$$

Послѣднiй интегралъ можно было бы вычи - слить, наиболѣе простымъ способомъ можно убѣдиться въ томъ, что онъ стремится къ 0, когда $p \to \infty$.

ли отбросимъ знаменателя, но тогда полу - чимъ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}p^2x^2}dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}}{p} = \frac{2}{p\sqrt{\pi}}.$$

Это же выраженіе при $p \to \infty$ стремится къ 0. Итакъ, теорема доказана.

§ 41. Въ § 35 мы указали частный случай теоремы о существованіи предѣльной вѣро - ятности. Найдемъ условія, при которыхъ въ этомъ частномъ случаѣ теорема имѣетъ мѣ - сто. Мы видѣли, что достаточными условіями для этого являются слѣдующія /§ 36/:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum M.O.|x_i-a_i|^3}{A^{3/2}} = 0$$

Докажемъ, что эти условія будутъ соблюде - ны, если $\sum_1^{\infty} p_iq_i = \infty$. Дѣйствительно, мы ви- дѣли, что $A = \sum_1^n p_iq_i$ и, слѣдовательно, $\lim_{n=\infty} A = \infty$. Далѣе

$$M.O.|x_i-a_i|^3 = p_i(1-p_i)^3 + q_i(-p_i)^3 = p_iq_i^3 + q_ip_i^3 = p_iq_i(p_i^2+q_i^2) < p_iq_i,$$

ибо

$$p_i^2+q_i^2 = p_i(1-q_i)+q_i(1-p_i) = p_i+q_i-2p_iq_i = $$
$$= 1-2p_iq_i < 1.$$

Поэтому

$$\frac{\sum M.O.|x_i-a_i|^3}{A^{3/2}} < \frac{\sum p_iq_i}{\sum^{3/2} p_iq_i} = \sum^{-\frac{1}{2}} p_iq \to 0.$$

Это будетъ напр., если числа p_i и q огра- ничены слѣва нѣкоторыми положительными числа-

Если въ частности $p_i = p$, $q_i = q$, то

$\sum_1^n p_i q_i = npq$ и слѣдовательно теорема имѣетъ мѣсто. Итакъ, если производимымъ одинаковыхъ опытовъ, причемъ въ каждомъ изъ нихъ ожидается появленіе нѣкотораго событія, то обозначая черезъ число появленій этого событія въ опытахъ, можемъ сказать, что вѣроятность существованія неравенства

$$t_0\sqrt{2npq} \leq m - np \leq t_1\sqrt{2npq}$$

имѣетъ для $n = \infty$ предѣломъ

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt$$

Здѣсь p и q означаютъ соотвѣтственно вѣроятности появленія и непоявленія событія въ каждомъ отдѣльномъ опытѣ.

Въ общемъ же случаѣ, когда опыты различны, такъ что p_i не одинаковы, предѣлъ вѣроятности существованія неравенства

$$t_0\sqrt{2\sum_1^n p_i q_i} \leq m - \sum_1^n p_i \leq t_1\sqrt{2\sum_1^n p_i q_i} \quad \ldots (1)$$

также есть

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}\,dt$$

но при условіи $\sum_1^\infty p_i q_i = \infty$.

Разность $m - \sum_1^n p_i$ называется абсолютнымъ отклоненіемъ, а отношеніе $\frac{m - \sum_1^n p_i}{n}$ относительнымъ.

Изъ неравенства /I/ имѣемъ:

$$t_0\sqrt{\frac{2\sum_1^n p_iq_i}{n^2}} \le \frac{m-\sum_1^n p_i}{n} \le t_1\sqrt{\frac{2\sum_1^n p_iq_i}{n^2}} \dots (2)$$

Ясно, что $\lim \frac{\sum_1^n p_iq_i}{n^2}=0$.

Если возьмемъ за t_0 весьма большое по абсолютной величинѣ отрицательное число, а за t_1 .- весьма большое положительное число, то интегралъ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t_1} e^{-t^2}dt$ будетъ весьма близокъ къ единицѣ, а крайніе члены неравенствъ /2/ будутъ стремиться къ 0 при $n\to\infty$. Такимъ образомъ, при неограниченномъ увеличеніи числа опытовъ n, относительное отклоненіе стремится къ нулю, т.е. какъ было доказано и раньше, вѣроятность, что отношеніе $\frac{m}{n}$ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ $\frac{\sum_1^n p_i}{n}$ будетъ стремиться къ достовѣрности; абсолютное же отклоненіе напротивъ неограниченно возрастаетъ. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что матем. ожид. квадрата отклоненія

$$M.O.\left(m-\sum_1^n p_i\right)^2=\sum_1^n p_iq_i$$

въ случаѣ, когда не всѣ p_i равны между собой, меньше, чѣмъ если $p_1=p_2=\dots=p_n=p$.

Иными словами дисперсія

$$\delta=\frac{\sum_1^n p_iq_i}{npq},$$

гдѣ $p=\frac{\sum_1^n p_i}{n}$, $q=1-p$ равна I /нормальна/, когда всѣ $p_i=p$; въ противномъ же случаѣ дисперсія δ меньше I /под.нормальна,см. добавленіе VI/.

ВѢРОЯТНОСТИ,ОСНОВАННЫЯ НА НАБЛЮДЕНІЯХЪ.

§ 42.Теперь мы будемъ говорить о вѣроятностяхъ a posteriori и о статистическихъ вѣроятностяхъ.Если въ n опытахъ событіе A произошло m разъ,то статистическою вѣроятностью появленія событія A называется дробь $\frac{m}{n}$.

Вообще говоря,статистическая вѣроятность не равна математической.

