Гомоциклическое изображенiе сферы на плоскость.

К. А. Андреева.

1. Гомоциклическимъ изображенiемъ мы будемъ называть такое, при которомъ всякiй кругъ изображаемой фигуры имѣетъ своимъ изображенiемъ также кругъ.

Въ послѣднее время вниманiе нѣкоторыхъ изъ нашихъ ученыхъ было обращено на доказательства предложенiя, что *всякое гомоциклическое изображенiе сферы на плоскость есть стереографическая проекцiя.* Такъ въ I-мъ томѣ настоящаго изданiя (въ 1889 г.) помѣщена статья акад. А. А. Маркова: „Къ вопросу о черченiи картъ", содержащая примѣненiе къ доказательству этого предложенiя высшихъ теорiй математическаго анализа. Въ началѣ этой статьи авторъ утверждаетъ, что къ заключенiю о справедливости предложенiя онъ пришелъ еще въ 1876 году, присовокупляя, однако, что въ печати имъ было заявлено объ этомъ въ 1884 году.

На послѣднемъ съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей бывшемъ въ С.-Петербургѣ въ концѣ 1889 г. профессоръ А. Н. Коркинъ предложилъ свое доказательство того же предложенiя, основанное на началахъ анализа безконечно-малыхъ *), причемъ самое предложенiе, выраженное въ вопросительной формѣ, названо имъ задачею Золотарева **). Вскорѣ послѣ того (въ февралѣ 1890 г.) профессоръ Б. К. Млодзѣевскiй далъ геометрическое доказательство того же предложенiя, опи-

*) См. „VIII съѣздъ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ". С.П.Б. 1890, отд. I, стр. 6—8.

**) Профессоръ С.-Петербургскаго университета, адъюнктъ Императорской академiи наукъ, Егоръ Ивановичъ Золотаревъ скончался въ молодыхъ годахъ въ С.-Петербургѣ въ 1878 году, обогативши науку весьма цѣнными вкладами, напечатанными частiю въ Россiи, частiю же въ иностранныхъ изданiяхъ.

рающееся на замѣчаніе, что всякое гомоциклическое изображеніе сферы на плоскость и ея стереографическая проекція суть двѣ системы точекъ, связанныя биквадратичнымъ соотвѣтствіемъ. Доказательство это представляетъ крайній предѣлъ сжатости и краткости *).

2. Насколько вопросъ о доказательствѣ названнаго предложенія, поставленный самостоятельно, т. е. не въ связи съ болѣе общими геометрическими задачами, къ которымъ онъ относится по существу, новъ вообще, и кѣмъ и по какому поводу онъ возбужденъ между нашими учеными, намъ въ точности не извѣстно. Что же касается сочиненій, посвященныхъ геометрическимъ теоріямъ, не только соприкасающимся съ этимъ вопросомъ, но и включающимъ его въ себѣ какъ частность, то указаній на таковыя можно сдѣлать достаточно, чтобы не считать этотъ вопросъ такимъ, котораго до 1876 года не каснулись размышленія геометровъ.

Какъ примѣръ можно взять сочиненіе Möbius'а „Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung", изданное въ 1855 году **). Въ этомъ сочиненіи подробно изслѣдуются такія однозначныя соотвѣтствія между точками фигуръ, что всякому кругу соотвѣтствуетъ также кругъ, т. е. соотвѣтствія гомоциклическія. Въ концѣ первой главы, посвященной гомоциклическому соотвѣтствію *плоскихъ* фигуръ, доказывается, что всякія двѣ плоскія фигуры, связанныя такимъ соотвѣтствіемъ, могутъ быть разсматриваемы, какъ двѣ стереографическія проекціи одной и той же сферической фигуры. Это предложеніе и ближайшія его слѣдствія даютъ автору достаточно основанія, чтобы съ самаго начала слѣдующей главы, посвященной гомоциклическому соотвѣтствію *сферическихъ* фигуръ, смотрѣть на какія либо двѣ связанныя такимъ соотвѣтствіемъ фигуры, изъ которыхъ одна сферическая а другая плоская (или обѣ сферическія), какъ на такія, соотвѣтствіе между которыми устанавливается построеніемъ стереографической проекціи.

