§ III.

ТЕОРІЯ ПФАФФА СЪ ДОПОЛНЕНІЯМИ ЯКОБИ.

1. Изслѣдованія Пфаффа составили эпоху въ разсматриваемой нами части трансцендентнаго анализа. Очень вѣроятно, что основную мысль заимствовалъ Пфаффъ изъ остроумнаго пріема, придуманнаго Лагранжемъ для интегрированія какихъ угодно уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка между тремя измѣняемыми *. Тѣмъ не менѣе, замѣчательное въ высшей степени примѣненіе этой мысли къ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ принадлежитъ самому Пфаффу. Есть также поводъ думать, что замѣчаніе Монжа о возможности уменьшать число перемѣнныхъ въ уравненіи было точкою отправленія при этихъ розысканіяхъ.

---

* Способъ Лагранжа распространенъ былъ мною въ началѣ 1843 года на уравненія 1-го порядка съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ и помѣщенъ безъ всякаго измѣненія, въ 1849 году, въ § 14 магистерскаго разсужденія Жирухина, который имѣлъ въ рукахъ мою рукопись еще съ 1843.

Какъ бы то ни было, но Пфаффъ именно началъ съ того, что простое замѣчаніе Монжа возвелъ на степень предложенія, доказавши, что чрезъ искусное введеніе новыхъ вспомогательныхъ величинъ каждое линейное дифференціальное уравненіе съ четнымъ числомъ перемѣнныхъ всегда можетъ быть преобразовано въ другое съ единицею меньшимъ числомъ измѣняемыхъ количествъ.

Постановка этого предложенія весьма естественнымъ образомъ привела его къ новой теоремѣ.

Для интеграціи каждаго линейнаго дифференціальнаго уравненія между $m+1$ перемѣнныхъ необходимо и достаточно $\frac{m+1}{2}$ отношеній съ такимъ-же числомъ постоянныхъ произвольныхъ, если $m+1$ будетъ числомъ четнымъ.

При доказательствѣ обѣихъ истинъ, я возьмусь нѣсколько общѣе, чѣмъ это дѣлается обыкновенно.

2. Пусть дано уравненіе

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_m\,\partial x_m = 0, \quad (1)$$

разумѣется неудовлетворяющее условіямъ интегральности.

Чтобы преобразовать его въ другое съ числомъ перемѣнныхъ единицею меньше, введемъ на первый разъ $m+1$ новыхъ величинъ

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_m,$$

и свяжемъ ихъ съ перемѣнными

$$x,\ x_1\ .\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_m$$

посредствомъ неопредѣленныхъ дѣйствій

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \ldots\ldots\ f_m,$$

напримѣръ такъ:

$$x = f\,(a, a_1, a_2 \ldots\ldots a_m),\; x_1 = f_1\,(a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_m)$$
$$\ldots\ldots x_m = f_m\,(a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_m). \quad (2)$$

Въ силу этихъ допущеній, во первыхъ, будемъ имѣть:

$$\partial x_j = \frac{\partial x_j}{\partial a}\,\partial a + \frac{\partial x_j}{\partial a_1},\,\partial a_1 + \frac{\partial x_j}{\partial a_2}\,\partial a_2 + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\partial x_j}{\partial a_m}\,\partial a_m, \quad (3)$$

а во вторыхъ, вмѣсто даннаго уравненія слѣдующее:

$$P\,\partial a + P_1\,\partial a_1 + P_2\,\partial a_2 + \ldots\ldots + P_m\,\partial a_m = 0 \quad (4)$$

гдѣ

$$P_\kappa = X\,\frac{\partial x}{\partial a_\kappa} + X_1\,\frac{\partial x_1}{\partial a_\kappa} + X_2\,\frac{\partial x_2}{\partial a_\kappa} + \ldots\ldots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial a_\kappa}. \quad (5)$$

3. Понятно, что множители P_κ останутся совершенно неопредѣленными, пока не опишемъ дѣйствій f какъ-нибудь, и что до тѣхъ поръ уравненіе (4) не въ состояніи служить намъ ни къ чему. Но каковы бы ни были свойства функцій $f, f_1, f_2, \ldots\ldots f_m$, между коэффиціентами уравн. (4) существуетъ очень замѣчательное отношеніе, изъ котораго развивается вся теорія Пфаффа. Предположивъ въ (5) указатель к отличнымъ отъ нуля, продифференцируемъ эту формулу по измѣняемости a; допустивъ потомъ $k = 0$, продифференцируемъ выводъ вновь по измѣняемости a_κ; получимъ:

$$\frac{dP_\kappa}{da} = \frac{dX}{da}\frac{\partial x}{\partial a_\kappa} + \frac{dX_1}{da}\frac{\partial x_1}{\partial a_\kappa} + \frac{dX_2}{da}\frac{\partial x_2}{\partial a_\kappa} + \ldots + \frac{dX_m}{da}\frac{\partial x_m}{\partial a_\kappa} +$$
$$X\,\frac{\partial^2 x}{\partial a_\kappa\,\partial a} + X_1\,\frac{\partial^2 x_1}{\partial a_\kappa\,\partial a} + X_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial a_\kappa\,\partial a} + \ldots + X_m\frac{\partial^2 x_m}{\partial a_\kappa\,\partial a},$$

$$\frac{dP}{da_к} = \frac{dX}{da_к}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dX_1}{da_к}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{dX_2}{da_к}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{dX_m}{da_к}\frac{\partial x_m}{\partial a} +$$

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial a \partial a_к} + X_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial a \partial a_к} + X_2\frac{\partial^2 x_2}{\partial a \partial a_к} + \ldots + X_m\frac{\partial^2 x_m}{\partial a\, \partial a_к}.$$

Отсюда чрезъ вычитаніе найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dP_к}{da} - \frac{dP}{da_к} = \frac{dX}{da}\frac{\partial x}{\partial a_к} + \frac{dX_1}{da}\frac{\partial x_1}{\partial a_к} + \frac{dX_2}{da}\frac{\partial x_2}{\partial a_к} + \ldots + \frac{dX_m}{dx}\frac{\partial x_m}{\partial a_к} \\ \quad - \left\{\frac{dX}{da_к}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dX_1}{da_к}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{dX_2}{da_к}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{dX_m}{da_к}\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\} \end{array}\right\} (6)$$