Понятіемъ статистической вѣроятности пользуются въ тѣхъ случаяхъ,когда нельзя опредѣлить вѣроятность a priori. Это будетъ наприм.если различные исходы даннаго опыта, благопріятствующіе или неблагопріятствующіе появленію ожидаемаго событія,неравновозможны и вѣроятности каждаго изъ нихъ неизвѣстны.Въ этомъ случаѣ мы не можемъ утверждать, что математическая вѣроятность ожидаемаго событія равна отношенію числа всѣхъ благопріятствующихъ появленію событія случаевъ, къ числу всѣхъ возможныхъ случаевъ.Такъ наприм.положимъ,что въ нѣкоторой урнѣ имѣются шары трехъ цвѣтовъ: бѣлые, черные и красные. Положимъ, что намъ неизвѣстно число шаровъ каждаго цвѣта и неизвѣстно, одинаковы ли количества шаровъ каждаго изъ трехъ цвѣтовъ или нѣтъ. Въ такомъ случаѣ, если мы вынимаемъ изъ урны шаръ, то вѣроятность появленія напр. бѣлаго шара вообще не равна I/3 ибо число бѣлыхъ шаровъ можетъ быть не одинаково съ числомъ шаровъ черныхъ или красныхъ. Подобнымъ же образомъ вѣроятность получить на войнѣ рану отъ опредѣленнаго рода оружія есть нѣкоторая опредѣленная величина, если извѣстны всѣ физическія условія войны. Но зная только вѣроятность полученія раны вообще, мы не можемъ вычислить вѣроятность полученія раны отъ даннаго рода оружія, ибо вѣроятности получить рану отъ каждаго отдѣльнаго рода оружія неодинаковы.

§ 43. Въ статистикѣ большую роль играетъ понятіе дисперсіи. Дисперсія бываетъ поднормальная, нормальная и сверхнормальная. /Лексисъ/. Положимъ, что мы бросаемъ монету I00 разъ, потомъ еще I00 разъ и т.д. Вѣроятность выпаденія орла каждый разъ равна ½. Слѣдовательно мы могли бы ожидать, что при каждыхъ I00 бросаніяхъ 50 разъ выпадетъ орелъ и 50 разъ рѣшетка. Въ дѣйствительности однако почти всегда получится нѣкоторое отклоненіе отъ 50. Орелъ выпадетъ при первыхъ 100 бросаніяхъ положимъ 45 разъ, при вторыхъ - 47, затѣмъ 58 и т.д. Вообще положимъ, что мы N разъ производимъ по n одинаковыхъ опытовъ. Пусть m есть число появленій событія A при n опытахъ и p вѣроятность появленія этого событія. Число $m-np$ называется отклоненіемъ/для каждой отдѣльной группы изъ n опытовъ/. Мы имѣемъ /§ 35/:

$$M.O.\,(m-np)^2 = npq.$$

Отсюда на основаніи теоремы Чебышева заключаемъ, что вѣроятность неравенства

$$\left|\frac{\Sigma(m-np)^2}{N} - \frac{\Sigma npq}{N}\right| = \left|\frac{\Sigma(m-np)^2}{N} - npq\right| < \varepsilon$$

будетъ какъ угодно близка къ достовѣрности если N взято достаточно большимъ; ε есть произвольно малое положительное число. Такимъ образомъ, въ случаѣ напр. вышеуказаннаго бросанія монеты / N разъ по 100/ мы будемъ имѣть, что вѣроятность неравенства

$$\left|\frac{5^2+3^2+8^2+\ldots}{N} - 25\right| < \varepsilon$$

будетъ весьма близка къ 1 при N достаточно большомъ. Если бы оказалось, что

$$\frac{5^2+3^2+8^2+\dots}{N}$$

мало отличается отъ 25, то мы имѣли бы случай нормальной дисперсіи. Но предположимъ, что мы бы умѣли бросать монету такъ, что по нашему желанію появлялись бы орелъ или рѣшетка. Если бы мы при этомъ бросали монету всегда такъ, чтобы при каждыхъ 100 бросаніяхъ она падала на одну и ту же сторону, то мы имѣли бы:

$$\frac{50^2+50^2+\dots}{N} = \frac{N50^2}{N} = 50^2 > 25.$$

Въ этомъ случаѣ дисперсія была бы сверхнормальной. Вообще, если бы число

$$\frac{\Sigma(m-np)^2}{N}$$

не было бы равно npq /нормальная дисперсія/ а было бы больше этой величины,

$$\frac{\Sigma(m-np)^2}{N} = \lambda pq$$

гдѣ $\lambda > 1$, то мы имѣли бы случай сверхнормальной дисперсіи. Если обнаруженъ случай сверхнормальной дисперсіи, то это служитъ указаніемъ на то обстоятельство, что въ данныхъ опытахъ имѣетъ мѣсто нѣкоторая постоянная причина, производящая значительныя отклоненія.

Возможенъ еще случай, когда

$$\frac{\Sigma(m-np)^2}{N} = \lambda pq$$

и $\lambda < 1$. Это - поднормальная дисперсія. Поднормальная дисперсія имѣла бы напр. мѣсто въ томъ случаѣ, если мы при каждыхъ 100 бросаніяхъ 50 разъ выбрасывали бы орелъ и 50 разъ рѣшетку, ибо тогда было бы $\lambda = 0$. На практикѣ этотъ случай рѣдко представляется. Коэффиціентъ λ имѣетъ большое значеніе въ статистикѣ.