Такимъ образомъ, если признать, что въ самомъ понятіи о изображеніи включается требованіе, чтобы между точками изображаемой фигуры и ея изображенія существовала однозначность и непрерывность соотвѣтствія, а это повидимому признается всѣми авторами, трактующими о изображеніяхъ, то нельзя сомнѣваться, что справедливость предложенія, отвѣчающаго на задачу Золотарева, была хорошо извѣстна Möbius'у.

3. Мы указали на „Theorie der Kreisverwandtschat" Möbius'а только потому, что это наиболѣе старое изъ извѣстныхъ намъ сочиненій, са-

---

*) „Труды отдѣленія физическихъ наукъ Общества любителей естествознанія". Т. III, вып. 1-й, Москва, 1890, стр. 83—84.

**) См. Möbius (A. F.) „Gesammelte Werke", II-ter Baud, Leipzig, 1886 p. 243—314.

мое заглавіе котораго показываетъ, что въ немъ можно искать указаній на гомоциклическое изображеніе сферы на плоскость и на тождественность этого изображенія съ стереографическою проекціей. Но въ позднѣйшее время съ установленіемъ и развитіемъ въ Геометріи теоріи раціональныхъ или Кремоновыхъ преобразованій (какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ) явилась для геометровъ точка зрѣнія, откуда гомоциклическое соотвѣтствіе Möbius'а, стереографическая проекція Гиппарха, преобразованіе обратныхъ радіусовъ и многія другія геометрическія зависимости представляются въ обобщенномъ видѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ справедливость предложенія, отвѣчающаго на задачу Золотарева, выступаетъ съ полною ясностью.

Этимъ объясняется между прочимъ краткость послѣдняго изъ перечисленныхъ выше доказательствъ. Достаточно было его автору сослаться на квадратичное соотвѣтствіе, чтобы изложить все доказательство въ нѣсколькихъ строчкахъ.

Въ виду всего вышесказаннаго главный интересъ въ задачѣ Золотарева приходится перенести отъ самаго предложенія къ особенностямъ его доказательствъ. Мы постараемся дать въ слѣдующемъ доказательство, наиболѣе соотвѣтствующее, по нашему мнѣнію, самымъ даннымъ вопроса, а именно доказательство, основывающееся на началахъ Геометріи.

4. Замѣтимъ предварительно, что стереографическая проекція, первое описаніе которой находится у Птоломея (хотя, по мнѣнію Деламбра, изобретеніе ея должно быть приписано Гипарху), *) обладаетъ слѣдующими двумя основными свойствами. Во-первыхъ она есть изображеніе *гомоциклическое* и во-вторыхъ она есть изображеніе *изогональное*, т. е. такое, что углы между касательными въ точкахъ пересѣченія изображаемыхъ линій и ихъ изображеній равны между собою.

Можно полагать, основываясь на свидѣтельствѣ Прокла, что первое изъ этихъ свойствъ было извѣстно еще Птоломею, хотя первое вполнѣ общее его доказательство встрѣчается лишь у Іордана Немораріуса, писателя XIII-го столѣтія. Что же касается второго свойства, то, по утвержденію Деламбра, оно было доказано въ первый разъ въ сочиненіи Робертсона по навигаціи въ 1754 году. Названіе свое (кстати сказать весьма неудачное) стереографическая проекція получила отъ іезуита Агвилона въ 1613 году **).

Названныя свойства стереографической проекціи имѣютъ существенное различіе между собою по своему значенію. Въ то время какъ гомоцикличность вполнѣ характеризуетъ это изображеніе, какъ это видно

---

*) См. *Chasles (M)* „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie", 2 éd., Paris, 1875, p. 27—28.

**) См. *Chasles* (*M*) „Ap. hist. etc.", Note XII, p. 516—517.

изъ занимающаго насъ предложенія, изогональность представляетъ зависимость между изображаемой фигурой и ея изображеніемъ только вблизи отдѣльныхъ соотвѣтственныхъ точекъ. Иначе говоря, оно есть свойство безконечно малыхъ элементовъ этихъ фигуръ.

