Communications et procès-verbaux de la société mathématique de Kharkow. Année 1886, 2-me livraison (XVI du commencement de l'édition).

СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

1886 ГОДА.

II.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1887.

Отдѣльные оттиски изъ «Записокъ Императорскаго Харьковскаго Университета».

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

	Стран.
25-го апрѣля 1886 года	45— 46.
28-го сентября — —	46— 47.
17-го октября — —	114—115.
21-го ноября — —	115—116.
Извлеченіе изъ отчета о дѣятельности общества за 1885—1886 годъ	48— 50.

Сообщенія:

1. *А. А. Маркова,* О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда.	51— 62.
2. *А. М. Ляпунова,* О тѣлѣ наибольшаго потенціала	63— 73.
3. *П. О. Сомова,* О деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній	74— 94.
4. *А. А. Маркова,* О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда (II замѣтка) .	95—113.

TABLE DES MATIÈRES

Extraits des procès-verbaux:

Pages.

Séance du 25 avril 1886 . . . . . . 45— 46.

Séance du 28 septembre — . . . . . . 46— 47.

Séance du 17 octobre — . . . . 114—115.

Séance du 21 novembre — . . . . 115—116.

Extrait du rapport sur l'activité scientifique de la société pour l'année acad. 1885—1886. . . 48— 50.

Communications:

1. *A. A. Markoff*, Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique . . . . 51— 62.

2. *A. M. Liapounoff*, Sur le corps du potentiel maximum . . . . 63— 73.

3. *P. J. Somoff*, Sur la déformation du système collinéairement variable de trois dimensions . . 74— 94.

4. *A. A. Markoff*, Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique (deuxième note) . . 95—113.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

25 апрѣля 1886 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, В. Л. Кирпичевъ, М. А. Тихомандрицкій, А. А. Клюшниковъ, М. Ф. Ковальскій, А. М. Ляпуновъ, Г. В. Левицкій, А. В. Гречаниновъ, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

I. Г. Предсѣдатель доложилъ о выходѣ въ свѣтъ II книжки «Сообщеній» за 1885 годъ.

II. *А. В. Гречаниновъ* продолжалъ сообщеніе своей статьи «О треніи цапфъ о подшипники».

III. *Г. В. Левицкій* сдѣлалъ докладъ «О примѣненіи фотографіи къ астрономическимъ наблюденіямъ».

IV. Г. Предсѣдатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

1) Mathesis. Mars et Avril, 1886.

2) Journal de mathématiques élémentaires. Avril, 1886.

3) Journal de mathématiques spéciales. Avril, 1886.

4) Физико-математическія науки. № 2, 1886.

5) Bulletin de la société mathématique de France. T. XIV, № 2.

6) Jornal de sciencias math. Vol. VI, № 6.

7) Записки математическаго отдѣленія новороссійскаго общества естествоиспытателей. T. VI.

8) Annales de l'observatoire de Moscou. Vol. I, livr. I, 1886.

9) Журналъ русскаго физико-химическаго общества. T. XVIII, вып. 3, 1886.

10) Журналъ элементарной математики. Вып. 15 и 16.

11) *Имшенецкій*, «О приложеніяхъ общихъ функцій Бернулли» — брошюра, присланная авторомъ для библіотеки общества.

Протоколъ засѣданія 28 сентября.

Присутствовали К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, В. Л. Кирпичевъ, А. В. Гречаниновъ, В. И. Альбицкій, С. А. Раевскій, А. А. Клюшниковъ, А. М. Ляпуновъ, Г. А. Синяковъ и А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Прочитанъ и подписанъ протоколъ послѣдняго засѣданія (№ 57) 25 апрѣля сего года.

2. Г. секретарь прочиталъ отчетъ о состояніи и дѣятельности математическаго общества за истекшій 1885 — 86 академическій годъ.

3. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи статьи проф. *А. А. Маркова* подъ заглавіемъ — «О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда».

4. *Онъ-же* доложилъ о книгахъ и журналахъ, полученныхъ послѣ 25 апрѣля (списокъ ихъ см. ниже).

5. Произведены были выборы въ члены распорядительнаго комитета; выбраны: предсѣдателемъ проф. К. А. Андреевъ, товарищами предсѣдателя проф. М. А. Тихомандрицкій и директоръ технологическаго института В. А. Кирпичевъ, секретаремъ преподаватель 1-й гимназіи А. П. Грузинцевъ.

6. Г. секретарь предложилъ, по примѣру прежнихъ лѣтъ, добровольную подписку въ пользу математическаго общества.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

о дѣятельности математическаго общества, состоящаго при харьковскомъ университетѣ,

за 1885—86 академическій годъ.

Въ настоящій отчетный годъ, седьмой съ начала существованія математическаго общества при харьковскомъ университетѣ, дѣятельность его имѣла въ общемъ тотъ же характеръ и была направляема къ тѣмъ же цѣлямъ, какъ и въ предыдущіе годы. Съ открытіемъ въ Харьковѣ технологическаго института къ обществу присоединилось нѣсколько новыхъ членовъ изъ профессоровъ и преподавателей этого высшаго учебнаго заведенія.

Въ теченіе академическаго года общество имѣло 6 засѣданій, въ которыхъ было сдѣлано 17 сообщеній, относящихся къ высшей математикѣ, механикѣ, астрономіи и физикѣ.

Число членовъ общества въ настоящемъ году увеличилось до 38.

Общество продолжало дѣятельное научное сношеніе какъ съ нѣкоторыми русскими учеными, которые присылали ему свои статьи для доклада, такъ и съ учеными обществами русскими и заграничными, которыя продолжали обмѣнъ своихъ изданій на изданіе общества.

Въ теченіе послѣдняго года обществомъ были изданы два выпуска его «Сообщеній», въ которыхъ собраны сообщенія и доклады, сдѣланные во второй половинѣ 1885 и въ первой половинѣ 1886 года.

Библіотека общества продолжала пополняться выпиской математическихъ журналовъ, приношеніями и обмѣномъ.

Списокъ книгъ и журналовъ, полученныхъ математическимъ обществомъ отъ 25 апрѣля по 28 сентября 1886 года.

1. Журналъ физико-химическаго общества. Вып. 5 и 6 за 1886.
2. Математическій сборникъ. Вып. I, т. 13.
3. Кіевскія университетскія извѣстія за 1886 г. Вып. 3, 4, 5 и 6.
4. *Порѣцкаго*, Къ вопросу о рѣшеніи нѣкоторыхъ нормальныхъ системъ, встрѣчающихся въ астрономіи. Казань. 1886.
5. Протоколы 54-й и 55-й казанскаго математическаго общества.
6. *Бѣлопольскаго*, Пятна на солнцѣ и ихъ движеніе (отъ К. А. Андреева).
7. *Грузинцева*, О теоріи дисперсіи Фойхта.
8. Физико-математическія науки. №№ 3 и 4, т. 2.
9. То-же № 4, т. I.
10. *Флорова*, Объ уравненіи $\frac{d^n u}{dx^n} = x^m u$.
11. *Его-же*, Замѣтка о частныхъ интегралахъ одного линейнаго дифференціальнаго уравненія.
12. *Его-же*, Приложеніе основныхъ формулъ теоріи междупредѣльнаго дифференцированія къ суммованію безконечныхъ рядовъ.
13. Journal de mathématiques élémentaires. №№ 5—9, 1886.
14. Journal de mathématiques spéciales. №№ 5—9, 1886.
15. Mathesis. №№ 5—8, 1886.
16. Bulletin de la société mathématique de France. T. XIV, №№ 3, 4.

17. American Journal of Mathematics. July and August, 1886.
18. Proceedings of the Canadian Institute. Toronto, №№ 1, 3, 4, 1886.
19. Rendiconti del circolo mathematico di Palermo, 1884—85 (1; 2).
20. Jornal de sciencias math. pelo Teixeira. V. VII, № 1.
21. On the Flexure of Meridian instruments. App. III to the Wash. Observatory for 1882.
22. Nouveaux mémoires de la société des naturalistes de Moscou. Liv. 4, т. XV.
23. Bulletin de la société des naturalistes de Moscou. №№ 1, 3, 4.
24. Annales de l'observatoire de Moscou. V. I, livr. 1.
25. Записки новороссійскаго общества естествоиспытателей. Т. X, вып. II.
26. Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. № 1, 1886—87.
27. Revue international de l'enseignement. Paris, 1886, № 8, 15 Juillet. Sixième année.

О ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМЪ

УРАВНЕНІИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАГО РЯДА.

А. А. Маркова.

Эта замѣтка посвящена опредѣленію всѣхъ случаевъ, когда произведеніе двухъ какихъ нибудь рѣшеній дифференціальнаго уравненія

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\Big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\Big)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0 \qquad (1)$$

равно цѣлой функціи отъ x.

Для рѣшенія нашего вопроса составимъ сначала по извѣстнымъ правиламъ дифференціальное уравненіе 3-го порядка, которому удовлетворяетъ произведеніе

$$z=y_1y_2 \qquad (2)$$

двухъ какихъ нибудь рѣшеній (y_1 и y_2) уравненія (1).

Полагая для краткости

$$x(1-x)=p,\ \gamma-(\alpha+\beta+1)x=q,\ -\alpha\beta=r, \qquad (3)$$

находимъ:

$$z = y_1 y_2,$$

$$\frac{dz}{dx} = y_1 \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = y_1 \frac{d^2y_2}{dx^2} + y_2 \frac{d^2y_1}{dx^2} + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dy_2}{dx},$$

$$p \frac{d^2z}{dx^2} = -y_1\left(q\frac{dy_2}{dx} + ry_2\right) - y_2\left(q\frac{dy_1}{dx} + ry_1\right) + 2p \frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} =$$

$$= 2p \frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} - q\frac{dz}{dx} - 2rz,$$

$$p\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{dp}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} = 2p\frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2} + 2p\frac{dy_2}{dx}\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dp}{dx}\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} -$$

$$- q\frac{d^2z}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx} + 2r\right)\frac{dz}{dx} = 2\left(\frac{dp}{dx} - 2q\right)\frac{dy_1}{dx}\frac{dy_2}{dx} - q\frac{d^2z}{dx^2} -$$

$$- \left(\frac{dq}{dx} + 4r\right)\frac{dz}{dx},$$

и наконецъ, по исключеніи $\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dy_2}{dx}$,

$$p^2\frac{d^3z}{dx^3} + 3pq\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2q^2 + p\frac{dq}{dx} - q\frac{dp}{dx} + 4rp\right)\frac{dz}{dx} +$$

$$+ 2r\left(2q - \frac{dp}{dx}\right)z = 0. \qquad (4)$$

Подставляя затѣмъ вмѣсто p, q и r ихъ выраженія (3), получаемъ

$$x^2(1-x)^2\frac{d^3z}{dx^3} + 3x(1-x)(ax+b)\frac{d^2z}{dx^2} + (cx^2 + \partial x + e)\frac{dz}{dx} +$$

$$+ (fx + g)z = 0, \qquad (4)$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} a &= -(\alpha+\beta+1) \\ b &= \gamma \\ c &= 2\alpha^2+8\alpha\beta+2\beta^2+3\alpha+3\beta+1 \\ \partial &= -2\gamma(2\alpha+2\beta+1)-4\alpha\beta \\ e &= 2\gamma^2-\gamma \\ f &= 4\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ g &= -2\alpha\beta(2\gamma-1). \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

При какихъ же условіяхъ уравненіе (4) допускаетъ рѣшеніе

$z =$ цѣлой функціи x?

Пусть

$$z = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \ldots + L_{n-1}x^{n-1} + L_nx^n, \quad (6)$$

гдѣ

$$L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}, L_n$$

нѣкоторыя постоянныя и притомъ L_n не нуль.

Подставляя выраженіе (6) вмѣсто z въ лѣвую часть уравненія (4), получаемъ цѣлую функцію $n+1$-ой степени относительно x

$$P_0 + P_1x + P_2x^2 + \ldots + P_{n-1}x^{n-1} + P_nx^n + P_{n+1}x^{n+1}, \quad (7)$$

которая, согласно нашимъ требованіямъ, должна тождественно обращаться въ нуль.

Коэффиціенты

$$P_0, P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$$

опредѣляются равенствами

$$\left.\begin{aligned}
P_0 &= \qquad\qquad R_0 L_0 + S_0 L_1 \\
P_1 &= Q_1 L_0 + R_1 L_1 + S_1 L_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_{m+1} &= Q_{m+1} L_m + R_{m+1} L_{m+1} + S_{m+1} L_{m+2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_n &= Q_n L_{n-1} + R_n L_n \\
P_{n+1} &= Q_{n+1} L_n ,
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

гдѣ вообще

$$\left.\begin{aligned}
Q_{m+1} &= m(m-1)(m-2) + 3(\alpha+\beta+1)m(m-1) + \\
&+ (2\alpha^2 + 8\alpha\beta + 2\beta^2 + 3\alpha + 3\beta + 1)m + 4\alpha\beta(\alpha+\beta) = \\
&= (m+2\alpha)(m+2\beta)(m+\alpha+\beta) \\
R_{m+1} &= -2(m+1)m(m-1) - 3(\gamma+\alpha+\beta+1)(m+1)m - \\
&- (2\gamma(2\alpha+2\beta+1) + 4\alpha\beta)(m+1) - 2\alpha\beta(2\gamma-1) \\
S_{m+1} &= (m+2)(m+1)m + 3\gamma(m+2)(m+1) + \\
&+ (2\gamma^2-\gamma)(m+2) = (m+2)(m+\gamma+1)(m+2\gamma).
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Остается подобрать числа

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ n,\ L_0,\ L_1,\ L_2, \dots,\ L_{n-1},\ L_n$$

такъ, чтобы всѣ выраженія

$$P_0,\ P_1, \dots,\ P_n,\ P_{n+1}$$

обратились въ нуль.