§ 44. Положимъ, что имѣемъ 3 урны, въ каждой изъ которыхъ находятся бѣлые и черные шары. Пусть вѣроятности появленія бѣлаго шара изъ урнъ 1-ой, 2-ой и 3-ей будутъ соотвѣтственно p_1, p_2, p_3. Мы производимъ выниманіе изъ какой-нибудь одной урны. Обозначимъ черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ вѣроятности того, что выниманіе будетъ произведено соотвѣтственно изъ 1ой, 2-ой или 3-ей урнъ. Тогда вѣроятность появленія бѣлаго шара вообще будетъ

$$p = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 .$$

Если бы однако намъ было извѣстно, что появленіе бѣлаго шара имѣло мѣсто, то при дальнѣйшихъ опытахъ мы должны были сдѣлать иную оцѣнку вѣроятности. Мы можемъ предположить, что выниманіе было произведено изъ какой угодно урны. Имѣемъ такимъ образомъ 3 гипотезы. Пусть x_1, x_2, x_3 будутъ ихъ вѣроятности. Вѣроятность того, что былъ вынутъ бѣлый шаръ изъ I-ой урны есть $p_1\alpha_1$. Она равна вѣроятности того, что произошло появленіе бѣлаго шара и что послѣ этого оказалась справедливой I-ая гипотеза, т.е. равна px_1. Такимъ образомъ

$p_1\alpha_1 = px_1$ откуда $x_1 = \frac{p_1\alpha_1}{p}$ и вообще

$$x_i = \frac{p_i\alpha_i}{\sum_{i=1}^{3} p_i\alpha_i} \qquad (1)$$

ибо

$$p = \sum_{i=1}^{3} p_i\alpha_i$$

Формула /I/ есть формулой Байеса.

Если мы будемъ теперь вынимать шаръ изъ той же урны, изъ которой вынимали предыдущій разъ /причемъ былъ вынутъ бѣлый шаръ/ то для вѣроятности p' появленія бѣлаго шара получимъ очевидно такое выраженіе:

$$p' = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$$

Ясно, что $p' \neq p$ именно $p' > p$ /см.доб.VII/, если только p_1, p_2, p_3 не равны между собой. Впрочемъ, если бы мы имѣли только одну урну, то конечно было бы $p' = p$.

Аналогично, если бѣлый шаръ вынимался изъ одной и той же урны n разъ подрядъ /причемъ послѣ каждаго выниманія шаръ клали обратно/, то вѣроятность, что выниманіе производилось изъ i -ой урны есть

$$x_i = \frac{\alpha_i p_i^n}{\sum_{k=1}^{k=3} \alpha_k p_k^n}$$

Въ общемъ случаѣ если имѣемъ не 3, а m урнъ

$$x_i = \frac{\alpha_i \; p_i^{\,n}}{\sum_{k=1}^{k=m} \alpha_k p_k^{\,n}}$$

Изъ этой формулы можно вывести заключенія общаго характера. Положимъ, что при данномъ опытѣ ожидается появленіе нѣкотораго событія A Допустимъ, что данный опытъ можетъ имѣть два исхода P_1 и P_2 При каждомъ изъ нихъ можетъ произойти событіе A въ первомъ случаѣ съ вѣроятностью p_1 а во второмъ съ вѣроятностью p_2. Если α_1 и α_2 суть вѣроятности событій P_1 и P_2, то если черезъ x_i $(i=1,2)$ обозначимъ вѣроятность гипотезы, что при данномъ опытѣ имѣло мѣсто событіе P_i $(i=1,2)$ когда уже извѣстно, что событіе A произошло, будемъ имѣть по формулѣ Байеса

$$x_i = \frac{\alpha_i p_i}{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}$$

такъ что напр.

$$x_1 = \frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что если p_2 весьма мало, то x_1 весьма близко къ 1. Таким образомъ если намъ извѣстно, что въ случаѣ когда имѣетъ мѣсто вторая изъ гипотезъ, событіе A имѣетъ весьма малую вѣроятность произойти, при первой же гипотезѣ собтіе A досто-вѣрно, то послѣ появленія A вѣроятность первой гипотезы становится близка къ достовѣрности. При этомъ предполагаемъ, что $\alpha_1 \neq 0$ Эта вѣроятность будетъ еще больше, если собтіе A произойдетъ не I а n разъ и вообще, при всякомъ $p_2<1$ получимъ

$$x_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2 p_2^n}=\frac{1}{1+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}p_2^n}\to 1$$

при $n\to\infty$

§ 45. Перейдемъ теперь къ разсмотрѣнію болѣе важныхъ для статистики случаевъ, когда собтіе происходитъ не n разъ подрядъ, а m разъ изъ n. Положимъ, что въ данномъ опытѣ появляющееся собтіе A можетъ имѣть одну изъ вѣроятностей $B_1, B_2, \ldots B_N$ при чемъ вѣроятность каждаго значенія соотвѣтственно равна $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$. Произведено всего n опытовъ и собтіе A произошло m разъ, причемъ извѣстно, что во всѣхъ n опытахъ вѣроятность A оставалась равной одному и тому же значенію B_i но неизвѣстно какому именно. Обозначимъ черезъ x_i вообще вѣроятность предположенія, что при всѣхъ n опытахъ вѣроятность оставалась равной p_i. Вѣроятность, что собтіе A произойдетъ m разъ и $n-m$ не произойдетъ, равна

$$C_n^m p_i^m q_i^{n-m} \qquad \text{гдѣ } q_i = 1-p_i$$

если его вѣроятность въ отдѣльномъ опытѣ есть p_i

Слѣдовательно, по формулѣ Гайеса будемъ имѣть:

$$x_i = \frac{\alpha_i C_n^m p_i^m q_i^{n-m}}{\sum\limits_{i=1} \alpha_i C_n^m p_i^m q_i^{n-m}} = \frac{\alpha_i p_i^m q_i^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i p_i^m q_i^{n-m}} \quad \dots (2)$$

Отсюда слѣдуетъ также, что вѣроятность того, что событіе A которое произошло уже m разъ изъ n /при условіи, что въ каждомъ опытѣ сохраняется та же вѣроятность событія A / произойдетъ и въ $n+1$ -омъ опытѣ, равна

$$p' = \sum_{i=1}^{i=N} x_i p_i$$

т.е.