Развивъ здѣсь самымъ дѣломъ дифференцированія по a и по $a_к$, указываемыя знакомъ d, будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l} \frac{dP_к}{da} - \frac{dP}{da_к} = \left\{\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial X}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\}\frac{\partial x}{\partial a_к} + \\ \left\{\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial X_1}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\}\frac{\partial x_1}{\partial a_к} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left\{\frac{\partial X_m}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial X_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_m}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + \frac{\partial X_m}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\}\frac{\partial x_m}{\partial a_к} - \\ \left\{\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a_к} + \frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_к} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_к} + \ldots + \frac{\partial X}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial a_к}\right\}\frac{\partial x}{\partial a} - \\ \left\{\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a_к} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_к} + \frac{\partial X_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_к} + \ldots + \frac{\partial X_1}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial a_к}\right\}\frac{\partial x_1}{\partial a} - \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left\{\frac{\partial X_m}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a_к} + \frac{\partial X_m}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a_к} + \frac{\partial X_m}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a_к} + \ldots + \frac{\partial X_m}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial a_к}\right\}\frac{\partial x_m}{\partial a}. \end{array}$$

Если въ вычитаемыхъ членахъ отберемъ особенно тѣ, которые множатся на $\frac{\partial x}{\partial a_к}, \frac{\partial x_1}{\partial a_к}, \frac{\partial x_2}{\partial a_к}, \ldots \frac{\partial x_m}{\partial a_к}$; если еще, для краткости, допустимъ обозначеніе Лагранжа:

$$\frac{\partial X_g}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_g} = (g,\ h),\ (7)$$

употребленное нами въ § I, и опять замѣтимъ, что символъ (g, h) имѣетъ свойство, во первыхъ, перемѣнять знакъ при перестановкѣ буквъ g и h, а во вторыхъ, исчезать, коль скоро сдѣлаемъ $g = h$, то выраженіе для разности $\frac{dP_\kappa}{da} - \frac{dP}{da_\kappa}$ приметъ слѣдующій видъ:

$$\frac{dP_\kappa}{da} - \frac{dP}{da_\kappa} = \left\{(0,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (0,1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (0,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \right.$$
$$\left. + (0,m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\}\frac{\partial x}{\partial a_\kappa} +$$
$$\left\{(1,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (1,1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \right.$$
$$\left. + (1,m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\}\frac{\partial x_1}{\partial a_\kappa} +$$
$$(8) \qquad \left\{(2,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (2,1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (2,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \right.$$
$$\left. + (2,m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\}\frac{\partial x_2}{\partial a_\kappa} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left\{(m,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (m,1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (m,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \right.$$
$$\left. + (m,m)\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\}\frac{\partial x_m}{\partial a_\kappa},$$

гдѣ члены вида $(\kappa, \kappa)\frac{\partial x_\kappa}{\partial a}$ удержаны нами единственно для симметріи выраженія. Это и есть та самая формула, которую мы искали. Повторяемъ, что разность

$$\frac{dP_\kappa}{da} - \frac{dP}{da_\kappa}$$

будетъ неопредѣленна, пока не назначимъ дѣйствій $f, f_1, f_2 \ldots\ldots f_m$.

4. Имѣя въ виду первую теорему Пфаффа, расположимъ этими дѣйствіями такъ, чтобы одинъ который-нибудь коэффиціентъ въ уравненіи (4) уничтожился, а остальные члены содержали бы только въ общемъ ихъ множителѣ ту букву, дифференціалъ которой выйдетъ изъ вычисленія. Если уничтожающимся коэффиціентомъ будетъ первый, то буква a должна входить во множителя общаго всѣмъ нумерованнымъ P. Назвавши черезъ z множитель обратный сказанному, произведеніе $z\, P_к$, гдѣ k измѣняется отъ 1 до m, не должно уже содержать количества a. Поэтому аналитическія выраженія постановленныхъ условій будутъ:

$$P = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d\,(z\,P_к)}{da} = 0. \quad (10)$$

произведя дифференцированіе въ формулѣ (10), получимъ:

$$-\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{da} = \frac{1}{P_к} \cdot \frac{dP_к}{da},$$

или, предположивъ для краткости:

$$-\frac{1}{z}\frac{dz}{da} = N, \quad (11)$$

вмѣсто отношеній (9) и (10) будемъ имѣть два слѣдующія:

$$P = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dP_к}{da} = NP_к, \quad (13)$$

которыя можно написать такъ:

$$X\frac{\partial x}{\partial a} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial a} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial a} + \dots\dots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial a} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{dP_\kappa}{da} = N \left\{ X \frac{\partial x}{\partial a_\kappa} + X_1 \frac{\partial x_1}{\partial a_\kappa} + X_2 \frac{\partial x_2}{\partial a_\kappa} + \ldots + X_m \frac{\partial x_m}{\partial a_\kappa} \right\} \quad (15)$$

Замѣтивъ теперь, что если равенство (12) есть тожество, то результатъ его дифференцированія въ разсужденіи какого угодно изъ a также долженъ быть тожественъ съ нулемъ. Въ слѣдствіе того:

$$\frac{dP}{da_\kappa} = 0, \quad (16)$$

и формула (8) доставитъ намъ выраженіе для $\frac{dP_\kappa}{da}$, черезъ сравненіе котораго съ правою частію (15) выведемъ систему $m+1$ линейныхъ уравненій вида:

$$\left.\begin{aligned}
NX &= (0,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (0,1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (0,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \\
&\qquad + (0.m)\frac{\partial x_m}{\partial a}, \\
NX_1 &= (1,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (1,1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (1,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \\
&\qquad + (1,m)\frac{\partial x_m}{\partial a}, \\
NX_2 &= (2,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (2,2)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (2,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \\
&\qquad + (2,m)\frac{\partial x_m}{\partial a}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
NX_m &= (m,0)\frac{\partial x}{\partial a} + (m,1)\frac{\partial x_1}{\partial a} + (m,2)\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots \\
&\qquad + (m,m)\frac{\partial x_m}{\partial a},
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

съ числомъ $m+2$ неизвѣстныхъ:

$$N, \frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x_1}{\partial a}, \frac{\partial x_2}{\partial a}, \ldots\ldots \frac{\partial x_m}{\partial a}.$$

Значитъ, это система уравненій неопредѣленныхъ.

