Ф. Р. МУЛЬТОН

ВВЕДЕНИЕ В НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

ОНТИ НКТП СССР 1936

Мультон · ВВЕДЕНИЕ В НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

Цена 7 р. 50 к.

Переплет 1 р. 25 к.

AN INTRODUCTION TO CELESTIAL MECHANICS

by

FOREST RAY MOULTON, Ph. D.

PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF CHICAGO RESEARCH ASSOCIATE OF THE CARNEGIE INSTITUTION OF WASHINGTON

Second revised Edition

NEW YORK THE MACMILLAN COMPANY
LONDON: MACMILLAN & CO., LTD 1914

Ф. МУЛЬТОН

ВВЕДЕНИЕ В НЕБЕСНУЮ МЕХАНИКУ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ Г. ДУБОШИНА

Утверждено Наркомпросом РСФСР
в качестве учебного пособия
для университетов

ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ
МОСКВА 1935 ЛЕНИНГРАД

Т63-5-2
ТКК № 92

Ред. *М. И. Поликарпова.* Оформлен. *Э. М. Бейлиной.* Коррект. *О. Н. Барашкова.*
Сдано в производство 31/III 1935 г. Подписано в печать 15/XI 1935 г. Листов 30.
Тираж 3500. Формат $62 \times 94^{1}/_{16}$. Печатных знаков в листе 4320. Глав. ред. общетехн. лит. № 39. Уполномоченный Главлита В-29618. Заказ № 747.

Фабрика книги „Красный пролетарий" Партиздата ЦК ВКП(б)
Москва, Краснопролетарская, 16.

Отпечатано с матриц в арт. „Печатня" Ленпромпечатьсоюза, Прачечный, пер., 6.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

«Введение в небесную механику» Мультона — первая книга, появляющаяся на русском языке по небесной механике. Поэтому несмотря на некоторые ее недостатки она является ценным пособием как для студентов и аспирантов, избирающих своей специальностью астрономию, так и для всех прочих лиц, желающих ознакомиться с основами науки о движении небесных тел в простой и достаточно элементарной форме.

Действительно, книга Мультона дает хорошее представление о главнейших проблемах и методах классической небесной механики и не требует от читателя никаких специальных знаний, кроме знакомства с элементами математического анализа и механики.

Большое количество разнообразных задач поможет вдумчивому читателю лучше уяснить предлагаемый материал и может дать хорошие навыки для самостоятельной работы.

Однако на книгу Мультона нельзя смотреть как на курс, достаточно обширный и достаточно выявляющий принципиальную сущность затрагиваемых вопросов. Книга Мультона является только введением в современную науку о движении небесных тел, только фундаментом, первым ключом к ясному пониманию целей и методов небесной механики.

Не все вопросы освещены Мультоном достаточно подробно, а многое и совершенно не затронуто.

Так, например, совершенно не затронута теория канонических уравнений, этого важного аппарата современной небесной механики, и чрезвычайно бегло и недостаточно строго рассмотрен важный вопрос об устойчивости движения.

Имея в виду советского читателя и главным образом студентов и аспирантов наших учебных заведений, мы добавили к книге Мультона две главы: одну, посвященную теории канонических уравнений, и другую, посвященную изложению основных результатов знаменитого русского ученого А. М. Ляпунова в области проблем, касающихся устойчивости движения.

Необходимость первого добавления обусловливается отсутствием на русском языке руководств, содержащих теорию канонических уравнений в виде, приспособленном для нужд небесной механики.

Что же касается второго добавления, то вопросы, в нем затронутые, настолько важны, что всякий интересующийся небесной механикой должен, по нашему мнению, иметь о них хотя бы первоначальное представление.

К сожалению, размеры книги не позволили изложить результаты А. М. Ляпунова сколько-нибудь подробно, и мы были вынуждены ограничиться только самыми основными теоремами, касающимися общих критериев устойчивости.

Чрезвычайно важные для небесной механики сомнительные случаи, когда характеристическое уравнение системы в вариациях имеет корни, действительные части которых равны нулю, совершенно не могли быть включены в рассмотрение ввиду громоздкости и длинноты связанных с этим выкладок. Точно так же мы не затронули вовсе случая, когда коэфициенты уравнений возмущенного движения суть периодические функции времени.

Перевод книги Мультона сделан со второго американского издания без изменений, за исключением некоторых дополнений в библиографических указаниях применительно к имеющейся на русском языке литературе и незначительных редакционных исправлений в тексте.

Г. Дубошин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Необходимость второго издания этой книги дала повод для ее полного пересмотра. Общий план книги тот же, как и в первом издании, так как оказалось, что он удовлетворяет действительной потребности не только в этой стране, для студентов которой книга вначале была написана, но также и в Европе. Несмотря на весь соблазн ее элементарный характер сохранен, и она не сильно расширена. Сделано очень много улучшений, отчасти по совету ряда астрономов и математиков, и мы надеемся, что она более достойна одобрений, которые были до сего времени получены.

Наиболее важное изменение заключается в рассмотрении методов определения орбит. Этот метод логически следует за задачей двух тел и носит более элементарный характер, чем задача трех тел и теория возмущений. Поэтому он помещен в VI главе. Содержание также сильно изменено. Приведены методы и Лапласа и Гаусса, на которых более или менее основаны все другие методы общего применения. Мы не придерживались стандартных методов изложения, так как хотя они и удобны для практических применений, но не отличаются математической ясностью. Кроме того, нет недостатка в прекрасных работах, дающих подробности в оригинальных формах и примерах вычисления. Другие важные изменения и добавления сделаны в главах, касающихся задачи двух тел, задачи трех тел и геометрического рассмотрения возмущений.

Я с удовольствием выражаю особенную признательность за содействие моим коллегам проф. Макмиллану (W. MacMillan) и Л. Хопкинсу (L. A. Hopkins) за повторное чтение корректур и за важные советы и указания многих недостатков, которые иначе остались бы незамеченными. Если эта книга имеет достоинства по форме, то они в значительной степени обязаны упомянутым лицам.

Чикаго, январь 1914 г.

Ф. Мультон

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В этой книге скорее сделана попытка дать в некоторой степени удовлетворительное изложение многих частей небесной механики, чем дать исчерпывающее изложение какой-нибудь ее специальной части. Мы стремились построить изложение так, чтобы иметь логическую последовательность, постепенно усложняя работу, и придать различным вопросам выпуклость, соответствующую их научной и образовательной важности. Коротко говоря, мы стремились создать такую книгу, чтобы всякий имеющий необходимую математическую подготовку мог получить из книги в сравнительно короткое время и наиболее легким образом достаточно широкое и точное понятие о всем предмете.

При выполнении плана этой работы было необходимо дать представление о задаче трех тел. Это только одна из знаменитых задач небесной механики, но за последнее время она получила особый интерес благодаря исследованиям Гилла, Пуанкаре и Дарвина. Теория абсолютных возмущений является центральным предметом математической астрономии, и такая книга, как эта, явилась бы неполной, если бы в ней не было уделено достаточно места для этой теории. Одна глава посвящена геометрическому рассмотрению возмущений. Хотя этот метод почти не пригоден для вычислений, все же он дает ясное понятие о природе задачи и очень ценен для начинающих. Основные принципы аналитических методов даны с значительной полнотой, но многие детали в развитии формул опущены, чтобы размер книги соответствовал той цели, для которой она предназначена. Теории орбит не было придано чрезмерно видного положения, которое она заняла в этой стране, несомненно, под влиянием великолепной работы Ватсона (Watson) об этом предмете.

Метод изложения состоял в формулировании всех проблем заранее а в случае длинных преобразований в обрисовании тех шагов, которые надо сделать. Выражение «порядок малых величин» не употреблялось за исключением, если оно применялось к степенным рядам с явными параметрами, таким образом придавая работе всю определенность и простоту, характерную для действий со степенными рядами. Это особенно выражено в главе о возмущениях. Было обращено внимание на то, чтобы подчеркнуть все места, где введены предположения или применены методы, которые нельзя достаточно оправдать, потому что улучшения могут быть сделаны лишь при ясном представлении слабых мест. Частные ссылки в тексте и библиография в конце глав, хотя ни в какой мере не исчерпывающие, достаточны, чтобы в дальнейшем направить изучающего к главным источникам.

Эта книга выросла из курса лекций, которые автор в продолжение последних шести лет ежегодно читал в Чикагском университете. Эти лекции предназначались для студентов старших курсов. Их слушали студенты-астрономы, многие изучающие главным образом математику и некоторые хотя специализировавшиеся в совершенно другом направлении, но желавшие получить понятие о процессе, при помощи которого астрономы интерпретируют и предсказывают небесные явления. Таким образом они многим дали понятие о методах исследования и результатах, полученных в небесной механике, и подготовили некоторых к подробному изучению различных отраслей новейших исследований. Цель работы, ее объем и методы изложения, повидимому, вполне оправданы этим опытом.

А. Лэн (Lunn) тщательно и с большим вниманием прочитал всю рукопись. Его многочисленные поправки и советы сильно содействовали точности и способу изложения во многих местах. Проф. Ормонд Стон (Ormond Stone) прочитал корректуры первых четырех глав и шестой. Его критика и советы как опытного исследователя и учителя неоценимы. В. Биль (W. Beal) с большим вниманием прочитал корректуры всей книги, и благодаря ему сделаны многие поправки. Автор выражает искреннюю благодарность всем этим лицам за ту готовность, с которой они посвятили так много своего времени для этой работы.

Чикаго, июль 1902 г. *Ф. Мультон*

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Элементы и законы. Проблемы каждой науки могут быть выражены посредством известных понятий, которые назовем *элементами*, и разрешение этих проблем зависит от некоторых основных *положений и законов*. Элементы возникают из самой природы рассматриваемого предмета и выражаются или подразумеваются в формулировке рассматриваемых проблем. Принципы и законы дают соотношения между разными элементами, существование которых либо известно, либо предполагается. Они являются индукциями из опытов, или дедукциями из ранее принятых положений и законов, или просто условными соглашениями.

Для большей ясности изложения приведем в самом начале точное определение типа рассматриваемых проблем и перечислим элементы, которые они включают, а также принципы и законы, которые к ним относятся. Чтобы иметь полное понятие о характере полученных заключений, потребовалась бы философская дискуссия о реальности элементов и о происхождении и характере основных положений и законов. Но эти вопросы не могут войти сюда по причине трудности и сложности метафизических размышлений. Это не должно быть понято так, что такие исследования не ценны; наоборот, они всегда ведут к более простым и неоспоримым положениям, на которых покоится все рассуждение.

Метод действия в этой работе по необходимости будет заключаться в том, чтобы принять некоторые основные элементы и законы, не входя подробно в вопросы об их реальности или законности. Достаточно рассмотреть, являются ли они определениями или выводами из опыта, и указать, достаточно ли они проверены в их применениях. Они будут приняты с доверием, и следствия их выведены в рассматриваемых вопросах, поскольку это позволяют объем и рамки данной работы.

2. Трактуемые проблемы. Мы коротко рассмотрим движения материальной частицы, находящейся под действием некоторой центральной силы.

В частности будут исследованы движения двух свободных однородных сфер, подверженных лишь их взаимному тяготению при произвольных начальных условиях, а затем будут рассмотрены их движения, когда они подвергаются различным возмущающим влияниям. Основные свойства возмущений, возникающих от действия третьего тела, будут рассмотрены как с геометрической, так и с аналитической точки зрения. Здесь нужно различать два случая. Один, в котором движение спутника вокруг планеты возмущается Солнцем, и второй, в котором движение одной планеты вокруг Солнца возмущается другой планетой.

Другой класс основных проблем — это определение орбит неизвестных тел из наблюдений их положений в различные эпохи, произведенных с тела, движения которого известны. Другими словами, теории орбит комет и малых планет будут основаны на наблюдениях их видимых положений, произведенных с Земли. Такой неполный набросок вопросов, которых мы будем касаться, достаточен для перечисления основных элементов.

3. Перечисление основных элементов. При исследовании проблем, рассматриваемых в этой книге, понадобятся следующие элементы:

a) Действительные, а иногда комплексные *числа.*

b) *Пространство* трех измерений, обладающее одинаковыми свойствами в любом направлении.

c) *Время*, которое будет рассматриваться как независимая переменная.

d) *Масса*, имеющая обычные свойства инерции и т. д., которые постулируются в элементарной физике.

e) *Сила* согласно значению этого термина в физике.

Положительные числа возникают в арифметике, и положительные, отрицательные и комплексные числа — в алгебре. Пространство появляется сначала как существенный элемент в геометрии. Время появляется сперва как существенный элемент в кинематике. Масса и сила появляются и должны быть приняты как существенные элементы в различных проблемах. Мы не будем определять эти известные элементы.

4. Перечисление положений и законов. При выражении различных величин числами надо сделать известное соглашение о том, что́ будем считать положительным и что́ отрицательным. Аксиомы обычной геометрии мы принимаем за верные.

Основными положениями, от которых может зависеть вся работа в теоретической механике, являются три аксиомы Ньютона, или законы движения. Два первых были известны еще Галилею и Гюйгенсу, но впервые они были опубликованы вместе во всей своей полноте Ньютоном в «Началах» в 1687 г. Эти законы следующие [1]):

Закон I. *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.*

Закон II. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон III. *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе взаимодействия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны* [2]).

5. Происхождение законов движения. Ньютон называет законы движения *аксиомами* и после каждого из них делает несколько замечаний относительно значения данного закона. Позднейшие авторы, в том числе Томсон и Тэт [3]), считают эти законы выведенными из опытов, но пола-

---

[1]) Можно применять и действительно применялись другие основные законы, но они с самого начала требуют применения более трудных математических основ. Таковы: принцип Даламбера, принцип Гамильтона и система Кирхгофа, Маха, Герца, Больцмана и т. д.

[2]) Перевод акад. А. Н. Крылова. *Прим. ред.*

[3]) Томсон и Тэт, Natural Philosophy, vol. I. Art. 243.

тают формулировку их Ньютоном окончательной и принимают их в точно такой же форме, в которой они были даны в «Началах».

Действительно, нет указаний на то, что ньютоновы законы движения не согласуются с обычным астрономическим опытом или что они не могут быть основанием для небесной механики. Но в отдельных отраслях физики, в частности в электричестве и свете, некоторые явления не вполне согласуются с ньютоновыми положениями, и это недавно привело Эйнштейна и других к развитию так называемого *принципа относительности*. Так как для астрономии последствия этого изменения основ механики очень незначительны, если только рассматриваемое время не слишком продолжительно, то независимо от того, правильны они или нет, они не могут быть рассмотрены во введении к предмету.

6. Замечания о первом законе движения. В первом законе утверждение о том, что тело, не подверженное действию никаких сил, движется *равномерно*, можно рассматривать как определение *времени*, потому что иначе подразумевалось бы, что есть методы измерения времени без участия движения. Действительно, во всех способах, применяемых для измерения времени, эта часть закона является основной предпосылкой.

Например, принимается, что Земля вращается равномерно, потому что на нее не действует никакая сила, изменяющая заметным образом ее вращения [1]).

Вторая часть закона, которая утверждает, что движение происходит *по прямой линии*, если тело не подвержено никаким силам, может быть принята за определение прямой линии, если предположить, что можно установить случай, когда тело не подвержено никаким силам; или ее можно принять вместе с первой частью показателем того, действуют ли силы, если предположить, что возможно дать независимое определение прямой линии. Каждая альтернатива ведет к трудностям при попытке дать точные и согласованные определения.

7. Замечания о втором законе движения. Во втором законе утверждение о том, что изменение количества движения пропорционально действующей силе, может быть рассмотрено как определение отношения между силой и веществом, благодаря чему возможно измерение величины силы или количества вещества в теле, смотря по тому, что предполагается известным независимо.