Условіе

$$P_{n+1} = 0$$

даетъ намъ

$$n = -2\alpha \text{ или } -2\beta \text{ или } -(\alpha+\beta).$$

Что же касается остальныхъ уравненій

$$P_0=0,\ P_1=0,\ldots,\ P_n=0,$$

то они навѣрно будутъ удовлетворены при нѣкоторой системѣ значеній чиселъ

$$L_0,\ L_1,\ldots,\ L_n,$$

между которыми встрѣчаются не равныя нулю, если только приводится къ нулю опредѣлитель

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} R_0, & S_0, & 0, & 0 & \ldots\ldots & 0 & , & 0 \\ Q_1, & R_1, & S_1, & 0 & \ldots\ldots & 0 & . & 0 \\ 0, & Q_2, & R_2, & S_2 & \ldots\ldots & 0 & , & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & Q_{n-1}, & R_{n-1}, & & S_{n-1} \\ 0, & 0, & \ldots & \ldots & 0, & Q_n, & & R_n \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Такимъ образомъ вопросъ нашъ сводится къ рѣшенію уравненія

$$\Delta_n=0 \qquad (11)$$

при условіи

$$n=-2\alpha \text{ или } -2\beta \text{ или } -(\alpha+\beta). \qquad (12)$$

Это рѣшеніе заключается въ нижеслѣдующихъ предложеніяхъ.

Соотношеніе между Δ_{m+1}, Δ_m и Δ_{m-1}

$$\Delta_{m+1}=R_{m+1}\ \Delta_m-Q_{m+1}\ S_m\ \Delta_{m-1} \qquad (13)$$

представляетъ простое слѣдствіе извѣстной теоремы о разложеніи опредѣлителя по элементамъ какой нибудь строки или какого нибудь столбца.

Лемма 1.

При n четномъ и $\alpha = -\frac{n}{2}$ или $\beta = -\frac{n}{2}$ опредѣлитель Δ_n тождественно обращается въ нуль.

Для доказательства достаточно вспомнить, что при n четномъ и $\alpha = -\frac{n}{2}$ или $\beta = -\frac{n}{2}$ уравненіе (1) допускаетъ рѣшеніе $y =$ цѣлой функціи $\frac{n}{2}$ степени отъ x, квадратъ же этой цѣлой функціи долженъ удовлетворять уравненію (4).

Лемма 2.

Если наши уравненія (11) и (12) удовлетворены при нѣкоторой системѣ значеній чиселъ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ n,$$

то они не нарушатся и по замѣнѣ γ на $\alpha + \beta + 1 - \gamma$.

Для доказательства достаточно замѣтить, что замѣна γ на $\alpha + \beta + 1 - \gamma$ соотвѣтствуетъ тому преобразованію дифференціальнаго уравненія (1), когда x замѣняютъ на $(1 - x)$.

Теорема 1.

$$\Delta_{2k} = \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots$$
$$\ldots(\alpha+k)(\beta+k)\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\ldots\left(\gamma + \frac{2k-1}{2}\right)\Phi_{2k}$$

$$\Delta_{2k+1} = \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots \qquad (14)$$
$$\ldots(\alpha+k)(\beta+k)\left(\gamma - \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\gamma + \frac{2k-1}{2}\right)\Phi_{2k+1},$$

гдѣ Φ_{2k} и Φ_{2k+1} цѣлыя функціи отъ α, β, γ, обращающіяся въ нуль:

первая

при
$$\alpha+\beta=-k-s,$$
$$\gamma=-\frac{2k+1}{2},-\frac{2k+3}{2},\ldots,-\frac{2k+2s-1}{2}$$
$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k),$$

вторая

при
$$\alpha+\beta=-k-s,$$
$$\gamma=-\frac{2k+1}{2},-\frac{2k+3}{2},\ldots,-\frac{2k+2s-1}{2}$$
$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k+1).$$

Доказательство.

Непосредственныя вычисленія даютъ:

$$\Delta_0=-2\alpha\beta(2\gamma-1),$$
$$\Delta_1=\quad 4\alpha\beta(2\gamma-1)\,[\gamma(2\alpha\beta+\alpha+\beta+1)+\alpha\beta],$$

откуда нетрудно убѣдиться въ справедливости теоремы въ случаѣ $k=0$.

Допуская затѣмъ, что наша теорема справедлива при $k=k'$, получаемъ

$$\Delta_{2k'+2}=\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots(\alpha+k')(\beta+k')\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\gamma+\frac{2k'-1}{2}\right)\left\{R_{2k'+2}\Phi_{2k'+1}-Q_{2k'+2}S_{2k'+1}\Phi_{2k'}\right\},$$

гдѣ

$$Q_{2k'+2}=(2\alpha+2k'+1)(2\beta+2k'+1)(\alpha+\beta+2k'+1).$$

По леммѣ (1) выраженіе

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1}-Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}$$

должно дѣлиться на произведеніе

$$(\alpha+k'+1)\,(\beta+k'+1).$$

Кромѣ того, согласно сдѣланному нами допущенію, это выраженіе должно обращаться въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha+\beta=-k'-s,\quad \gamma=-\frac{2k'+1}{2},-\frac{2k'+3}{2},\ldots,-\frac{2k'+2s-1}{2}$$

$$(s=1,\ 2,\ldots k'+1).$$

Если же

$$\alpha+\beta=-(2k'+2),$$

то, принимая во вниманіе, что $\Delta_{2k'+2}$ обращается въ нуль при

$$\gamma=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\ldots-\frac{2k'-1}{2},$$

на основаніи леммы (2) можемъ указать еще $k'+1$ значеній γ

$$\gamma=-\frac{2k'+3}{2},-\frac{2k'+5}{2},\ldots,-\frac{4k'+3}{2},$$

обращающихъ $\Delta_{2k'+2}$ въ нуль.

Поэтому при

$$\alpha+\beta=-(2k'+2)$$

уравненіе

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1}-Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}=0$$

$k'+2$ степени относительно γ допускаетъ слѣдующія $k'+1$ рѣшеній

$$\gamma = -\frac{2k'+3}{2}, -\frac{2k'+5}{2}, \ldots, -\frac{4k'+3}{2}.$$

Остается найти еще одно рѣшеніе того же уравненія.

И нетрудно понять, что это рѣшеніе не должно мѣняться отъ замѣны γ на $\alpha+\beta+1-\gamma = -(2k'+1-\gamma)$ и потому оно будетъ

$$\gamma = -\frac{2k'+1}{2}.$$

Сопоставляя этотъ результатъ съ предыдущими, заключаемъ, что при $\gamma = -\frac{2k'+1}{2}$ функція

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}$$

$k'+2$ степени относительно α обращается въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha = -\beta-k'-1,\ -\beta-k'-2, \ldots,\ -\beta-2k'-2,\ -k'-1.$$

Такой результатъ показываетъ, что наше выраженіе

$$R_{2k'+2}\,\Phi_{2k'+1} - Q_{2k'+2}\,S_{2k'+1}\,\Phi_{2k'}$$

при $\gamma = -\frac{2k'+1}{2}$ тождественно обращается въ нуль.

Отсюда нетрудно уже вывести равенство

$$\Delta_{2k'+2} = \alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots$$
$$\ldots(\alpha+k'+1)(\beta+k'+1)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\gamma+\frac{2k'+1}{2}\right)\Phi_{2k'+2},$$

гдѣ $\Phi_{2k'+2}$ цѣлая функція отъ α, β, γ и обладаетъ указаннымъ выше свойствомъ обращаться въ нуль при

$$\alpha+\beta=-(k'+1+s)$$

$$\text{и}\quad \gamma=-\frac{2k'+3}{2},\ -\frac{2k'+5}{2},\ldots,-\frac{2k'+2s+1}{2}$$

$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k'+1).$$

Переходя къ выраженію $\Delta_{2k'+3}$, получаемъ

$$\Delta_{2k'+3}=\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)\ldots$$

$$\ldots(\alpha+k'+1)(\beta+k'+1)\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(\gamma+\frac{2k'+1}{2}\right)\Phi_{2k'+3},$$

гдѣ

$$\Phi_{2k'+3}=R_{2k'+3}\,\Phi_{2k'+2}-$$

$$-8(\alpha+\beta+2k'+2)(2k'+3)(\gamma+2k'+2)\,\Phi_{2k'+1}.$$

На основаніи предыдущаго $\Phi_{2k'+3}$ обращается въ нуль всякій разъ, когда

$$\alpha+\beta=-(k'+1+s),$$

$$\gamma=-\frac{2k'+3}{2},\ -\frac{2k'+5}{2},\ldots,\ -\frac{2k'+2s+1}{2}$$

$$(s=1,\ 2,\ 3,\ldots,k'+1).$$

Кромѣ того по леммѣ (2) тотъ же полиномъ $\Phi_{2k'+3}$ долженъ обращаться въ нуль при

$$\alpha+\beta=-(2k'+3),\ \gamma=-\frac{2k'+3}{2},\ -\frac{2k'+5}{2},\ldots,-\frac{4k'+5}{2}.$$

Такимъ образомъ мы убѣждаемся въ справедливости нашей теоремы при

$$k=k'+1,$$

если только она справедлива при

$$k=k'.$$

Съ другой стороны, мы знаемъ, что она справедлива при $k=0$; слѣдовательно, она должна быть справедлива и при

$$k=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

т. е. при всякомъ k.

Теорема 2.

При

$$\alpha=-\frac{2k+1}{2}$$

уравненіе

$$\Phi_{2k+1}=0$$

$k+1$-ой степени относительно буквы γ имѣетъ слѣдующіе корни

$$\gamma=\beta,\ \beta-1,\ \beta-2,\ldots,\ \beta-k.$$

Для доказательства достаточно замѣтить, что Δ_{2k+1} обращается въ нуль при

$$\gamma=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ldots,\ -\frac{2k-1}{2}$$

и потому согласно леммѣ (2) этотъ опредѣлитель долженъ обращаться въ нуль также и при

$$\gamma=-\frac{2k+1}{2}+\beta+\frac{1}{2},\ -\frac{2k+1}{2}+\beta+\frac{3}{2},\ldots$$

$$\ldots,\ -\frac{2k+1}{2}+\beta+\frac{2k+1}{2},$$

$$=\beta-k,\ \beta-k+1,\ldots,\ \beta,$$

если только

$$\alpha = -\frac{2k+1}{2}.$$

Заключеніе.

Произведеніе нѣкоторыхъ двухъ рѣшеній дифференціальнаго уравненія гипергеометрическаго ряда равно цѣлой функціи отъ независимой перемѣнной только въ слѣдующихъ случаяхъ:

a) при n четномъ,

1) $\alpha = -\frac{n}{2}$,

2) $\beta = -\frac{n}{2}$,

3) $\alpha + \beta = -n$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -\frac{2n-1}{2}$;

b) при n нечетномъ,

1) $\alpha = -\frac{n}{2}$,

$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{n-2}{2}, \beta, \beta-1, \beta-2, \ldots, \beta-\frac{n-1}{2}$,

2) $\beta = -\frac{n}{2}$,

$\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{n-2}{2}, \alpha, \alpha-1, \alpha-2, \ldots, \alpha-\frac{n-1}{2}$,

3) $\alpha + \beta = -n$, $\gamma = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -\frac{2n-1}{2}$.

О ТѢЛѢ

НАИБОЛЬШАГО ПОТЕНЦІАЛА.

А. М. Ляпунова.

1. Разсмотримъ какое-нибудь однородное тѣло, частицы котораго взаимно притягиваются или отталкиваются по закону Ньютона. Пусть $d\tau$ и $d\tau'$ суть какіе-либо два элемента объема его, и r разстояніе между точками (x, y, z) и (x', y', z'), принадлежащими этимъ элементамъ. Тогда выраженіе

$$k\iint\frac{d\tau\,d\tau'}{r},$$

въ которомъ каждое изъ двухъ означенныхъ интегрированій распространяется на весь объемъ тѣла и въ которомъ k есть нѣкоторая постоянная, зависящая отъ плотности тѣла, представитъ то, что называется потенціаломъ этого тѣла самого на себя.

Положимъ

$$\Pi=\iint\frac{d\tau\,d\tau'}{r}.$$

Извѣстно, что это выраженіе Π, при данномъ объемѣ тѣла, есть maximum для шара. Но, на сколько я знаю, до сихъ поръ еще не былъ рѣшенъ вопросъ, достигаетъ ли оно при этомъ наибольшаго изъ всѣхъ возможныхъ для него значеній; другими словами — достигаетъ ли П для шара своего высшаго предѣла?

Въ предлагаемой замѣткѣ заключаются нѣкоторыя данныя для рѣшенія этого вопроса. А именно, въ ней показывается, что если допустить существованіе такого тѣла, для котораго П достигаетъ при данномъ объемѣ своего высшаго предѣла, то это тѣло необходимо есть шаръ. Пріемъ, посредствомъ котораго это доказывается, состоитъ въ сообщеніи такому тѣлу нѣкоторой опредѣленной деформаціи и затѣмъ въ изслѣдованіи условій, при которыхъ соотвѣтствующее приращеніе П имѣетъ отрицательное или равное нулю значеніе.

2. Прежде всего выведемъ нѣкоторыя вспомогательныя формулы, относящіяся къ тѣлу, для котораго П есть maximum.

Легко убѣдиться, что если потенціальная функція тѣла не сохраняетъ постояннаго значенія на его поверхности, то этому тѣлу всегда можно сообщить такую деформацію, не измѣняющую его объема, которая увеличитъ соотвѣтствующее ему выраженіе П. Поэтому если

$$V=\int\frac{d\tau'}{r},$$

то для тѣла, обращающаго П въ maximum, функція V должна сохранять одно и то-же значеніе во всѣхъ точкахъ его поверхности, состоитъ ли послѣдняя изъ одной или нѣсколькихъ замкнутыхъ поверхностей. Это постоянное на поверхности такого тѣла значеніе функціи V мы назовемъ черезъ λ.