Присоединеніе равенства (14)

$$0 = X\frac{\partial x}{\partial a} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial a} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots X_m\frac{\partial x_m}{\partial a}$$

не прибавитъ ничего существеннаго, потому что оно было уже принято во вниманіе при составленіи (17) и необходимо вытекаетъ изъ нашей системы. И точно, помноживъ равенства (17) соотвѣтственно на $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x_1}{\partial a}$, $\frac{\partial x_2}{\partial a}, \ldots \frac{\partial x_m}{\partial a}$ и составивъ сумму слѣдствій, въ силу свойствъ символа (g, h), будемъ имѣть:

$$N\left\{X\frac{\partial x}{\partial a} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial a} + X_2\frac{\partial x_2}{\partial a} + \ldots + X_m\frac{\partial x_m}{\partial a}\right\} = 0;$$

слѣдовательно и проч. И такъ, чтобы изъ системы (17) вывести какія-нибудь полезныя заключенія, одною изъ неизвѣстныхъ величинъ мы должны располагать по произволу, или, все равно, ввести еще какое-нибудь условіе:

6. Если, напримѣръ, допустимъ:

$$x = a \ (18) \text{ и слѣдовательно: } \frac{\partial x}{\partial a} = 1,$$

то предъидущая система перейдетъ въ такую:

$$\left.\begin{aligned}
X &= (0,0)\frac{1}{N} + (0,1)\frac{1}{N}\frac{\partial x_1}{\partial x} + (0,2)\frac{1}{N}\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\\
&\qquad\qquad + (0,m)\frac{1}{N}\frac{\partial x_m}{\partial x},\\
X_1 &= (1,0)\frac{1}{N} + (1,1)\frac{1}{N}\frac{\partial x_1}{\partial x} + (1,2)\frac{1}{N}\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\\
&\qquad\qquad + (1,m)\frac{1}{N}\frac{\partial x_m}{\partial x},\\
X_2 &= (2,0)\frac{1}{N} + (2,1)\frac{1}{N}\frac{\partial x_1}{\partial x} + (2,2)\frac{1}{N}\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\\
&\qquad\qquad + (2,m)\frac{1}{N}\frac{\partial x_m}{\partial x},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_m &= (m,0)\frac{1}{N} + (m,1)\frac{1}{N}\frac{\partial x_1}{\partial x} + (m,2)\frac{1}{N}\frac{\partial x_2}{\partial x} + \ldots\\
&\qquad\qquad + (2,m)\frac{1}{N}\frac{\partial x_m}{\partial x},
\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

которая какъ-разъ совпадаетъ съ системою Пфаффа, да и условія теперь его-же.

7. Система (19) весьма замѣчательна въ томъ отношеніи, что въ ней коэффиціенты при неизвѣстныхъ величинахъ

$$\frac{1}{N},\ \frac{1}{N}\frac{\partial x_1}{\partial x},\ \frac{1}{N}\frac{\partial x_2}{\partial x},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{N}\frac{\partial x_m}{\partial x},$$

составляющіе горизонтальные ряды, отличаются только знаками отъ соотвѣтствующихъ имъ коэффиціентовъ, расположенныхъ по вертикальнымъ столбцамъ. Для возможности подобныхъ системъ необходимо, чтобы опредѣлитель былъ отличенъ отъ нуля; а это, какъ извѣстно, напримѣръ изъ изслѣдованій Якоби, имѣетъ мѣсто тогда, когда число уравненій, т. е. $m+1$ четное. Отсюда и открывается, почему излагаемая нами теорія требуетъ четнаго числа перемѣнныхъ въ линейномъ дифференціальномъ уравненіи (1).

8. Слѣдовательно, предположивъ $m+1$ четнымъ, и назвавъ черезъ Δ опредѣлитель системы, по правиламъ алгебры найдемъ:

$$\frac{1}{N}=\frac{U}{\Delta},\ \frac{1}{N}\frac{\partial x_1}{\partial x}=\frac{U_1}{\Delta},\ \frac{1}{N}\frac{\partial x_2}{\partial x}=\frac{U_2}{\Delta}\dots\ \frac{1}{N}\frac{\partial x_m}{\partial x}=\frac{U_m}{\Delta},\quad(20)$$

откуда получимъ:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}=\frac{U_1}{U},\ \frac{\partial x_2}{\partial x}=\frac{U_2}{U},\ \dots\dots\ \frac{\partial x_m}{\partial x}=\frac{U_m}{U},\qquad(21)$$

систему m дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между $m+1$ перемѣнныхъ величинъ. Это опять система Пфаффа. Отъ интеграціи ея зависитъ опредѣленіе неизвѣстныхъ еще намъ дѣйствій f.

9. Вотъ какъ это дѣлается: найдя интегральныя отношенія, принадлежащія уравненіямъ (21), и произвольнымъ величинамъ, которыя войдутъ чрезъ интегрированіе, приписавъ значенія прежде введенныхъ въ разсмотрѣніе количествъ a, получимъ систему равенствъ:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1\,(x,\,x_1,\,x_2,\,\dots\dots x_m)=a_1\\ \varphi_2\,(x,\,x_1,\,x_2,\,\dots\dots x_m)=a_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi_m\,(x,\,x_1,\,x_2,\,\dots\dots x_m)=a_m,\end{array}\right\}\ (22)$$

которая не перестанетъ изображать интегралы формулъ (21). Разрѣшивъ эту систему относительно x_1, x_2, ... x_m, найдемъ для нихъ вполнѣ опредѣленныя выраженія, въ зависимости отъ x и отъ a_1, a_2, ... a_m. Такимъ образомъ всѣ f будутъ опредѣлены.

10. Когда найдутся f_1, f_2, ... f_m, тогда въ уравненіи (4) коэффиціентъ при $\partial a = \partial x$, т. е. P_1 обратится самъ собою въ нуль, а всѣ нумерованныя P будутъ заключать $a = x$ въ общемъ ихъ множителѣ и сдѣлаются функціями совершенно извѣстными.

11. Такъ какъ теперь, въ силу первой изъ формулъ (20),

$$N = \frac{1}{Z}\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta}{U},$$

то

$$\log z = \int \frac{\Delta\, \partial x}{U},$$

а

$$z = e^{\int \frac{\Delta\, \partial x}{U}}, \qquad (23)$$

и слѣдовательно множитель, общій всѣмъ нумерованнымъ P, будетъ:

$$\frac{1}{z} = e^{-\int \frac{\Delta}{U}\partial x} \qquad (24)$$

12. Выдѣливъ изъ P_k этотъ множитель, получимъ линейное дифференціальное уравненіе:

$$A_1\, \partial a_1 + A_2\, \partial a_2 + \ldots + A_{m-1}\, \partial a_{m-1} + A_m\, \partial a_m = 0, \qquad (25)$$

въ которомъ всѣ A будутъ опредѣленными функціями только отъ a_1, a_2, ... a_m.

13. Уравненіе (25) можно разсматривать съ двухъ сторонъ и слѣдовательно придти къ двумъ различнымъ истинамъ; а именно: если $a_1, a_2, \ldots a_m$ принимать за величины постоянныя, и слѣдовательно $\partial a_1, \partial a_2, \ldots \partial a_m$ за нули, то (25) перейдетъ въ тожество: $0=0$, а система (22) изобразитъ полную систему интегральныхъ отношеній уравненія (1), требуемыхъ теоремою Монжа.