$$p' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i p_i^{m+1} q_i^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i p_i^m q_i^{n-m}}$$

Это будетъ вѣроятность событія A a posteriori которая, приблизительно, равна статистической вѣроятности $\frac{m}{n}$ и въ предѣлѣ $p' \to \frac{m}{n}$ при $n=\infty$ Въ частности, если α_i всѣ одинаковы, то

$$p' = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i^{m+1} q_i^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i^m q_i^{n-m}}$$

§ 46. Вернемся къ формулѣ /2/ и изслѣдуемъ случай, когда число возможныхъ гипотезъ безконечно велико. Положимъ, что въ данномъ опытѣ вѣроятность событія A можетъ имѣть произ -

вольное значеніе, заключающееся между 0 и I. При этомъ вѣроятность, что вѣроятность событія A заключается между x и $x+dx$ равна

$$f(x)\,dx$$

гдѣ $f(x)$ неизвѣстная вообще функція, но не отрицательная и непрерывная въ промежуткѣ 0.......I Кромѣ того

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

Если произведено n опытовъ, при которыхъ все время имѣла мѣсто одна и та же неизвѣстная гипотеза /т.е. x принимало все время значенія, заключенныя въ одномъ и томъ же промежуткѣ $(x,\ x+dx)$ гдѣ x неизвѣстно/, и если при этихъ n опытахъ событіе A произошло m разъ и $n-m$ разъ не произошло, то вѣроятность, что имѣетъ мѣсто какая-нибудь опредѣленная гипотеза / т.е. что x имѣетъ значеніе среднее между x и $x+dx$ причемъ здѣсь x есть уже опредѣленное число/ выразится на основаніи формулы /2/ такъ:

$$\frac{x^m(1-x)^{n-m}f(x)\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^{n-m}f(x)\,dx}$$

а вѣроятность, что x приняло какое нибудь значеніе, заключающееся въ конечномъ промежуткѣ $(x_0,\ x_1)$, гдѣ $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$ выразится суммой этихъ дробей, т.е. будетъ равна

$$\frac{\int_{z_0}^{z_1} x^m(1-x)^m f(x)\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^m f(x)\,dx} \quad --- \quad (3)$$

Въ большинствѣ случаевъ нѣтъ точныхъ указаній для выбора функціи $f(x)$. Поэтому если будемъ дѣлать какіе-нибудь выводы изъ предыдущей формулы, надо, чтобы функція $f(x)$ элиминировалась.

§ 47. Исходя изъ послѣдней формулы, докажемъ обратную теорему Лапласа: если извѣстно, что въ основѣ нѣкотораго событія лежитъ нѣкоторая математическая вѣроятность p /неизвѣстная намъ/ и если въ n опытахъ оказалось, что событіе произошло m разъ, то вѣроятность неравенства

$$z_0\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}} < p - \frac{m}{n} < z_1\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}} \quad -- \quad (4)$$

имѣетъ предѣломъ для $n=\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2}\,dz$$

Здѣсь z_0 и z_1 произвольныя числа. Число p можетъ имѣть всѣ значенія между 0 и I. Неравенство /4/ равнозначно слѣдующему:

$$\frac{m}{n} + z_0\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}} < p < \frac{m}{n} + z_1\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}$$

По предыдущему /формула 3/ вѣроятность, что p заключается между указанными предѣлами равна:

$$W = \frac{\int_{\frac{m}{n}+z_0\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}}^{\frac{m}{n}+z_1\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}} f(x)\,x^m(1-x)^{n-m}\,dx}{\int_0^1 f(x)\,x^m(1-x)^{n-m}\,dx}$$

Положимъ для краткости

$$z_0\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}=y_0 \quad \text{и} \quad z_1\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}=y_1$$

и сдѣлаемъ замѣну $x=\frac{m}{n}+y$

Тогда получимъ:

$$W=\frac{\int_{y_0}^{y_1} f(\frac{m}{n}+y)(\frac{m}{n}+y)^m(\frac{n-m}{n}-y)^{n-m}dy}{\int_{-\frac{m}{n}}^{\frac{n-m}{n}} f(\frac{m}{n}+y)(\frac{m}{n}+y)^m(\frac{n-m}{n}-y)^{n-m}dy}=$$

$$=\frac{(\frac{m}{n})^m(\frac{n-m}{n})^{n-m}\int_{y_0}^{y_1} f(\frac{m}{n}+y)(1+\frac{ny}{m})^m(1-\frac{ny}{n-m})^{n-m}dy}{(\frac{m}{n})^m(\frac{n-m}{n})^{n-m}\int_{-\frac{m}{n}}^{\frac{n-m}{n}} f(\frac{m}{n}+y)(1+\frac{ny}{m})^m(1-\frac{ny}{n-m})^{n-m}dy}$$

Мы предположимъ, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n}$ не равенъ ни 0, ни I. Очевидно, что то же будетъ имѣть мѣсто и для $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-m}{n}$. Пусть $L=\sqrt[12]{n}$ и $\varepsilon=L\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}$ (5)

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^2 n^{5/6}}}=0$$

и порядокъ малости ε будетъ равенъ порядку

$$\frac{1}{n^{5/12}}$$

Начнемъ наше изслѣдованіе съ того момента, когда

$$|z_0|,\ |z_1|<L,\quad \frac{n\varepsilon}{m},\ \frac{n\varepsilon}{n-m}<1$$

Тогда будемъ имѣть

$$|y_0|,\ |y_1|<\varepsilon \quad \text{и} \quad \left|\frac{ny}{m}\right|,\ \left|\frac{ny}{n-m}\right|<1$$