Можно найти зависимость между λ и П. Для этого, разумѣя подъ n направленіе внутренней нормали къ поверхности тѣла въ точкѣ (x, y, z) ея элемента ds, умножимъ обѣ части уравненія

$$V = \lambda$$

на $[x\cos(nx) + y\cos(ny) + z\cos(nz)]\,ds$ и проинтегрируемъ по всей поверхности. Такъ-какъ при этомъ

$$\int V[x\cos(nx) + y\cos(ny) + z\cos(nz)]\,ds = -\frac{5}{2}\Pi,$$

и если Q есть объемъ тѣла, то

$$\int [x\cos(nx) + y\cos(ny) + z\cos(nz)]\,ds = -3Q,$$

то мы и находимъ

$$\lambda = \frac{5}{6}\,\frac{\Pi}{Q}. \qquad (1)$$

Обозначимъ производную V по внутренней нормали къ поверхности тѣла черезъ $\frac{\partial V}{\partial n}$, такъ что

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(nz),$$

гдѣ производныя $\frac{\partial V}{\partial x}$ и т. д. имѣютъ значенія, соотвѣтствующія точкѣ (x, y, z) поверхности тѣла.

Нетрудно убѣдиться, что $\frac{\partial V}{\partial n}$ есть плотность электрическаго слоя массы $4\pi Q$, находящагося въ равновѣсіи на поверхности разсматриваемаго тѣла, если его предположить проводникомъ электричества.

Для этого мы замѣчаемъ, что

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 4\pi Q \qquad (2)$$

и что

$$\int \frac{\frac{\partial V'}{\partial n'} ds'}{r} = 4\pi V$$

для всѣхъ точекъ внѣшняго по отношенію къ тѣлу пространства. Здѣсь интегрированія распространены на всю поверхность тѣла, и величины, обозначенныя буквами со значками, имѣютъ тѣ-же значенія по отношенію къ точкѣ (x', y', z'), какія имѣютъ величины, обозначенныя тѣми-же буквами безъ значковъ, по отношенію къ точкѣ (x, y, z).

Въ справедливости первой изъ этихъ двухъ формулъ легко убѣдиться преобразованіемъ поверхностнаго интеграла въ объемный. Вторая же слѣдуетъ изъ извѣстной формулы, опредѣляющей значеніе потенціальной функціи для каждой точки внѣшняго по отношенію къ тѣлу пространства по даннымъ значеніямъ на поверхности тѣла самой потенціальной функціи и ея производной по нормали, принимая въ разсчетъ, что потенціальная функція сохраняетъ въ разсматриваемомъ случаѣ постоянное значеніе на этой поверхности.

Изъ этой второй формулы получается слѣдующая для всѣхъ точекъ поверхности тѣла

$$\int \frac{\frac{\partial V'}{\partial n'} ds'}{r} = 4\pi\lambda. \qquad (3)$$

Формулы (2) и (3) и доказываютъ справедливость только что сказаннаго.

Извѣстно, что интегралъ

$$\iint \frac{\varrho\varrho' \, ds \, ds'}{r},$$

въ которомъ каждое изъ двухъ означенныхъ интегрированій распространяется на всю поверхность тѣла, и въ которомъ ϱ есть какая-либо функція точки поверхности, удовлетворяющая условію

$$\int \varrho \, ds = M,$$

достигаетъ наименьшаго изъ всѣхъ возможныхъ для него значеній, когда ϱ обращается въ плотность электрическаго слоя массы M, находящагося въ равновѣсіи на поверхности тѣла.

Вслѣдствіе этого, если $M = 4\pi Q$, то по только-что доказанному мы будемъ имѣть:

$$\iint \frac{\varrho\varrho' \, ds \, ds'}{r} \geqq \iint \frac{\frac{\partial V}{\partial n} \frac{\partial V'}{\partial n'} ds \, ds'}{r},$$

или въ силу (2) и (3)

$$\iint \frac{\varrho\varrho' \, ds \, ds'}{r} \geqq (4\pi)^2 \, Q\lambda,$$

гдѣ знакъ равенства относится только къ случаю $\varrho = \frac{\partial V}{\partial n}$.

Полагая здѣсь

$$\varrho = \frac{4\pi Q}{S},$$

и разумѣя подъ S величину всей поверхности тѣла, найдемъ:

$$\iint \frac{ds\,ds'}{r} \geqq \frac{S^2}{Q}\lambda, \qquad (4)$$

гдѣ знакъ равенства относится только къ тому случаю, когда $\frac{\partial V}{\partial n}$ сохраняетъ постоянное значеніе на всей поверхности тѣла, какъ это имѣетъ мѣсто для шара.

3. Опредѣлимъ теперь ту деформацію, которую мы будемъ сообщать тѣлу.

Условимся подъ разстояніемъ какой-нибудь точки отъ данной поверхности разумѣть наименьшее изъ разстояній между этою точкою и всѣми точками поверхности.

Найдемъ геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ внѣшняго по отношенію къ какому-либо тѣлу пространства, находящихся въ постоянномъ разстояніи ζ отъ его поверхности. Это геометрическое мѣсто, очевидно, будетъ нѣкоторою новою поверхностью, заключающею внутри себя разсматриваемое тѣло. Когда поверхность тѣла такова, что, при непрерывномъ движеніи по ней точки, направленіе нормали къ ней въ этой точкѣ измѣняется непрерывнымъ образомъ, то къ этой второй поверхности можно перейти, откладывая на внѣшнихъ нормаляхъ къ поверхности тѣла длины, равныя ζ.

Предполагая, что тѣло получаетъ такую деформацію, при которой его поверхность переходитъ въ эту новую, мы будемъ эту деформацію называть первою. Если затѣмъ деформированному тѣлу сообщимъ такую деформацію, вслѣдствіе которой оно уменьшится, оставаясь подобнымъ самому себѣ, такъ что каждая длина, сохраняя свое направленіе, уменьшится въ отношеніи равномъ $1-\varepsilon$, то эту деформацію мы будемъ называть второю. Очевидно, что вторую деформацію можно опредѣлить такимъ образомъ, чтобы послѣ нея объемъ тѣла возвратился къ той-же величинѣ, какая ему соотвѣтствовала до первой деформаціи.

Мы будемъ предполагать обѣ эти деформаціи безконечно-малыми, такъ что ζ и ε будутъ разсматриваться, какъ безконечно-малыя величины. Найдемъ въ этомъ предположеніи зависимость между обѣими деформаціями, при которой объемъ тѣла не измѣняется.

Пусть Q' есть объемъ тѣла послѣ первой деформаціи.

Если направленіе нормали къ поверхности тѣла измѣняется непрерывнымъ образомъ при переходѣ отъ одной точки поверхности къ другой, то, называя черезъ R_1 и R_2 главные радіусы кривизны этой поверхности, считаемые положительными, когда соотвѣтственные центры кривизны находятся съ внутренней стороны поверхности, и отрицательными въ противномъ случаѣ, очевидно, будемъ имѣть:

$$Q' - Q = \int ds \int_0^\zeta \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right)\left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right) d\xi = S\zeta + q,$$

гдѣ

$$q = \zeta^2 \left\{ \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds + \frac{4}{3} \pi \zeta \right\}.$$

Если же существуютъ такія точки, въ которыхъ можно возставить болѣе одной нормали къ поверхности тѣла, то это выраженіе для $Q' - Q$ конечно уже не будетъ справедливо. Но для нашей цѣли достаточно замѣтить, что и въ этомъ случаѣ можно положить

$$Q' = Q + S\zeta + q, \qquad \textbf{(5)}$$

гдѣ q будетъ безконечно-малою величиною болѣе высокаго порядка, чѣмъ ζ, такъ-что

$$\lim \frac{q}{\zeta} = 0.$$

Далѣе, такъ-какъ послѣ второй деформаціи тѣло должно возвратиться къ прежнему объему, то мы должны имѣть:

$$Q = Q'(1-\varepsilon)^3 = Q'(1 - 3\varepsilon + 3\varepsilon^2 - \varepsilon^3). \qquad (6)$$

Исключая изъ уравненій (5) и (6) Q', мы и получимъ искомую зависимость. Отбрасывая безконечно-малыя порядка выше ζ^2, этой зависимости можно дать слѣдующій видъ:

$$S\zeta + q - 3Q\varepsilon - 3S\zeta\varepsilon + 3Q\varepsilon^2 = 0.$$

Отсюда съ тою-же степенью приближенія получается такое выраженіе для ε

$$\varepsilon = \frac{S}{3Q}\zeta + \frac{q}{3Q} - \frac{2}{9}\frac{S^2}{Q^2}\zeta^2. \qquad (7)$$

Сообщая какому-нибудь тѣлу послѣдовательно первую и вторую деформаціи, удовлетворяющія только что сказанной зависимости, мы и получимъ въ результатѣ ту деформацію, которую имѣли въ виду опредѣлить.

4. Обращаемся теперь къ нашей задачѣ.

Сообщимъ тѣлу, для котораго П достигаетъ наибольшаго изъ всѣхъ возможныхъ для него значеній, безконечно-малую деформацію, опредѣленную въ предыдущемъ параграфѣ, и разсмотримъ приращеніе, которое получитъ при этомъ П.

Пусть П$'$ есть значеніе П послѣ первой деформаціи. Въ такомъ случаѣ легко видѣть, что

$$\Pi' = \Pi + 2\int V d\tau_1 + \iint \frac{d\tau_1\, d\tau_1'}{r_1},$$

гдѣ $d\tau_1$ и $d\tau_1'$ суть элементы того объема, который заключается между поверхностью тѣла въ первоначальномъ состояніи и поверхностію его послѣ первой деформаціи, r_1 разстояніе между какими-либо точками, принадлежащими этимъ элементамъ, и интегрированія распространяются на весь этотъ объемъ.

Но отбрасывая безконечно-малыя, порядки которыхъ выше ζ^2, очевидно, найдемъ:

$$\int V d\tau_1 = \lambda(S\zeta + q) - \frac{\zeta^2}{2}\int \frac{\partial V}{\partial n} ds,$$

$$\iint \frac{d\tau_1\, d\tau_1'}{r} = \zeta^2 \iint \frac{ds\, ds'}{r},$$

а потому, принимая въ разсчетъ формулу (2), будемъ имѣть:

$$\Pi' = \Pi + 2\lambda(S\zeta + q) - 4\pi Q\zeta^2 + \zeta^2 \iint \frac{ds\, ds'}{r}.$$

Далѣе, если Π_1 есть значеніе Π послѣ второй деформаціи, то очевидно

$$\Pi_1 = \Pi'(1-\varepsilon)^5,$$

или, по прежнему отбрасывая безконечно-малыя порядка выше ζ^2,

$$\Pi_1 = \Pi' - 5\Pi\varepsilon - 10\lambda S\zeta\varepsilon + 10\Pi\varepsilon^2.$$

Отсюда, принимая въ разсчетъ выраженіе (7) для ε, съ тою же степенью приближенія находимъ:

$$\Pi_1 - \Pi = \left(2\lambda - \frac{5}{3}\frac{\Pi}{Q}\right)(S\zeta + q) - 4\pi Q\zeta^2 +$$

$$+ \zeta^2 \iint \frac{ds\, ds'}{r} - \frac{2}{3}\frac{S^2}{Q}\left(5\lambda - \frac{10}{3}\frac{\Pi}{Q}\right)\zeta^2,$$

а это равенство вслѣдствіе формулы (1) принимаетъ видъ:

$$\Pi_1 - \Pi = \zeta^2 \left(\iint \frac{ds\,ds'}{r} - 4\pi Q - \frac{2}{3}\frac{S^2}{Q}\lambda \right).$$

Такова величина искомаго приращенія съ точностью до безконечно-малыхъ одного порядка съ ζ^2.

Такъ-какъ это приращеніе не должно быть положительнымъ, то необходимо должно быть

$$\iint \frac{ds\,ds'}{r} \leqq 4\pi Q + \frac{2}{3}\frac{S^2}{Q}\lambda,$$

а это въ силу (4) требуетъ, чтобы было удовлетворено условіе

$$\lambda \leqq 12\pi \frac{Q^2}{S^2}. \qquad (8)$$

Но, съ другой стороны, по свойству разсматриваемаго тѣла, Π не должно быть менѣе его значенія, соотвѣтствующаго шару того-же объема, а слѣдовательно въ силу (1) и λ не должно быть менѣе соотвѣтственной величины, относящейся къ шару. Для шара же, какъ извѣстно, если R есть его радіусъ,

$$\lambda = \frac{4}{3}\pi R^2,$$

или если S_0 есть его поверхность,

$$\lambda = 12\pi \frac{Q^2}{S_0^2}.$$

Поэтому для разсматриваемаго тѣла должно быть

$$\lambda \geqq 12\pi \frac{Q^2}{S_0^2},$$

или въ силу (8)

$$S \leqq S_0.$$

Этому же условію, какъ извѣстно, можно удовлетворить только со знакомъ равенства и притомъ не иначе, какъ въ предположеніи, что разсматриваемое тѣло есть шаръ, ибо извѣстно, что шаръ есть тѣло (и притомъ единственное), для котораго поверхность при данномъ объемѣ достигаетъ своего низшаго предѣла [1].

Такимъ образомъ если не подлежитъ сомнѣнію существованіе такого тѣла, для котораго потенціалъ при данномъ объемѣ достигаетъ своего высшаго предѣла, то это тѣло есть шаръ.

---

[1] *Steiner*, «Sur le maximum et le minimum des figures» etc. Crelle's J., Bd. XXIV (1842).

О ДЕФОРМАЦІИ

КОЛЛИНЕАРНО-ИЗМѢНЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТРЕХЪ ИЗМѢРЕНІЙ.

П. О. Сомова.

1. Кинематику какой-либо измѣняемой системы можно изучать двоякаго рода способами. Обыкновенный пріемъ, употребляемый главнымъ образомъ въ теоріи упругости и въ гидродинамикѣ, основанъ на разсматриваніи безконечно-малыхъ элементовъ системы, изъ которыхъ каждый можно считать системою однородно-измѣняемою, т. е. такою, для которой прямолинейныя координаты каждой ея точки суть какія-либо линейныя функціи начальныхъ координатъ этой точки. Изучая, какъ измѣняются съ переходомъ отъ одной точки данной системы къ другой направленія главныхъ осей деформаціи и величины удлиненій по этимъ осямъ, можно составить себѣ понятіе о деформаціи всей данной системы. Далеко не всегда такой пріемъ приводитъ къ цѣли, такъ какъ это часто приводитъ къ сложнымъ вычисленіямъ, не соотвѣтствующимъ характеру деформаціи, которая можетъ быть при этомъ весьма простою по своимъ геометрическимъ свойствамъ. Вслѣдствіе этого теряется наглядное представленіе объ этой деформаціи. Это становится понятнымъ, если принять во вниманіе, что различныя измѣняемыя системы подчиняются различнымъ законамъ деформаціи, которые, если разсматривать измѣняемую сис-

тему конечныхъ измѣреній, по своему характеру могутъ вовсе не соотвѣтствовать параметрамъ, измѣряющимъ деформацію однородно-измѣняемой системы.