Под изменением количества движения подразумевается изменение скорости, умноженной на массу движущегося тела. Обычно это называется *изменением момента*, и идеи второго закона могут быть выражены следующим образом: *изменение момента пропорционально действующей силе и происходит в направлении прямой линии, по которой действует сила. Или ускорение движения тела прямо пропорционально действующей силе и обратно пропорционально массе и происходит в направлении действия силы.*

На первый взгляд кажется, что сила может быть измерена без отношения к развитой скорости, и эта мысль в известном смысле правильна. Например, сила, с которой тяжесть тянет тело вниз, часто измеряется

1) См. Вудворд, *Astronomical Journal*, vol. XXI, 1901.

2*

натяжением спиральной пружины, или напряжение магнитного действия может быть измерено кручением нити. Но во всех случаях закон противодействия определяется несколько иначе, может быть, не непосредственно при помощи развитой скорости, но в конечном счете неизбежно дело сводится к ней. В связи с этим стоит упомянуть, что все единицы абсолютной силы, как *дина*, несомненно, содержат в своем определении идею о развитой скорости.

Во втором законе подразумевается, что действие силы совершенно одинаково, в каком бы положении покоя или движения тело ни находилось и каким бы другим силам оно ни подчинялось. Изменение движения тела, на которое действует ряд сил, в конце интервала времени таково же, как если бы каждая сила действовала отдельно в течение такого же времени. Отсюда следующее добавление ко второму закону: *если любое число сил действует на тело одновременно, находится ли оно в состоянии покоя или движения, каждая сила производит то же самое изменение движения, какое она произвела бы, если бы действовала одна на тело в состоянии покоя.* Очевидно, этот принцип ведет к большим упрощениям механических проблем, потому что согласно с ним действия различных сил могут быть рассмотрены отдельно.

Ньютон вывел из второго закона движения *параллелограм сил* [1]). Он рассуждал, что так как силы измеряются ускорениями, которые они производят, то равнодействующая, скажем, двух сил может быть измерена равнодействующей их ускорений. Так как ускорение имеет величину и направление, то оно может быть представлено направленной линией или *вектором*. Равнодействующая двух сил будет тогда представляться диагональю параллелограма, две смежные стороны которого изображают две силы.

Одно из наиболее частых применений параллелограма сил встречается в статике, которая сама по себе не включает идей движения и времени. Идея массы в ней также может быть вполне исключена. Против ньютонова параллелограма сил были возражения на том основании, что он требует фундаментальных понятий, гораздо более сложных, чем те, к которым он применяется. Среди доказательств, устраняющих это возражение, одно принадлежит Пуассону [2]), который основывает его на аксиоме, что равнодействующая двух равных сил, приложенных к точке, направлена по биссектрисе угла, который они между собой образуют. Затем выводится величина равнодействующей и простыми способами получается общий закон.

8. Замечания к третьему закону движения. Два первых закона движения достаточны для определения движения одного тела, подверженного любому числу известных сил; но нужен другой принцип, когда исследование касается движения системы двух или более тел, подверженных общим взаимодействиям. Третий закон движения точно выражает это положение. То-есть, если одно тело давит на другое, то второе с той же силой сопротивляется действию первого, а также, хоть это и не легко представить, если одно тело действует на другое на расстоянии,

---

[1]) «Начала», Следствие I законов движения

[2]) Traité Mécanique, т. I, стр. 45 и след.

то второе противодействует первому с равной и противоположно направленной силой.

Предположим, что можно применить данную силу по желанию; тогда по второму закону движения могут быть измерены относительные массы тел, так как они обратно пропорциональны ускорениям, которые им сообщают одинаковые силы. Когда их относительные массы найдены, можно проверить третий закон, позволяя различным телам действовать друг на друга и измеряя их относительные ускорения. Чтобы проверить закон, Ньютон сделал несколько опытов, как например измерял отскакивание от ударов упругих тел и наблюдал ускорения магнитов, плавающих в сосуде с водой. Главная трудность в опытах возникает в устранении сил, посторонних рассматриваемой системе, и, очевидно, они не могут быть полностью устранены. Путем некоторого рассуждения Ньютон пришел к тому, что отрицать третий закон — значило бы противоречить первому [1]).

Мах указывает, что нет точных способов измерения сил кроме как при помощи ускорений, которые они производят, и поэтому рассуждения предыдущего параграфа действительно образуют замкнутый круг. Он возражает также ньютонову определению, что масса пропорциональна произведению объема и плотности тела. Он предпочитает основываться на опыте, что два тела, которые действуют друг на друга, производят противоположно направленные ускорения, и *отсюда определяет* относительные величины масс как обратно пропорциональные этим ускорениям. Опыт показывает дальше, что если относительные массы двух тел определены их взаимодействием с третьей, то отношение остается одинаковым, какой бы ни была третья масса. Таким образом, если одно тело принять за единицу массы, массы всех других тел могут быть определены однозначно.

В Поучении, приложенном к законам движения Ньютона, сделано несколько замечаний относительно важного свойства третьего закона. В 1742 г. Даламбер впервые сформулировал его таким образом, что стало действительно возможно выразить это свойство математически, и с тех пор оно известно под его именем [2]). Сущность его такова: если тело подвергается ускорению, то его можно рассматривать как подверженное действию силы, равной и противоположно направленной к силе, производящей ускорение. Это можно считать одинаково правильным, возникла ли сила от другого тела, образующего с рассматриваемым систему, или источник ее находится вне системы. Вообще в системе любого числа тел равнодействующие всех приложенных сил равны и противоположны реакциям соответствующих тел. Другими словами, силы *реакции* или *вызванные* силы образуют системы, которые находятся в равновесии для каждого тела и для системы в целом. Это придает всей динамике форму статики и формулирует положения так, что они могут быть выражены математическими терминами. Эта формулировка третьего закона движения сделалась основной точкой для изящных и весьма общих исследований Лагранжа в вопросах динамики [3]).

---

[1]) «Начала», Поучения к законам движения.

[2]) См. «Механику» Аппеля, т. II, гл. XXIII

[3]) Собрание сочинений, т. XI и XII.

Главным назначением основных принципов в науке является координирование различных явлений путем определения соотношений между ними. Ценность основных принципов зависит от полноты координирования явлений и от быстроты, с которой они ведут к открытию неизвестных фактов; характеристиками основных положений должна быть их внутренняя согласованность между собой, а также с каждым наблюдаемым явлением и их простота.

Законы Ньютона замечательным образом координируют явления механики, в то время как их значение в открытиях подтверждается блестящими достижениями в физических науках за последние два столетия по сравнению с медленным и неуверенным продвижением в древности. Их не нашли взаимно противоречащими, и они согласуются почти со всеми явлениями, которые до сих пор были наблюдаемы, они замечательны по своей простоте, хотя некоторые считали их в известных отношениях многословными. Поэтому естественно желание знать, действительно ли они первичные и основные законы природы, даже если они изменены принципом относительности. Судя по прошлой эволюции научных и философских идей, нельзя сразу утверждать, что какое-либо определение является абсолютной истиной. Тот факт, что в основу системы механики бралось несколько основных принципов, указывает на возможность, что когда-нибудь сама ньютонова система или ньютонова система, измененная принципом относительности, если даже она не будет найдена ошибочной, будет заменена более простой даже в элементарных книгах.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ

9. Прямолинейное движение, скорость. Точка совершает *прямолинейное движение*, если она всегда находится на одной и той же прямой линии и если ее расстояние от постоянной точки на этой линии изменяется вместе со временем. Она движется с *постоянной скоростью* или равномерно, если проходит равные расстояния в равные промежутки времени независимо от их длины. *Скорость* измеряется расстоянием, пройденным в единицу времени; она может быть положительной и отрицательной в зависимости от направления движения. Поэтому в равномерном движении скорость дается уравнением:

$$v = \frac{s}{t}. \tag{1}$$

Если точка проходит неодинаковые расстояния в равные промежутки времени, то ее скорость изменяется, и тогда необходимо определить, что подразумевается под скоростью в данный момент. Предположим, что точка проходит расстояние Δs в течение времени Δt, и предположим, что промежуток времени Δt стремится к нулю таким образом, что Δt всегда содержит момент t. Предположим дальше, что для каждого Δt взято соответствующее Δs. Тогда скорость в момент t определяется формулой:

$$v = \lim_{\Delta t = 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Постоянная и переменная скорости могут быть определены аналитически следующим образом. Расстояние s, отсчитанное от неподвижной точки, рассматривается как функция времени и эта зависимость может быть записана в виде:

$$s = \varphi(t).$$

Тогда скорость определяется формулой:

$$v = \frac{ds}{dt} = \varphi'(t),$$

где $\varphi'(t)$ является производной от $\varphi(t)$ по времени t. Скорость называют постоянной или движение равномерным, если $\varphi'(t)$ не изменяется с t; другими словами, если $\varphi(t)$ есть линейная функция от t вида $\varphi(t) = at + b$, где a и b — постоянные числа. Скорость называют переменной, если значение $\varphi'(t)$ изменяется с t.

Условимся относительно направления движения. Возьмем произвольную точку на прямой линии за исходную и будем считать расстояния, откладываемые направо — положительными, а налево — отрицательными. Если значение s, определяющее положение тела, алгебраически увеличивается со временем, то скорость будем считать положительной, если значение s алгебраически уменьшается с возрастанием времени, скорость считается отрицательной. В таком случае знак и численное значение v однозначно определяют как направление движения, так и его скорость.

10. Ускорение в прямолинейном движении. Ускорение есть изменение скорости и может быть постоянным или переменным. Так как случай, когда оно является переменным, включает в себе случай, когда оно постоянно, то достаточно рассмотреть первый. Определение ускорения в данный момент t аналогично определению скорости, и если ускорение обозначим через α, то оно дается формулой:

$$\alpha = \lim_{\Delta t = 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt}. \tag{3}$$

Принимая во внимание (2), получаем отсюда:

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}. \tag{4}$$

Условимся относительно знака ускорения. Если с увеличением времени скорость алгебраически увеличивается, то ускорение будем считать положительным; если скорость алгебраически уменьшается при увеличении времени, то ускорение будем считать отрицательным.

11. Скорость в криволинейном движении. Если v обозначает в этом случае скорость и s дугу кривой, тогда

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right|, \tag{5}$$

где $\left|\frac{ds}{dt}\right|$ представляет числовое значение $\frac{ds}{dt}$. Скорость обладает свойством вектора и может быть представлена таковым [1]). Вектор может быть разложен единственным образом на три составляющие или компонента параллельно любым трем осям координат, и, наоборот, три составляющие путем геометрического сложения определяют единственным образом вектор.

Обычно проще всего взять прямоугольные оси и составляющие скорости, параллельные им. Пусть λ, μ, ν представляют углы между направлением движения и положительными направлениями осей x, y, z. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{dx}{ds}, \\ \cos\mu &= \frac{dy}{ds}, \\ \cos\nu &= \frac{dz}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Пусть v_x, v_y, v_z представляют составляющие скорости v по трем осям. Тогда мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\cos\lambda = \frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= v\cos\mu = \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}, \\ v_z &= v\cos\nu = \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из этих уравнений следует, что

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{8}$$

12. Ускорение в криволинейном движении. Ускорение, как и скорость, проще всего разложить на составляющие, параллельные прямоугольным координатным осям. Обозначая эти составляющие буквами a_x, a_y, a_z, мы будем иметь:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{at^2}. \tag{9}$$

Числовое значение полного ускорения определится формулой:

$$a = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \tag{10}$$

Вообще говоря, a не равно составляющей ускорения вдоль кривой, т. е. $\frac{d^2s}{dt^2}$.

---

[1]) См. «Механику» Аппеля, т. I, стр. 45, а также: М. Планк, Введение в общую механику. *Прим. ред.*

Действительно, диференцируя формулу:

$$v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

получаем:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}=\frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\,\frac{d^2z}{dt^2}}{v}=$$

$$=\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{ds}\,\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (11)$$

Таким образом если известны составляющие ускорения и скорости, то полное ускорение дается формулой (10), и ускорение вдоль кривой — формулой (11). Тот факт, что они различны, на первый взгляд может вызвать удивление, но положение становится ясным, если рассмотреть тело, движущееся с постоянной скоростью по кругу. Ускорение вдоль кривой равно нулю, потому что скорость не изменяется. Но полное ускорение не равно нулю, потому что тело не движется по прямой линии.

13. Составляющие скорости вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору. Предположим, что траектория точки лежит в плоскости xy, и пусть ее полярные координаты будут r и θ. Тогда

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta. \qquad (12)$$

Отсюда составляющие скорости равны:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=v_x=-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}+\cos\theta\,\frac{dr}{dt},\\ \frac{dy}{dt}&=v_y=+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}+\sin\theta\,\frac{dr}{dt}.\end{aligned}\right\}\qquad (13)$$

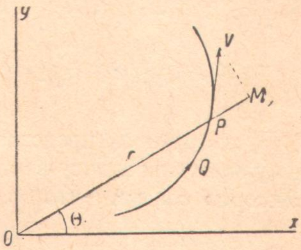

Рис. 1.

Пусть QP обозначает дугу кривой, которая описывается движущейся точкой (рис. 1). Когда точка находится в P, она движется в направлении PV, и скорость может быть представлена вектором PV. Пусть v_r и v_θ представляют составляющие скорости вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору [1]). Равнодействующая векторов v_r и v_θ совпадает с равнодействующей векторов $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$, т. е. равна PV. Сумма проекций v_r и v_θ на любую прямую равняется сумме проекций $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ на ту же прямую. Поэтому, проектируя v_r и v_θ на оси x и y, находим:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta,\\ \frac{dy}{dt}&=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta.\end{aligned}\right\}\qquad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), мы находим искомые составляющие скорости по радиусу-вектору и по перпендикуляру к нему:

$$v_r=\frac{dr}{dt},\quad v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}. \qquad (15)$$

[1]) v_r называют обычно радиальной скоростью. *Прим. ред.*

Квадрат скорости v определяется в этом случае формулой:

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Составляющие скорости v_r и v_θ могут быть выражены через составляющие, параллельные осям x и y. Для этого умножим соответственно уравнения (14) на $\cos\theta$ и $\sin\theta$ и сложим, а затем на $-\sin\theta$ и $\cos\theta$ и сложим. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= +\cos\theta\frac{dx}{dt} + \sin\theta\frac{dy}{dt}, \\ v_\theta &= -\sin\theta\frac{dx}{dt} + \cos\theta\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

14. Составляющие ускорения. Диференцируя формулы (13), мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\cos\theta - \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\sin\theta, \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\cos\theta + \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\sin\theta. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Пусть a_r и a_θ представляют составляющие ускорения вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору. Как и в § 13, из сложения и разложения векторов следует, что

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta, \\ a_y &= a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Сравнивая (17) и (18), мы находим:

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \\ a_\theta &= r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Составляющие ускорения вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору выражаются через составляющие, параллельные осям x и y, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} a_r &= +\cos\theta\frac{d^2x}{dt^2} + \sin\theta\frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_\theta &= -\sin\theta\frac{d^2x}{dt^2} + \cos\theta\frac{d^2y}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Подобным же образом можно найти составляющие скорости и ускорения, параллельные любым прямым.

15. Приложение к точке, равномерно движущейся по кругу. Предположим, что точка движется с постоянной скоростью по кругу с центром в начале координат (рис. 2). Определим составляющие скорости и ускорения, параллельные осям x и y и параллельные и перпендикулярные радиусу. Обозначим радиус круга через R, тогда

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta.$$

Так как скорость постоянна, то угол θ пропорционален времени, т. е. $\theta = ct$, где c — постоянная. Следовательно,

$$x = R\cos(ct), \quad y = R\sin(ct). \tag{21}$$

Так как $\frac{d\theta}{dt} = c$ и $\frac{dR}{dt} = 0$, то составляющие скорости, параллельные осям x и y, находятся из (13):

$$v_x = -Rc\sin(ct), \quad v_y = Rc\cos(ct). \tag{22}$$

Из (15) находим, что

$$v_r = 0, \quad v_\theta = Rc. \tag{23}$$

Определяя по формулам (17) составляющие ускорения, параллельные осям x и y, находим:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -Rc^2\cos(ct), \\ a_y &= -Rc^2\sin(ct), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

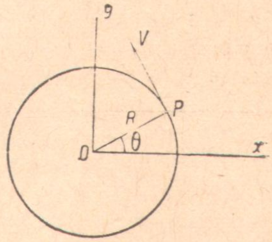

Рис. 2.