По теоремѣ о средней будемъ имѣть:

$$W=\frac{f(\frac{m}{n}+\bar{y})\int_{y_0}^{y_1}(1+\frac{ny}{m})^m(1-\frac{ny}{n-m})^{n-m}dy}{\int_{-\frac{m}{n}}^{\frac{n-m}{n}} f(\frac{m}{n}+y)(1+\frac{ny}{m})^m(1-\frac{ny}{n-m})^{n-m}dy} \qquad (6)$$

гдѣ $\bar{y}=\mathfrak{M}(y_0,y_1)$. Т.к. $\bar{y}$ есть безконечно малая величина при $n\to\infty$, то можемъ положить $f(\frac{m}{n}+\bar{y})=A(1+\alpha')$, гдѣ $A=f(\frac{m}{n})$

и $\lim_{n\to\infty} \alpha' = 0$

Далѣе, знаменатель мы разобьемъ на сумму:

$$\int_{-\frac{m}{n}}^{\frac{n-m}{n}} = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + R$$

гдѣ

$$R = \int_{-\frac{m}{n}}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\frac{n-m}{n}}$$

Разсуждая, какъ выше, мы можемъ написать:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f\left(\frac{m}{n}+y\right)\left(1+\frac{ny}{m}\right)^{m}\left(1-\frac{ny}{n-m}\right)^{n-m} dy =$$

$$= A(1+\alpha'')\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left(1+\frac{ny}{m}\right)^{m}\left(1-\frac{ny}{n-m}\right)^{n-m} dy$$

гдѣ $\alpha'' \to 0$ при $\lim \varepsilon = \lim \frac{1}{n} = 0$

Вычислимъ логариѳмъ произведенія $\left(1+\frac{ny}{m}\right)^{m}\left(1-\frac{ny}{n-m}\right)^{n-m} = J$

въ предположеніи, что $|y| < \varepsilon$ .. (7):

$$\log J = m\log\left(1+\frac{ny}{m}\right) + (n-m)\log\left(1-\frac{ny}{n-m}\right) =$$

$$= m\left(\frac{ny}{m} - \frac{n^2y^2}{2m^2} + \frac{n^3y^3}{3m^3} - \dots\right) + (n-m)\left(-\frac{ny}{n-m} - \frac{n^2y^2}{2(n-m)^2} - \frac{n^3y^3}{3(n-m)^3} - \dots\right) =$$

$$= -\frac{n^2y^2}{2m}(1+\alpha) - \frac{n^2y^2}{2(n-m)}(1+\beta) =$$

$$= -\frac{n^3y^2}{2m(n-m)}\left(1+\frac{\alpha(n-m)+\beta m}{n}\right) = -\frac{n^3y^2}{2m(n-m)}(1+\alpha_1),$$

гдѣ α, β и α_1 безконечно малыя порядка y, слѣдовательно, порядка не выше ε и, слѣдовательно, не выше $\frac{1}{n^{3/2}}$ Такимъ образомъ

$$J = e^{-\frac{n^3y^2}{2m(n-m)}(1+\alpha_1)} = e^{-z^2(1+\alpha_1)}$$

если положимъ $y = z\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}$ (8)

Замѣтимъ, что въ силу /7/ и /5/ будемъ имѣть

$$|z| < L = \sqrt[4]{n}$$

и значитъ $|z^2\alpha_1|$ будетъ величина порядка $\frac{1}{n^{1/4}}$ и можетъ быть сдѣлана такъ малой, какъ угодно при достаточно большомъ n

Пользуясь формулой /8/ преобразуемъ къ новому перемѣнному независимому интегралы стоящіе въ числителѣ и знаменателѣ дроби /6/ кромѣ интеграловъ входящихъ въ сумму R. Предѣлами интеграціи въ числителѣ будутъ очевидно числа x_0 и x_1, а въ знаменателѣ $-L$ и $+L$.

Получимъ

$$W = \frac{A(1+\alpha')\int_{x_0}^{x_1} e^{-x^2(1+\alpha_1)} \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\, dx}{R + A(1+\alpha'')\int_{-L}^{+L} e^{-x^2(1+\alpha_1)} \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\, dx} \qquad (9.)$$

Преобразуемъ теперь $R = \int_{-\frac{m}{n}}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{\frac{n-m}{n}}$

Пусть $|f(m)| < M$ для всѣхъ разсматриваемыхъ значеній перемѣннаго независимаго.

Такъ какъ $\left(1+\frac{ny}{m}\right)^m\left(1-\frac{ny}{n-m}\right)^{n-m}$ убываетъ съ возрастаніемъ y / убѣждаемся въ этомъ непосредственно дифференцированіемъ/ и т.к. для значеній y изъ промежутка $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ мы имѣли

$$\left(1+\frac{ny}{m}\right)^m\left(1-\frac{ny}{n-m}\right)^{n-m} = e^{-\frac{n^3y^2}{2m(n-m)}(1+\alpha_1)},$$

то

$$\left(1+\frac{ny}{m}\right)^m\left(1-\frac{ny}{n-m}\right)^{n-m} \leq e^{\frac{-n^3\varepsilon^2}{2m(n-m)}(1+\alpha_1)}$$

для всѣхъ значеній перемѣннаго y изъ промежутковъ $\left(-\frac{m}{n}, -\varepsilon\right)$ и $\left(\varepsilon, \frac{n-m}{n}\right)$. Поэтому

$$|R| < M\int_{-\frac{m}{n}}^{\frac{n-m}{n}} e^{-L^2(1+\alpha_1)}\,dy = M e^{-L^2(1+\alpha_1)}$$

причемъ мы всегда можемъ допустить, что $|\alpha_1| < \frac{1}{2}$. Поэтому

$$R = \mu e^{-t^2(1+\alpha_1)}$$

где $\quad -M < \mu < M.$

Вставимъ полученное выраженіе для R въ уравненіе /9/.