Въ такихъ случаяхъ другой путь можетъ скорѣе и проще привести къ цѣли. Для каждой измѣняемой системы мы можемъ выбирать особые параметры деформаціи, такіе, которые для этой системы наиболѣе характерны, т. е. которые наиболѣе простымъ и нагляднымъ образомъ выражаютъ законы деформаціи этой системы.

Эти послѣднія соображенія могутъ быть приложены и къ изученію деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній, т. е. такой системы точекъ, измѣняемость которой подчинена условію, чтобы всѣ плоскости, составленныя изъ точекъ этой системы, оставались во все время движенія плоскостями. Извѣстно, что однородно-измѣняемая система представляетъ собою частный случай системы коллинеарно - измѣняемой; поэтому мы найдемъ параметры деформаціи, характерные для коллинеарно-измѣняемой системы, если опредѣлимъ деформацію, которая останется у коллинарно-измѣняемой системы, когда эта система будетъ лишена деформаціи, характерной для системы однородно-измѣняемой.

2. Будемъ называть раздвиганіемъ измѣняемой системы такое ея движеніе, въ которомъ всѣ точки, лежащія въ параллельныхъ между собою плоскостяхъ, переходятъ въ плоскости, параллельныя первоначальнымъ, перемѣщаясь при этомъ по радіусамъ-векторамъ, проведеннымъ къ нимъ изъ одного общаго полюса, который мы будемъ называть центромъ раздвиганій. Пусть будетъ O этотъ центръ, а δ и δ' разстоянія его отъ одной изъ параллельныхъ плоскостей до и послѣ раздвиганія.

Величину

$$\sigma = \frac{\delta' - \delta}{\delta\delta'} \qquad (1)$$

условимся называть величиною раздвиганія, а направленіе нормали, приведенной изъ точки O къ плоскости P въ ту сторону, куда происходитъ перемѣщеніе этой плоскости, — направленіемъ раздвиганія. Ниже мы увидимъ, чѣмъ оправдывается сдѣланный нами выборъ выраженія для измѣренія величины раздвиганія. Мы увидимъ также, что эту величину раздвиганія удобно изображать графически, откладывая ее изъ центра раздвиганій въ видѣ радіуса-вектора по направленію раздвиганія.

Замѣтимъ себѣ зависимость между величиною раздвиганія и коэффиціентами плоскости до и послѣ раздвиганія. Если x_0, y_0, z_0 суть координаты центра раздвиганій и

$$\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z + \mu = 0$$

уравненіе раздвигаемой плоскости, то координаты какой-либо ея точки послѣ раздвиганія будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \sigma\delta'(x - x_0) \\ y' &= y + \sigma\delta'(y - y_0) \\ z' &= z + \sigma\delta'(z - z_0) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и будутъ удовлетворять уравненію

$$\lambda_x x' + \lambda_y y' + \lambda_z z' + \mu' = 0.$$

Между σ, μ и μ' будетъ поэтому слѣдующая зависимость:

$$\mu' = \mu + \sigma\delta'(\lambda_x x_0 + \lambda_y y_0 + \lambda_z z_0 + \mu). \qquad (3)$$

3. Деформація коллинеарно-измѣняемой системы въ общемъ случаѣ сопряжена съ раздвиганіями, имѣющими общее направленіе и одинаковую величину. Легко можно показать, что этими раздвиганіями и характеризуется отличіе деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы отъ деформаціи системы однородно-измѣняемой, такъ-что послѣднюю можно разсматривать какъ систему коллинеарно-измѣняемую, только лишенную раздвиганій. Дѣйствительно, самыя общія формулы, опредѣляющія движеніе коллинеарно-измѣняемой системы трехъ измѣреній, суть, какъ извѣстно, слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A_1a + B_1b + C_1c + D_1}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1} \\ y &= \frac{A_2a + B_2b + C_2c + D_2}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1} \\ z &= \frac{A_3a + B_3b + C_3c + D_3}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1} \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

гдѣ a, b, c суть начальныя координаты точки (x, y, z), а A_1, B_1, ... D_3, α, β, γ какія нибудь функціи времени. Эти три зависимости можно замѣнить слѣдующими шестью:

$$\left.\begin{aligned} k\xi &= A_1a + B_1b + C_1c + D_1 \\ k\eta &= A_2a + B_2b + C_2c + D_2 \\ k\zeta &= A_3a + B_3b + C_3c + D_3 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$x = \frac{k\xi}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

$$y = \frac{k\eta}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

$$z = \frac{k\zeta}{\alpha a + \beta b + \gamma c + 1},$$

причемъ въ послѣднихъ трехъ формулахъ можно, воспользовавшись уравненіями (5), подставить:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + 1 = k(\lambda_x\xi + \lambda_y\eta + \lambda_z\zeta + 1),$$

гдѣ

$$=_{x}\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix},\quad \lambda_y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ A_3 & B_3 & C_3\\ A_1 & B_1 & C_1\end{vmatrix},\quad \lambda_z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix},$$

$$k=1-(D_1\lambda_x+D_2\lambda_y+D_3\lambda_z).$$

Такимъ образомъ, отъ начальнаго положенія всякой точки коллинеарно-измѣняемой системы къ ея конечному положенію можно перейти помощію двухъ слѣдующихъ преобразованій:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{A_1}{k}a+\frac{B_1}{k}b+\frac{C_1}{k}c+\frac{D_1}{k}\\ \eta&=\frac{A_2}{k}a+\frac{B_2}{k}b+\frac{C_2}{k}c+\frac{D_2}{k}\\ \zeta&=\frac{A_3}{k}a+\frac{B_3}{k}b+\frac{C_3}{k}c+\frac{D_3}{k}\end{aligned}\right\},\qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\xi}{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1}\\ y&=\frac{\lambda}{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1}\\ z&=\frac{\zeta}{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1}\end{aligned}\right\}.\qquad (7)$$

Формулы (6) выражаютъ въ самомъ общемъ видѣ движеніе однородно-измѣняемой системы, а формулы (7) опредѣляютъ раздвиганіе по направленію, нормальному къ плоскости.

$$\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1=\text{пост.}=q,\qquad (8)$$

потому что координаты всѣхъ точекъ, лежащихъ въ этой плоскости, увеличиваются при перемѣщеніи, выраженномъ формулами (7), въ отношеніи $1 : q$, и, слѣдовательно, двигаясь по радіусамъ-векторамъ, проведеннымъ къ точкамъ этой плоскости изъ начала координатъ, переходятъ въ другую плоскость, параллельную первой. Центромъ раздвиганій служитъ начало координатъ. Точно также точки, лежащія въ другой плоскости, параллельной плоскости (8), получаютъ раздвиганіе по тому же направленію и съ тѣмъ же центромъ.

Величина раздвиганія будетъ одинакова для всѣхъ параллельныхъ между собою плоскостей. Дѣйствительно, по формуламъ (2) и (7) для величины раздвиганія мы получаемъ:

$$\sigma\delta' = \frac{x-\xi}{\xi} = \frac{y-\eta}{\eta} = \frac{z-\zeta}{\zeta} = -\frac{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta}{\lambda_x\xi+\lambda_y\eta+\lambda_z\zeta+1} = \frac{1-q}{q}\cdot \quad (9)$$

А постоянный коэффиціентъ плоскости (8) послѣ раздвиганія получимъ, принявъ во вниманіе, что теперь по формулѣ (3)

$$\mu' = (1-q)(1+\sigma\delta') = \frac{1-q}{q}\cdot \quad (10)$$

Такъ какъ

$$\delta' = \frac{\mu'}{\sqrt{\lambda_x{}^2+\lambda_y{}^2+\lambda_z{}^2}},$$

то, исключивъ изъ двухъ послѣднихъ уравненій μ', найдемъ

$$\delta' = \frac{1-q}{q\sqrt{\lambda_x{}^2+\lambda_y{}^2+\lambda_z{}^2}} = \frac{\sigma\delta'}{\sqrt{\lambda_x{}^2+\lambda_y{}^2+\lambda_z{}^2}},$$

откуда $$\sigma = \sqrt{\lambda_x{}^2+\lambda_y{}^2+\lambda_z{}^2} \quad (11)$$

Итакъ, величина раздвиганія не зависитъ отъ начальнаго разстоянія плоскости отъ центра раздвиганій, т. е. одинакова для всѣхъ параллельныхъ между собою плоскостей.

4. Прослѣдимъ, какъ измѣняется отношеніе перемѣщенія раздвигаемой плоскости къ ея первоначальному разстоянію отъ центра раздвиганій, т. е. $\frac{\delta'-\delta}{\delta} = \sigma\delta'$, съ измѣненіемъ q отъ $-\infty$ до $+\infty$.

При $q = -\infty$ формула (9) даетъ $\frac{\delta'-\delta}{\delta} = -1$, а формула (10) $\mu' = -1$ и стало быть всѣ точки, лежавшія въ безконечно-далекой плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta = -\infty, \tag{12}$$

перешли въ плоскость

$$\lambda_x x + \lambda_y y + \lambda_z z = 1. \tag{13}$$

При измѣненіи q отъ $-\infty$ до $-\varepsilon$, гдѣ ε безконечно-малая положительная величина, $\frac{\delta'-\delta}{\delta}$ будетъ, оставаясь отрицательною, приближаться къ $-\infty$, и точки, лежавшія въ плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = -\varepsilon,$$

удаляются въ безконечность.

При $q = +\varepsilon$, $\frac{\delta'-\delta}{\delta}$ будетъ положительнымъ безконечно-большимъ числомъ и точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = +\varepsilon$$

удаляются въ безконечность по направленіямъ, прямо противоположнымъ перемѣщеніямъ соотвѣтственныхъ точекъ предыдущей плоскости. Такимъ образомъ, при непрерывномъ раздвиганіи коллинеарно-измѣняемой системы точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta + 1 = 0$$

переходятъ въ безконечно-удаленную плоскость и черезъ безконечность перескакиваютъ въ другую безконечно-удаленную плоскость, параллельную первой, но лежащую съ другой стороны отъ центра раздвиганій.

При измѣненіи q отъ 0 до $+1$, $\frac{\delta' - \delta}{\delta}$ отъ $+\infty$ приближается къ 0, и, слѣдовательно точки плоскости

$$\lambda_x \xi + \lambda_y \eta + \lambda_z \zeta = 0$$

не претерпѣваютъ раздвиганія, т. е. эта плоскость при раздвиганіи всей системы остается неподвижною и всѣ точки ея сохраняютъ свое положеніе.

Наконецъ, при измѣненіи q отъ $+1$ до $+\infty$, $\frac{\delta' - \delta}{\delta}$ принимаетъ отрицательныя значенія и переходитъ въ -1. Точки, лежавшія певоначально въ безконечно-далекой плоскости, находящейся по другую сторону отъ центра раздвиганій чѣмъ плоскость (12), переходятъ въ плоскость (13).

Итакъ, для конечнаго раздвиганія коллинеарно-измѣняемой системы характерны три слѣдующихъ параллельныхъ между собою плоскости: 1) двѣ плоскости, находящіяся на разстояніи $\frac{1}{\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2}}$ отъ центра раздвиганій по разныя отъ него стороны, изъ которыхъ одна при раздвиганіи удаляется въ безконечность, а другая представляетъ собою конечное положеніе плоскости, находившейся до раздвиганія въ безконечности, и 2) плоскость, проходящая черезъ центръ раздвиганій, представляющая геометрическое мѣсто точекъ, которыя при раздвиганіи остаются неподвижными.

5. Раздвиганіе по своему кинематическому значенію представляетъ нѣкоторую аналогію съ другими кинематическими элементами. Эта аналогія проявляется въ вопросѣ о составномъ раздвиганіи, т. е. о перемѣщеніи коллинеарно-измѣняемой системы, состоящемъ изъ двухъ послѣдовательныхъ раздвиганій. Можно показать, что, хотя и не всегда, но при нѣкоторыхъ ограниченіяхъ, совокупность двухъ раздвиганій эквивалентна простому раздвиганію, которое можетъ быть опредѣлено путемъ геометрическаго сложенія.

Формулы (7) опредѣляютъ раздвиганіе, центръ котораго находится въ началѣ координатъ. Замѣнимъ теперь эти формулы болѣе общими, предположивъ, что центръ раздвиганій находится въ какой-нибудь другой точкѣ (x_0, y_0, z_0); эти формулы будутъ:

$$\left.\begin{aligned} x-x_0&=\frac{\xi-x_0}{\lambda_x(\xi-x_0)+\lambda_y(\eta-y_0)+\lambda_z(\zeta-z_0)+1}\\ y-y_0&=\frac{\eta-y_0}{\lambda_x(\xi-x_0)+\lambda_y(\eta-y_0)+\lambda_z(\zeta-z_0)+1}\\ z-z_0&=\frac{\zeta-z_0}{\lambda_x(\xi-x_0)+\lambda_y(\eta-y_0)+\lambda_z(\zeta-z_0)+1}\end{aligned}\right\}. \quad (14)$$

Разсмотримъ теперь движеніе коллинеарно-измѣняемой системы, состоящее изъ совокупности двухъ раздвиганій около различныхъ центровъ. Пусть будетъ O_1 $(x_1\, y_1\, z_1)$ центръ перваго раздвиганія и O_2 $(x_2\, y_2\, z_2)$ центръ второго раздвиганія, $(\lambda'_x, \lambda'_y, \lambda'_z)$ и $(\lambda''_x, \lambda''_y, \lambda''_z)$ коэффиціенты этихъ раздвиганій, (x, y, z) координаты какой-нибудь точки системы послѣ перваго раздвиганія, (X, Y, Z) координаты этой точки послѣ перваго и второго раздвиганій.