Изображенія, въ которыхъ сохраняется подобіе безконечно малыхъ частей, принято, по примѣру Гаусса, называть *конформенными* (conforme Abbildungen). Понятно, что всякое конформенное изображеніе есть изогональное и обратно.

Теорія построенія географическихъ картъ представляетъ намъ много различныхъ примѣровъ изогональнаго изображенія сферы или эллипсоида на плоскость.

5. Необходимо обратить вниманіе еще на то обстоятельство, что гомоцикличность изображенія сферы на плоскость представляется полнымъ опредѣленіемъ стереографической проекціи не только тогда, когда оно есть свойство всей поверхности сферы, но и тогда, когда принадлежитъ только какой-нибудь конечной части этой поверхности. Другими словами, для того чтобы убѣдиться, что разсматриваемое изображеніе есть стереографическая проекція, достаточно допустить только, что всѣ дуги круговъ, какія можно начертить на сферѣ внутри контура, ограничивающаго конечную ея часть, изображаются также дугами круговъ. Обстоятельство это имѣетъ большую важность въ вопросѣ о построеніи картъ, гдѣ всегда рѣчь идетъ объ изображеніи только части сферы. Въ такомъ ограниченіи мы и будемъ принимать гомоцикличность за условіе задачи Золотарева нъ предлагаемомъ ея рѣшеніи.

6. Прежде всего постараемся доказать, что изогональность есть необходимое слѣдствіе гомоцикличности всякаго изображенія сферы на плоскости, и будемъ основывать это доказательство на слѣдующихъ весьма простыхъ леммахъ, относящихся къ системамъ круговъ какъ на плоскости, такъ и въ пространствѣ.

1-я лемма. Два пересѣкающіеся въ двухъ точкахъ круга образуютъ равные углы при обѣихъ точкахъ пересѣченія.

2-я лемма. Если три круга проходятъ черезъ одну точку, то въ треугольникѣ, сторонами котораго служатъ дуги этихъ круговъ, а вершинами три остальныя точки ихъ пересѣченія, сумма внутреннихъ угловъ равна двумъ прямымъ *). Это очевидное слѣдствіе предыдущей леммы.

3-я лемма. Четыре круга, проходящіе черезъ каждыя три изъ четырехъ точекъ, произвольно взятыхъ въ пространствѣ или на плоскости,

---

*) Треугольникъ, стороны котораго суть дуги круговъ, представляетъ замкнутый контуръ, которымъ вся поверхность сферы или плоскости раздѣляется на двѣ части. Изъ нихъ внутреннею мы называемъ ту часть, на которой нѣтъ другихъ точекъ пересѣченія круговъ.

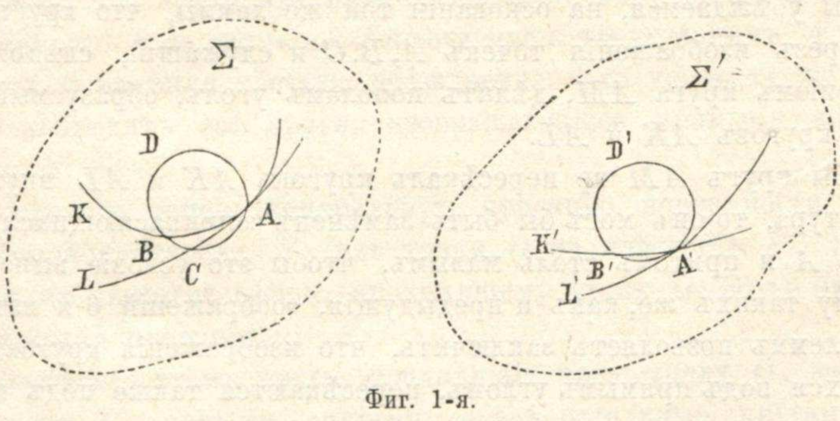
всегда таковы, что углы, образуемые двумя изъ нихъ, равны угламъ, образуемымъ двумя остальными. Также слѣдствіе предыдущихъ леммъ.