а из (19) получаем составляющие ускорения вдоль и перпендикулярно радиусу-вектору:

$$a_r = -Rc^2, \quad a_\theta = 0. \tag{25}$$

Заметим, что хотя движение в этом случае равномерно, скорость относительно неподвижных осей непостоянна, и ускорение не равно нулю. Если предположить, что единственной причиной изменения движения или ускорения точки является внешняя сила, то отсюда следует, что точка не может двигаться по кругу с постоянной скоростью, не подвергаясь действию некоторой силы. Из уравнений (25) и из второго закона движения следует, что сила действует непрерывно по линии, которая проходит через центр круга.

16. Секториальная скорость. Предположим, что точка движется в плоскости xy. Пусть ΔA обозначает площадь треугольника OPQ (рис. 3), описанную радиусом-вектором в промежуток времени Δt.

Тогда

$$\Delta A = \frac{r'r}{2}\sin(\Delta\theta),$$

откуда

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r'r}{2}\,\frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta}\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{26}$$

Когда угол $\Delta\theta$ безгранично уменьшается, отношение площади треугольника к площади сектора стремится к единице. Предел r' есть r, и предел $\frac{\sin(\Delta\theta)}{\Delta\theta}$ равен единице.

Переходя к пределу при $\Delta t = 0$, получим:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}. \tag{27}$$

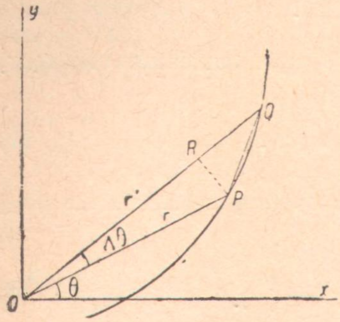

Рис. 3.

Эта величина называется секториальной скоростью движущейся точки. Переходя к прямоугольным координатам, путем подстановки

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

мы получим для секториальной скорости следующее выражение:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \tag{28}$$

Если движение происходит не в плоскости xy, то секториальную скорость проектируют на три основные плоскости. Эти проекции выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dA_{xy}}{dt} &= \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right), \\ \frac{dA_{yz}}{dt} &= \frac{1}{2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{dA_{zx}}{dt} &= \frac{1}{2}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

В некоторых задачах механики иногда встречается случай, когда секториальная скорость остается постоянной, если начало координат выбрано подходящим образом; в этом случае мы будем говорить, что движение подчиняется закону площадей по отношению к этому началу, т. е.

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const}.$$

Из этого уравнения и из (19) следует, что в этом случае

$$a_\theta = 0,$$

т. е. что составляющая ускорения перпендикулярная радиусу-вектору равна нулю.

17. Приложение к движению по эллипсу. Предположим, что точка движется по эллипсу с полуосями a и b таким образом, что она подчиняется закону площадей по отношению к центру как к началу. Найдем составляющие ускорения вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору. Уравнения эллипса в параметрической форме имеют вид:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi. \tag{30}$$

Действительно, исключая φ, мы получим обычное каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Из (30) находим:

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = b\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}. \tag{31}$$

Внося (30) и (31) в выражение для закона площадей:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

получаем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{ab} = c_1.$$

Интегрируя последнее выражение, найдем:

$$\varphi = c_1 t + c_2,$$

и если $\varphi = 0$, когда $t = 0$, то $c_2 = 0$ и $\varphi = c_1 t$.

Внося последнее выражение для φ в (30), найдем:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c_1^2 a\cos\varphi = -c_1^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -c_1^2 b\sin\varphi = -c_1^2 y.$$

Если эти значения производных подставить в (20), то составляющие ускорения вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору будут иметь следующий вид:

$$a_r = -c_1^2 r, \quad a_\theta = 0.$$

ЗАДАЧИ

1. Точка движется равномерно по винтовой линии, проведенной на круглом цилиндре радиуса R. Найдите составляющие скорости и ускорения, параллельные осям x, y и z. Уравнения винтовой линии следующие:

$$x = R\cos\omega, \quad y = R\sin\omega, \quad z = h\omega.$$

Отв. $v_x = -Rc\sin(ct)$, $v_y = +Rc\cos(ct)$, $v_z = hc$,
$a_x = -Rc^2\cos(c\iota)$, $a_y = -Rc^2\sin(ct)$, $a_z = 0$.

2. Точка движется по эллипсу, параметр и эксцентриситет которого p и e, с постоянной угловой скоростью относительно одного из фокусов, принятого за начало. Найдите составляющие скорости и ускорения вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору и параллельно к осям x и y в функции радиуса-вектора и времени.

Отв. $v_r = \frac{ec}{p} \cdot r^2 \sin(ct)$, $v_\theta = rc$,

$$v_x = -cr\sin(ct) + \frac{ec}{2p} \cdot r^2 \sin(2ct), \quad v_y = cr\cos(ct) + \frac{ec}{p} \cdot r^2 \sin^2(ct),$$

$$a_r = \frac{ec^2}{p} \cdot r^2 \cos(ct) + \frac{2e^2c^2}{p^2} r^3 \sin^2(ct) - c^2 r, \quad a_\theta = \frac{2ec^2}{p} \cdot r^2 \sin(ct),$$

$$a_x = -c^2 r\cos(ct) + \frac{ec^2}{p} \cdot r^2 - \frac{3ec^2}{p} \cdot r^2 \sin^2(ct) + \frac{2e^2c^2}{p^2} \cdot r^3 \sin^2(ct)\cos(ct),$$

$$a_y = -c^2 r\sin(ct) + \frac{3ec^2}{2p} \cdot r^2 \sin(2ct) + \frac{2e^2c^2}{p^2} \cdot r^3 \sin^3(ct).$$

3. Точка движется по эллипсу таким образом, что она подчиняется закону площадей, относительно одного из фокусов, принятого за начало. Найдите составляющие скорости и ускорения вдоль и перпендикулярно радиусу-вектору и параллельно к осям в функции координат.

Отв. $v_r = \frac{eA}{p} \sin\theta$, $v_\theta = \frac{A}{r}$; $v_x = \frac{eA}{p} \sin 2\theta - \frac{A\sin\theta}{r}$, $v_y = \frac{eA}{p} \sin^2\theta + \frac{A\cos\theta}{r}$,

$$a_r = -\frac{A^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad a_\theta = 0, \quad a_x = -\frac{A^2}{p} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad a_y = -\frac{A^2}{p} \cdot \frac{\sin\theta}{r^2}.$$

4. Ускорения вдоль осей x и y есть производные скорости вдоль этих осей; почему ускорения вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору не даются производными скоростей в соответствующих направлениях? Найдите ускорения вдоль осей, вращающихся с угловой скоростью, равной единице, в функции ускорений относительно неподвижных осей.

18. Центр массы n равных материальных точек [1]). Центр массы систем равных материальных точек определяется как точка, расстояние которой от любой плоскости равно среднему расстоянию всех материальных точек от этой плоскости. Это должно иметь место для трех координатных плоскостей.

Пусть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и т. д. представляют прямоугольные координаты различных материальных точек и $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ — прямоугольные координаты их центра массы; тогда по определению

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \\ \overline{y} &= \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}, \\ \overline{z} &= \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i}{n}. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

[1]) Под «равными» материальными точками здесь подразумеваются точки, имеющие равные массы. *Прим. ред.*

Предположим, что масса каждой точки есть m, и пусть M представляет массу всей системы, т. е. $M = nm$. Умножая числители и знаменатели уравнений (32) на m, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{m\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{nm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}{M}, \\ \bar{y} &= \frac{m\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{nm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} my_i}{M}, \\ \bar{z} &= \frac{m\sum\limits_{i=1}^{n} z_i}{nm} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} mz_i}{M}. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Остается доказать, что расстояние точки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ от любой другой плоскости является также средним расстоянием материальных точек от плоскости. Уравнение любой плоскости таково:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Расстояние точки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ от этой плоскости определяется формулой:

$$\bar{d} = \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \tag{34}$$

и также расстояние точки (x_i, y_i, z_i) от этой же плоскости есть

$$d_i = \frac{ax_i + by_i + cz_i + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{35}$$

Из уравнений (32), (33) и (35) следует, что

$$\bar{d} = \frac{a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} y_i + c\sum\limits_{i=1}^{n} z_i + nd}{n\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} d_i}{n}.$$

Поэтому точка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, представленная уравнениями (32), удовлетворяет определению центра массы по отношению ко всем плоскостям.

19. Центр массы неравных материальных точек. Имеются два случая: a) в котором массы соизмеримы и b) в котором массы несоизмеримы.

a) Выберем единицу m, на которую все n масс делятся без остатка. Предположим, что первая масса есть $p_1 m$, вторая $p_2 m$ и т. д., и пусть

$p_1m = m_1$, $p_2m = m_2$ и т. д. Можно считать, что система как бы состоит из $p_1 + p_2 + \ldots$ точек, имеющих каждая массу m, и согласно § 18:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} mp_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} mp_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}, \\
\bar{y} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} mp_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} mp_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}, \\
\bar{z} &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} mp_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} mp_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}.
\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

b) Выберем произвольную единицу m, меньшую каждой из n масс. Они будут выражены произведением m на целое число плюс некоторые остатки. Если пренебречь остатками, то уравнения (36) дают центр массы. Возьмем за новую единицу любую долю от m, остатки останутся прежними или уменьшатся в зависимости от их величины. Доля от m может быть взята столь малой, что каждый остаток будет меньше любой заданной величины. Уравнения (36) применимы также, если m_i являются массами тел минус остатки. Так как доли m стремятся к нулю как к пределу, то сумма остатков тоже стремится к нулю, и выражения (36) стремятся к пределам, в которых m_i являются действительными массами точек. Поэтому во всех случаях уравнениями (36) дается точка, которая удовлетворяет определению центра массы.

Тот факт, что если определение центра массы выполнено для трех координатных плоскостей, то оно также выполнено для всякой другой плоскости, легко может быть доказан, не прибегая к помощи общей формулы для расстояния любой точки от любой плоскости. Например, плоскость yz может быть приведена в любое положение изменением начала и последовательным вращением системы координат около различных осей. Следовательно, достаточно показать, что уравнения (36) не изменяются 1) при изменении начала и 2) при вращении вокруг одной из осей.

1) Перенесем начало вдоль оси x на расстояние a. Подстановка, которая выполняет этот перенос, такова: $x = x' + a$, и первое уравнение (36) примет вид:

$$\bar{x}' + a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i (x_i' + a)}{M} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i'}{M} + \frac{a \sum\limits_{i=1}^{n} m_i}{M},$$

откуда

$$\overline{x'} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},$$

что имеет такую же форму, как и раньше.

2) Повернем оси x и y вокруг оси z на угол θ. Подстановка, выполняющая вращение, такова:

$$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta,$$

$$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta.$$

После этой подстановки первые два уравнения (36) получают следующий вид:

$$\overline{x'} \cos\theta - \overline{y'} \sin\theta = \cos\theta \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i'}{M} - \sin\theta \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i'}{M}$$

$$\overline{x'} \sin\theta + \overline{y'} \cos\theta = \sin\theta \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i'}{M} + \cos\theta \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i'}{M}.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$\overline{x'} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i'}{M}, \qquad \overline{y'} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i'}{M}.$$

Поэтому точка $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ удовлетворяет определению центра массы по отношению к любой плоскости.

20. Центр тяжести. Материальные точки системы, находящиеся близко друг к другу на поверхности Земли, подчиняются силам, которые в достаточной мере параллельны и пропорциональны соответствующим массам. *Вес* или *тяжесть* частицы определяется как напряжение вертикальной силы f, равной произведению массы m точки на ее ускорение g. *Центр тяжести* системы определяется как точка, к которой если приложить сумму всех сил при условии жесткости системы, то действие на движение системы будет тем же самым, как при первоначальных силах при любой ориентировке системы.

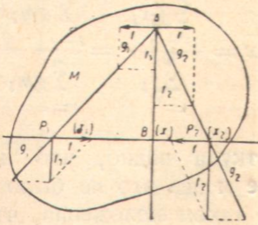

Рис. 4.

Теперь покажем, что центр тяжести совпадает с центром массы. Рассмотрим две параллельные силы f_1 и f_2, действующие на жесткую систему M в точках P_1 и P_2 (рис. 4). Разложим эти две силы соответственно на составляющие f и g_1 и f и g_2. Составляющие f, будучи равными и противоположными, взаимно уничтожаются. Тогда составляющие g_1 и g_2 могут быть рассматриваемы как действующие на точку A. Разложим их опять так, чтобы противоположно направленные составляющие были равны и лежали на линии, параллельной P_1P_2; тогда другие составляющие будут направлены по линии AB, которая параллельна направлению первоначальных сил f_1 и f_2, и будут соответственно равны f_1 и f. Поэтому равнодействующая f_1 и f_2 по величине и направлению равна f_1+f_2. Из подобных треугольников находим, что

$$\frac{f_1}{f}=\frac{AB}{P_1B}, \qquad \frac{f_2}{f}=\frac{AB}{P_2B},$$

откуда делением находим:

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{P_2B}{P_1B}=\frac{x_2-\bar{x}}{\bar{x}-x_1},$$

и, решая относительно $\bar{x}$, получаем:

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2}{f_1+f_2}.$$

Если равнодействующую этих двух сил соединить с третьей силой f_3, то подобным путем находим, что точка, где их сумма может быть приложена с тем же самым действием, дается уравнением:

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+f_3x_3}{f_1+f_2+f_3},$$

и так дальше для любого числа сил. Подобные уравнения верны для параллельных сил, действующих в любом другом направлении.

Предположим, что имеется n материальных точек m_i, подчиненных n параллельным силам f_i, происходящим от притяжения Земли. Координаты их центра тяжести по отношению к началу таковы:

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} gm_ix_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} gm_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_ix_i}{M}, \quad \bar{y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_iy_i}{M}, \quad \bar{z}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_iz_i}{M}, \tag{37}$$

откуда видно, что центр тяжести совпадает с центром массы. Тем не менее это не было бы вообще верно, если бы система не находилась в таком положении, что ускорения различных ее частей были бы между собой и равны и параллельны. Эйлер (1707—1783) предложил для центра массы название *центра инерции*.

21. Центр массы сплошного тела. Если точки системы тела становятся все более многочисленными и более близкими друг к другу, то система приближается к сплошному телу как к пределу. Точки обычных тел механики бесчисленны и неотличимо близки друг к другу, поэтому такие тела рассматриваются как сплошные массы. Отсюда для сплошных масс надо взять пределы выражений (37) при m_i стремящихся к нулю. В пределе m превращается в dm, и сумма переходит в определенный интеграл. Поэтому формулы, дающие координаты центра массы, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{\int x\,dm}{\int dm},\\ \bar{y}&=\frac{\int y\,dm}{\int dm},\\ \bar{z}&=\frac{\int z\,dm}{\int dm},\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

где интегралы распространяются на все тело.

Если тело однородно, то плотность является отношением любой части массы к ее объему. Если тело неоднородно, то *средняя плотность* является отношением всей массы ко всему объему. Плотность в любой точке есть предел средней плотности объема, включающего данную точку, когда этот объем стремится к нулю как к пределу. Если плотность обозначить через σ, то элемент массы, выраженный в прямоугольных координатах, есть

$$dm=\sigma\,dx\,dy\,dz.$$

Тогда уравнения (38) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{\iiint \sigma x\,dx\,dy\,dz}{\iiint \sigma\,dx\,dy\,dz},\\ \bar{y}&=\frac{\iiint \sigma y\,dx\,dy\,dz}{\iiint \sigma\,dx\,dy\,dz},\\ \bar{z}&=\frac{\iiint \sigma z\,dx\,dy\,dz}{\iiint \sigma\,dx\,dy\,dz}.\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

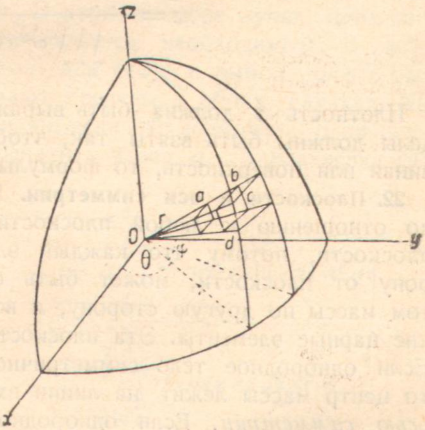

Рис. 5.