Составляемыя перемѣщенія будутъ тогда опредѣляться слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
x-x_1&=\frac{\xi-x_1}{\lambda'_x(\xi-x_1)+\lambda'_y(\eta-y_1)+\lambda'_z(\zeta-z_1)+1}\\
y-y_1&=\frac{\eta-y_1}{\lambda'_x(\xi-x_1)+\lambda'_y(\eta-y_1)+\lambda'_z(\zeta-z_1)+1}\\
z-z_1&=\frac{\zeta-z_1}{\lambda'_x(\xi-x_1)+\lambda'_y(\eta-y_1)+\lambda'_z(\zeta-z_1)+1}
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
X-x_2&=\frac{x-x_2}{\lambda''_x(x-x_2)+\lambda''_y(y-\eta_2)+\lambda''_z(z-z_2)+1}\\
Y-y_2&=\frac{y-\eta_2}{\lambda''_x(x-x_2)+\lambda''_y(y-\eta_2)+\lambda''_z(z-z_2)+1}\\
Z-z_2&=\frac{z-z_2}{\lambda''_x(x-x_2)+\lambda''_y(y-\eta_2)+\lambda''_z(z-z_2)+1}
\end{aligned}\right\}.$$

Подставивъ въ эти послѣднія формулы для x, y и z ихъ выраженія черезъ начальныя координаты, мы и получимъ формулы, опредѣляющія совокупность двухъ послѣдовательныхъ раздвиганій. Эти формулы можно представить въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned}
X-x_2&=\frac{[1+\lambda'_x(x_1-x_2)](\xi-x_1)+\lambda'_y(x_1-x_2)(\eta-y_1)+\lambda'_z(x_1-x_2)(\zeta-z_1)+x_1-x_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-x_1)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-y_1)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-z_1)+U_2}\\
Y-y_2&=\frac{\lambda'_x(y_1-y_2)(\xi-x_1)+[1+\lambda'_y(y_1-y_2)](\eta-y_1)+\lambda'_z(y_1-y_2)(\zeta-z_1)+y_1-y_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-x_1)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-y_1)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-z_1)+U_2}\\
Z-z_2&=\frac{\lambda'_x(z_1-z_2)(\xi-x_1)+\lambda'_y(z_1-z_2)(\eta-y_1)+[1+\lambda'_z(z_1-z_2)](\zeta-z_1)+z_1-z_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-x_1)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-\eta_1)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-z_1)+U_2}
\end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

гдѣ

$$U_2=\lambda''_x(x_1-x_2)+\lambda''_y(y_1-y_2)+\lambda''_z(z_1-z_2)+1.$$

Эти формулы выражаютъ движеніе коллинеарно-измѣняемой системы, вообще говоря, болѣе сложное, чѣмъ простое раздвиганіе.

6. Для того, чтобы формулы (15) могли давать простое раздвиганіе, необходимо, чтобы элементы составляемыхъ раздвиганій были связаны между собою нѣкоторыми условіями, которыя мы теперь и опредѣлимъ. Формулы (15) будутъ представлять простое раздвиганіе въ томъ случаѣ, если ихъ можно будетъ представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} X-A&=\frac{\xi-A}{\lambda_x(\xi-A)+\lambda_y(\eta-B)+\lambda_z(\zeta-C)+1}\\ Y-B&=\frac{\eta-B}{\lambda_x(\xi-A)+\lambda_y(\eta-B)+\lambda_z(\zeta-C)+1}\\ Z-C&=\frac{\zeta-C}{\lambda_x(\xi-A)+\lambda_y(\eta-B)+\lambda_z(\zeta-C)+1}\end{aligned}\right\}, \quad (16)$$

гдѣ (A, B, C) суть координаты центра раздвиганій. Чтобы рѣшить вопросъ, когда это возможно, преобразуемъ формулы (15) такимъ образомъ, чтобы тамъ вездѣ изъ перемѣнныхъ координатъ вычитались координаты искомаго центра раздвиганій (A, B, C). Подставляя

$$\begin{aligned} X-x_2&=(X-A)+(A-x_2),\\ Y-y_2&=(Y-B)+(B-y_2),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \zeta-z_1&=(\zeta-C)+(C-z_1),\end{aligned}$$

мы найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} X-A&=\frac{L_1(\xi-A)+M_1(\eta-B)+N_1(\zeta-C)+P_1}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-A)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-B)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-C)+Q}\\ Y-B&=\frac{L_2(\xi-A)+M_2(\eta-B)+N_2(\zeta-C)+P_2}{(\lambda''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-A)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-B)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-C)+Q}\\ Z-C&=\frac{L_3(\xi-A)+M_3(\eta-B)+N_3(\zeta-C)+P_3}{(\gamma''_x+\lambda'_xU_2)(\xi-A)+(\lambda''_y+\lambda'_yU_2)(\eta-B)+(\lambda''_z+\lambda'_zU_2)(\zeta-C)+Q}\end{aligned}\right\}, \quad (17)$$

положивъ для сокращенія:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= 1 + \lambda'_x(x_1 - x_2) - (\lambda''_x + \lambda'_x U_2)(A - x_2) \\
M_1 &= \lambda'_y(x_1 - x_2) - (\lambda''_y + \lambda'_y U_2)(A - x_2) \\
N_1 &= \lambda'_z(x_1 - x_2) - (\lambda''_z + \lambda'_z U_2)(A - x_2) \\
P_1 &= L_1(A - x_1) + M_1(B - y_1) + N_1(C - z_1) + \\
&\quad + x_1 - x_2 - U_2(A - x_2)
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
L_2 &= \lambda'_x(y_1 - y_2) - (\lambda''_x + \lambda'_x U_2)(B - y_2) \\
M_2 &= 1 + \lambda'_y(y_1 - y_2) - (\lambda''_y + \lambda'_y U_2)(B - y_2) \\
N_2 &= \lambda'_z(y_1 - y_2) - (\lambda''_z + \lambda'_z U_2)(B - y_2) \\
P_2 &= L_2(A - x_1) + M_2(B - y_1) + N_2(C - z_1) + \\
&\quad + y_1 - y_2 - U_2(B - y_2)
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned}
L_3 &= \lambda'_x(z_1 - z_2) - (\lambda''_x + \lambda'_x U_2)(C - z_2) \\
M_3 &= \lambda'_y(z_1 - z_2) - (\lambda''_y + \lambda'_y U_2)(C - z_2) \\
N_3 &= 1 + \lambda'_z(z_1 - z_2) - (\lambda''_z + \lambda'_z U_2(C - z_2) \\
P_3 &= L_3(A - x_1) + M_3(B - y_1) + N_3(C - z_1) + \\
&\quad + z_1 - z_2 - U_2(C - z_2)
\end{aligned}\right\},$$

$$\begin{aligned}
Q = (\lambda''_x + \lambda'_x U_2)(A - x_1) &+ (\lambda''_y + \lambda'_y U_2)(B - y_1) + \\
&+ (\lambda''_z + \lambda'_z U_2)(C - z_1) + U_2.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы формулы (17) были тождественны съ формулами (16), должны быть выполнены слѣдующія условія:

$$M_1 = 0,\quad N_1 = 0,\quad P_1 = 0, \tag{18}$$

$$L_2 = 0,\quad N_2 = 0,\quad P_2 = 0, \tag{19}$$

$$L_3 = 0,\quad M_3 = 0,\quad P_3 = 0, \tag{20}$$

$$L_1 = M_2 = N_3; \tag{21}$$

и кромѣ того, мы должны еще имѣть

$$\frac{L_1}{Q} = 1. \tag{22}$$

Тогда мы получимъ для коэффиціентовъ составнаго раздвиганія

$$\lambda_x = \frac{\lambda''_x + \lambda'_x U_2}{L_1}, \quad \lambda_y = \frac{\lambda''_y + \lambda'_y U_2}{L_1}, \quad \lambda_z = \frac{\lambda''_z + \lambda'_z U_2}{L_1}.$$

При изслѣдованіи найденныхъ условій нужно различать два случая: 1) когда центры слагаемыхъ раздвиганій не совпадаютъ и 2) когда они совпадаютъ.

Обращаясь къ первому случаю, мы можемъ предполагать, что ни одна изъ разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ не равна нулю; если бы одна или двѣ изъ этихъ разностей оказались равными нулю, то можно было бы перемѣною направленій координатныхъ осей этого избѣжать. Первыя два изъ условій (18) даютъ

$$\frac{\lambda''_y}{\lambda'_y} = \frac{\lambda''_z}{\lambda'_z},$$

а первыя два изъ условій (19)

$$\frac{\lambda''_z}{\lambda'_z} = \frac{\lambda''_x}{\lambda'_x},$$

послѣ чего первыя два изъ условій (20) удовлетворяются сами собой.

Послѣднее изъ условій (18), если положимъ

$$\frac{\lambda''_x}{\lambda'_x} = \frac{\lambda''_y}{\lambda'_y} = \frac{\lambda''_z}{\lambda'_z} = k \tag{23}$$

и подставимъ

$$A - x_2 = \frac{\lambda'_y (x_1 - x_2)}{\lambda''_y + \lambda'_y U_2} = \frac{x_1 - x_2}{k + U_2},$$

приводится къ слѣдующему:

$$U_2 = 1,$$

т. е.

$$\lambda''_x(x_1-x_2)+\lambda''_y(y_1-y_2)+\lambda''_z(z_1-z_2)=0. \quad (24)$$

Къ тому же приводятъ и послѣднія изъ условій (19) и (20). Что касается до условій (21), то они теперь удовлетворяются сами собой, такъ какъ каждая изъ величинъ L_1 M_2 и N_3 обращается въ единицу. Условіе (22) тоже удовлетворяется, потому что теперь

$$Q=1.$$

Для координатъ центра составного раздвиганія мы получаемъ

$$A=\frac{kx_2+x_1}{k+1},\ B=\frac{ky_2+y_1}{k+1},\ C=\frac{kz_2+z_1}{k+1},$$

а для коэффиціентовъ этого раздвиганія

$$\left.\begin{aligned}\lambda_x&=\lambda'_x+\lambda''_x\\ \lambda_y&=\lambda'_y+\lambda''_y\\ \lambda_z&=\lambda'_z+\lambda''_z\end{aligned}\right\}.$$

И такъ, если центры слагаемыхъ раздвиганій не совпадаютъ, то (23) и (24) суть необходимыя и достаточныя условія для того, чтобы совокупность двухъ раздвиганій была тоже простымъ раздвиганіемъ. Мы можемъ найденные результаты формулировать слѣдующимъ образомъ:

Для того, чтобы совокупность двухъ раздвиганій изъ различныхъ центровъ была эквивалентна простому раздвиганію, необходимо и достаточно, 1) чтобы направленія слагаемыхъ раздвиганій совпадали, и 2) чтобы центры слагаемыхъ раздвиганій лежали на прямой, перпендикулярной къ общему направленію раздвиганій. Направленіе сложнаго раздвиганія будетъ при этомъ совпадать съ направленіемъ слагаемыхъ раздвиганій, коэффиціенты его будутъ равны суммамъ соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ слагаемыхъ раздвиганій и центръ его будетъ находиться на прямой, соединяющей центры слагаемыхъ раздвиганій, раздѣляя разстояніе между ними въ отношеніи, обратномъ отношенію соотвѣтственныхъ коэффиціентовъ раздвиганій.

Во второмъ случаѣ, когда центры слагаемыхъ раздвиганій совпадаютъ, составное движеніе всегда будетъ простымъ раздвиганіемъ съ тѣмъ же самымъ центромъ. Это можно видѣть прямо изъ формулъ (15), которыя, если въ нихъ положимъ

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2, \tag{25}$$

обращаются въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
X - x_1 &= \frac{\xi - x_1}{(\lambda'_x + \lambda''_x)(\xi - x_1) + (\lambda'_y + \lambda''_y)(\eta - y_1) + (\lambda'_z + \lambda''_z)(\zeta - z_1) + 1} \\
Y - y_1 &= \frac{\eta - y_1}{(\lambda'_x + \lambda''_x)(\xi - x_1) + (\lambda'_y + \lambda''_y)(\eta - y_1) + (\lambda'_z + \lambda''_z)(\zeta - z_1) + 1} \\
Z - z_1 &= \frac{\zeta - z_1}{(\lambda'_x + \lambda''_x)(\xi - x_1) + (\lambda'_y + \lambda''_y)(\eta - y_1) + (\lambda'_z + \lambda''_z)(\zeta - z_1) + 1}
\end{aligned}\right\},$$

причемъ направленія слагаемыхъ раздвиганій могутъ теперь и не совпадать.

Послѣднія формулы показываютъ, что величина сложнаго раздвиганія есть геометрическая сумма величинъ слагаемыхъ раздвиганій, если величину раздвиганія откладывать такъ, какъ объ этомъ было сказано въ § 2.