4-я лемма. Если сумма внутреннихъ угловъ треугольника, образуемаго на сферѣ или плоскости дугами трехъ круговъ, равна двумъ прямымъ, то круги эти имѣютъ общую точку. Справедливость этого предложенія, обратнаго 2-й леммѣ, легко доказывается на основаніи предыдущихъ леммъ способомъ допущенія противнаго.

5-я лемма. Если два пересѣкающіеся круга соприкасаются съ третьимъ, то кругъ, проходящій чрезъ точку ихъ пересѣченія и обѣ точки соприкосновенія, составляетъ съ этими кругами равные углы (дѣлитъ уголъ между ними пополамъ). Слѣдствіе первой леммы.

6-я лемма. Если три круга соприкасаются между собою по два, то кругъ, проходящій чрезъ три точки ихъ соприкосновенія, пересѣкается съ каждымъ изъ нихъ подъ прямымъ угломъ. Прямое слѣдствіе предыдущей.

7. Положимъ теперь, что часть сферы или плоскости, заключающаяся внутри нѣкотораго контура Σ (фиг. 1-я), изображается гомоциклически на части другой сферы или плоскости, ограниченной контуромъ Σ'. Не трудно убѣдиться, что въ такомъ случаѣ дуги круговъ,



Фиг. 1-я.

соприкасающіяся между собою, изображаются также соприкасающимися дугами круговъ.

Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ, что круги AK и AL, соприкасающіеся въ точкѣ A, изображаются кругами $A'K'$ и $A'L'$, пересѣкающимися въ точкѣ A', мы можемъ взять кругъ $A'D'$, соприкасающійся съ кругомъ $A'L'$ въ точкѣ A', и притомъ столь малаго радіуса, чтобы кругъ AD, которому онъ служитъ изображеніемъ, имѣлъ точки общія съ кругами AK и AL внутри контура Σ.

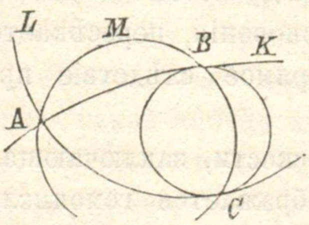
Кругъ AD будетъ, очевидно, или пересѣкать круги AK и AL въ точкахъ B и C отличныхъ отъ A, или соприкасаться съ ними въ той же точкѣ A. Въ первомъ изъ этихъ случаевъ двѣ точки A и C будутъ имѣть одно и то-же изображеніе A'; во второмъ одна и та-же точка A

будетъ имѣть два различныя изображенія A' и B'. Ни то, ни другое не согласно съ самымъ понятіемъ объ изображеніи *).

Къ подобному же недопустимому слѣдствію приводитъ предположеніе, что пересѣкающіеся круги изображаются соприкасающимися.

Итакъ, при всякомъ гомоциклическомъ изображеніи сферы или плоскости на сферу или плоскость соприкасающіеся круги изображаются соприкасающимися и пересѣкающіеся пересѣкающимися.

8. Изъ доказаннаго слѣдуетъ, что если при гомоциклическомъ изображеніи одинъ изъ трехъ изображаемыхъ круговъ, проходящихъ чрезъ одну точку, составляетъ равные углы съ двумя другими, то то-же самое должно имѣть мѣсто и для изображеній этихъ трехъ круговъ. Дѣйствительно, полагая, что кругъ AM (фуг. 2-я) дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый кругами AK и AL и пересѣкаетъ эти круги еще въ точкахъ B и C, мы можемъ построить кругъ, проходящій чрезъ точки B и C и соприкасающійся съ кругомъ AK въ точкѣ B. Въ силу 5-й изъ предыдущихъ леммъ этотъ кругъ долженъ быть соприкасающимся съ кругомъ AL въ точкѣ C. Имѣя же въ виду, что изображенія соприкасающихся круговъ суть также круги соприкасающіеся, мы убѣждаемся, на основаніи той же леммы, что кругъ, проходящій чрезъ изображенія точекъ A, B, C и служащій, слѣдовательно, изображеніемъ круга AM, дѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый изображеніями круговъ AK и AL.