Получимъ

$$W = \frac{A(1+\alpha') \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2(1+\alpha_1)} \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\, dz}{A(1+\alpha'') \int_{-t}^{+t} e^{-z^2(1+\alpha_1)} \sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}\, dz + \mu e^{-t^2(1+\alpha_1)}}$$

и далѣе, раздѣляя числителя и знаменателя на $A\sqrt{\frac{2m(n-m)}{n^3}}$:

$$W = \frac{(1+\alpha') \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2(1+\alpha_1)}\, dz}{(1+\alpha'') \int_{-t}^{+t} e^{-z^2(1+\alpha_1)}\, dz + \mu_1 e^{-t^2(1+\alpha_1)} \sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}}$$

Въ виду отмѣченной малости $|z^2\alpha_1|$ мы можемъ представить $e^{-z^2\alpha_1}$ въ видѣ: $e^{-z^2\alpha_1} = 1+\alpha_2$ гдѣ α_2 безконечно-малая величина того же порядка, что и $z^2\alpha_1$. Тогда

$$W = \frac{(1+\alpha') \int_{z_0} e^{-z^2}(1+\alpha_2)\, dz}{(1+\alpha'') \int_{-t}^{+t} e^{-z^2}(1+\alpha_2)\, dz + \mu_1 e^{-t^2(1+\alpha_1)} \sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}} =$$

$$= \frac{(1+\alpha_3) \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2}\, dz}{(1+\alpha_4) \int_{-t}^{+t} e^{-z^2}\, dz + \mu_1 e^{-t^2(1+\alpha_1)} \sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}}$$

гдѣ α_3 и α_4 опять таки безконечно убываютъ при $n \to \infty$. Легко видѣть, что при этомъ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{2m(n-m)}}\, e^{-t^2(1+\alpha_1)} = 0$$

ибо $\sqrt{n}\, e^{-\frac{\sqrt[3]{n}}{2}} \to 0.$

Переходя къ предѣлу и помня, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-t}^{+t} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

получимъ $\quad \lim_{n\to\infty} W = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-z^2} dz,$

что и т.д.

ДОБАВЛЕНІЯ.

I. Вычислимъ

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx$$

при $a>0$. Изъ интегральнаго исчисленія извѣстно, что

$$\int_0^\infty e^{-bx}\sin ax\,dx = -\frac{e^{-bx}(b\sin ax + a\cos ax)}{a^2+b^2}\Big|_0^\infty = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Слѣдовательно

$$\int_c^b db\int_0^\infty e^{-bx}\sin ax\,dx = \int_c^b\frac{a\,db}{a^2+b^2} = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a} = \operatorname{arctg}\frac{a(b-c)}{a^2+bc}$$

а такъ какъ

$$\int_c^b db\int_0^\infty e^{-bx}\sin ax\,dx = \int_0^\infty dx\int_c^b e^{-bx}\sin ax\,db = \int_0^\infty\frac{e^{-cx}-e^{-bx}}{x}\sin ax\,dx$$

то

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx}-e^{-bx}}{x}\sin ax\,dx = \operatorname{arctg}\frac{a(b-c)}{a^2+bc}.$$

Полагая здѣсь $b=\infty$, $c=0$ найдемъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

ибо мы всегда можемъ, пользуясь произвольностью b и c предположить $\lim bc = K \neq \infty$.

Если бы было $a<0$ то такъ какъ $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ мы бы получили

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Это впрочемъ можно вывести и такъ:

Полагая $a=-\bar{a}$ гдѣ $\bar{a}>0$ получимъ:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = -\int_0^\infty \frac{\sin \bar{a} x}{x}dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Если наконецъ $a=0$ то $\sin ax=0$ и самъ интегралъ есть 0.

II. Если $x_1, x_2 \dots x_n$ суть не отрицательныя числа, а $f_1, f_2, \dots f_n$ суть положительныя числа, то всегда имѣетъ мѣсто неравенство:

$$\sum_1^n{}^3 f_i x_i^2 \leqq \sum_1^n{}^2 f_i x_i^3 \sum_1^n f_i.$$

Мы имѣемъ

$$\sum_1^n{}^3 f_i x_i^2 = \sum_1^n f_i x_i^2 \sum_1^n f_h y_h^2 \sum_1^n f_k z_k^2 =$$

$$= \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n f_i f_h f_k x_i^2 y_h^2 z_k^2$$

гдѣ $y_i = z_i = x_i$. Также точно

$$\sum_1^n{}^2 f_i x_i^3 \sum_1^n f_i = \sum_1^n f_i x_i^3 \sum_1^n f_h y_h^3 \sum_1^n f_k =$$

$$= \sum_1^n \sum_1^n \sum_1^n f_i f_h f_k x_i^3 y_h^3.$$

Такимъ образомъ надо доказать неравенство

$$\sum\sum\sum f_i f_h f_k x_i^2 y_h^2 z_k^2 \leqq \sum\sum\sum f_i f_h f_k x_i^3 y_h^3$$

или

$$S = \sum\sum\sum f_i f_h f_k (x_i^3 y_h^3 - x_i^2 y_h^2 z_k^2) \geqq 0.$$

Такъ какъ $x_i = y_i = z_i$ то очевидно

$$S = \sum\sum\sum f_i f_h f_k (x_i^3 z_k^3 - x_i^2 y_h^2 z_k^2),$$

$$S = \sum\sum\sum f_i f_h f_k (y_h^3 z_k^3 - x_i^2 y_h^2 z_k^2).$$

Складывая три выраженія S найдемъ:

$$3S = \sum\sum\sum f_i f_h f_k (x_i^3 y_h^3 + x_i^3 z_k^3 + y_h^3 z_k^3 - 3 x_i^2 y_h^2 z_k^2)$$