7. Порядокъ двухъ послѣдовательныхъ конечныхъ раздвиганій, вообще говоря, не безразличенъ. Дѣйствительно, измѣняя

этотъ порядокъ противъ принятаго нами въ § 6, т. е. употребляя формулы:

$$\left.\begin{aligned}
x-x_2 &= \frac{\xi-x_2}{\lambda''_x(\xi-x_2)+\lambda''_y(\eta-y_2)+\lambda''_z(\zeta-z_2)+1}\\
y-y_2 &= \frac{\eta-y_2}{\lambda'_x(\xi-x_2)+\lambda''_y(\eta-y_2)+\lambda''_z(\zeta-z_2)+1}\\
z-z_2 &= \frac{\zeta-z_2}{\lambda''_x(\xi-x_2)+\lambda''_y(\eta-y_2)+\lambda''_z(\zeta+z_2)+1}
\end{aligned}\right\}$$

и

$$\left.\begin{aligned}
X-x_1 &= \frac{x-x_1}{\lambda'_x(x-x_1)+\lambda'_y(y-y_1)+\lambda'_z(z-z_1)+1}\\
Y-y_1 &= \frac{y-y_1}{\lambda'_x(x-x_1)+\lambda'_y(y-y_1)+\lambda'_z(z-z_1)+1}\\
Z-z_1 &= \frac{z-z_1}{\lambda'_x(x-x_1)+\lambda'_y(y-y_1)+\lambda'_z(z-z_1)+1}
\end{aligned}\right\},$$

мы получимъ для X, Y, Z слѣдующія выраженія черезъ начальныя координаты:

$$\left.\begin{aligned}
X-x_1 &= \frac{[1+\lambda''_x(x_2-x_1)](\xi-x_2)+\lambda''_y(x_2-x_1)(\eta-y_2)+\lambda''_z(x_2-x_1)(\zeta-z_2)+(x_2-x_1)}{(\lambda'_x+\lambda''_x U_1)(\xi-x_2)+(\lambda'_y+\lambda''_y U_1)(\eta-y_2)+(\lambda'_z+\lambda''_z U_1)(\zeta-z_2)+U_1}\\
Y-y_1 &= \frac{\lambda''_x(y_2-y_1)(\xi-x_2)+[1+\lambda''_y(y_2-y_1)](\eta-y_2)+\lambda''_z(y_2-y_1)(\zeta-z_2)+(y_2-y_1)}{(\lambda'_x+\lambda''_x U_1)(\xi-x_2)+(\lambda'_y+\lambda''_y U_1)(\eta-y_2)+(\lambda'_z+\lambda''_z U_1)(\zeta-z_2)+U_1}\\
Z-z_1 &= \frac{\lambda''_x(z_2-z_1)(\xi-x_2)+\lambda''_y(z_2-z_1)(\eta-y_2)+[1+\lambda''_z(z_2-z_1)](\zeta-z_2)+(z_2-z_1)}{(\lambda'_x+\lambda''_x U_1)(\xi-x_2)+(\lambda'_y+\lambda''_y U_1)(\eta-y_2)+(\lambda'_z+\lambda''_z U_1)(\zeta-z_2)+U_2}
\end{aligned}\right\},$$

причемъ

$$U_1=\lambda'_x(x_2-x_1)+\lambda'_y(y_2-y_1)+\lambda'_z(z_2-z_1)+1.$$

Дѣлая сравненіе этихъ формулъ съ формулами (15), мы убѣдимся, что первыя не будутъ въ общемъ случаѣ тождественны со вторыми.

Для насъ важно замѣтить слѣдующее: если совокупность двухъ раздвиганій даетъ опять простое раздвиганіе, то порядокъ раздвиганій становится безразличнымъ.

Это легко видѣть, сравнивая между собою формулы (26) и (15) и принимая при этомъ во вниманіе условія (23) и (24) или условіе (25).

8. Всякое раздвиганіе можетъ быть разложено на три раздвиганія по направленіямъ осей координатъ съ тѣмъ же общимъ центромъ, какъ и данное раздвиганіе, причемъ величинами раздвиганій будутъ проекціи на осяхъ координатъ величины даннаго раздвиганія.

Это есть прямое слѣдствіе результатовъ, приведенныхъ въ § 6-мъ. Легко это показать и непосредственно. Пусть будутъ λ_x, λ_y и λ_z величины раздвиганій по направленіямъ координатныхъ осей около центра x_0, y_0, z_0. Координаты какой-нибудь точки въ этихъ послѣдовательныхъ раздвиганіяхъ будутъ выражаться слѣдующимъ образомъ:

въ первомъ раздвиганіи

$$x' - x_0 = \frac{\xi - x_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1}, \quad y' - y_0 = \frac{\eta - y_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1},$$

$$z' - z_0 = \frac{\zeta - z_0}{\lambda_x(\xi - x_0) + 1},$$

во второмъ раздвиганіи

$$x'' - x_0 = \frac{x' - x_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1}, \quad y'' - y_0 = \frac{y' - y_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1},$$

$$z'' - z_0 = \frac{z' - z_0}{\lambda_y(y' - y_0) + 1},$$

а въ третьемъ раздвиганіи

$$x - x_0 = \frac{x'' - x_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1}, \quad y - y_0 = \frac{y'' - y_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1},$$

$$z - z_0 = \frac{z'' - z_0}{\lambda_z(z'' - z_0) + 1}.$$

Исключая отсюда координаты x', y', z', x'', y'', z'', мы получимъ формулы (14), опредѣляющія простое раздвиганіе, величина котораго равна $\sqrt{\lambda^2{}_x + \lambda^2{}_y + \lambda^2{}_z}$.

9. Теперь мы можемъ ясно себѣ представить тѣ 15 кинематическихъ элементовъ, изъ которыхъ слагается всякое перемѣщеніе коллинеарно-измѣняемой системы:

3 поступательныхъ перемѣщенія по осямъ координатъ,

3 вращенія около осей координатъ,

3 удлиненія по осямъ координатъ,

3 сдвиганія въ плоскостяхъ, параллельныхъ координатнымъ,

3 раздвиганія по направленіямъ координатныхъ осей.

10. При всякомъ безконечно-маломъ перемѣщеніи коллинеарно-измѣняемой системы будетъ происходить безконечно-малое раздвиганіе ея. Будемъ называть предѣлъ отношенія величины этого безконечно-малаго раздвиганія къ соотвѣтственному элементу времени скоростью раздвиганія. Согласно этому опредѣленію скорость раздвиганія должна быть измѣряема величиною

$$\tau = \sqrt{\lambda'^2{}_x + \lambda'^2{}_y + \lambda'^2{}_z},$$

гдѣ λ'_x, λ'_y, λ'_z суть производныя по времени коэффиціентовъ раздвиганія.

Чтобы это показать, выразимъ проекціи на координатныхъ осяхъ скорости какой-нибудь точки въ моментъ t черезъ координаты этой точки, соотвѣтствующія этому моменту. Дифференцируя для этого по t уравненія (7) и подставляя потомъ вмѣсто начальныхъ координатъ ихъ выраженія черезъ x, y, z, получимъ для проекцій скорости:

$$\left.\begin{aligned} V_x &= -x(\lambda'_x x + \lambda'_y y + \lambda'_z z) \\ V_y &= -y(\lambda'_x x + \lambda'_y y + \lambda'_z z) \\ V_z &= -z(\lambda'_x x + \lambda'_y y + \lambda'_z z) \end{aligned}\right\}. \qquad (27)$$

Проекціи безконечно-малаго перемѣщенія точки, если пренебрегать величинами высшихъ порядковъ, будутъ поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= -x(\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z) \\ \Delta y &= -y(\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z) \\ \Delta z &= -z(\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z) \end{aligned}\right\}.$$

Съ другой стороны, разсматривая эти перемѣщенія, происшедшими отъ безконечно-малаго раздвиганія, мы должны имѣть:

$$\left.\begin{aligned} x + \Delta x &= \frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} \\ y + \Delta y &= \frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} \\ z + \Delta z &= \frac{z}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} \end{aligned}\right\},$$

гдѣ α, β, γ суть безконечно-малые коэффиціенты раздвиганій. Для опредѣленія этихъ коэффиціентовъ мы имѣемъ зависимости

$$\frac{x}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = x[1 - (\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z)],$$

$$\frac{y}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = y[1 - (\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z)],$$

$$\frac{z}{\alpha x + \beta y + \gamma z + 1} = z[1 - (\Delta\lambda_x . x + \Delta\lambda_y . y + \Delta\lambda_z . z)].$$

Но, пренебрегая безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ, можно написать

$$\frac{1}{\alpha x+\beta y+\gamma z+1}=1-(\alpha x+\beta y+\gamma z)$$

и мы находимъ:

$$\alpha=\Delta\lambda_x,\ \ \beta=\Delta\lambda_y,\ \ \gamma=\Delta\lambda_z\,.$$

$\sqrt{(\Delta\lambda_x)^2+(\Delta\lambda_y)^2+(\Delta\lambda_z)^2}$ будетъ поэтому величиною этого раздвиганія, а по опредѣленію $\sqrt{\lambda'^2_x+\lambda'^2_y+\lambda'^2_z}$ скоростью раздвиганія.

Если скорость раздвиганія откладывать по предѣльному направленію этого раздвиганія и означить черезъ ϱ радіусъ-векторъ, проведенный изъ центра раздвиганія къ точкѣ (x, y, z), то скорость всякой точки можетъ быть по формулѣ (27) выражена такъ:

$$v=\varrho^2\,.\,\tau\,.\cos(\varrho,\tau),$$

т. е. **скорость всякой точки равна квадрату радіуса-вектора, проведеннаго къ ней изъ центра раздвиганій, умноженному на проекцію скорости раздвиганія на направленіе этого радіуса-вектора.**

Далѣе, легко видѣть, что если безконечно-малое раздвиганіе разложить на раздвиганія по направленіямъ координатныхъ осей со скоростями λ'_x, λ'_y, λ'_z, то скорости какой-нибудь точки системы, зависящія отъ этихъ раздвиганій, будутъ лежать на одной прямой и будутъ имѣть значенія

$$\varrho.\lambda'_x x,\ \ \varrho.\lambda'_y y,\ \ \varrho.\lambda'_z z,$$

а скорость точки, зависящая отъ полнаго раздвиганія, будетъ алгебраическою суммою этихъ трехъ скоростей.

Всѣ точки, лежащія въ плоскости, нормальной къ скорости раздвиганія и проходящей черезъ центръ раздвиганій, имѣютъ скорости, равныя нулю.

Геометрическое мѣсто точекъ, скорости которыхъ равны, есть поверхность четвертаго порядка

$$(x^2+y^2+z^2)(\lambda'_x x+\lambda'_y y+\lambda'_z z)^2=C^2.$$

Эта поверхность имѣетъ свойство, что для всѣхъ ея точекъ произведеніе радіуса-вектора, проведеннаго изъ центра раздвиганій, на направленіе нормали къ плоскости нулевыхъ скоростей, есть величина постоянная.

11. Выраженія (27) суть тѣ добавочные члены, которые нужно приложить къ линейнымъ функціямъ координатъ, выражающимъ проекціи скоростей точекъ однородно-измѣняемой системы, чтобы получить проекціи скоростей точекъ въ общемъ случаѣ движенія системы коллинеарно-измѣняемой. Въ этомъ легко убѣдиться, взявъ производныя по времени въ формулахъ (4) и подставивъ туда потомъ вмѣсто начальныхъ координатъ a, b, c ихъ выраженія черезъ координаты x, y, z. Это дастъ выраженія, состоящія изъ линейныхъ функцій этихъ координатъ и изъ членовъ такого вида, какіе входятъ въ формулы (27).

Такимъ образомъ, скорость всякой точки коллинеарно-измѣняемой системы слагается изъ скорости, зависящей отъ раздвиганія, и изъ скоростей, которыя въ геометрической суммѣ даютъ скорость точки въ движеніи системы однородно-измѣняемой.

О ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОМЪ УРАВНЕНІИ
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАГО РЯДА.

(Вторая замѣтка).

А. А. Маркова.

Цѣль настоящей замѣтки состоитъ въ опредѣленіи всѣхъ случаевъ, когда дифференціальное уравненіе

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \quad (1)$$

гипергеометрическаго ряда допускаетъ интегралъ вида:

$$Xy' + Yy = 0 \quad (2)$$

или

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0, \quad (3)$$

гдѣ

$$X, Y, Z$$

раціональныя функціи отъ x.

При рѣшеніи нашего вопроса можемъ предполагать

$$X, Y, Z$$

цѣлыми функціями отъ x.

Можемъ предполагать также, что эти цѣлыя функціи не имѣютъ общаго дѣлителя.

Такія предположенія помогутъ намъ установить нѣкоторыя условія для опредѣленія нашихъ функцій

$$X, Y, Z.$$

Однако, на нѣкоторыя условія, соединенныя съ предыдущими предположеніями, мы не будемъ обращать вниманія.

Поэтому въ окончательныхъ результатахъ между функціями

$$X, Y, Z$$

будутъ встрѣчаться и дробныя.

§ 1. Остановимся сначала на опредѣленіи тѣхъ случаевъ, когда уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2).

Полагая

$$Xy' + Yy = \Omega, \tag{4}$$

по дифференцированіи выводимъ на основаніи уравненія (1)

$$p\Omega' = \{p(X' + Y) - qX\}y' + (pY' - rX)y.$$

Здѣсь

$$p = x(1-x), \quad q = \gamma - (\alpha + \beta + 1)x, \quad r = -\alpha\beta.$$

Если $\Omega = 0$, то и $\Omega' = 0$.

Отсюда заключаемъ, что въ разбираемыхъ нами случаяхъ уравненія

$$Xy' + Yy = 0$$

и

$$\{p(X' + Y) - qX\}y' + (pY' - rX)y = 0$$

должны быть тождественны одно другому и потому

$$\frac{p(X'+Y)-qX}{X}=\frac{pY'-rX}{Y}=\omega. \qquad (5)$$

Относительно ω нетрудно убѣдиться, что оно должно быть цѣлою функціею первой степени отъ x,

$$\omega=\lambda_0+\lambda_1 x. \qquad (6)$$

Съ другой стороны при соблюденіи условій (5) и (6) имѣемъ:

$$\frac{\Omega'}{\Omega}=\frac{l}{x}-\frac{l'}{1-x},$$

откуда

$$\Omega=Cx^l(1-x)^{l'},$$

гдѣ

$$l=\lambda_0, \quad l'=-(\lambda_0+\lambda_1),$$

C постоянное произвольное.

Таковъ общій интегралъ перваго порядка для уравненія (1); если же положимъ $C=0$, получимъ уравненіе вида (2)

$$Xy'+Yy=0. \qquad (2)$$

Итакъ все сводится къ рѣшенію уравненій (8):

$$\left.\begin{aligned} p(X'+Y)&=(\omega+q)X \\ pY'-rX&=\omega Y \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Приступая къ рѣшенію уравненій (8), прежде всего замѣтимъ, что X не дѣлится ни на x^2, ни на $(1-x)^2$; такъ какъ въ противномъ случаѣ Y и X имѣли бы общій дѣлитель x или $1-x$. Затѣмъ различимъ слѣдующія четыре предположенія:

1) X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p;

2) общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ x;

3) общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ $1-x$;

4) X дѣлится на p.

Разсмотримъ каждое изъ этихъ предположеній въ отдѣльности.

1) X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p.