Если же на $a_1, a_2, \ldots a_m$ смотрѣть какъ на количества измѣняемыя, то получимъ первое предложеніе Пфаффа.

14. Мы придемъ къ тѣмъ-же выводамъ, если вмѣсто того, чтобъ въ уравнен. (17) дѣлать $x=a$, т. е. назначать опредѣленную форму для перваго изъ равенствъ (2), допустимъ какую-нибудь опредѣленную форму для множителя, который долженъ входить въ P_k.

15. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, напримѣръ,

$$N=1, \quad (26)$$

система (17) приведется къ виду

$$\frac{\partial a}{\Delta}=\frac{\partial x}{U}=\frac{\partial x_1}{U_1}=\frac{\partial x_2}{U_2}=\ldots=\frac{\partial x_m}{U_m}, \quad (27)$$

т. е. къ совокупности $m+1$ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между числомъ $m+2$ перемѣнныхъ $a, x, x_1, x_2, \ldots x_m$, при чемъ функціи Δ, U, $U_1 \ldots U_m$ не содержатъ въ себѣ явнымъ образомъ количества a.

16. Послѣднія m равенствъ въ ряду (27):

$$\frac{\partial x}{U}=\frac{\partial x_1}{U_1}=\frac{\partial x_2}{U_2}=\ldots=\frac{\partial x_m}{U_m}$$

имѣютъ интегралами формулы (22); потому мы можемъ $x_1, x_2, \ldots x_m$ выразить черезъ $x, a_1, a_2 \ldots a_m$, и найденныя значенія подставить въ первое отношеніе изъ (27):

$$\partial a = \frac{\Delta}{U}\,\partial x,$$

интегралъ котораго:

$$a = \int \frac{\Delta\,\partial x}{U}. \quad (28)$$

пополнитъ систему (22) такъ, что она будетъ полною системою интеграловъ уравненій (27).

17. Такъ какъ теперь, по (26):

$$\frac{1}{z}\,\frac{dz}{da} = 1, \text{ то } \log z = a, \text{ и } z = e^a \quad (29)$$

Уравненія (22) и (28), по разрѣшеніи относительно x, $x_1, x_2 \ldots x_m$, очевидно доставятъ совершенно опредѣленныя величины функціямъ

$$f\,(a, a_1, \ldots a_m),\ f_1\,(a, a_1, \ldots a_m), \ldots f_m\,(a, a_1, \ldots a_m),$$

а потому и проч.

18. Значитъ, первое предложеніе Пфаффа всегда можетъ быть доказано: 1) или посредствомъ допущеній:

$$x = x,\ x_1 = f_1\,(x, a_1, a_2, \ldots a_m), \ldots x_m = f_m\,(x, a_1, a_2, \ldots a_m)$$

и опредѣленія неизвѣстныхъ дѣйствій такъ, чтобы въ преобразованномъ уравненіи коэффиціентъ при ∂x былъ нулемъ, а остальные предстоящіе содержали x только въ общемъ ихъ множителѣ; или 2) при помощи предположеній:

$$x = f\,(a, a_1, a_2, \ldots a_m),\; x_1 = f_1\,(a, a_1, a_2 \ldots a_m),$$
$$\ldots\ldots x_m = f_m\,(a, a_1, a_2, \ldots a_m)$$

и опредѣленія символовъ $f, f_1, \ldots f_m$ такъ, чтобъ въ преобразованномъ уравненіи множитель при ∂a былъ нулемъ, а коэффиціенты остальныхъ членовъ заключали бы количество a, только въ общемъ множителѣ, опредѣляемомъ формулою вида

$$e^{-a}$$

Понятно, впрочемъ, что оба рода условій не отличаются существеннымъ образомъ одно отъ другаго.

19. Представивъ уравненіе (1) подъ формою

$$A_1\,\partial a_1 + A_2\,\partial a_2 + \ldots + A_{m-1}\,\partial a_{m-1} + A_m\,\partial a_m = 0, \quad (30)$$

къ этому послѣднему мы не въ состояніи приложить прежнихъ преобразованій; а потому, чтобы изъ (30) извлечь какую-нибудь пользу для интеграціи (1), необходимо ввести въ вычисленіе какую-нибудь новую мысль. Пфаффъ вздумалъ одно изъ количествъ a разсматривать постояннымъ, и, слѣдовательно, дифференціалъ его нулемъ. Поступивъ такимъ образомъ, (3) перейдетъ въ

$$A_1\,\partial a_1 + A_2\,\partial a_2 + \ldots\ldots + A_{m-1}\,\partial a_{m-1} = 0, \quad (31)$$

если $\partial a_m = 0$; а изъ системы (22) или (22) и (29) одно уравненіе

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_m\,(x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_m) = a_m \\ \text{или проще } a_m = \text{пост.} \end{array}\right\} (32)$$

будетъ однимъ изъ искомыхъ интегральныхъ отношеній уравненія (1).

20. Дифференціальная формула (31) содержитъ число перемѣнныхъ двумя единицами меньше сравнительно съ даннымъ (1), т. е. опять четное; слѣдовательно допускаетъ то или другое изъ вышеприведенныхъ преобразованій. Для однообразія въ выкладкахъ, мы можемъ сначала сдѣлать

$$a_1 = y,\ a_2 = y_1,\ a_3 = y_2,\ \ldots\ldots\ a_{m-1} = y_{m-2},\quad (33)$$

обозначить черезъ

$$Y,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots\ Y_{m-2}$$

то, во что перейдутъ

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ldots\ A_{m-1}$$

при новыхъ предположеніяхъ, и потомъ вмѣсто (31) разсматривать

$$Y\,\partial y + Y_1\,\partial y_1 + Y_2\,\partial y_2 + \ldots\ldots + Y_{m-2}\,\partial y_{m-2} = 0\quad (34)$$

21. Коль скоро найдена будетъ система дифференціальныхъ уравненій, интегралы которой должны опредѣлять зависимость $y^{въ}$ отъ новыхъ вспомогательныхъ величинъ: $b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots\ b_{m-2}$, тогда вмѣсто (34) будемъ имѣть:

$$B_1\,\partial b_1 + B_2\,\partial b_2 + \ldots\ldots + B_{m-3}\,\partial b_{m-3} + B_{m-2}\,\partial b_{m-2} = 0,\quad (35)$$

откуда предположеніе $\partial b_{m-2} = 0$, приведетъ, во первыхъ, къ

$$b_{m-2} = \text{пост.}\quad (36)$$

т. е. ко второму интегральному отношенію уравн. (1); а во вторыхъ къ новому дифференціальному уравненію

$$B_1\,\partial b_1 + B_2\,\partial b_2 + \ldots\ldots + B_{m-3}\,\partial b_{m-3} = 0,\quad (37)$$

въ которомъ число перемѣнныхъ $m-3$ четное и притомъ четырьмя единицами менѣе сравнительно съ (1).