Такъ какъ $f_i f_h f_k > 0$, то достаточно доказать что всегда

$$x_i^3y_h^3+x_i^3z_k^3+y_h^3z_k^3-3x_i^2y_h^2z_k^2\geqslant 0.$$

Если хоть одно изъ чиселъ x_i, y_h, z_k равно 0, то это неравенство очевидно, ибо числа x_i, y_h, z_k не отрицательны и единственный отрицательный членъ суммы $-3x_i^2y_h^2z_k^2$ обращается въ 0. Итакъ, положимъ, что ни одно изъ чиселъ x_i, y_h, z_k не равно 0. Изъ 3-хъ чиселъ x_iy_h, x_iz_k, y_hz_k выберемъ наименьшее. Пусть напр.

$$x_iy_h\leqq x_iz_k,\ x_iy_h\leqq y_hz_k.$$

Тогда

$$x_i^3y_h^3+x_i^3z_k^3+y_h^3z_k^3-3x_i^2y_h^2z_k^2=$$

$$=x_i^3y_h^3\left[1+\left(\frac{x_iz_k}{x_iy_h}\right)^3+\left(\frac{y_hz_k}{x_iy_h}\right)^3-3\,\frac{x_iz_k}{x_iy_h}\cdot\frac{y_hz_k}{x_iy_h}\right].$$

Полагая $\frac{x_iz_k}{x_iy_h}=1+a,\ \frac{y_hz_k}{x_iy_h}=1+b$

гдѣ слѣдовательно $a>0, b>0$ видимъ, что достаточго доказать неравенство:

$$1+(1+a)^3+(1+b)^3-3(1+a)(1+b)\geqslant 0.$$

Это неравенство, какъ легко видѣть, всегда имѣетъ мѣсто при a и b положительныхъ.

Раскрывая скобки, находимъ:

$$3+3a+3a^2+a^3+3b+3b^2+b^3-3a-3b-3-3ab=$$

$$=3(a^2+b^2-ab)+a^3+b^3\geqslant 3(a^2+b^2-2ab)\geqslant 0.$$

Если $n=\infty$ то посредствомъ перехода къ предѣлу легко убѣдиться, что

$$\sum_1^\infty{}^3 f_ix_i^2\leqq\sum_1^\infty{}^2 f_ix_i^3\sum_1^\infty f_i.$$

Итакъ вообще для n конечнаго или безконечнаго

$$\sum_1^n{}^3 f_i x_i^2 \leq \sum_1^n{}^2 f_i x_i^3 \sum_1^n f_i$$

Если $\sum_1^n f_i = 1$, то найдемъ:

$$\sum_1^n{}^3 f_i x_i^2 \leq \sum_1^n{}^2 f_i x_i^3 .$$

Докажемъ еще, что

$$\left(\int_a^b x^2 f(x)\,dx\right)^3 \leq \left(\int_a^b x^3 f(x)\,dx\right)^2 \int_a^b f(x)\,dx,$$

если $b > a > 0$ и $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b) не отрицательна. Мы имѣемъ

$$\left(\int_a^b x^2 f(x)\,dx\right)^3 = \int_a^b \int_a^b \int_a^b x^2 y^2 z^2 f(x) f(y) f(z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\left(\int_a^b x^3 f(x)\,dx\right)^2 \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \int_a^b \int_a^b x^3 y^3 f(x) f(y) f(z)\,dx\,dy\,dz.$$

Значитъ надо доказать, что

$$\iiint x^3 y^3 f(x) f(y) f(z)\,dx\,dy\,dz - \iiint x^2 y^2 z^2 f(x) f(y) f(z)\,dx\,dy\,dz \geq 0,$$

или

$$I = \iiint f(x) f(y) f(z) (x^3 y^3 - x^2 y^2 z^2)\,dx\,dy\,dz \geq 0.$$

Очевидно

$$I = \iiint f(x) f(y) f(z) (x^3 z^3 - x^2 y^2 z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I = \iiint f(x) f(y) f(z) (y^3 z^3 - x^2 y^2 z^2)\,dx\,dy\,dz$$

откуда, складывая, получимъ:

$$3I = \iiint f(x) f(y) f(z) (x^3 y^3 + x^3 z^3 + y^3 z^3 - 3x^2 y^2 z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Но $f(x) f(y) f(z) \geq 0$

и какъ мы видѣли

$$x^3 y^3 + x^3 z^3 + y^3 z^3 - 3x^2 y^2 z^2 \geq 0.$$

Слѣдовательно,

$$I > 0$$

III. Извѣстно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Измѣняя здѣсь x въ $x+a$ получимъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} dx = e^{-a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2ax} dx = \sqrt{\pi}.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2ax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-2ax} dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(e^{2ax}+e^{-2ax}\right) dx.$$

Слѣдовательно

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(e^{2ax}+e^{-2ax}\right) dx = e^{a^2}\sqrt{\pi}.$$

Такъ какъ обѣ части послѣдняго равенства суть голоморфныя функціи перемѣннаго a то это равенство справедливо и для мнимыхъ значеній a и поэтому, замѣняя a черезъ ai и замѣчая, что $e^{2aix}+e^{-2aix} = 2\cos 2ax$, получимъ:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2ax\, dx = \frac{1}{2} e^{-a^2}\sqrt{\pi}.$$

IV. Найдемъ интегралъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+p^2},$$

гдѣ $m>0$. Этотъ интегралъ равенъ интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{mxi}\, dx}{x^2+p^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x^2+p^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sin mx\, dx}{x^2+p^2}$$

такъ какъ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\sin mx}{x^2+p^2} dx = 0.$$

Вычислимъ интегралъ

$$\int \frac{e^{mxi}\,dx}{x^2+p^2}.$$

Возьмемъ интегралъ вдоль замкнутаго контура, образованнаго осью x и полуокружностью весьма большого радiуса, описанной изъ начала координатъ и расположенной надъ осью x. Внутри этого контура подъинтегральная функцiя голоморфна за исключенiемъ точки $x=pi$ въ которой она обращается въ ∞. Поэтому интегралъ, взятый вдоль этого контура, будетъ равенъ вычету функцiи $\frac{e^{mxi}}{x^2+p^2}$ относящемуся къ точкѣ $x=pi$, т.е. $\frac{e^{-mp}}{2pi}$ умноженному на $2\pi i$, т.е. интегралъ будетъ равенъ $\frac{\pi e^{-mp}}{p}$.