Тогда

$$\omega = -q\,, \quad Y = -X',$$

$$pX'' + qX' + rX = 0.$$

Послѣднее уравненіе какъ разъ совпадаетъ съ уравненіемъ (1) и допускаетъ интегралъ

$$X = \text{цѣлой функціи отъ } x$$

только въ тѣхъ случаяхъ, когда α или β цѣлое отрицательное число.

2) Общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ x.

Тогда

$$X = xX_0\,, \quad \omega + q = B(1-x)\,, \quad \omega = Ax,$$

$$q = B - (A+B)x\,, \quad B = \gamma\,, \quad A = \alpha + \beta + 1 - \gamma,$$

$$Y = (\gamma - 1)X_0 - xX'_0\,, \quad Y' = (\gamma - 2)X'_0 - xX''_0,$$

$$x(1-x)X''_0 + (2 - \gamma - (3 + \alpha + \beta - 2\gamma)x)X'_0 -$$

$$-(\alpha + 1 - \gamma)(\beta + 1 - \gamma)X_0 = 0.$$

Послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

$$X_0 = \text{цѣлой функціи отъ } x$$

только въ тѣхъ случаяхъ, когда $\alpha + 1 - \gamma$ или $\beta + 1 - \gamma$ цѣлое отрицательное число.

3) Общій наибольшій дѣлитель X и p равенъ $1-x$.

Въ этомъ случаѣ

$$X=(1-x)X_0\,,\quad \omega+q=Ax\,,\quad \omega=B(1-x),$$

$$q=-B+(A+B)x\,,\quad B=-\gamma\,,\quad A=\gamma-\alpha-\beta-1\,,$$

$$Y=(\gamma-\alpha-\beta)X_0-(1-x)X'_0\,,$$

$$Y'=(\gamma-\alpha-\beta+1)X'_0-(1-x)X''_0\,,$$

$$x(1-x)X''_0+(\gamma-(2\gamma-\alpha-\beta+1)x)X'_0-$$

$$-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)X_0=0.$$

Послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

$$X_0=\text{цѣлой функціи отъ } x$$

только въ тѣхъ случаяхъ, когда $\alpha-\gamma$ или $\beta-\gamma$ цѣлое положительное число.

4) X дѣлится на p.

Въ этомъ случаѣ

$$X=pX_0\,,\quad \omega=0\,,\quad Y=(q-p')X_0-pX'_0\,,$$

$$x(1-x)X''_0+(2-\gamma-(3-\alpha-\beta)x)X'_0-$$

$$-(1-\alpha)(1-\beta)X_0=0.$$

Послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

$$X_0=\text{цѣлой функціи отъ } x$$

только въ тѣхъ случаяхъ, когда $\alpha-1$ или $\beta-1$ цѣлое положительное число.

Итакъ, уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2) только въ тѣхъ случаяхъ, когда одно изъ выраженій

$$\alpha,\ \beta,\ \alpha-\gamma,\ \beta-\gamma$$

число цѣлое.

§ 2. Обращаясь къ опредѣленію тѣхъ случаевъ, когда наше уравненіе допускаетъ интегралъ вида (3), полагаемъ

$$Xy'y'+Yy'y+Zyy=\Omega. \qquad (9)$$

Отсюда на основаніи уравненія (1) выводимъ

$$p\Omega'=\{p(X'+Y)-2qX\}y'y'+$$
$$+\{p(Y'+2Z)-qY-2rX\}y'y+(pZ'-rY)yy.$$

Если $\Omega=0$, то и $\Omega'=0$, и мы имѣемъ два уравненія

$$\Omega=0 \text{ и } \Omega'=0.$$

Уравненія наши будутъ тождественны одно другому въ тѣхъ случаяхъ, когда

$$\frac{p(X'+Y)-2qX}{X}=\frac{p(Y'+2Z)-qY-2rX}{Y}=\frac{pZ'-rY}{Z}=\omega. \qquad (10)$$

Относительно ω нетрудно убѣдиться, что оно должно быть цѣлою функціей первой степени отъ x,

$$\omega=\lambda_0+\lambda_1 x. \qquad (11)$$

Если же уравненія

$$\Omega=0 \text{ и } \Omega'=0$$

не тождественны, можемъ исключить изъ нихъ $y'y'$, послѣ чего получимъ уравненіе вида (2).

Слѣдовательно, если условіе (10) не соблюдено, вопросъ нашъ сводится къ только что разобранному.

Съ другой стороны, при соблюденіи условія (10) имѣемъ:

$$\frac{\Omega'}{\Omega} = \frac{l}{x} - \frac{l'}{l-x},$$

откуда

$$\Omega = Cx^{l}(1-x)^{l'},$$

гдѣ

$$l = \lambda_0, \quad l' = -(\lambda_0 + \lambda_1), \quad C \text{ постоянное произвольное.}$$

Таковъ общій интегралъ перваго порядка для уравненія (1) полагая затѣмъ $C = 0$, получаемъ уравненіе вида (3)

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0. \tag{3}$$

Итакъ, все сводится къ рѣшенію системы уравненій

$$\left.\begin{aligned} p(X' + Y) &= (\omega + 2q)X \\ p(Y' + 2Z) - 2rX &= (\omega + q)Y \\ pZ' - rY &= \omega Z \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Пусть степень X равна n; тогда нетрудно убѣдиться, что Y функція $n-1$-й степени, а Z функція $n-2$-й степени и мы можемъ положить

$$\left.\begin{aligned} X &= E_n x^n + E_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + E_1 x + E_0 \\ Y &= F_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + F_1 x + F_0 \\ Z &= G_{n-2}x^{n-2} + \ldots + G_1 x + G_0 \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

гдѣ всѣ E, F и G нѣкоторыя постоянныя и притомъ E_n не нуль.

Приступая къ рѣшенію уравненій (12), прежде всего замѣтимъ, что X не дѣлится ни на x^3, ни на $(1-x)^3$; такъ какъ въ противномъ случаѣ всѣ три функціи

$$X, Y, Z$$

имѣютъ общій дѣлитель x или $1-x$.

Затѣмъ различимъ слѣдующія шесть предположеній:

1) X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p^2;

2) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x или $1-x$;

3) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ p;

4) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x^2 или $(1-x)^2$;

5) общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ px или $p(1-x)$;

6) X дѣлится на p^2.

§ 3. Для упрощенія дальнѣйшихъ разсужденій обратимся къ извѣстнымъ формуламъ преобразованія дифференціальнаго уравненія (1).

Преобразованіе 1.

Полагая

$$y = x^{1-\gamma} u,$$

получаемъ

$$y' = x^{1-\gamma} u' + (1-\gamma) x^{-\gamma} u,$$

$$y'' = x^{-\gamma} u'' + 2(1-\gamma) x^{-\gamma} u' - \gamma(1-\gamma) x^{-\gamma-1} u,$$

$$x(1-x)u'' + (2-\gamma-(\alpha+\beta-2\gamma+3)x)u' -$$
$$-(\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)u = 0,$$

$$\Omega = x^{-2\gamma}\{Xx^2u'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)xu'u +$$
$$+((1-\gamma)^2 X + (1-\gamma)Yx + Zx^2)uu\}.$$

Мы будемъ пользоваться этимъ преобразованіемъ въ тѣхъ случаяхъ, когда X или вовсе не дѣлится на x или дѣлится только на x, но не дѣлится на x^2.

Если X вовсе не дѣлится на x, то при γ не $=1$ послѣ преобразованія вмѣсто Ω будемъ имѣть выраженіе

$$Xx^2u'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)xu'u +$$
$$+((1-\gamma)^2 X + (1-\gamma)Yx + Zx^2)uu,$$

гдѣ множитель при $u'u'$ дѣлится на x^2.

Въ томъ же случаѣ, когда X дѣлится на x, но не дѣлится на x^2, послѣ нашего преобразованія вмѣсто Ω получимъ выраженіе

$$Xxu'u' + (2(1-\gamma)X + Yx)u'u +$$
$$+((1-\gamma)^2 \frac{X}{x} + (1-\gamma)Y + Zx)uu,$$

если только

$$\gamma \text{ не } = 1 \text{ и } (1-\gamma)E_1 + F_0 \text{ не } = 0.$$

А при $\gamma=1$, равно какъ и при $(1-\gamma)E_1 + F_0 = 0$, имѣемъ

$$\lambda_0 + \gamma = 0\ ,$$

такъ какъ уравненія (12) даютъ

$$F_0 = (\lambda_0 + 2\gamma - 1)E_1$$
$$(\lambda_0 + \gamma)F_0 = 0$$

и потому

$$(1-\gamma)E_1 + F_0 = (\lambda_0 + \gamma)E_1,$$
$$(\lambda_0 + \gamma)(\lambda_0 + 2\gamma - 1)E_1 = 0.$$

Преобразованіе 2.

Если замѣнимъ x на $1-x$, то α и β останутся безъ измѣненія, а γ перейдетъ въ $\alpha + \beta + 1 - \gamma$.

Въ то же время ω преобразуется въ слѣдующее выраженіе

$$-\lambda_0-\lambda_1(1-x)=-(\lambda_0+\lambda_1)+\lambda_1 x.$$

Преобразованіе 3.

Полагая

$$x=\frac{1}{\xi},\quad y=\xi^{\alpha}\eta,$$

получаемъ

$$\frac{dy}{dx}=-\xi^{\alpha+2}\frac{d\eta}{d\xi}-\alpha\,\xi^{\alpha+1}\eta,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\xi^{\alpha+4}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+2(\alpha+1)\xi^{\alpha+3}\frac{d\eta}{d\xi}+\alpha(\alpha+1)\xi^{\alpha+2}\eta,$$

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(\alpha-\beta+1-(2\alpha-\gamma+2)\xi)\frac{d\eta}{d\xi}-$$
$$-\alpha(\alpha-\gamma+1)\eta=0,$$

$$\Omega=\xi^{2\alpha-n+2}\left\{X\xi^{n+2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2+(2\alpha X\xi^n-Y\xi^{n-1})\xi\frac{d\eta}{d\xi}\eta+\right.$$
$$\left.+(\alpha^2X\xi^n-\alpha Y\xi^{n-1}+Z\xi^{n-2})\eta^2\right\}.$$

Здѣсь

$$X\xi^{n+2},\quad (2\alpha X\xi^n-Y\xi^{n-1})\xi,\quad \alpha^2X\xi^n-\alpha Y\xi^{n-1}+Z\xi^{n-2}$$

цѣлыя функціи отъ ξ.

Первая изъ нихъ дѣлится на ξ^2 и вторая на ξ; въ послѣдней же членъ свободный отъ ξ равенъ

$$E_n\alpha^2-F_{n-1}\alpha+G_{n-2}.$$

Замѣтимъ, что α можно замѣнить на β.

При помощи разсматриваемаго нами преобразованія мы всегда можемъ достигнуть того, что X будетъ дѣлиться на x^2, если только не имѣемъ одновременно двухъ равенствъ

$$E_n\alpha^2 - F_{n-1}\alpha + G_{n-2} = 0,$$

$$E_n\beta^2 - F_{n-1}\beta + G_{n-2} = 0.$$

Если же оба эти равенства имѣютъ мѣсто, то

$$F_{n-1} = (\alpha+\beta)E_n, \quad G_{n-2} = \alpha\beta E_n$$

или

$$\alpha = \beta.$$

Съ другой стороны, уравненія (12) даютъ

$$F_{n-1} = (2\alpha + 2\beta - n - \lambda_1 + 2)E_n,$$

$$2G_{n-2} = \{(\alpha+\beta-n-\lambda_1+2)(2\alpha+2\beta-n-\lambda_1+2)+2\alpha\beta\}E_n,$$

$$(\alpha+\beta-n-\lambda_1+2)(2\alpha-n-\lambda_1+2)(2\beta-n-\lambda_1+2) = 0.$$

Сопоставляя послѣднія равенства съ предыдущими, находимъ

$$\alpha+\beta-n-\lambda_1+2 = 0.$$

§ 4. Обратимся къ разбору вышеуказанныхъ шести случаевъ.

1. X не имѣетъ общихъ дѣлителей съ p^2.

Тогда

$$\omega + 2q = 0, \quad \omega = -2q,$$

$$X' + Y = 0, \quad Y = -X',$$

$$p(Y' + 2Z) - 2rX = -qY,$$

$$pZ' - rY = -2qZ,$$

откуда выводимъ

$$2pZ = pX'' + qX' + 2rX,$$

$$2pZ' + 2p'Z = pX''' + (p' + q)X'' + (q' + 2r)X',$$

$$2p^2Z' = p^2X''' + pqX'' + (pq' - p'q + 2rp)X' - 2rp'X$$

и наконецъ

$$p^2X''' + 3pqX'' + (2q^2 + pq' - p'q + 4rp)X' + 2r(2q - p')X = 0.$$

Послѣднее уравненіе какъ разъ совпадаетъ съ уравненіемъ (4) первой нашей замѣтки.

Отсюда заключаемъ, что по исключеніи такихъ предположеній, при которыхъ уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2), разсматриваемый нами случай имѣетъ мѣсто только при

$$\alpha + \beta = -n, \gamma = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n + \frac{1}{2}.$$

2. Общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x или $1-x$.

Въ виду преобразованія второго общій наибольшій дѣлитель X и p^2 можно считать равнымъ x.

Тогда $\omega + 2q$ должно дѣлиться на $1 - x$.

Вмѣстѣ съ тѣмъ не трудно убѣдиться, что разсматриваемый нами случай можно свести къ послѣдующимъ, при помощи преобразованій перваго и третьяго, всякій разъ, когда одно изъ выраженій

$$\alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2 \quad \text{и} \quad \gamma + \lambda_0$$

не нуль.

Можно также привести нашъ случай къ послѣдующимъ всякій разъ, когда

$$\gamma \text{ не равно } \alpha + \beta;$$

стоитъ только сначала воспользоваться преобразованіемъ вторымъ и затѣмъ первымъ.