22. Съ (37) можемъ поступить опять по прежнему, допустить

$$b_1 = z,\ b_2 = z_1,\ \ldots\ldots\ b_{m-3} = z_{m-4},\quad (38)$$

найти третій интегралъ уравненія (1)

$$c_{m-4} = \text{пост.} \quad (39)$$

и дифференціальное отношеніе

$$C_1\, \partial c_1 + C_2\, \partial c_2 + \ldots\ldots + C_{m-5}\, \partial c_{m-5} = 0, \quad (40)$$

съ четнымъ числомъ перемѣнныхъ, отъ котораго будетъ зависѣть розысканіе остальныхъ интеграловъ уравненія (1).

23. Продолжая этотъ ходъ сужденій, мы дойдемъ до уравненія между двумя измѣняемыми:

$$h_1\, \partial h_1 + h_2\, \partial h_2 = 0, \quad (41)$$

интегралъ котораго

$$k_1 = \text{пост.} \quad (42)$$

будетъ послѣднимъ интегральнымъ уравненіемъ даннаго (1).

24. Въ системѣ:

$$a_m = \text{пост.},\ b_{m-2} = \text{пост.},\ c_{m-4} = \text{пост.}, \ldots k_1 = \text{пост.}, \quad (43)$$

при посредствѣ положеній (33), (38), и т. д. лѣвыя части будутъ функціями отъ $x, x_1, x_2, \ldots x_m$, и число ихъ очевидно равняется $\frac{m+1}{2}$.

25. Что система (43) необходима для интеграціи уравненія (1), то объ этомъ, разумѣется, не можетъ быть рѣчи; но если мы докажемъ, что она достаточна для сказанной цѣли, то тѣмъ самымъ подтвердимъ и второе предложеніе Пфаффа.

26. Сдѣлаемъ $\frac{m+1}{2} = p$ и для симметріи уравненія (43) напишемъ подъ формою:

$$u_1 = g_1,\ u_2 = g_2,\ u_3 = g_3, \ldots\ldots u_p = g_p \quad (44)$$

Принявъ величины g за постоянныя, продифференцируемъ функціи u по измѣняемости всѣхъ величинъ въ нихъ входящихъ; каждый выводъ помножимъ на неопредѣленныхъ множителей G_1, G_2, ... G_p и составимъ сумму слѣдствій; получимъ:

$$\left(G_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+G_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)\partial x+\left(G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\right.$$
$$\left.G_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x_1}\right)\partial x_1+\ldots+\left(G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_{2p-1}}+\right.$$
$$\left.G_2\frac{\partial u_2}{\partial x_{2p-1}}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x_{2p-1}}\right)\partial x_{2p-1}=0 \quad (45)$$

27. Если уравненія (44) должны интегрировать дифференціальное отношеніе (1), то лѣвая его часть должна быть тождественна съ лѣвою частію уравненія.

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1+\ldots+X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1}=0;$$

а потому получимъ рядъ равенствъ:

$$\left.\begin{aligned}
&G_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+G_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x}=X,\\
&G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+G_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x_1}=X_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_{p-1}}+G_2\frac{\partial u_2}{\partial x_{p-1}}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}}=X_{p-1},\\
&G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_p}+G_2\frac{\partial u_2}{\partial x_p}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}}=X_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&G_1\frac{\partial u_1}{\partial x_{2p-1}}+G_2\frac{\partial u_2}{\partial x_{2p-1}}+\ldots+G_p\frac{\partial u_p}{\partial x_{2p-1}}=X_{2p-1}.
\end{aligned}\right\}(46)$$

28. Съ другой стороны, выразивъ изъ (44) количества $x, x_1, \ldots\ldots x_{p-1}$ черезъ $x_p, x_{p+1}, \ldots\ldots x_{2p-1}$, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned}
\partial x &= \frac{\partial x}{\partial x_p}\partial x_p + \frac{\partial x}{\partial x_{p+1}}\partial x_{p+1} + \ldots\ldots + \frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}}\partial x_{2p-1},\\
\partial x_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial x_p}\partial x_p + \frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}}\partial x_{p+1} + \ldots\ldots + \frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}}\partial x_{2p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\partial x_{p-1} &= \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}\partial x_p + \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}}\partial x_{p+1} + \ldots\ldots + \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}}\partial x_{2p-1};
\end{aligned}$$

послѣ чего (1) приметъ видъ:

$$\begin{aligned}
&\left(X\frac{\partial x}{\partial x_p} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_p} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + X_p\right)\partial x_p\\
&+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{p-1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}} + \ldots\ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}} + X_{p+1}\right)\\
&\partial x_{p+1} + \ldots + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}} + \ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}}\right.\\
&\qquad\left. + X_{2p-1}\right)\partial x_{2p-1} = 0, \quad (47)
\end{aligned}$$

а такъ какъ теперь $\partial x_p, \partial x_{p+1} \ldots\ldots \partial x_{2p-1}$ совершенно какіе угодно, то предъидущее равенство должно разбиваться на слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
&X\frac{\partial x}{\partial x_p} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_p} + \ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} + X_p = 0,\\
&X\frac{\partial x}{\partial x_{p+1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{p+1}} + \ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{p+1}} + X_{p+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&X\frac{\partial x}{\partial x_{2p-1}} + X_1\frac{\partial x_1}{\partial x_{2p-1}} + \ldots + X_{p-1}\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_{2p-1}} + X_{2p-1} = 0.
\end{aligned}\right\}(48)$$

29. Отдѣливши въ (46) первыя p равенствъ, мы опредѣлимъ изъ нихъ систему множителей $G_1, G_2, \ldots\ldots$

G_p, выраженія которыхъ когда подставимъ въ остальныя p равенствъ, тогда результаты подстановленій должны быть тождественны.