Пределы интегралов зависят от формы тела, и σ должно быть выражено в функции координат.

В некоторых задачах интегрирования выполняются более просто, если ввести полярные координаты. Элемент массы, выраженный в полярных координатах, есть

$$dm=\sigma\cdot\overline{ab}\cdot\overline{bc}\cdot\overline{cd}.$$

Из рис. 5 видно, что

$$\overline{ab} = dr, \quad \overline{bc} = r\,d\varphi, \quad \overline{cd} = r\cos\varphi\,d\theta.$$

Поэтому

$$dm = \sigma r^2 \cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr, \tag{40}$$

и

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= r\cos\varphi\sin\theta, \\ z &= r\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

откуда формулы (38) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\iiint \sigma r^3 \cos^2\varphi\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\iiint \sigma r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}, \\ \bar{y} &= \frac{\iiint \sigma r^3 \cos^2\varphi\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\iiint \sigma r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}, \\ \bar{z} &= \frac{\iiint \sigma r^3 \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\iiint \sigma r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Плотность σ должна быть выражена как функция координат, и пределы должны быть взяты так, чтобы охватить все тело. Если тело есть линия или поверхность, то формулы значительно упрощаются.

22. Плоскости и оси симметрии. Если однородное тело симметрично по отношению к любой плоскости, то центр массы находится в этой плоскости, потому что каждый элемент массы, лежащий по одну сторону от плоскости, может быть соединен с соответствующим элементом массы по другую сторону, и все тело может быть разделено на такие парные элементы. Эта плоскость называется *плоскостью симметрии*. Если однородное тело симметрично по отношению к двум плоскостям, то центр массы лежит на линии их пересечения. Эта линия называется *осью симметрии*. Если однородное тело симметрично по отношению к трем плоскостям, пересекающимся в точке, то центр массы находится в этой точке пересечения. Из рассмотрения плоскостей и осей симметрии центр массы многих простых фигур может быть выведен без применения методов интегрирования.

23. Приложение к неоднородному кубу. Предположим, что плотность прямо пропорциональна квадрату расстояния от одной из граней куба. Возьмем начало в одном из углов, и пусть плоскость yz совпадает с гранью нулевой плотности. Тогда $\sigma = kx^2$, где k является плотностью на единице расстояния. Предположим, что ребра куба равны a; тогда формулы (39) принимают вид:

$$\bar{x} = \frac{k\int_0^a\int_0^a\int_0^a x^3\,dx\,dy\,dz}{k\int_0^a\int_0^a\int_0^a x^2\,dx\,dy\,dz}, \qquad \bar{y} = \frac{k\int_0^a\int_0^a\int_0^a x^2y\,dx\,dy\,dz}{k\int_0^a\int_0^a\int_0^a x^2\,dx\,dy\,dz},$$

$$\bar{z} = \frac{k\int_0^a\int_0^a\int_0^a x^2z\,dx\,dy\,dz}{k\int_0^a\int_0^a\int_0^a x^2\,dx\,dy\,dz}.$$

Выполняя интегрирования, находим:

$$\bar{x} = \frac{3a}{4}, \quad \bar{y} = \frac{a}{2}, \quad \bar{z} = \frac{a}{2}.$$

Если решать задачу с помощью полярных координат, то верхние пределы интегралов будут значительно сложнее, чем в прямоугольных координатах, и интегрирование соответственно будет труднее.

24. Приложение к октанту шара. Предположим, что шар однороден и что плотность его равна единице. В этом примере лучше применить полярные координаты, хотя это не является необходимым. В любой задаче можно применить уравнения (39) или (42), и выбор должен быть определен формой, которую принимают пределы в обоих случаях. Желательно иметь все пределы постоянными, если это возможно. Если центр шара взять за начало и радиус обозначить через a, то уравнения (42) примут вид:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\cos^2\varphi\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}, \qquad \bar{y} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\cos^2\varphi\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr},$$

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,dr}.$$

Так как масса однородного шара с радиусом a и единицей плотности есть $\frac{4}{3}\pi a^3$, то каждый из знаменателей этих выражений равняется $\frac{1}{6}\pi a^3$. Это может быть непосредственно проверено интегрированием. Интегрируя числители по φ и подставляя пределы, мы получим:

$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a} r^3 \cos\theta \, d\theta \, dr}{\frac{\pi}{6} a^3},$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a} r^3 \sin\theta \, d\theta \, dr}{\frac{\pi}{6} a^3},$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{a} r^3 \, d\theta \, dr}{\frac{\pi}{6} a^3}.$$

Интегрируя далее по θ, найдем:

$$\bar{x} = \frac{\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{a} r^3 \, dr}{\frac{\pi}{6} a^3}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{a} r^3 \, dr}{\frac{\pi}{6} a^3}, \quad \bar{z} = \frac{\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{a} r^3 \, dr}{\frac{\pi}{6} a^3}$$

и, наконец, интегрируя по r, получаем:

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{3}{8} a.$$

Октант шара имеет три плоскости симметрии, а именно: плоскости, определенные центром шара, вершинами ограничивающего сферического треугольника и центрами их соответственно противоположных сторон; так как эти три плоскости пересекаются не только в точке, но также и по линии, то они не вполне определяют центр массы.

Так как почти все массы, встречающиеся в астрономических проблемах, суть шары или сплющенные сфероиды с тремя плоскостями симметрии, пересекающимися в точке, но не по линии, то для них применение только что данных формул очень просто, и нет надобности в решении других примеров.

ЗАДАЧИ

1. Найдите центр массы тонкой прямой проволоки длины R, плотность которой прямо пропорциональна n-й степени расстояния от одного конца.

Отв. $\dfrac{n+1}{n+2}R$

от конца нулевой плотности

2. Найдите координаты центра массы тонкой однородной проволоки, согнутой в квадрант круга радиуса R.

Отв. $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2R}{\pi}$,

где начало принято в центре круга.

3. Найдите координаты центра массы тонкой однородной пластинки, имеющей форму квадранта эллипса с полуосями a и b.

Отв. $\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi}$, $\bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$.

4. Найдите координаты центра массы тонкой однородной пластинки, имеющей форму полной петли лемнискаты, уравнение которой есть $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Отв. $\bar{x} = \dfrac{\pi a}{2^{\frac{5}{2}}}$, $\bar{y} = 0$.

5. Найдите координаты центра массы октанта однородного эллипсоида с полуосями a, b, c.

Отв. $\bar{x} = \dfrac{3a}{8}$, $\bar{y} = \dfrac{3b}{8}$, $\bar{z} = \dfrac{3c}{8}$.

6. Найдите координаты центра массы октанта шара радиуса R, плотность которого прямо пропорциональна n-й степени расстояния от центра.

Отв $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \dfrac{n+3}{n+4} \cdot \dfrac{R}{2}$.

7. Найдите координаты центра массы параболоида вращения, отсеченного плоскостью, перпендикулярной к его оси.

Отв. $\bar{x} = \dfrac{2}{3}h$, $\bar{y} = \bar{z} = 0$,

где h есть расстояние вершины параболоида от плоскости.

8. Найдите координаты центра массы круглого конуса, высота которого h и радиус основания R.

9. Найдите координаты центра массы двояковыпуклой линзы из однородного стекла, шаровые поверхности которой имеют радиусы r_1 и $r_2 = 2r_1$ и толщина которой в центре есть $\dfrac{r_1 + r_2}{4}$.

10. В вогнуто-выпуклой линзе радиусы кривизны выпуклой и вогнутой поверхностей равны r_1 и $r_2 > r_1$. Определите толщину и диаметр линзы так, чтобы центр массы лежал на вогнутой поверхности.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ОТ ДРЕВНИХ ВРЕМЕН ДО НЬЮТОНА

25. Два деления истории. История развития небесной механики естественно разделяется на две части. Одна касается развития чисто формального взгляда на вселенную, естественного разделения времени, конфигурации созвездий и определения путей и периодов планет и их движений; другая трактует попытки и успехи в достижении правильных идей относительно физических сторон явлений природы, основных свойств силы, материи, пространства и времени и особенно взаимоотношений между ними. Правда, эти две линии в развитии астрономической науки не всегда отчетливо разделялись теми, кто их развивал; наоборот, они часто ассоциировались настолько тесно, что рассуждения последней сильно влияли на выводы первой. Хотя оба вида исследований должны быть строго различаемы в уме исследователя, но, конечно, ясно, что они должны постоянно служить контролем друг другу. Целью двух следующих параграфов будет охарактеризовать возможно короче развитие небесной механики по этим двум линиям со времени ранних греческих философов до того времени, когда Ньютон приложил свой гений к анализу введенных элементов и к их синтезу в одном из самых величественных произведений человеческого ума.

26. Формальная астрономия. Первое подразделение имеет дело с явлениями независимо от их причин и может быть названо формальной астрономией. Сутки, месяц и год — настолько очевидные естественные деления времени, что они были замечены самыми первобытными народами. Но определение связи между этими периодами требует умственного развития, необходимого для тщательных наблюдений; еще на самой заре халдейской и египетской истории они, повидимому, были известны с значительной точностью. Записи, оставленные этими народами об их более ранних цивилизациях, так бедны, что известно мало достоверного об их научных достижениях. Подлинная история астрономии фактически начинается с греков, которые, получив свои первые знания и вдохновение от египтян, продолжали развивать их с энтузиазмом и проницательностью, характерной для греческой расы.

Фалес Милетский (640—546 до н. э.) отправился в Египет и по своем возвращении основал ионическую школу астрономии и философии. Некоторое понятие об успехах, сделанных египтянами, может быть получено из того факта, что он учил о шарообразности Земли, наклонности эклиптики, о причинах затмений и согласно Геродоту предсказал затмение Солнца 585 г. до н. э. Согласно Лаэрцию он первый определил длину года. Будет справедливо заметить, что многие из своих сведений он заимствовал из Египта, хотя основание для предсказания затмений зиждется на периоде в 6 585 суток, который известен как *сарос*, открытый халдеями. После истечения этого периода затмения Солнца и Луны повторяются почти при тождественных условиях, лишь за тем исключением, что они смещаются по земной поверхности на 120° к западу.

Анаксимандр (611—545 до н. э.), друг и, вероятно, ученик Фалеса, составил географические карты, и ему приписывают изобретение гномона.

Пифагор (около 569—470 до н. э.) совершил большие путешествия по Египту и Халдее и даже проник в Азию до берегов Ганга.

По возвращении он отправился в Сицилию и основал школу астрономии и философии. Он учил, что Земля и вращается и движется и что кометы, так же как и планеты, движутся по орбитам вокруг Солнца. Ему первому приписывают утверждение, что планета Венера является в разное время то вечерней, то утренней звездой.

Метон (около 465—385 до н. э.) довел до сведения ученых людей Эллады 19-летний цикл, почти равняющийся 235 синодическим месяцам, который с тех пор известен как метонов цикл. После истечения этого периода фазы Луны возвращаются в те же самые дни года и почти в то же время дня. Более точный каллипский цикл состоит из четырех метоновых циклов без одного дня.

Аристотель (384—322 г. до н. э.) разделял теорию шарообразной Земли и снабдил эту теорию многими доказательствами, которыми пользуются до настоящего времени.

Аристарх (310—250 до н. э.) написал важную работу, озаглавленную «Величины и расстояния». В ней он вычислил из положения, когда Земля находится в квадратуре при наблюдении с Луны, что расстояние последней от Земли составляет одну девятнадцатую расстояния Земли от Солнца. Упомянутое положение определяется наблюдением, когда Луна находится в первой четверти. Этому методу, который теоретически вполне правилен, мешает быть вполне успешным лишь практическая трудность точного определения, когда Луна имеет данную фазу.

Эратосфен (275—194 до н. э.) составил каталог 475 самых ярких звезд и известен определением размера Земли из измерения разности широт и расстояния Сиены в Верхнем Египте от Александрии.

Гиппарх (около 190—120 до н. э.) уроженец Вифинии, который наблюдал в Родосе и, возможно, в Александрии, был величайшим астрономом древности. Он соединял усердие и искусство наблюдателя со способностями математика. Последователь Евклида (около 330—275 до н. э.) в Александрии, он развил важную науку — сферическую тригонометрию. Он определял места на Земле при помощи их долготы и широты и звезды путем их прямых восхождений и склонений. Появление новой звезды побудило его составить каталог 1 080 неподвижных звезд. Он измерил длину тропического года, длину месяца из затмений, движение лунных узлов, а также апогея лунной орбиты; он был автором первых солнечных таблиц; он открыл предварение равноденствий и произвел многочисленные наблюдения планет. Труды Гиппарха известны только косвенно, его собственные записи были потеряны во время уничтожения большой Александрийской библиотеки сарацинами при Омаре в 640 г. н. э.

Птоломей (100—170 н. э.) продолжил работу Гиппарха и оставил памятником своих трудов «Альмагест», который к счастью сохранился неприкосновенным до сего времени и содержит много сведений большой ценности. Самым большим открытием Птоломея была эвекция Луны, которую он открыл, следя за Луной в течение целого месяца, вместо того чтобы сосредоточить свое внимание на определенных фазах, как это делали предыдущие наблюдатели. Он открыл рефракцию, но особенно прославился системой эксцентриков и эпициклов, которую он развил, чтобы объяснить кажущиеся движения планет.

После Птоломея наступило затишье, в течение которого не происходило развития науки ни у одного народа, кроме арабов, которые были скорее подражателями и комментаторами, нежели самостоятельными исследователями. В IX в. процветал величайший арабский астроном Альбатений (850—929), им было произведено на Месопотамской равнине более точное измерение дуги меридиана, чем когда-либо до него. В X в. Аль-Суфи составил каталог звезд, основанный на его собственных наблюдениях. Другой каталог был сделан по указаниям Улуг-Бека (1393—1449) в Самарканде в 1433 г. В это время арабская астрономия уже практически перестала существовать.

Астрономия начала возрождаться в Европе к концу XV в. благодаря работам Пейрбаха (1423—1461), Вальтера (1430—1504) и Региомонтана (1436—1476). Большой толчок в ее развитии был сделан знаменитым астрономом Коперником (1473—1543) и затем астрономия разрабатывалась с возрастающим усердием до настоящего времени. В 1543 г. Коперник опубликовал свой знаменитый труд «De Revolutionibus Orbium Coelestium», в котором он дал миру гелиоцентрическую теорию солнечной системы. Система Коперника была отвергнута Тихо Браге (1546—1601), который выдвинул свою собственную теорию, потому что он не мог заметить никакого параллакса у неподвижных звезд. По происхождению Тихо Браге был норвежец, но большую часть своей астрономической работы он произвел в Дании под покровительством короля Фридриха. После смерти Фридриха он переехал в Прагу, где прожил остаток своей жизни, имея пожизненную пенсию от Рудольфа II. Он был неутомимым и тщательным наблюдателем и сделал очень важные вклады в астрономию. В последние годы Тихо Браге имел своим учеником и ассистентом Кеплера (1571—1630), и из обработки наблюдений Тихо Браге Кеплер смог меньше чем в 20 лет после смерти своего предшественника опубликовать три закона движений планет. Из этих законов Ньютон (1642—1727) вывел закон тяготения.

Галилей (1564—1642), итальянский астроном, современник Кеплера, человек исключительной гениальности, впервые применил телескоп к изучению небесных объектов. Он открыл четыре спутника, обращающиеся вокруг Юпитера, кольца Сатурна и пятна на Солнце. Он, подобно Кеплеру, был ревностным защитником гелиоцентрической теории.