Итакъ, если желаемъ, чтобы разсматриваемый нами случай нельзя было привести къ послѣдующимъ, должны положить

$$\lambda_0 + \lambda_1 + 2\gamma - 2\alpha - 2\beta - 2 = 0,$$
$$\alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2 = 0,$$
$$\gamma = \alpha + \beta,$$
$$\gamma + \lambda_0 = 0.$$

Отсюда затѣмъ выводимъ

$$\gamma = -\lambda_0,\quad \alpha + \beta = -\lambda_0,\quad \lambda_1 = 2 - \lambda_0,\quad n = 0.$$

Съ другой стороны, X должно дѣлиться на x и потому условіе

$$n = 0$$

невозможно.

Мы убѣждаемся, такимъ образомъ, что второй случай всегда можно привести къ послѣдующимъ.

3. Общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ p.

Покажемъ, что этотъ случай также можно привести къ послѣдующимъ.

Дѣйствительно, для того, чтобы его нельзя было привести къ послѣдующимъ при помощи преобразованій перваго и третьяго, необходимо положить

$$\gamma + \lambda_0 = 0 \quad \text{и} \quad \alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2 = 0.$$

Кромѣ того мы можемъ предварительно прибѣгнуть къ преобразованію второму и затѣмъ уже къ первому или третьему.

Для того, чтобы и такимъ путемъ нельзя было привести разсматриваемый нами случай къ послѣдующимъ, необходимо прибавить еще одно условіе

$$\alpha+\beta+1-\gamma-\lambda_0-\lambda_1=0.$$

При соблюденіи всѣхъ этихъ условій получаемъ

$$\lambda_0=-\gamma,\ \ \lambda_1=\alpha+\beta+1,\ \ n=1,$$

между тѣмъ какъ n должно быть по крайней мѣрѣ равно двумъ.

Итакъ, случай третій всегда можно привести къ послѣдующимъ.

4. Общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равенъ x^2 или $(1-x)^2$.

Въ виду преобразованія второго можно считать общій наибольшій дѣлитель X и p^2 равнымъ x^2.

Тогда

$$\omega+2q=A(1-x),$$

Y дѣлится на x и

$$\omega=Bx,$$

гдѣ A и B нѣкоторыя постоянныя.

Полагая

$$X=x^2U,\ \ Y=xV,$$

изъ уравненій (12) выводимъ

$$V=-xU'+(A-2)U,\ \ V'=-xU''+(A-3)U',$$

$$2(1-x)Z=(1-x)x^2U''+$$

$$+\left\{4-\frac{3A}{2}+\left(\frac{3A-B}{2}-4\right)x\right\}xU'+$$

$$+\left\{\frac{(A-2)^2}{2}+\left((A-2)\left(\frac{B-A}{2}+1\right)+2r\right)x\right\}U\,,$$

$$2(1-x)Z' - 2Z = (1-x)x^2U''' +$$

$$+\left\{6 - \frac{3A}{2} + \left(\frac{3A-B}{2} - 7\right)x\right\} xU'' +$$

$$+\left\{\frac{A^2-7A+12}{2} + \left((A-2)\left(\frac{B-A}{2}+1\right) + 2r + 3A - B - 8\right)x\right\} U'$$

$$+\left\{(A-2)\left(\frac{B-A}{2}+1\right) + 2r\right\} U$$

и наконецъ

$$p^2U''' + 3pq_1U'' + (2q_1^{\,2} + pq'_1 - p'q_1 + 4pr_1)U' +$$

$$+ 2r_1(2q_1 - p')U = 0,$$

гдѣ

$q_1 = 2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)x$ и $r_1 = -(\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)$.

Отсюда заключаемъ, что по исключенiи такихъ предположенiй, при которыхъ уравненiе (1) допускаетъ интегралъ вида (2), разсматриваемый нами случай имѣетъ мѣсто только при

$$\alpha + \beta - 2\gamma = -n,\quad \gamma = +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2}, \ldots, +n - \frac{1}{2}.$$

5. Общiй наибольшiй дѣлитель X и p^2 равенъ px или $p(1-x)$.

Въ виду преобразованiя второго можно считать общiй наибольшiй дѣлитель X и p^2 равнымъ px.

Для того, чтобы этотъ случай нельзя было привести къ послѣднему при помощи преобразованiй второго и третьяго, необходимо предположить

$$\alpha + \beta - n - \lambda_1 + 2 = 0,$$

$$\alpha + \beta + 1 - \gamma - \lambda_0 - \lambda_1 = 0.$$

Кромѣ того изъ уравненій (12) слѣдуетъ, что Y и ω должны дѣлиться на x.

Полагая

$$X = x^2(1-x)U \quad \text{и} \quad Y = xV,$$

получаемъ

$$\lambda_0 = 0, \ \gamma = n-1, \ \alpha + \beta = n + \lambda_1 - 2,$$

$$V = -x(1-x)U' + (2n - 4 + (5 - \lambda_1 - 2n)x)U,$$

$$V' = -x(1-x)U'' +$$

$$+ (2n - 5 + (7 - \lambda_1 - 2n)x)U' + (5 - \lambda_1 - 2n)U,$$

$$2Z = x^2(1-x)U'' + (7 - 3n + (3n + \lambda_1 - q)x)xU' +$$

$$+ \{2(n-2)^2 + ((n-3)(5 - \lambda_1 - 2n) + 2r)x\}U,$$

и для опредѣленія неизвѣстнаго U найдемъ уравненіе слѣдующаго вида:

$$p^2U''' + p(a'x + b')U'' + (c'x^2 + d'x + e')U' + (f'x + g')U = 0.$$

Не производя вычисленій, нетрудно убѣдиться, что коэффиціенты

$$a', b', c', d', e', f', g'$$

содержатъ r только въ первой степени.

Повторяя затѣмъ разсужденія первой замѣтки нетрудно убѣдиться, что послѣднее уравненіе допускаетъ интегралъ

U = цѣлой функціи $n-3$-й степени отъ x

тогда и только тогда, когда r удовлетворяетъ нѣкоторому алгебраическому уравненію $n-2$-й степени.

И нетрудно указать всѣ корни этого уравненія, именно:

$$r = -(n-2)\lambda_1, -(n-3)(\lambda_1+1),$$

$$-(n-4)(\lambda_1+2), \ldots, -2(\lambda_1+n-4), -(\lambda_1+n-3).$$

Дѣйствительно, при

$$r = -(n-m-2)(\lambda_1+m)$$

можемъ положить

$$\alpha = n-m-2, \quad \beta = \lambda_1 + m.$$

Тогда, по доказанному, уравненіе (1) допускаетъ два частныхъ интеграла перваго порядка

$$\Omega_0 = X_0 y' + Y_0 y = 0 \text{ и } \Omega_1 = X_1 y' + Y_1 y = 0,$$

гдѣ

X_0 цѣлая функція $n-m-1$-й степени отъ x и дѣлится на p,

X_1 цѣлая функція $m+1$-й степени отъ x и дѣлится на x,

Y_0 и Y_1 также цѣлыя функціи отъ x.

Вмѣстѣ съ тѣмъ въ силу уравненія (1) имѣемъ

$$\frac{p\,\Omega'_0}{\Omega_0} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{p\,\Omega'_1}{\Omega_1} = \lambda_1 x.$$

Перемноживъ Ω_0 съ Ω_1, мы получаемъ выраженіе

$$\Omega = \Omega_0 \Omega_1,$$

какъ разъ удовлетворяющее всѣмъ нашимъ требованіямъ.

Такимъ образомъ мы убѣждаемся, что разсматриваемый нами случай приводится къ послѣднему или не представляетъ ничего новаго.

6. X дѣлится на p^2.

Въ этомъ случаѣ Y должно дѣлиться на p, а ω должно обращаться въ нуль.

Полагая

$$X = p^2 U, \quad Y = pV, \quad \omega = 0,$$

изъ уравненій (12) выводимъ

$$V = -pU' + 2(q - p')U,$$

$$V' = -pU'' + (2q - 3p')U' + 2(q' - p'')U,$$

$$2Z = p^2 U'' + p(4p' - 3q)U' +$$

$$+ (2(q - p')^2 - 2p(q' - p'') + 2pr)U$$

и наконецъ

$$p^2 U''' + 3pq_1 U'' + (2q_1{}^2 + pq'_1 - p'q_1 + 4pr_1)U' +$$

$$+ 2r_1(2q_1 - p')U = 0,$$

гдѣ

$$q_1 = 2p' - q = 2 - \gamma - (3 - \alpha - \beta)x,$$

$$r_1 = r - q' + p'' = -(1 - \alpha)(1 - \beta).$$

Отсюда заключаемъ, что по исключеніи такихъ предположеній, при которыхъ наше уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2), разсматриваемый нами случай имѣетъ мѣсто только при

$$\alpha + \beta = n - 2, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n - \frac{5}{2}.$$

§ 5. Заключеніе.

Разсматривая наши результаты и принимая во вниманіе преобразованія § 3, нетрудно убѣдиться, что уравненіе (1)

$$x(1 - x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \quad (1)$$

допускаетъ интегралъ вида (3)

$$Xy'y' + Yy'y + Zyy = 0$$

въ слѣдующихъ случаяхъ:

$$1)\ \alpha+\beta=-n, \qquad \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$$

$$2)\ \alpha+\beta=+n, \qquad \gamma=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2};$$

$$3)\ \alpha+\beta-2\gamma=-n, \quad \gamma=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2};$$

$$4)\ \alpha+\beta-2\gamma=+n, \quad \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$$

$$5)\ \left.\begin{matrix} 2\alpha-\gamma \\ \text{или} \\ 2\beta-\gamma \end{matrix}\right\}=-n, \quad \alpha+\beta-\gamma=-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$$

$$6)\ \left.\begin{matrix} 2\alpha-\gamma \\ \text{или} \\ 2\beta-\gamma \end{matrix}\right\}=+n, \quad \alpha+\beta-\gamma=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2};$$

$$7)\ \left.\begin{matrix} \alpha-\beta+\gamma \\ \text{или} \\ \beta-\alpha+\gamma \end{matrix}\right\}=-n, \gamma=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots, -n+\frac{1}{2};$$

$$8)\ \left.\begin{matrix} \alpha-\beta+\gamma \\ \text{или} \\ \beta-\alpha+\gamma \end{matrix}\right\}=+n, \gamma=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, n-\frac{1}{2}.$$

Здѣсь не указаны только тѣ случаи, при которыхъ уравненіе (1) допускаетъ интегралъ вида (2)

$$Xy'+Yy=0, \tag{2}$$

такъ какъ таковые перечислены раньше.

Протоколъ засѣданія 17 октября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, В. Л. Кирпичевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. М. Ляпуновъ, И. К. Шейдтъ, Н. М. Флавицкій, А. П. Шимковъ, Н. Д. Пильчиковъ, А. В. Гречаниновъ, В. И. Альбицкій, Г. В. Латышевъ, А. А. Клюшниковъ, С. А. Раевскій, М. С. Косенко, А. С. Грицай, А. И. Предтеченскій, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель прочелъ письмо редактора кіевскихъ университетскихъ извѣстій проф. Иконникова, предлагающаго продолженіе обмѣна изданіями въ 1887 году. Постановлено: благодарить и принять предложеніе.

2. *А. М. Ляпуновъ* изложилъ свою статью «О тѣлѣ наибольшаго потенціала».

3. *М. Ѳ. Ковальскій* сообщилъ «Объ интеграціи двухъ уравненій съ частными производными въ статьѣ *А. В. Гречанинова* — О треніи цапфъ о подшипники».

4. *А. В. Гречаниновъ* доложилъ свою работу подъ заглавіемъ: «Къ вопросу о преподаваніи элементарной механики».

5. М. А. Тихомандрицкій сдѣлалъ докладъ статьи *А. А. Маркова* «О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда».

6. Г. Предсѣдатель доложилъ при этомъ о полученіи письма отъ А. А. Маркова, въ которомъ А. А. Марковъ сообщаетъ, что онъ продолжаетъ заниматься тѣмъ же вопросомъ и готовитъ вторую статью о немъ.

7. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

1) Bulletin de la société Impériale des naturalistes de Moscou. № 2, 1886.
2) Кіевскія университетскія извѣстія. № 7, 1886.
3) Физико-математическія науки. Т. II, № 1, 1886.
4) Jornal de sciencias math. ematicas e astronomicas. Vol. VII, № 2, 1886.
5) *E. Weyr*, Ueber Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins. 1-te und 2-te Mittheilungen.
6) Mathesis. Septembre, 1886.
7) Journal de mathématiques élémentaires. № 10, 1886.
8) Journal de mathématiques spéciales. № 10, 1886.

Протоколъ засѣданія 21 ноября.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. А. Тихомандрицкій, А. М. Ляпуновъ, А. А. Клюшниковъ, А. П. Грузинцевъ.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. М. А. Тихомандрицкій продолжалъ и окончилъ изложеніе статьи *А. А. Маркова*— «О дифференціальномъ уравненіи гипергеометрическаго ряда».

2. А. М. Ляпуновъ передалъ содержаніе статьи *П. О. Сомова* — «О деформаціи коллинеарно-измѣняемой системы 3-хъ измѣреній».

3. Проф. *М. А. Тихомандрицкій* замѣтилъ по поводу своего сообщенія — «Къ теоріи радіуса кривизны», сдѣланнаго въ засѣданіи 21 марта 1886 года, что тотъ-же предметъ былъ трактованъ ранѣе его акад. В. Г. Имшенецкимъ въ приложеніи

къ переводу «Дифференціальнаго исчисленія» Тодгёнтера, вышедшемъ въ 1872 году.

4. Г. предсѣдатель доложилъ письмо редактора-издателя «Вѣстника опытной физики и элементарной математики», заключающее предложеніе членамъ харьковскаго математическаго общества почтить журналъ своимъ сотрудничествомъ.

5. Г. предсѣдатель доложилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ и журналовъ:

1) American Journal of mathematics. Vol. IX, number 1, 1886.
2) Кіевскія университетскія извѣстія. № 8, 1886 г.
3) Journal de mathématiques élémentaires. № 11, 1886.
4) Journal de mathématiques spéciales. № 11, 1886.
5) Mathesis. №№ 10, 11, 1886.
6) Rendiconti del circolo matematico di Palermo. 1: 3.
7) Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики. № 9, 1886 года.