30. Назвавши черезъ Δ опредѣлитель, составленный изъ коэффиціентовъ при G_1, G_2, ... G_p въ первыхъ p равенствахъ (46), найдемъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
G_1 &= \frac{\Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) X + \Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) X_1 + \ldots + \Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_{p-1}}\right) X_{p-1}}{\Delta} \\
G_2 &= \frac{\Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) X + \Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) X_1 + \ldots + \Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_{p-1}}\right) X_{p-1}}{\Delta} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
G_p &= \frac{\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right) X + \Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_1}\right) X_1 + \ldots + \Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}}\right) X_{p-1}.}{\Delta}
\end{aligned}
\right\} \quad (49)
$$

Подставивъ эти значенія, напримѣръ въ ($p + 1^{oe}$) уравненіе системы (46), получимъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \ldots\ldots + \frac{\partial u_p}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)\right\} X + \\
&\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + \ldots\ldots + \frac{\partial u_p}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_1}\right)\right\} X_1 + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left\{\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_{p-1}}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_{p-1}}\right) + \ldots\ldots + \frac{\partial u_p}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}}\right)\right\} X_{p-1} = \Delta X_p
\end{aligned}
\right\} \quad (50)
$$

31. Справедливость этого вывода откроется тотчасъ, коль скоро возьмемъ первое уравненіе системы (48), напишемъ его такъ:

$$-\left\{\Delta\frac{\partial x}{\partial x_p}X+\Delta\frac{\partial x_1}{\partial x_p}X_1+\ldots\ldots+\Delta\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}X_{p-1}\right\}=\Delta X_p \quad (51)$$

и преобразуемъ немного.

32. Для этого продифференцируемъ систему (44) по измѣняемости x_p самого по себѣ и всего что съ нимъ измѣняется, найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_p}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x_p}+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_p}+\ldots\ldots+\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{p-1}}\dfrac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}=0,\\
\dfrac{\partial u_2}{\partial x_p}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x_p}+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_p}+\ldots\ldots+\dfrac{\partial u_2}{\partial x_{p-1}}\dfrac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial u_p}{\partial x_p}+\dfrac{\partial u_p}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x_p}+\dfrac{\partial u_p}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial x_p}+\ldots\ldots+\dfrac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}}\dfrac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}=0.
\end{array}\right\}(52)$$

Здѣсь коэффиціенты при дифференціальныхъ отношеніяхъ $\frac{\partial x}{\partial x_p}, \frac{\partial x_1}{\partial x_p}, \ldots \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}$, расположенные въ горизонтальныхъ рядахъ, равняются коэффиціентамъ при $G_1, G_2, \ldots G_p$ помѣщеннымъ въ вертикальныхъ столбцахъ первыхъ p уравненій системы (46); поэтому опредѣлители системъ (46) и (52) должны быть одинаковы.

Слѣдовательно, разрѣшивъ систему (52) относительно $\frac{\partial x}{\partial x_p}, \frac{\partial x_1}{\partial x_p}, \ldots \frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p}$, получимъ:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial x_p} &= -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\ldots}{\Delta} \\
&\qquad\qquad\frac{+\frac{\partial u_p}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)}{\Delta}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial x_p} &= -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\ldots}{\Delta} \\
&\qquad\qquad\frac{+\frac{\partial u_p}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_1}\right)}{\Delta}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial x_{p-1}}{\partial x_p} &= -\frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_{p-1}}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_{p-1}}\right)+\ldots}{\Delta} \\
&\qquad\ldots\ldots\ldots\frac{+\frac{\partial u_p}{\partial x_p}\Delta'\left(\frac{\partial u_p}{\partial x_{p-1}}\right)}{\Delta}.
\end{aligned}
\right\} \quad (53)
$$

Внеся эти выраженія въ (51), лѣвая часть результата подстановленія какъ-разъ совпдетъ съ лѣвою частію (50); но (51) необходимо имѣетъ мѣсто, слѣдовательно и (50) справедливо.

Точно такими-же сужденіями докажется, что подстановленіе найденныхъ значеній для G въ $(p+2)^{oe}$, $(p+3)^{ie}$, ... $2p^{oe}$ ур. системы (46) приведетъ къ вѣрнымъ выводамъ.

Такимъ образомъ мы доказали, что система (44) дѣйствительно достаточна для составленія полной системы интеграловъ ур. (1). Слѣдовательно и прочее.

33. Присматриваясь къ способу, посредствомъ котораго розыскиваетъ Пфаффъ полные интегралы даннаго дифференціальнаго уравненія

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = 0 \quad (54)$$

мы замѣчаемъ, что онъ требуетъ полной интеграціи p системъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка; напримѣръ системы 2 p — 1 уравненій (21) между числомъ 2 p перемѣнныхъ; системы 2 p — 3 уравненій съ числомъ 2 p — 2 измѣняемыхъ; системы 2 p — 5 уравненій, заключающихъ 2 p — 4 аргумента, и т. д.; наконецъ, одного уравненія между - двумя перемѣнными. Легко понять, что обстоятельство это составляетъ немаловажное затрудненіе въ способѣ Пфаффа. Коши и Якоби своими изысканіями давно уже устранили этотъ недостатокъ теоріи для того класса линейныхъ дифференціальныхъ формулъ, который встрѣчается при рѣшеніи уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Они доказали, что въ этомъ случаѣ достаточно проинтегрировать первую только систему обыкновенныхъ дифференціальныхъ отношеній, чтобъ получить полное рѣшеніе задачи. Но для общаго случая, насъ занимающаго, указанное неудобство еще долгое время оставалось во всей его силѣ.

34. Такъ какъ изъ теоріи Пфаффа не видно даже чтобы можно было построить одну которую-нибудь изъ послѣдующихъ системъ, не проинтегрировавши напередъ всѣхъ предъидушихъ, то Якоби доказалъ, что безъ всякихъ интеграцій можно написать и всѣ преобразованныя уравненія и всѣ системы дифференціальныхъ уравненій, требуемыхъ задачею Пфаффа.

35. Положимъ, напримѣръ, что въ интегралахъ (22), принадлежащихъ системѣ (21), постояннымъ произвольнымъ сообщены тѣ значенія, которыя принимаютъ x_1, $x_2, \ldots x_{2p-1}$ для $x=0$, и которыя обозначимъ черезъ $x_1^0, x_2^0, \ldots x^0_{p-1}$. Изобразивъ соотвѣтственныя величины для $X, X_1, X_2 \ldots X_{2p-1}$ черезъ $X^0, X_1^0, X_2^0 \ldots X_{2p-1}^0$, получимъ уравненіе вида:

$$\begin{array}{llll} x_1 = x_1^0 + xr_1 & & X = X^0 + xR & \\ x_2 = x_2^0 + xr_2 & (55) & X_1 = X_1^0 + xR_1 & (56) \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \\ x_{2p-1} = x_{2p-1}^0 + xr_{2p-1}, & & X_{2p-1} = X_{2p-1}^0 + xR_{2p-1}, & \end{array}$$

гдѣ $X_1, X_2, \ldots X_{2p-1}, R, R_1, \ldots R_{2p-1}$ суть функціи отъ $x, x_1^0, x_2^0, \ldots x^0_{2p-1}$ не дѣлающіяся безконечными для $x=0$. Подставивъ выраженія (55) и (56) въ уравненіе (54), и принявъ $x_1^0, x_2^0, \ldots x^0_{2p-1}$ за количества измѣняемыя, будемъ имѣть:

$$0 = (X^0 + xR)\,\partial x + (X_1^0 + XR_1)\,\partial(x^0_1 + xr) + (X_2^0 + xR_2)\,\partial(x_2^0 + xr_2) + \ldots + (X^0_{2p-1} + xR_{2p-1})\,\partial(x^0_{2p-1} + xr_{2p-1}),$$