27. Динамическая астрономия. Под динамической астрономией подразумевается исследование механических и физических причин наблюдаемых явлений. Формальная астрономия настолько стара, что невозможно найти начало ее зарождения. Начало динамической астрономии, наоборот, относится ко времени после Аристотеля, и действительное развитие ее совершалось с большими перерывами.

Архимед из Сиракуз (278—212 до н. э.) был автором первых правильных идей, касающихся механических законов. Он правильно определил принципы рычага и значение центра тяжести тел. Его учение было развито и обобщено Леонардо да-Винчи (1452—1519) в его исследованиях статического момента. Вся статика твердого тела заключает лишь приложение математики к этим принципам.

Замечателен тот факт, что не было сделано ни одного важного открытия в области законов механики почти на протяжении 2 000 лет после

Архимеда, т. е. до времени Стевина (1548—1620), который в 1586 г. впервые занялся механикой наклонной плоскости, и Галилея (1564—1642), который сделал первое важное открытие в области кинематики. Таким образом механические принципы, относящиеся к движению тел, не были известны почти до нового времени. Основной ошибкой в рассуждениях большинства исследователей было их предположение о необходимости непрерывно действующей силы для поддержания движения тела. Они думали, что для тела более свойственно состояние покоя, чем движения, что противоречит закону инерции (первый закон Ньютона). Этот закон был открыт Галилеем совершенно случайно при изучении движения тел, скатывающихся по наклонной плоскости на горизонтальную поверхность. Галилей принял следующее основное положение: изменение скорости или ускорение определяется силами, которые действуют на тело. Это положение содержит почти целиком два первые положения Ньютона. Галилей применил свои принципы с полным успехом при открытии законов падающих тел и законов движения снарядов. Благодаря своим открытиям он справедливо считается основателем динамики. Он первый применил маятник для измерения времени.

Гюйгенс (1629—1695), голландский математик и ученый, опубликовал в 1675 г. «Horologium Oscillatorium», содержащий теорию определения напряжения земной тяжести из опытов с маятником, теорию центра качания, теорию эволют и теорию циклоидального маятника.

Ньютон (1642—1727) завершил формулировку основных принципов механики и применил их с беспримерным успехом в разрешении механических и астрономических проблем. Он применял геометрию с таким искусством, что к его работам почти ничего не было прибавлено при применении его методов до настоящего времени.

Вскоре после Ньютона математики обратились к более общим и могучим методам анализа. Аналитическая механика была основана Эйлером (1707—1783) в его работе «Mechanica sive Motus Scientia» (Петербург 1736); она была развита Маклореном (1698—1746) в его работе «A Complete System of Fluxions» (Эдинбург 1742) и значительно усовершенствована Лагранжем (1736—1813) в его «Mécanique Analytique» (Париж 1788). «Mécanique Céleste» Лапласа (1749—1788) поставила небесную механику на еще более высокую ступень.

БИБЛИОГРАФИЯ

По истории небесной механики и астрономии см. Delambre, Histoire de l'Astronomie Ancienne (старая работа); L. Ideler, Astronomische Beobachtungen der Alten (старая работа): Paul Tannery, Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie Ancienne; Grant, History of Astronomy; H. Hankel, Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter; Whewell, History of the Inductive Sciences (2 vols); H. Süter, Geschichte der Mathematischen Wissenschaften (2 vols); M. Cantor, Geschichte der Mathematik (3 vols); W. Ball, A Schort History of Mathematics; Florian Cajori, A History of Mathematics: Maximilian Marie, Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques (12 vols); Wolf R., Geschichte der Astronomie; Arthur Berry, A History of Astronomy; Ernest Lebon, Histoire Abrégée de l'Astronomie.

ГЛАВА II

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ

28. Задачи небесной механики. Большая часть задач небесной механики сводится к решению диференциальных уравнений, которые в большинстве задач очень сложны вследствие наличия большого числа зависимых переменных. Анализ бесконечно малых большей частью рассматривает уравнения, в которых имеется лишь одна независимая и одна зависимая переменная, и переход к совместным уравнениям с несколькими переменными, требующий интерпретации в связи с физическими проблемами и механическими принципами, обычно делается не без некоторого затруднения. Настоящая глава будет посвящена формулированию и решению некоторых видов задач, в которых математические процессы тесно связаны с изложенными в математических руководствах. Это послужит как бы мостом между методами, применяемыми в работе с анализом бесконечно малых, и элементарными диференциальными уравнениями и методами, которые характерны для механических и астрономических проблем.

Примеры, выбранные для иллюстрации принципов, большей частью взяты из астрономических проблем. Они достаточно интересны, чтобы оправдать себя, даже в том случае, если они и не потребуются для последующих более сложных рассуждений. Они охватывают теорию падающих тел, параболическое движение и метеорную и контракционную теорию солнечного тепла.

29. Диференциальное уравнение движения падающей точки. Предположим, что масса точки есть m, и пусть s представляет направление ее падения. Возьмем начало O на поверхности Земли и будем считать положительным направление вверх. По второму закону движения произведение массы на ускорение пропорционально силе. Пусть k^2 обозначает множитель пропорциональности, числовое значение которого будет зависеть от принятых единиц длины, массы и времени.

Обозначая действующую силу через f, мы получим диференциальное уравнение движения точки в виде:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2 f. \tag{1}$$

Последнее уравнение является также диференциальным уравнением движения для любого случая, в котором равнодействующая всех сил направлена по той же прямой, по которой направлена также начальная скорость точки.

Сила f обычно зависит от разных величин, например от положения точки, времени t и скорости v. Чтобы отметить это, мы напишем уравнение (1) в следующем виде:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2 f(s, t, v), \tag{2}$$

где $f(s, t, v)$ просто означает, что сила может зависеть от величин, стоящих в скобках. Чтобы решить это уравнение, надо выполнить два интегрирования, и характер интеграла будет зависеть от того, каким образом f связано с s, t и v. Рассмотрим отдельно некоторые случаи.

30. Случай постоянной силы. Этот простейший случай почти осуществляется, когда точка падает под действием тяжести на короткое расстояние вблизи земной поверхности. Если за единицу времени взять секунду, а за единицу длины — сантиметр, то $k^2 f = mg$, где g является ускорением силы тяжести на поверхности Земли. Числовое значение g, которое несколько изменяется с широтой, близко к 980. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g. \tag{3}$$

Интегрируя последнее выражение один раз, получим:

$$\frac{ds}{dt} = -gt + c_1,$$

где c_1 есть постоянная интегрирования. Пусть начальная скорость точки, т. е. скорость в момент $t = 0$, есть v_0. Предыдущее выражение дает:

$$v_0 = c_1,$$

откуда

$$\frac{ds}{dt} = -gt + v_0.$$

Интегрируя это уравнение, найдем:

$$s = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + c,$$

где c_2 — вторая постоянная интеграции.

Предположим, что точка начинает двигаться с расстояния s_0 от начала в момент $t = 0$; тогда из последнего выражения имеем:

$$s_0 = c_2,$$

откуда

$$s = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0. \tag{4}$$

Если даны начальные условия s_0 и v_0 в момент $t = 0$, то это уравнение определяет положение точки в любой момент времени t. Отсюда же можно определить время, в течение которого точка прошла некоторое расстояние, путем решения квадратного уравнения относительно t.

Если ускорение будет какой-нибудь другой положительной или отрицательной постоянной, то выражение для пройденного расстояния будет отличаться от (4) лишь коэфициентом при t^2.

Можно еще получить важное соотношение между скоростью и положением точки. Помножим обе части уравнения (3) на $2\frac{ds}{dt}$. Тогда, так как производная от $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ есть $2\frac{ds}{dt}\frac{d^2s}{dt^2}$, то, интегрируя, получим:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -2gs + c_3,$$

где c_3 — новая постоянная интегрирования.

Из начальных условий следует, что

$$c_3 = v_0^2 + 2gs_0,$$

откуда

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2 = -2g(s - s_0). \tag{5}$$

31. Сила притяжения изменяется прямо пропорционально расстоянию. Рассмотрим еще один случай, когда действующая сила изменяется прямо пропорционально расстоянию от начала. Предположим, что она всегда направлена к началу. Из опыта известно, что это условие довольно хорошо оправдывается при растяжении упругой нити в пределах известного натяжения. Когда точка находится на положительной стороне от начала, скорость будет уменьшаться, поэтому для таких положений точки ускорение должно быть взято с отрицательным знаком, и диференциальное уравнение для положительных значений s будет иметь вид:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2s. \tag{6}$$

Если точка находится на отрицательном расстоянии от начала, то скорость возрастает и, следовательно, ускорение положительно. Правая часть уравнения (6) должна быть взята поэтому с таким знаком, чтобы она была положительной. Но так как s отрицательно, то знак этот есть минус, и уравнение (6) пригодно для любых положений точки.

Помножим обе части уравнения (6) на $2\frac{ds}{dt}$ и проинтегрируем; мы получим:

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = -k^2s^2 + c_1.$$

Если $s = s_0$ и $\frac{ds}{dt} = 0$ в момент $t = 0$, то $c_1 = k^2s_0^2$, и уравнение примет вид:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{k^2}{m}(s_0^2 - s^2).$$

Извлекая квадратный корень и разделяя переменные, мы напишем последнее уравнение в виде:

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \pm \frac{k\,dt}{\sqrt{m}},$$

откуда, интегрируя, имеем:

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \pm \frac{kt}{\sqrt{m}} + c_2.$$

Из начальных условий находим, что $c_2 = \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \pm \frac{kt}{\sqrt{m}} + \frac{\pi}{2}.$$

Взяв синус от обеих частей этого уравнения, мы найдем:

$$s = s_0 \sin\left(\pm \frac{kt}{\sqrt{m}} + \frac{\pi}{2}\right) = s_0 \cos\left(\frac{kt}{\sqrt{m}}\right). \tag{7}$$

Из этого уравнения видно, что движение будет колебательное с периодом $\frac{2\pi\sqrt{m}}{k}$ и симметричное по отношению к началу. По этой причине оно называется уравнением гармонического движения. Очевидно, что $\frac{ds}{dt}$ обращается в нуль, в некоторые моменты в течение движения для всех начальных условий, поэтому мы нисколько не ограничили общности задачи, предполагая, что $\frac{ds}{dt} = 0$ при $t = 0$.

Уравнение (6) имеет форму диференциального уравнения, встречающегося во многих физических проблемах. Если даны начальные условия, то оно определяет движение математического маятника, колебание камертона, малые изменения в положении земной оси и т. д. Поэтому метод нахождения его решения и определение постоянных интегрирования должны быть основательно усвоены.

ЗАДАЧИ

1. Начальная скорость точки 20 *м/сек*, и ее ускорение тоже 20 *м/сек*^{2}. Какова будет ее скорость в конце 4-й секунды и как далеко она продвинется?

Отв. $v = 100$ *м/сек*, $s = 240$ *м*.

2. Начальная скорость точки 10 *м/сек*, и, двигаясь с постоянным ускорением, она прошла 2 050 *м* в 5 *сек*. Каково ускорение?

Отв. $\alpha = 160$ *м/сек*^{2}.

3. Точка движется с ускорением в 5 *м/сек*^{2}. Какой путь она должна пройти, чтобы ее скорость увеличилась с 10 до 20 *м* в секунду?

Отв. 30 *м*.

4. Точка, начавшая двигаться с положительной начальной скоростью 10 *м/сек* и движущаяся с положительным ускорением в 20 *м/сек*^{2}, прошла путь в 420 *м*. Какое время требуется для этого?

Отв. $t=6$ сек.

5. Покажите, что если частица, выведенная из состояния покоя, движется под влиянием силы притяжения, прямо пропорциональной расстоянию от начала движения, то время падения от любой точки до начала не зависит от расстояния движущейся точки.

6. Предположим, что точка движется под влиянием силы притяжения, прямо пропорциональной расстоянию, и что ускорение на расстоянии 1 *м* равно 1 *м/сек*^{2}. Если точка выведена из состояния покоя, то сколько времени потребуется на то, чтобы она упала с высоты 20 *м* до 10 *м*?

Отв. 1,0472 сек.

7. Предположим, что точка движется под влиянием силы, отталкивающей от начала и прямо пропорциональной расстоянию, покажите, что если $v=0$ и $s=s_0$ при $t=0$, то

$$\lg\left(\frac{s+\sqrt{s^2-s_0^2}}{s_0}\right)=\frac{k}{\sqrt{m}}t,$$

откуда, полагая, что $\frac{k}{\sqrt{m}}=K$,

$$s=\frac{s_0}{2}(e^{Kt}+e^{-Kt})=s_0\operatorname{ch}Kt.$$

Заметьте, что уравнение (7) может быть написано подобным образом:

$$s=\frac{s_0}{2}\left(e^{\sqrt{-1}Kt}+e^{-\sqrt{-1}Kt}\right)=s_0\cos Kt.$$

8. Сила тяжести на поверхности Солнца в 28 раз больше таковой на Земле. Если солнечный протуберанец в 100 000 *км* высоты был образован взрывом, то какова должна быть скорость вещества, когда оно покинуло поверхность Солнца?

Отв. 234 *км/сек*.

32. Решение линейных уравнений при помощи показательных функций. Диференциальное уравнение (6) и соответствующее уравнение для отталкивающей силы линейны относительно s и имеют постоянные коэфициенты. Общая теория показывает, что все линейные уравнения с постоянными коэфициентами могут быть решены при помощи показательных функций или в некоторых особых случаях при помощи показательных функций, умноженных на степени независимой переменной t. Преимущество этого метода заключается не только в его общности, но также в его простоте, и мы его применим для решения уравнений (5). Рассмотрим две формы:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2s}{dt^2}+k^2s=0,\\ \frac{d^2s}{dt^2}-k^2s=0.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Положим, $s=e^{\lambda t}$ и подставим это выражение в диференциальные уравнения; получим:

$$\lambda^2e^{\lambda t}+k^2e^{\lambda t}=0,$$
$$\lambda^2e^{\lambda t}-k^2e^{\lambda t}=0.$$

Так как эти уравнения должны быть удовлетворены всеми значениями t, для того чтобы $e^{\lambda t}$ было решением, необходимо, чтобы

$$\left.\begin{aligned}\lambda^2+k^2=0,\\ \lambda^2-k^2=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Пусть корни первого уравнения будут λ_1 и λ_2, тогда первое уравнение (8) удовлетворяется обоими частными решениями $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$. Общее решение есть сумма этих двух частных решений, умноженных каждое на произвольную постоянную. Точно такие же результаты получаются и для второго уравнения (8). Подставляя значения корней, получаем соответствующие общие решения:

$$\left.\begin{aligned}s=c_1e^{\sqrt{-1}kt}+c_2e^{-\sqrt{-1}kt},\\ s=c_1'e^{kt}+c_2'e^{-kt},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где c_1, c_2, c_1' и c_2' обозначают постоянные интегрирования.

Пусть $s=s_0$ и $\frac{ds}{dt}=s_0'$ при $t=0$. Уравнения (10) дают:

$$s_0=c_1+c_2,$$
$$s_0=c_1'+c_2'.$$

Диференцируя (10), имеем:

$$\frac{ds}{dt}=c_1\sqrt{-1}ke^{\sqrt{-1}kt}-c_2\sqrt{-1}ke^{-\sqrt{-1}kt},$$
$$\frac{ds}{dt}=c_1'ke^{kt}-c_2'ke^{-kt}.$$

Представляя теперь $t=0$ и $\frac{ds}{dt}=s_0'$, найдем:

$$c_1\sqrt{-1}k-c_2\sqrt{-1}k=s_0',$$
$$c_1'k-c_2'k=s_0'.$$

Поэтому

$$c_1=\frac{1}{2}\left(s_0+\frac{s_0'}{k\sqrt{-1}}\right),$$
$$c_2=\frac{1}{2}\left(s_0-\frac{s_0'}{k\sqrt{-1}}\right),$$
$$c_1'=\frac{1}{2}\left(s_0+\frac{s_0'}{k}\right),$$
$$c_2'=\frac{1}{2}\left(s_0-\frac{s_0'}{k}\right).$$

Тогда общие решения (10) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned}s=\frac{s_0}{2}\left(e^{\sqrt{-1}kt}+e^{-\sqrt{-1}kt}\right)+\frac{s_0'}{2k\sqrt{-1}}\left(e^{\sqrt{-1}kt}-e^{-\sqrt{-1}kt}\right),\\ s=\frac{s_0}{2}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)+\frac{s_0'}{2k}\left(e^{kt}-e^{-kt}\right).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Эти уравнения могут быть написаны в виде:

$$s = s_0 \cos kt + \frac{s'_0}{k} \sin kt,$$

$$s = s_0 \operatorname{ch} kt + \frac{s'_0}{k} \operatorname{sh} kt.$$

Этот метод решения показывает гораздо яснее, чем другие методы, близкую связь между двумя проблемами.