Вычислимъ интегралъ, взятый вдоль весьма большого полукруга. Полагая $x=\varrho e^{\theta i}$ видимъ, что этотъ интегралъ приведется къ

$$\int_0^\pi \frac{e^{m\varrho i\cos\theta-\varrho m\sin\theta}}{\varrho^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)+p^2}\varrho i e^{\theta i}d\theta,$$

въ которомъ надо положить $\varrho\to\infty$. Но если $m>0$, то при $\varrho\to\infty$ этотъ интегралъ есть 0 и остается только интегралъ взятый вдоль оси x. Такъ что имѣемъ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx\,dx}{x^2+p^2}=\frac{\pi e^{-mp}}{p}$$

V. Условіе необходимое и достаточное для расходимости ряда $\sum p_i q_i$, гдѣ $p_i+q_i=1$ состоитъ въ томъ, что долженъ расходиться рядъ $\sum m(p_i,q_i)$, если $m(p_i,q_i)$ означаетъ наименьшее изъ обоихъ чиселъ p_i, q_i. Это непосредственно слѣдуетъ изъ неравенства:

$$\frac{1}{2}m(p_i,q_i) \leq p_i q_i \leq m(p_i,q_i).$$

VI. Имѣемъ рядъ положительныхъ чиселъ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ меньшихъ I. Пусть

$$q_i = 1-p_i \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Тогда полагая $p=\frac{\sum_1^n p_i}{n}$, $q=1-p$, будемъ имѣть:

$$\frac{\sum_1^n p_i q_i}{npq} \leq 1,$$

причемъ знакъ равенства имѣетъ мѣсто лишь въ случаѣ равенства всѣхъ p_i. Въ самомъ дѣлѣ:

$$\sum_1^n p_i q_i = \sum_1^n p_i - \sum_1^n p_i^2;$$

но, вообще,

$$\sum^2 \alpha_i\beta_i = \sum \alpha_i^2 \sum \beta_i^2 \quad \sum(\alpha_i\beta_k-\alpha_k\beta_i)^2,$$

такъ что, полагая $\alpha_i=p_i$, $\beta_i=1$ находимъ:

$$\sum_1^n{}^2 p_i = n\sum_1^n p_i^2 - \sum_1^n (p_i-p_k)^2.$$

Слѣдовательно

$$\sum_1^n p_i q_i = \sum_1^n p_i - \frac{1}{n}\sum_1^n{}^2 p_i - \frac{1}{n}\sum_1^n (p_i-p_k)^2 =$$
$$= np - np^2 - \frac{1}{n}\sum_1^n (p_i-p_k)^2 = npq - \frac{1}{n}\sum_1^n (p_i-p_k)^2 \leq npq$$

VII. Если $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$,

то

$$\frac{p_1^2\alpha_1+p_2^2\alpha_2+p_3^2\alpha_3}{p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3} \geqslant p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3$$

причемъ знакъ равенства имѣетъ мѣсто лишь при $p_1=p_2=p_3$. Надо доказать, что

$$p_1^2\alpha_1+p_2^2\alpha_2+p_3^2\alpha_3 \geqslant (p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3)^2.$$

Имѣемъ:

$$p_1^2\alpha_1+p_2^2\alpha_2+p_3^2\alpha_3-(p_1\alpha_1+p_2\alpha_2+p_3\alpha_3)^2=$$

$$=p_1^2\alpha_1+\cdots+p_3^2\alpha_3-p_1^2\alpha_1^2-\cdots-2p_1p_2\alpha_1\alpha_2-\cdots=$$

$$=p_1^2(1-\alpha_1)+\cdots-2p_1p_2\alpha_1\alpha_2-\cdots=$$

$$=p_1^2\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)+p_2^2\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+p_3^2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2)-$$

$$-2p_1p_2\alpha_1\alpha_2-2p_1p_3\alpha_1\alpha_3-2p_2p_3\alpha_2\alpha_3=$$

$$=\alpha_1\alpha_2(p_1^2+p_2^2-2p_1p_2)+\cdots+\alpha_2\alpha_3(p_2^2+p_3^2-2p_2p_3)\geqslant 0.$$

- К О Н Е Ц Ъ -

Издательское Бюро

О-ва В-щи Студ. Мат. выражаетъ товарищу

И. М. Бабакову

искреннюю благодарность за оказанную имъ помощь при изданіи настоящей книги. -

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ:

Стр.	Строка	Напечатано	Должно-быть
57	Сверху 14	М.О $(x-a)^2$	М.О $(x-A)^2$
58	Снизу 13	которыя	которые
64	Св. 1		n
64	Св. 3		$\left\lvert \frac{m}{n} - \frac{p_1+p_2+\dots+p_n}{n} \right\rvert < \varepsilon$
66	Сн. 6	вынуть шаръ	вынуть бѣлый шаръ
75	Св. 11	правильно	правильнаго
80	Сн. 8	М.О.(y^2)	М.О. x^2

70к.