или

$$0 = Q\,\partial x + Q_1\,\partial x^0_1 + Q_2\,\partial x^0_2 + \ldots + Q_{2p-1}\,\partial x^0_{2p-1}, \quad (57)$$

гдѣ

$$Q_k = X^0_k + xR_k + x\left(X^0_1\frac{\partial r_1}{\partial x^0_k} + X^0_2\frac{\partial r_2}{\partial x^0_k} + \ldots + X^0_{2p-1}\frac{\partial r_{2p-1}}{\partial x^0_k}\right) + x^2\left\{R_1\frac{\partial r_1}{\partial x^0_k} + R_2\frac{\partial r_2}{\partial x^0_k} + \ldots + R_{2p-1}\frac{\partial r_{2p-1}}{\partial x^0_k}\right., \quad (58)$$

при чемъ k есть одно изъ чиселъ $1, 2, 3 \ldots 2p-1$.

36. Но (55) предполагаются выведенными изъ системы интеграловъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій (21), поэтому въ (57) коэффиціентъ при ∂x исчезаетъ а предстоящіе остальныхъ членовъ содержатъ x только въ общемъ ихъ множителѣ. Слѣдовательно:

$$Q = 0$$

и взаимныя отношенія коэффиціентовъ $Q_1, Q_2 \ldots Q_{2p-1}$ не зависятъ отъ x. Такъ какъ они остаются безъ перемѣны и для $x = 0$, то находимъ:

$$Q_1 ; Q_2 : \ldots Q_{2p-1} = X^0_1 : X^0_2 : \ldots X^0_{2p-1},$$

откуда

$$Q_1 = MX^0_1,\ Q_2 = MX^0_2, \ldots Q_{2p-1} = MX^0_{2p-1};$$

и за-тѣмъ (57) принимаетъ видъ:

$$X^0_1\ \partial x^0_1 + X^0_2\ \partial x^0_2 + \ldots + X^0_{2p-1}\ \partial x^0_{2p-1} = 0 \quad (59)$$

37. Это послѣднее соотвѣтствуетъ (25). По требованію теоріи, одну изъ величинъ $x^0_1, x^0_2, \ldots x^0_{2p-1}$ должно приравнять постоянной произвольной; слѣдовательно, сдѣлавши

$$x^0_{2p-1} = g_1, \quad (60)$$

мы получимъ первое изъ искомыхъ интегральныхъ отношеній уравненія (54); а розысканіе остальныхъ интеграловъ сведется на рѣшеніе уравненія

$$X^0_1\ \partial x^0_1 + X^0_2\ \partial x^0_2 + \ldots + X^0_{2p-2}\ \partial x^0_{2p-2} = 0, \quad (61)$$

которое замѣняетъ собою (31) или (34).

38. Самая форма этого преобразованнаго уравненія указываетъ намъ и на простое правило получать его

изъ даннаго безъ предварительной интеграціи первой системы дифференціальныхъ уравненій. Дѣйствительно, для этого нужно въ (54) сдѣлать $x=0$, вмѣсто x_1, x_2, $\ldots\ldots x_{2p-2}$, x_{2p-1} подставить x^0_1, x^0_2, $\ldots x^0_{2p-1}$, x^0_{2p-1} и уравнять x^0_{2p-1} какой-нибудь постоянной величинѣ g_1.

39. По тому-же самому правилу должны составляться и всѣ слѣдующія прообразованныя уравненія. Желая, напримѣръ, получить второе преобразованіе, въ (61) должно будетъ допустить $x^0_1=0$, вмѣсто x^0_2, $x^0_3 \ldots\ldots$ $\ldots x_{2p-1}$ ввести x^{00}_2, x^{00}_3, $\ldots\ldots x^{00}_{2p-2}$, разсматривая послѣдніе значеніями постоянныхъ произвольныхъ для $x_1=0$ во второй системѣ интегральныхъ отношеній, которая требуется Пфаффомъ для перехода отъ перваго преобразованнаго ко второму, и наконецъ сдѣлать x^{00}_{2p-2} $=g_2$, т. е. постоянной произвольной. Тогда

$$X^{00}_2\,\partial x^{00}_2+X^{00}_3\,\partial x^{00}_3+\ldots\ldots+X^{00}_{2p-3}\,\partial x^{00}_{2p-3}=0 \quad (62)$$

будетъ искомымъ уравненіемъ, а формула

$$x^{00}_{2p-1}=g_2 \quad (63)$$

вторымъ искомымъ интеграломъ уравненія (54), и т. д.

40. Умѣя находить сразу всѣ преобразованныя уравненія, весьма легко будетъ построить и всѣ системы дифференціальныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, какимъ образомъ отъ даннаго уравненія (54) мы переходимъ къ преобразованнымъ (61) и (62), и т. д., точно также очевидно должно переходить отъ первой системы дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, ко второй третьей, и т. д.

41. Напримѣръ, для полученія второй системы, въ первой должно отбросить два крайнихъ уравненія, т. е. первое и послѣднее, въ оставшихся $2p-3$ уравненіяхъ сдѣлать $x=0$, вмѣсто $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2p-2}, x_{2p-1}$; $X, X_1, X_2, \ldots X_{2p-1}$ написать $x^0{}_1, x^0{}_2, x^0{}_3, \ldots x^0{}_{2p-2}, x^0{}_{2p-1}$; $X^0, X^0{}_1, X^0{}_2 \ldots X^0{}_{2p-1}$ и приравнять $x^0{}_{2p-1}=g_1$, постоянной прозвольной.

Равнымъ образомъ, чтобы изъ второй системы вывести третью, необходимо будетъ во второй откинуть два крайнихъ уравненія, первое и послѣднее, сдѣлать $x^0{}_1=0$, вмѣсто $x^0{}_2, x^0{}_3, \ldots x^0{}_{2p-3}, x^0{}_{2p-2}$. $X^0, X^0{}_1, \ldots X^0{}_{2p-1}$ подставить $x^{00}_2, x^{00}_3, \ldots x^{00}_{2p-3}, x^{00}_{2p-2}$; $X^{00}, X^{00}_1, X^{00}_2, \ldots X^{00}_{2p-1}$, и принять $x^{00}_{2p-2}=g_2$, постоянной произвольной; и т. д.