33. Сила притяжения, изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния. При нахождении точки в положительном направлении от начала скорость алгебраически уменьшается, когда время увеличивается, происходит ли движение по направлению к началу или от него, поэтому в этой области ускорение отрицательно. Подобным же образом с отрицательной стороны от начала ускорение положительно. Так как $\frac{k^2}{s^2}$ всегда положительно, то правая часть в обоих случаях имеет разные знаки. Для простоты предположим, что масса притягиваемо: точки равна единице. Тогда диференциальное уравнение движения для всех положений точки в положительном направлении от начала таковоя

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k^2}{s^2}. \tag{12}$$

Умножая обе части уравнения на $2\frac{ds}{dt}$ и интегрируя, находим:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{s} + c_1. \tag{13}$$

Пусть $v = v_0$ и $s = s_0$ при $t = 0$; тогда

$$c_1 = v_0^2 - \frac{2k^2}{s_0}.$$

Подставляя это выражение для c_1 в (13), находим:

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2k^2}{s} + v_0^2 - \frac{2k^2}{s_0}}.$$

Если $v_0^2 - \frac{2k^2}{s_0} < 0$, то на некотором конечном расстоянии $s \frac{ds}{dt}$ обращается в нуль; если направление движения частицы таково, что она доходит до этой точки, то она в ней останавливается и начинает двигаться в противоположном направлении. Если $v_0^2 - \frac{2k^2}{s_0} = 0$, то $\frac{ds}{dt}$ обращается в нуль при $s = \infty$, и если частица движется от начала к бесконечности, то ее расстояние становится бесконечно большим, когда скорость приближается к нулю. Если $v_0^2 - \frac{2k^2}{s_0} > 0$, то $\frac{ds}{dt}$ никогда не обращается в нуль, и если частица движется от начала к бесконечности, то ее расстояние станет бесконечно большим и скорость ее не будет стремиться к нулю.

Предположим, что $v_0^2 - \frac{2k^2}{s_0} < 0$ и что $\frac{ds}{dt} = 0$, когда $s = s_1$. Тогда уравнение (13) дает:

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{s_1}}\, k \sqrt{\frac{s_1 - s}{s}}. \tag{14}$$

Положительный или отрицательный знак берется в зависимости от того, удаляется или приближается точка к началу.

Последнее уравнение может быть написано в виде:

$$\frac{s\,ds}{\sqrt{s_1 s - s^2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{s_1}}\, k\, dt,$$

и, интегрируя, мы получим:

$$-\sqrt{s_1 s - s^2} + \frac{s_1}{2} \arcsin\left(\frac{2s - s_1}{s_1}\right) = \pm \sqrt{\frac{2}{s_1}}\, kt + c_2.$$

Так как $s = s_0$ при $t = 0$, то

$$c_2 = -\sqrt{s_1 s_0 - s_0^2} + \frac{s_1}{2} \arcsin\left(\frac{2s_0 - s_1}{s_1}\right),$$

откуда

$$\frac{s_1}{2}\left[\arcsin\left(\frac{2s - s_1}{s_1}\right) - \arcsin\left(\frac{2s_0 - s_1}{s_1}\right)\right] + \\ + \sqrt{s_1 s_0 - s_0^2} - \sqrt{s_1 s - s^2} = \pm \sqrt{\frac{2}{s_1}}\, kt. \tag{15}$$

Это уравнение определяет время, в которое точка имеет данное положение направо от начала, на расстоянии меньшем, чем s_1. Для значений s, больших s_1, и для всех отрицательных значений s последний член левой части становится мнимым. Это означает, что уравнение не годится для таких значений переменных, как это и должно быть, потому что дифеpенциальные уравнения (13) и (14) имеют силу лишь для $0 < s \leqslant s_1$.

Предположим, что точка приближается к началу, тогда в правой части (15) должен быть взят отрицательный знак. Время, когда точка находилась в покое, получаем, полагая $s = s_1$ в (15), что дает:

$$T_1 = -\frac{1}{k}\sqrt{\frac{s_1}{2}} \sqrt{s_1 s_0 - s_0^2} - \frac{1}{k}\left(\frac{s_1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left[+\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2s_0 - s_1}{s_1}\right)\right].$$

Время, которое требуется для частицы, чтобы упасть из s_0 до начала, получается, полагая $s = 0$ в (15), что дает:

$$T_2 = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{s_1}{2}} \sqrt{s_1 s_0 - s_0^2} - \frac{1}{k}\left(\frac{s_1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left[-\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2s_0 - s_1}{s_1}\right)\right].$$

Время, которое требуется для того, чтобы точка упала из состояния покоя при $s = s_1$ до начала, есть:

$$T = T_2 - T_1 = \frac{\pi}{k}\left(\frac{s_1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (16)$$

34. Высота проекции. Когда постоянная c_1 определена из начальных условий, то уравнение (13) принимает вид:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - v_0^2 = v^2 - v_0^2 = 2k^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\right).$$

Из этого уравнения следует, что скорость зависит лишь от расстояния точки от центра силы, а не от направления ее движения. Самое большое расстояние, на которое частица удаляется от начала, или высота проекции, получается, если положить $v = 0$, что дает:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} - \frac{v_0^2}{2k^2}.$$

Но если высота проекции измеряется от начальной точки s_0, что естественно при рассмотрении высоты проекции тела, брошенного с поверхности Земли, то формула принимает вид:

$$s_2 = s_1 - s_0 = \frac{v_0^2 s_0^2}{2k^2 - v_0^2 s_0}.$$

35. Скорость из бесконечности. Когда точка начинает двигаться от s с нулевой скоростью, то уравнение (13) принимает вид:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2k^2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_0}\right). \qquad (17)$$

Если точка падает с бесконечного расстояния, то s_0 есть бесконечность и уравнение приводится к:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{s}. \qquad (18)$$

На основании § 34 следует, что если точка брошена из некоторой точки s в положительном направлении со скоростью, определяемой уравнением (18), то она удалится в бесконечность. Закон притяжения, примененный в выводе уравнения (18), есть ньютонов закон тяготения, поэтому уравнение может быть использовано для вычисления скорости, которую приобретает точка, падающая из бесконечности на поверхности различных планет, спутников и на Солнце. Тогда если точка брошена с поверхностей различных тел солнечной системы с соответствующими скоростями, то она удалится в бесконечность, если на нее не будут действовать другие силы. Но если скорость точки будет лишь достаточной, чтобы удалить ее от спутника или планеты, то она будет подвержена притяжению остальных тел солнечной системы, среди которых главным, конечно, является Солнце, и она вообще не удалится в бесконечность и не будет окончательно потеряна для системы.

36. Приложение к рассеиванию атмосфер. Согласно кинетической теории газов объемы и давления газов поддерживаются взаимным столкновением отдельных молекул, которые вообще находятся в состоянии очень быстрого движения. Разреженность земной атмосферы и большое давление, равное почти 1 *кг/см*^{2}, дает некоторое представление о большой скорости движения молекул и об очень частых повторениях их ударов.

Различные молекулы не движутся все с одинаковой скоростью в данном газе при определенных условиях; но число таких, которые имеют скорость движения, отличающуюся от средней квадратичной, быстро уменьшается с увеличением разности. Теоретически во всех газах ряд значений скоростей простирается от нуля до бесконечности, хотя сравнительно с другими крайние случаи встречаются бесконечно редко. Под постоянным давлением скорости прямо пропорциональны корню квадратному из абсолютной температуры и обратно пропорциональны квадратному корню из молекулярного веса.

Так как во всех газах существуют все скорости, то некоторые молекулы газообразных оболочек небесных тел должны двигаться со скоростями большими, чем *скорости из бесконечности*, как определено в § 35. Если молекулы близки к верхним границам атмосферы и начинают двигаться от тела, к которому они принадлежат, они могут избежать столкновения с другими молекулами и улететь, чтобы никогда не вернуться [1]). Так как кинетическая теория газов подтверждается наблюдениями и так как, если она верна, то некоторые молекулы должны двигаться со скоростями большими, чем скорость из бесконечности, то вероятно, что атмосферы всех небесных тел истощаются этим процессом; но в большинстве случаев он протекает крайне медленно и компенсируется отчасти приростом от метеорного вещества и атмосферными молекулами других тел. В верхних областях газообразных оболочек, из которых лишь и отлетают молекулы, температуры низки, по крайней мере для планет вроде Земли, и большие скорости редки. Если средняя квадратичная скорость равняется или превышает скорость из бесконечности, то процесс истощения будет протекать относительно быстро. Во всяком случае элементы и соединения с низким молекулярным весом теряются быстрее, и таким образом одни молекулы и атомы улетучиваются свободнее, а другие удерживаются сильнее.

Теперь рассмотрим, каким образом скорость из бесконечности по отношению к поверхности притягивающего шара изменяется с его массой и радиусом. Масса тела пропорциональна произведению его плотности на куб радиуса. Тогда k^2, равное притяжению на единице расстояния, прямо пропорционально массе и поэтому прямо пропорционально произведению плотности на куб радиуса. Отсюда из уравнения (18) следует, что скорость из бесконечности на поверхности тела прямо пропорциональна произведению радиуса тела на квадратный корень из его плотности. Плотности и радиусы членов солнечной системы обычно выражаются в долях плотности и радиуса Земли; отсюда скорость из бесконеч-

---

[1]) Эта теория предложена Д ж о н с т о н о м С т о н е й, *Trans. Royal Dublin Soc.*, 1892.

ности может быть легко вычислена для каждого из них после того как ее определили для Земли.

Пусть R обозначает радиус Земли и g — ускорение силы тяжести на ее поверхности. Тогда получаем, что

$$g = \frac{k^2}{R^2}. \tag{19}$$

Подставляя значение k^2, определенное из этого уравнения, в (18), получаем для квадрата скорости следующее выражение:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{2gR^2}{s}.$$

Пусть $v = \frac{ds}{dt}$, когда $s = R$, откуда

$$v^2 = 2gR.$$

Возьмем за единицу времени секунду и за единицу длины метр. Тогда $R = 6\,371\,000$ и $g = 9{,}8094$ [1]). Подставляя эти значения в последнее уравнение и выполнив вычисления, находим, что $v = 11\,180$ *м/сек*. Взяв относительные плотности и радиусы планет, мы находим следующие результаты:

Тело	Скорость улетучивания в *м/сек*	Тело	Скорость улетучивания в *м/сек*
Земля	11 180	Марс	5 180
Луна	2 396	Юпитер	61 120
Солнце	618 200	Сатурн	37 850
Меркурий	3 196	Уран	23 160
Венера	10 475	Нептун	20 830

Скорость из бесконечности уменьшается, в то время как расстояние от центра планеты увеличивается, а необходимая скорость для того, чтобы молекула могла улететь, соответственно уменьшается и центробежное ускорение вращения планеты прибавляется к скоростям некоторых молекул.

Возникает вопрос, равняются ли или превосходят средние молекулярные скорости атмосферных элементов соответствующие скорости из бесконечности при условиях, преобладающих на поверхности различных перечисленных тел.

Давление газа можно найти экспериментальным путем, если даны плотность и температура на единицу поверхности, откуда может быть вычислена средняя квадратичная скорость. В кинетической теории газов доказывается, что средняя квадратичная скорость водородной молекулы при температуре 0° С под атмосферным давлением составляет около

---

[1]) g взято здесь для широты Парижа 48° 50′.

700 *м/сек.* При тех же условиях скорости молекул кислорода и азота примерно равны лишь одной четверти этой величины.

Поверхностные температуры нижних планет, конечно, гораздо выше, чем нуль градусов Цельсия в тех частях, где они получают лучи Солнца наиболее отвесно, даже если пренебречь всем теплом, которое когда-либо было получено ими изнутри. Из геологических данных относительно образования изверженных пород на Земле кажется вероятным, что в далеком прошлом планеты имели гораздо более высокую температуру и внешние планеты еще не остыли до твердого состояния. Имеется указание на то, что было время, когда наиболее тугоплавкие тела находились в расплавленном состоянии, откуда следует, что их температуры были около 3 000° или 4 000° С. Поэтому средняя квадратичная скорость могла быть гораздо больше чем 1 700 *м/сек* для водорода, как указано выше, и, вероятно, в течение долгого периода времени продолжала быть больше. Сравнивая эти результаты с таблицей скоростей из бесконечности, видно, что согласно этой теории Луна и нижние планеты не могли удержать в своей оболочке свободный водород и другие элементы очень малого молекулярного веса, как, например, гелий; в случае Луны, Меркурия и Марса должно было быть заметным улетучивание более тяжелых молекул, таких, как водород. Это особенно вероятно, если нагретые атмосферы простирались на большие расстояния. Верхние планеты, и особенно Солнце, могли удержать все обычные земные элементы, и по этой теории можно ожидать, что эти тела окружены обширными газовыми оболочками.

37. Сила пропорциональна скорости. Если точка движется в сопротивляющейся среде, то силы, которым она подвергается, зависят от ее скорости. Опыты показали, что в земной атмосфере, когда скорость меньше 3 *м/сек*, сопротивление изменяется почти пропорционально первой степени скорости; для скоростей от 3 до 300 *м/сек* оно изменяется почти пропорционально второй степени скорости, и для скоростей около 400 *м/сек* — почти как третья степень скорости.

а) Рассмотрим сначала случай, когда сопротивление пропорционально первой степени скорости, и предположим, что движение происходит на земной поверхности в горизонтальном направлении, не подвергаясь действию никаких сил, кроме возникающих от сопротивления. Тогда дифференциальное уравнение движения напишется следующим образом:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2\frac{ds}{dt} = 0, \tag{20}$$

где k^2 есть положительная постоянная, которая зависит от выбора единиц, природы тела и характера сопротивляющейся среды. Уравнение (20) линейно относительно зависимой переменной s, и для его решения может быть применен общий метод решения линейных уравнений.

Делая подстановку:

$$s = e^{\lambda t}$$

и деля на $e^{\lambda t}$, мы получим:

$$\lambda^2 + k^2\lambda = 0.$$

Корни этого уравнения равны:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -k^2,$$

и общее решение напишется в виде:

$$\left.\begin{aligned} s &= c_1 + c_2 e^{-k^2 t}, \\ \frac{ds}{dt} &= -c_2 k^2 e^{-k^2 t}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Пусть $\frac{ds}{dt} = v_0$ и $s = s_0$ при $t = 0$, тогда постоянные c_1 и c_2 могут быть выражены через v_0 и s_0, и решение принимает вид:

$$s = s_0 + \frac{v_0}{k^2} - \frac{v_0}{k^2} e^{-k^2 t}. \tag{22}$$

b) Рассмотрим случай, когда сопротивление меняется пропорционально первой степени скорости, и предположим, что движение происходит по вертикальной линии. Направим положительный конец оси вверх. Когда движение направлено вверх, то скорость положительна и сопротивление уменьшает скорость. Поэтому, если движение направлено вверх, сопротивление производит отрицательное ускорение и диференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 \frac{ds}{dt} = -g. \tag{23}$$

Если движение направлено вниз, сопротивление алгебраически увеличивает скорость и в этом случае сопротивление вызывает положительное ускорение. Но так как скорость имеет в обоих случаях противоположные знаки, то уравнение (23) одинаково годится для случая движения точки вверх или вниз.