Фиг. 2-я.

Если бы кругъ AM не пересѣкалъ круговъ AK и AL внутри даннаго контура, то онъ могъ бы быть замѣненъ соприкасающимся съ нимъ въ точкѣ A и притомъ столь малымъ, чтобы это условіе выполнялось.

Въ силу такихъ же, какъ и предыдущія, соображеній 6-я изъ предыдущихъ леммъ позволяетъ заключить, что изображенія круговъ, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, пересѣкаются также подъ прямымъ угломъ.

9. Сказанное приводитъ къ заключенію, что всякіе два круга, уголъ между которыми равняется $\frac{m}{2^n} D$, гдѣ D означаетъ прямой уголъ, а m и n какія угодно цѣлыя числа, изображаются кругами, образующими такой же точно уголъ.

*) Понятію о изображеніи не противорѣчитъ возможность неопредѣленнаго положенія изображенія данной точки или точки, имѣющей данное изображеніе. Но это допустимо только для особыхъ точекъ, которыя нельзя разсматривать, какъ произвольно взятыя. Притомъ въ вопросахъ практическаго свойства, какъ построеніе картъ, такія точки не должны имѣть мѣста внутри изображаемой части поверхности.

Въ виду произвольности чиселъ m и n этимъ, очевидно, доказывается изогональность всякаго гомоциклическаго изображенія, ибо допущеніе несправедливости этого свойства для какихъ-нибудь двухъ круговъ и ихъ изображеній легко опровергается тѣмъ же самымъ пріемомъ Лежандра, который употребляется въ начальной Геометріи для распространенія доказанной пропорціональности соизмѣримыхъ геометрическихъ величинъ на величины несоизмѣримыя.

Изъ предыдущаго убѣждаемся между прочимъ, что если гомоциклическое изображеніе плоскости на плоскостъ таково, что всякая прямая изображается прямою же, то всякая изображаемая фигура подобна съ своимъ изображеніемъ.

10. Положимъ теперь, что часть нѣкоторой сферы S, заключающаяся внутри контура Σ, изображается гомоциклически на плоскости P въ видѣ площади, ограниченной контуромъ Σ'. Возьмемъ внутри послѣдняго три точки A', B', C'. Прямыя, соединяющія ихъ, какъ частные виды круговъ, проходящихъ чрезъ тѣ же точки, должны быть изображеніями нѣкоторыхъ трехъ круговъ, проходящихъ чрезъ соотвѣтственныя точки A, B, C. Вслѣдствіе изогональности изображенія внутренніе углы треугольника, образуемаго этими кругами должны имѣть сумму, равную двумъ прямымъ, а это показываетъ, въ силу 4-й изъ предыдущихъ леммъ, что круги эти проходятъ чрезъ одну точку O.

Оставляя двѣ изъ прямыхъ, образующихъ треугольникъ $A'B'C'$ неизмѣнными и измѣняя третью, убѣждаемся, что чрезъ ту же точку O сферы S проходятъ всѣ круги, изображающіеся прямыми линіями на плоскости P.

11. Построимъ теперь центральную проекцію поверхности сферы S, ограниченной контуромъ Σ, изъ точки O на плоскость P', перпендикулярную къ діаметру сферы, проходящему чрезъ O. Это и будетъ стереографическая проекція.

Такъ какъ при этомъ круги, проходящіе чрезъ точку O, изобразятся на плоскости P' прямыми линіями, а всѣ остальные кругами же, то данное гомоциклическое изображеніе на плоскости P и построенная стереографическая проекція суть такія два изображенія одной и той же фигуры, въ которыхъ прямыя соотвѣтствуютъ прямымъ и круги кругамъ. Слѣдовательно, это суть фигуры подобныя, все различіе которыхъ заключается въ масштабѣ.

Такимъ образомъ тождественность всякаго гомоциклическаго изображенія сферы на плоскость и стереографической проекціи является вполнѣ доказанной.