42. Слѣдовательно предложеніе Якоби доказано. Тѣмъ не менѣе оно болѣе любопытно, нежели дѣйствительно полезно, потому что для розысканія первыхъ частей въ формулахъ:

$$x^0_{2p-1}=g_1,\ x^0_{2p-2}=g_2, \text{ и т. д.} \quad (64)$$

представляющихъ собою полную систему интеграловъ уравненія (54), мы нисколько не освобождаемся отъ интеграціи всѣхъ системъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

43. Вся выгода, извлекаемая изъ этой теоремы, состоитъ развѣ въ слѣдующемъ: вмѣсто того чтобъ всѣ p системъ дифференціальныхъ уравненій интегрировать сверху внизъ, т. е. начиная съ первой въ $2p-1$ уравненій и оканчивая послѣднею въ одно уравненіе, теперь

поступать на-оборотъ, снизу вверхъ, т. е. начинать съ уравненія между двумя перемѣнными, переходить къ двумъ уравненіямъ между тремя измѣняемыми и т. д., наконецъ придти опять къ первой системѣ между 2p перемѣнными.

44. Найдя систему полныхъ интеграловъ

$$u_1 = g_1,\ u_2 = g_2,\ \ldots\ldots u_p = g_p, \quad (65)$$

принадлежащихъ уравненію

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = 0 \quad (66)$$

Пфаффъ показалъ, что отъ нея всегда можно перейти къ общему рѣшенію съ произвольною функціею отъ $p-1$ количествъ.

45. Этому предложенію Якоби далъ большій объемъ, объяснивъ возможность построить рѣшеніе съ числомъ q произвольныхъ функцій отъ $p-q$ величинъ.

46. Предположивъ въ формулахъ (65) количества g_1, g_2, g_p измѣняющимися или, лучше сказать, разумѣя подъ ними не что иное какъ функціи $u_1, u_2, \ldots\ldots u_p$, на основаніи сказаннаго въ n°26 этого § мы всегда въ состояніи найти систему множителей $G_1\ G_2, \ldots\ldots G_p$ такого свойства, что равенство

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_{2p-1}\,\partial x_{2p-1} = G_1\,\partial g_1 + G_2\,\partial g_2 + \ldots\ldots + G_p\,\partial g_p \quad (67)$$

будетъ тожественно. Это выраженіе исчезаетъ не только тогда, когда $g_1, g_2, \ldots\ldots g_p$ принимаются за постоянныя, но и когда q изъ величинъ $g_1, g_2, \ldots\ldots g_p$ предполагаются какими-нибудь функціями остальныхъ, напримѣръ: $g_1, g_2, \ldots\ldots g_p$, какъ функціи отъ g_{q+1}, $g_{q+2}, \ldots\ldots g_p$.

47. Въ самомъ дѣлѣ, въ этомъ случаѣ

$$G_1\,\partial g_1 + G_2\,\partial g_2 + \ldots\ldots + G_p\,\partial g_p = H_1\,\partial g_{q+1} + H_2\,\partial g_{q+2} + \ldots\ldots + H_{p-q}\,\partial g_p; \quad (68)$$

а присоединивъ сюда уравненія

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0, \ldots\ldots H_{p-q} = 0, \quad (69)$$

положеніе и оправдается.

48. Если допустимъ:

$$G_1 = \chi_1\,(g_{q+1}, \ldots\, g_p),\ G_2 = \chi_2\,(g_{q+1}, \ldots\ldots g_p), \ldots\ldots G_q = \chi_q\,(g_{q+1}, \ldots\ldots g_p), \quad (70)$$

то будетъ:

$$\begin{aligned} H_1 &= G_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial g_{q+1}} + \ldots\ldots + G_q \frac{\partial \chi_q}{\partial g_{q+1}} + G_{q+1} \\ H_2 &= G_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial g_{q+2}} + \ldots\ldots + G_q \frac{\partial \chi_q}{\partial g_{q+2}} + G_{q+1}, \quad (71) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_{p-q} &= G_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial g_p} + \ldots\ldots + G_q \frac{\partial \chi_q}{\partial g_p} + G_p \end{aligned}$$

и уравненіе (66) интегрируется также черезъ систему p уравненій вида:

$$\begin{aligned} g_1 &= \chi_1\,(g_{q+1}, g_{q+2}, \ldots\ldots g_p), \\ g_2 &= \chi_2\,(g_{q+1}, g_{q+2}, \ldots\ldots g_p), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72) \\ g_q &= \chi_q\,(g_{q+1}, g_{q+2}, \ldots\ldots g_p), \\ H_1 &= 0,\ H_2 = 0, \ldots\ldots H_{p-q} = 0. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ теорема доказана.

49. Мимоходомъ замѣтимъ, что получаютъ еще рѣшеніе, сдѣлавъ

$$G_1 = 0,\ G_2 = 0, \ldots\ldots G_p = 0, \quad (73)$$

которое, нѣкоторымъ образомъ, можно разсматривать какъ особенное.

50. Эта послѣдняя теорема, очевидно, можетъ быть перенесена на общій способъ, данный нами въ § II.

51. Если мы сравнимъ теперь методъ Пфаффа съ нашимъ, то, не касаясь уже того, что теорія Пфаффа ограничивается только случаемъ четнаго числа перемѣнныхъ, различіе обоихъ способовъ можно выразить такъ:

Въ анализѣ § II, для перехода отъ одного уравненія къ другому преобразованному, прежде всего назначаются r — 1 дѣйствій, связывающихъ данныя перемѣнныя съ величинами вспомогательными; потомъ, посредствомъ одного линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ перваго порядка ищется одно частное его рѣшеніе, или посредствомъ системы r обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, для которыхъ r — 1 полныхъ интегральныхъ отношеній извѣстны, розыскивается послѣдній интегралъ. Наконецъ опредѣляется система множителей, или коэффиціентовъ въ преобразованномъ уравненіи.

Анализъ настоящаго § первоначально подчиняетъ нѣкоторымъ условіямъ неизвѣстные еще множители или коэффиціенты въ искомомъ преобразованномъ уравненіи; по этимъ даннымъ строитъ систему r дифференціальныхъ уравненій перваго порядка; требуетъ опредѣленія всѣхъ интегральныхъ отношеній этой системы, изъ которыхъ нѣтъ ни одного извѣстнаго; отсюда уже находитъ тѣ дѣйствія, посредствомъ которыхъ старыя перемѣнныя связываются съ новыми и за-тѣмъ окончательно опредѣляетъ коэффиціенты преобразованнаго уравненія.

Изъ такого сравненія двухъ методовъ не трудно заключить — на сторонѣ котораго должно оставаться преимущество. При всемъ томъ я долженъ сознаться, что только старательное изученіе трудовъ Монжа и Якоби могло привести меня къ теоріи § II.