Уравнение (23) линейно, но неоднородно и может быть легко решено способом вариации произвольных постоянных. Этот способ настолько важен в астрономических проблемах, что мы применим его в настоящем простом случае, хотя в нем нет никакой необходимости для получения решения уравнения (23). Рассмотрим сначала однородное уравнение:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + k^2 \frac{ds}{dt} = 0, \tag{24}$$

которое получается из (23) отбрасыванием свободного члена. Общее решение этого уравнения дается первой формулой (21). Способ вариации произвольных постоянных состоит в определении c_1 и c_2 как функций t так, чтобы неоднородное уравнение (23) также было удовлетворено. Это налагает лишь одно условие на две величины c_1 и c_2, и потому другое может быть взято совершенно произвольно.

Если коэфициенты c_1 и c_2 рассматриваются как функции t, то, диференцируя первое уравнение (21), получаем:

$$\frac{ds}{dt} = -k^2 c_2 e^{-k^2 t} + \frac{dc_1}{dt} + e^{-k^2 t} \frac{dc_2}{dt}.$$

В качестве дополнительного условия, налагаемого на c_1 и c_2, потребуем, чтобы эти величины удовлетворяли соотношению:

$$\frac{dc_1}{dt}+e^{-k^2t}\frac{dc_2}{dt}= \tag{25}$$

что упрощает выражение для $\frac{ds}{dt}$. Диференцируя второй раз, имеем:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=k^2c_2e^{-k^2t}-k^2e^{-k^2t}\frac{dc_2}{dt}, \tag{26}$$

и уравнение (23) дает:

$$k^2\frac{dc_1}{dt}=-g. \tag{27}$$

Из этого уравнения и (25) следует, что:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dc_1}{dt}=-\frac{g}{k^2}, && \frac{dc_2}{dt}=\frac{g}{k^2}e^{k^2t},\\ &c_1=-\frac{g}{k^2}t+c_1', && c_2=\frac{g}{k^4}e^{k^2t}+c_2', \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где c_1 и c_2' — новые постоянные интегрирования. Внеся эти значения c_1 и c_2 в (21), найдем:

$$s=c_1'+c_2'e^{-k^2t}-\frac{g}{k^2}t+\frac{g}{k^4}. \tag{29}$$

Так как c_1' произвольно, то, конечно, в него можно включить постоянную $\frac{g}{k^4}$.

Выражение (29) является общим решением (23), потому что оно содержит две произвольных постоянных c_1' и c_2' и подставленное в (23) тождественно ему удовлетворяет. Заметим, что часть решения, зависящая от c_1' и c_2', имеет ту же форму, как и решение уравнения (20). Ясно, что общее решение можно найти тем же методом, если правая часть уравнения (23) будет известной функцией t вместо постоянной g.

Из уравнения (29) находим, что скорость точки равна:

$$\frac{ds}{dt}=-k^2c_2'e^{-k^2t}-\frac{g}{k^2}. \tag{30}$$

Предположим, что $s=s_0$, $\frac{ds}{dt}=v_0$ при $t=0$. Подставляя эти значения в уравнения (29) и (30), находим:

$$s_0=c_1'+c_2'+\frac{g}{k^4}, \quad v_0=-k^2c_2'-\frac{g}{k^2},$$

откуда

$$c_1'=s_0+\frac{v_0}{k^2}, \quad c_2'=-\frac{v_0}{k^2}-\frac{g}{k^4}.$$

Следовательно, если постоянные определены начальными условиями, то общее решение уравнения (29) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0 + \frac{v_0}{k^2} + \frac{g}{k^4} - \frac{g}{k^2}\,t - \left(\frac{v_0}{k^2} + \frac{g}{k^4}\right)e^{-k^2 t}, \\ \frac{ds}{dt} &= -\frac{g}{k^2} + \left(v_0 + \frac{g}{k^2}\right)e^{-k^2 t}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Точка достигает высшего положения, когда $\frac{ds}{dt}$ равно нулю. Обозначим время, когда она достигает этого положения, через T и соответствующую высоту через $S - s_0$. Тогда из уравнений (31) найдем:

$$e^{k^2 T} = 1 + \frac{k^2 v_0}{g}, \quad S - s_0 = \frac{v_0}{k^2} - \frac{g}{k^4}\ln\left(1 + \frac{k^2 v_0}{g}\right).$$

38. Сила пропорциональна квадрату скорости. При скорости сильного ветра или тела, падающего со значительной высоты, или брошенного мяча сопротивление почти пропорционально квадрату скорости. Теперь рассмотрим характер движения точки, брошенной вверх против силы тяжести и подвергающейся сопротивлению атмосферы, прямо пропорциональному квадрату скорости. Для простоты примем ускорение, происходящее от сопротивления при скорости, равной единице, за $k^2 g$. Тогда диференциальное уравнение движения для точки с единицей массы примет вид:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g - k^2 g\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{32}$$

Это уравнение может быть написано в виде:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left(k\frac{ds}{dt}\right)}{1 + k^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = -kg,$$

интегрируя которое получим:

$$\operatorname{arctg}\left(k\frac{ds}{dt}\right) = -kgt + c_1. \tag{33}$$

Если $\frac{ds}{dt} = v_0$ и $s_0 = 0$, когда $t = 0$, то

$$c_1 = \operatorname{arctg}(kv_0).$$

Подставив это значение c_1 в уравнение (33) и взяв тангенс от обеих частей, находим:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{k}\,\frac{v_0 k - \operatorname{tg}(kgt)}{1 + v_0 k\operatorname{tg}(kgt)}. \tag{34}$$

Это уравнение выражает скорость как функцию времени. По умножении числителя и знаменателя правой части (34) на $\cos(kgt)$ числитель стансвится производной по времени от знаменателя. Тогда, интегрируя, получаем окончательное решение в виде:

$$s=\frac{1}{k^2g}\ln\left[v_0 k\sin(kgt)+\cos(kgt)\right]+c_2. \tag{35}$$

Из начальных условий следует, что $c_2=0$. Уравнение (35) выражает пройденное расстояние в функции времени.

Уравнения могут быть решены таким образом, что скорость будет выражена в функции расстояния. Уравнение (32) может быть написано в виде:

$$\frac{\frac{d}{dt}\left\{k^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}}{1+k^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=-2gk^2\frac{ds}{dt},$$

интегрируя юоторое имеем:

$$\ln\left\{1+k^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right\}=-2gk^2s+c_1'.$$

Из начальных условий следует, что

$$c_1'=\ln(1+k^2v_0^2);$$

поэтому

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{1}{k^2}(1+k^2v_0^2)\,e^{-2gk^2s}-\frac{1}{k^2}. \tag{36}$$

Полагая скорость равной нулю, мы получим максимальную высоту, на которую может подняться тело:

$$s=\frac{1}{2gk^2}\ln(1+k^2v_0^2).$$

Время достижения наивысшей точки находится из (34), полагая $\frac{ds}{dt}=0$, что дает:

$$T=\frac{1}{kg}\operatorname{arctg}(v_0k).$$

Когда точка падает, то сопротивление действует в противоположном направлении и знак последнего члена в (32) меняется. Это можно получить, написав $k\sqrt{-1}$ вместо k, и если такое изменение произвести во всем решении, то результаты будут верными. Конечно, чтобы избежать появления мнимых выражений, результаты должны быть написаны в форме показательных функций вместо тригонометрических, как они написаны в (34) и (35). Если начальная скорость равна нулю, то $v=0$ и уравнения, аналогичные (34), (35) и 36), напишутся соответственно в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{k}\,\frac{e^{kgt}-e^{-kgt}}{e^{kgt}+e^{-kgt}},\qquad e^{-gk^2s}=\frac{e^{kgt}+e^{-kgt}}{2},\\&\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{1}{k^2}(1-e^{2gk^2s}).\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

ЗАДАЧИ

1. Покажите, что

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -k^2 \frac{s}{\sqrt{s^6}},$$

где всегда берется положительное значение радикала, есть уравнение задачи параграфа 33, на какой бы стороне от начала точка ни была. Проинтегрируйте это уравнение.

2. Пусть в уравнении (23) $s = s' - \frac{g}{k^2} t$; проинтегрируйте непосредственно и покажите, что результат таков же, как полученный способом вариации произвольных постоянных.

3. Найдите уравнения (37) непосредственным интегрированием диференциальных уравнений.

4. Предположим, что точка выведена из состояния покоя и движется под влиянием отталкивающей силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Найдите скорость и истекшее время в функции пройденного пути.

Отв. $v^2 = 2k^2\left(\frac{1}{s_0} - \frac{1}{s}\right)$, $k\sqrt{\frac{2}{s_0}}\, t = \sqrt{s^2 - s_0 s} + \frac{s_0}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{s^2 - s_0 s} + s - \frac{s_0}{2}}{\frac{s_0}{2}}\right)$.

5. Какова скорость из бесконечности по отношению к Солнцу на расстоянии, равном расстоянию Земли от Солнца?

Отв. 42 220 *м/сек.*

6. Предположим, что точка движется под влиянием силы притяжения, прямо пропорционально расстоянию, и испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Решите диференциальное уравнение общим методом решения линейных уравнений.

Отв. Пусть k^2 есть множитель пропорциональности для скорости и l^2 для расстояния. Тогда решения таковы:

$$s = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$\lambda_1 = \frac{-k^2 + \sqrt{k^4 - 4l^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-k^2 - \sqrt{k^4 - 4l^2}}{2}.$$

Рассмотрите подробнее форму решения и ее физическое значение, если a) $k^4 - 4l^2 < 0$, b) $k^4 - 4l^2 = 0$, c) $k^4 - 4l^2 > 0$.

7. Предположим, что в добавление к силам задачи 6 действует сила μe^{vt}; получите решение способом вариации произвольных постоянных и исследуйте движение точки.

8. Примените способ вариации произвольных постоянных для линейного диференциального уравнения третьего порядка.

9. Если $k^2 = 0$, то уравнение (23) определяет движение свободно падающего тела. Покажите, что предел решения (32), когда k^2 стремится к нулю, есть:

$$s = s_0 + vt - \frac{1}{2} g t^2.$$

39. Параболическое движение. Имеется ряд задач, требующих для своего решения математических приемов подобных тем, которые употреблялись до сих пор в этой главе, хотя движение происходит не по прямой линии. Благодаря сходству в анализе приводим краткое изложение этих задач.

Предположим, что точка подвергается постоянному ускорению, направленному вниз; задача состоит в том, чтобы найти характер описанной кривой, когда точка брошена в любом направлении. Траектория находится в плоскости, которую примем за плоскость xy. Пусть ось y вертикальна с положительным концом, направленным вверх. Тогда диференциальные уравнения движения таковы:

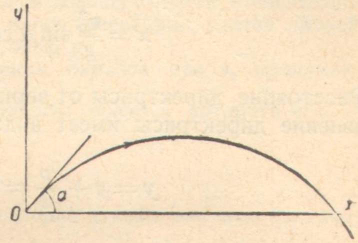

Рис. 6.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-g. \tag{38}$$

Так как эти уравнения независимы друг от друга, то их можно интегрировать отдельно, что дает:

$$x=a_1t+a_2,$$

$$y=-\frac{gt}{2}+b_1t+b.$$

Пусть $x=y=0$, $\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha$, $\frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha$, когда $t=0$, где α есть угол между направлением движения в начальный момент и плоскостью горизонта и v_0 начальная скорость (рис. 6). Тогда постоянные интегрирования имеют следующие значения:

$$a_1=v_0\cos\alpha, \quad a_2=0,$$

$$b_1=v_0\sin\alpha, \quad b_2=0,$$

и поэтому:

$$\left.\begin{aligned} x&=v_0\cos\alpha\cdot t,\\ y&=-\frac{gt^2}{2}+v_0\sin\alpha\cdot t. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Уравнение траектории получим, исключая t из этих двух уравнений:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g\sec^2\alpha}{2v_0^2}x^2. \tag{40}$$

Это есть уравнение параболы с вертикальной осью и вершиной, направленной вверх. Оно может быть написано в виде:

$$\left(x-\frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha\right)^2=-\frac{2v_0^2}{g\sec^2\alpha}\left(y-\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}\right).$$

Уравнение параболы с вершиной в начале имеет форму:

$$x^2 = -2py,$$

где p есть параметр. Сравнивая это уравнение с уравнением кривой, которую описывает точка, мы видим, что координаты вершины или наивысшего положения таковы:

$$\bar{x} = \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha, \quad \bar{y} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha.$$

Расстояние директрисы от вершины равно половине параметра; поэтому уравнение директрисы имеет вид:

$$y = \bar{y} + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Квадрат скорости получим из формулы:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Чтобы найти место, где точка пересечет горизонтальную плоскость, положим $y = 0$ в уравнении (40). Решения для x суть:

$$x = 0 \text{ и } x = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Отсюда следует, что для данной начальной скорости дальность полета наибольшая, если $\alpha = 45°$. Из (39) видно, что горизонтальная скорость равна $v_0 \cos\alpha$, отсюда продолжительность полета есть $\frac{2v_0}{g} \sin\alpha$. Поэтому, если другие начальные условия сохранены неизменными, вся продолжительность полета прямо пропорциональна синусу угла прицела.

Угол прицела для данной дальности полета находим, решая уравнение:

$$x = a = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

относительно α. Если $a > \frac{v_0^2}{g}$, то решения, очевидно, нет. Если $a < \frac{v_0^2}{g}$, то имеется два решения, отличающиеся от значения α для максимальной дальности ($\alpha = 45°$) на равные величины.

Если пренебречь изменением тяжести на разных высотах над земной поверхностью, кривизной Земли и сопротивлением воздуха, то приведенные выше исследования применимы к полету снарядов близ земной поверхности. Для тел с большой плотностью полученные результаты достаточно точны для небольших расстояний полета. Когда ускорение взято по направлению к центру Земли и предполагается, что тяжесть изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, то путь, описанный точкой, есть эллипс с центром Земли, находящимся в одном из фокусов. Это будет доказано в следующей главе.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что если ускорения, параллельные осям x и y, постоянны, то путь, описанный точкой, есть парабола для общих начальных условий.

2. Найдите направление оси параболы, полученной в задаче 1, как функцию постоянных составляющих ускорения.

3. При соблюдении условий 39 найдите дальность полета на линии, составляющей угол β с осью x.

4. Покажите, что начальное направление наиболее дальнего полета относительно данной прямой, проходящей через начальную точку траектории, дается прямой, биссектрирующей угол между данной прямой и осью y.

5. Покажите, что геометрическое место вершин парабол при α, принимающем все возможные значения, есть эллипс, большая полуось которого есть $\frac{v_0^2}{g}$ и малая полуось $\frac{v_0^2}{2g}$.

6. Докажите, что скорость в любой точке траектории такова, как если бы точка падала от директрисы параболы.

ТЕПЛОВАЯ ЭНЕРГИЯ СОЛНЦА

40. Работа и энергия. Когда сила двигает точку против сопротивления, то говорят, что она производит *работу*. Количество работы пропорционально произведению сопротивления на путь, пройденный точкой.

В случае свободной точки сопротивление происходит всецело от инерции массы; наличие трения также является сопротивлением.

Энергия есть способность совершать работу. Если данное количество работы затрачено на то, чтобы сообщить движение свободной точке, то точка приобретает движение, позволяющее ей совершить точно такое же количество работы. Энергия движения называется *кинетической энергией*. Если точка задерживается трением, то часть первоначально затраченной работы используется на преодоление этого трения, и точка может совершить лишь столько работы, сколько было затрачено для приведения ее в движение.

Примерно до 1850 г. обычно предполагали, что работа, затраченная на преодоление трения, частично или, возможно, всецело потеряна. Другими словами, считали, что общее количество энергии в изолированной системе может непрерывно уменьшаться. Однако заметили, что трение производит тепло, звук, свет и электричество в зависимости от условий и что эти проявления энергии того же происхождения, как и начальная, но в иной форме. Затем было доказано, что измененные формы энергии в каждом случае количественно эквивалентны потерям первоначальной энергии. Блестящие опыты Джоуля и других, произведенные в середине XIX в., установили с большой определенностью тот факт, что общее количество энергии остается постоянным, каким бы изменениям она ни подвергалась. Этот принцип известен как *сохранение энергии* и сформулированный по отношению ко всей вселенной является одним из наиболее крупных обобщений в естественных науках прошлого столетия.

41. Вычисление работы. Вычислим теперь количество работы, произведенной ньютонианской силой при движении свободной точки. Пусть масса движущейся точки есть m, и постоянная, зависящая от массы притягивающего тела и единиц измерения, есть k^2. Тогда

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{k^2m}{s^2}. \tag{41}$$

Правая часть есть сила, действующая на точку. По третьему закону Ньютона она по величине равна реакции или сопротивлению инерции. Тогда работа, произведенная при движении точки на элемент расстояния ds, равна:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}ds=-\frac{k^2m}{s^2}ds=dW.$$

Работу, совершенную при продвижении на промежуток от s_0 до s_1 найдем, интегрируя последнее выражение между пределами s_0 и s_1. Выполнив интегрирование, получим:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2-\frac{m}{2}\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2=k^2m\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_0}\right).$$

Предположим, что начальная скорость равна нулю; тогда кинетическая энергия равняется работе, произведенной точкой:

$$W=\frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=k^2m\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_0}\right). \tag{42}$$

Согласно предположениям точка не имеет кинетической энергии в начале движения, и поэтому способность совершать работу равняется произведению половины массы на квадрат скорости. Если точка падает из бесконечности, то s_0 есть бесконечность, и формула для кинетической энергии принимает вид:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2=\frac{k^2m}{s_1}. \tag{43}$$

Если точка останавливается от столкновения с телом, когда она достигает расстояния s_1, то ее кинетическая энергия переходит в иную форму энергии, например тепло. Путем опытов нашли, что тело, весящее 1 *кг*, падая с высоты 425 *м* [1]), вблизи земной поверхности под влиянием силы земного притяжения производит достаточно тепла, чтобы поднять температуру одного килограмма воды на один градус Цельсия. Это количество тепла называется калорией [2]). Количество образовавшегося тепла пропорционально произведению квадрата скорости на массу движущейся точки. Тогда, принимая Q за число калорий, получаем, что

$$Q=Cmv^2. \tag{44}$$

---

[1]) Джоуль нашел 423,5; Роуланд 427,8. Результаты опытов приведены в «Теории тепла» Престона, стр. 594. См. также. К. Ш е ф е р, Теория теплоты, ч. 1, стр. 79, ГТТИ, 1933. *Прим. ред.*

[2]) Одна тысячная доля этой единицы, относящаяся к грамму вместо килограмма, также называется калорией, в отличие от которой вышеприведенная иногда называется большой калорией.

Пусть m будет выражено в килограммах и v — в метрах в секунду. Для того чтобы опр делить постоянную C, возьмем Q и m каждое равным единице, тогда скорость будет такая же, как у тела, упавшего с высоты 425 *м*. В § :0 было показано, что если тело падает из состояния покоя, то:

$$s = -\frac{1}{2}gt^2,$$

$$v = -gt.$$

Исключая в этих уравнениях t, получаем:

$$v^2 = 2gs.$$

В принятых единицах $g = 9{,}8094$, и так как $s = 425$ и $v^2 = 8\,338$, то из (44) следует, что

$$C = \frac{1}{8\,338}.$$

Тогда общая формула (44) принимает вид:

$$Q = \frac{mv^2}{8\,338}, \tag{45}$$

где Q выражено в больших калориях, если килограмм, метр и секунда взяты за единицы массы, расстояния и времени.

42. Температура метеоров. Повышение температуры тела равно числу приобретенных тепловых калорий, деленных на произведение массы и удельной теплоемкости вещества. Предположим, что метеор, удельная теплоемкость которого равна единице (на самом деле она, вероятно, значительно меньше единицы), ударяется о Землю с некоторой данной скоростью. Требуется вычислить повышение его температуры, если он получит все образованное тепло. Удельная теплоемкость взята так, что увеличение температуры количественно равно числу калорий, образованных на единицу массы. Метеоры обычно встречают Землю со скоростью около 40 233 *м/сек*. Подставляя 40 233 для v и единицу для m в (45), находим, что $T = Q = 194\,134$: число образованных калорий на единицу массы или число градусов, на которое повысится температура метеора.

На самом деле большая часть тепла передается атмосфере, хотя количество образованного тепла так велико, что можно ожидать, что только самых больших метеоров хватит на то, чтобы достичь земной поверхности.

Метеор, падая на Солнце из бесконечности, ударится о его поверхность, как показано в § 36, со скоростью около 618 *км/сек*. Поэтому образовавшееся тепло будет равно $\left(\frac{384}{25}\right)^2$ или в 236 раз больше тепла, образовавшегося при встрече с Землей. Отсюда следует, что при падании на Солнце 1 *кг* образует 45 800 000 *кал*.

43. Метеоритная теория солнечного тепла. Если вспомнить, какое огромное число метеоров [Г. А. Ньютон[1]) оценивает их в 8 000 000 ежедневно] встречается с Землей, то легко предположить, что их достаточно падает на Солнце, чтобы поддержать его температуру. Это было выдвинуто как теория, объясняющая пополнение огромного количества тепла, излучаемого Солнцем. Нет сомнений в качественной правильности этого вопроса, и остается исследовать его в количественном отношении.

Допустим, что Солнце получает одинаковое количество тепла в любом направлении и что метеоры падают на него в равных количествах со всех сторон. Предположим, что количество тепла, излучаемого любой частью поверхности, будет равняться количеству тепла, образованному от столкновения метеоров с этой частью. Количество тепла, полученного Землей, относится ко всему количеству, излучаемому Солнцем, как телесный угол, под которым Земля видна с Солнца, к поверхности всей сферы. Часть солнечной поверхности, находящейся внутри конуса, основанием которого является Земля с вершиной в центре Солнца, относится ко всей поверхности Солнца, как телесной угол, под которым видна Земля, к поверхности всей сферы.

Поэтому Земля получает столько же тепла, сколько излучается, а следовательно, столько же тепла и образуется поверхностью, вырезанной этим конусом. Но Земля перехватит столько же метеоров, сколько упадет на эту малую поверхность, и поэтому получит тепло от встречи некоторого числа метеоров с ней самой и столько тепла от Солнца, сколько образует от встречи равного числа с Солнцем.

Тепло, полученное Землей из двух источников, пропорционально квадрату скоростей, с которыми метеоры встречаются с Землей и с Солнцем. Мы видели § 42, что это число есть $^1/_{236}$. Поэтому если эта метеоритная гипотеза о пополнении солнечного тепла правильна, то Земля получит $^1/_{236}$ долю того тепла от столкновения с метеорами, которые она получает от Солнца. Это последнее безусловно в миллион раз больше тепла, получаемого Землей от метеоров, и, следовательно, теория о том, что солнечное тепло поддерживается столкновением метеоров, не приемлема.

44. Контракционная теория Гельмгольца. Количество работы, совершенной точкой, пропорционально произведению пройденного расстояния на сопротивление. Однако здесь ничего не говорится о том, сколько времени должно продолжаться движение, и если работа перешла в тепло, то общее количество тепла одно и то же, падает ли точка сразу через все расстояние или проходит его в несколько последовательных более коротких падений. Если тело сжимается, то это равносильно ряду последовательных очень коротких движений всех его точек по прямым линиям по направлению к центру, и очевидно, что если закон плотности известен, то может быть вычислено количество образованного тепла.

В 1854 г. Гельмгольц применил эту мысль к вычислению солнечного тепла в попытке объяснить источник его пополнения. Он предположил, что Солнце сжимается таким образом, что оно всегда остается однород-

[1]) *Mem. Nat. Acad. of Sci.*, т. I.

ным. Хотя это предположение, конечно, неправильно, тем не менее полученные результаты имеют большое значение и дают хорошее представление о том, что в действительности происходит при сжатии. Математическая часть теории изложена в «Philosophical Magazine» за 1856 г., стр. 516.

Рассмотрим однородный газообразный шар, радиус которого R_0 и плотность σ. Пусть M_0 обозначает его массу, а dM — элемент массы, взятой где-либо внутри или на поверхности шара. Обозначим расстояние dM от центра шара через R и через M — массу шара радиуса R. Элемент массы в полярных координатах есть (§ 21):

$$dM = \sigma R^2 \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dR. \tag{46}$$

Элемент подвергается притяжению всех частей шара радиуса R. Как будет показано в главе IV, притяжение сферического слоя, находящегося от центра дальше, чем данный элемент, уравновешивается в противоположных направлениях так, что его не надо принимать во внимание при рассмотрении сил действующих на dM. Каждый элемент бесконечно тонкого слоя радиуса R притягивается к центру с силой, равной той, которая действует на dM; поэтому весь слой можно рассматривать в целом.

Пусть dM_s обозначает массу элементарной оболочки радиуса R. Интегрируя (46) по θ и φ, находим, что

$$dM_s = \sigma R^2 dR \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \, d\varphi \right\} d\theta = 4\pi\sigma R^2 \, dR. \tag{47}$$

Сила, которая действует на dM_s, равна $-\frac{k^2 M \, dM_s}{R^2}$. Элементарная работа, совершенная при движении dM_s на элемент расстояния dR, равна:

$$dW_s = -dM_s \frac{k^2 M}{R^2} dR.$$

Работа, совершенная при движении слоя от расстояния CR до R, есть интеграл этого выражения между пределами CR и R или

$$W_s = -dM_s k^2 M \int_{CR}^{R} \frac{dR}{R^2} = \frac{dM_s k^2 M}{R}\left(\frac{C-1}{C}\right).$$

Но $M = \frac{4}{3}\pi\sigma R^3$; отсюда, подставляя значения dM_s из (47) и обозначая работу, совершенную элементарным слоем, через $W_s = dW$, получаем, что

$$dW = \frac{16}{3}\pi^2\sigma^2 k^2 \left(\frac{C-1}{C}\right) R^4 \, dR.$$

Интеграл этого выражения, взятый от 0 до R_0, дает общее количество работы, совершенной при сжатии однородного шара от радиуса CR до R_0, т. е.

$$W = \frac{16}{3}\pi^2\sigma^2k^2\left(\frac{C-1}{C}\right)\int_0^{R_0} R^4\,dR = \frac{16}{15}\pi^2\sigma^2k^2\left(\frac{C-1}{C}\right)R_0^5,$$

что может быть написано так:

$$W = \frac{3}{5}k^2\left(\frac{C-1}{C}\right)\frac{M_0^2}{R_0}. \tag{48}$$

Если C равняется бесконечности, то

$$W = \frac{3}{5}k^2\frac{M_0^2}{R_0}. \tag{49}$$

Если секунда взята за единицу времени, килограмм — за единицу массы и метр — за единицу расстояния и если k^2 вычислено из значения g для Земли, то после деления W на $\frac{8\,338}{2}$ результат будет численно равен количеству образованного тепла в калориях при переходе всей работы в этот вид энергии. Повышение температуры получается от деления этого количества на произведение массы и удельной теплоты, оно равно:

$$T = \frac{Q}{\eta M_0} = \frac{2W}{8\,338\eta M_0}, \tag{50}$$

где η есть удельная теплоемкость вещества. Или, подставляя (48) в (50), находим, что:

$$T = \frac{3k^2}{5\eta}\cdot\frac{C-1}{C}\cdot\frac{M_0}{R_0}\cdot\frac{2}{8\,338}. \tag{51}$$

Согласно определению, k^2 есть притяжение единицы массы на единицу расстояния, поэтому если m есть масса Земли и r — ее радиус, то

$$g = \frac{k^2m}{r^2}.$$

Найдя отсюда k^2 и подставив в (51), мы получим:

$$T = \frac{3(C-1)}{5\eta C}\cdot\frac{r^2}{R_0}\cdot\frac{M_0}{m}\cdot\frac{2g}{8\,338}. \tag{52}$$

Если тело сжалось из бесконечности ($C = \infty$), то количество образованного тепла будет достаточным, чтобы поднять его температуру на $T°$ С, где T дается уравнением:

$$T = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\eta}\cdot\frac{r^2}{R_0}\cdot\frac{M_0}{m}\cdot\frac{2g}{8\,338}. \tag{53}$$

Пусть удельная теплоемкость принята за единицу, это есть удельная теплота воды [1]). Значение g равно 9,8094, и

$$\frac{r^2}{R} = 116\,356,$$

$$\frac{M_0}{m} = 332\,000.$$

Подставляя эти числа в (53) и сделав приведение, находим, что

$$T = 27\,268\,000^\circ.$$

Поэтому Солнце, сжимаясь от бесконечности таким образом, чтобы всегда оставаться однородным, образует достаточно тепла, чтобы поднять температуру равновеликой массы воды более чем на 27 миллионов градусов Цельсия.

Если предположить, что Солнце сжалось лишь от орбиты Нептуна, то можно применить уравнение (52), которое даст значение для T приблизительно на 1/6600 меньше. Во всяком случае мы не намереваемся предполагать, что оно когда-либо сжалось от таких больших размеров; тем не менее данные результаты имеют большое значение и освещают многое в вопросе эволюции солнечной системы из протяженной туманности. Если бы сжатие Солнца было единственным источником его энергии, то это рассуждение дало бы определенное указание на верхний предел возраста Земли. Но предел настолько мал, что он несовместим с выводами, полученными различными способами на основании геологических данных, и он совершенно не согласуется с возрастом некоторых урановых руд, определенным на основании процентного содержания в них свинца. Последнее открытие огромной внутриатомной энергии, которая проявляется в распаде радия и нескольких других веществ, показывает существование источников энергии, которых до сих пор не принимали во внимание, и говорит за то, что солнечное тепло в части, если не в целом, происходит из этих источников. В настоящее время, конечно, еще нельзя указать пределы для возраста Солнца.

Опыты Аббота показали, что если предположить излучение солнечного тепла одинаковым по всем направлениям, то количество тепла, излучаемого ежегодно, повысит температуру массы воды, равную таковой Солнца, на 1°,44. Чтобы найти, как велико будет сжатие при настоящем радиусе, чтобы образовать достаточно тепла для поддержания излучения в течение 10 000 лет, подставим 14 400 для T в (52) и решим относительно C. Произведя вычисление, найдем, что

$$C = 1{,}000\,528.$$

---

1) Для всех обычных земных тел удельная теплоемкость меньше единицы, кроме газообразного водорода, удельная теплоемкость которого равна 3,409. Но легкие газы солнечной атмосферы также могут иметь большие теплоемкости. См. К. Шефер, Теория теплоты, ч. 1, стр. 9, ГТТИ, 1933. *Прим. ред.*

Поэтому Солнце образовало бы достаточно тепла при сжатии примерно на одну четырехтысячную своего настоящего диаметра, чтобы поддержать излучение в течение 10 000 лет.

Средний видимый диаметр Солнца равен 1 924″, так что сокращение его диаметра на 0,000528 произвело бы видимое изменение лишь на 1 ,0, количество слишком малое, чтобы его заметить на таком объекте посредством методов, употребляемых в настоящее время. Выражая сжатие в других единицах, найдем, что ежегодное сжатие солнечного радиуса на 36,8 *м* достаточно для образования тепла, излучаемого в настоящее время.

ЗАДАЧИ

1. Согласно недавней работе Аббота из Смитсонианского института, квадратный метр, помещенный перпендикулярно к солнечным лучам, на расстоянии Земли получает 19,5 больших калорий в минуту. Среднее количество, полученное квадратным метром на земной поверхности, относится к этому количеству, как площадь круга относится к поверхности шара такого же радиуса, или как 1 : 4. Поэтому поверхность Земли получает в среднем 5 *кал* на квадратный метр в минуту. Сколько килограмов метеоритного вещества должно было бы упасть на Землю со скоростью 40 233 *м/сек*, чтобы образовать 1/236 этого тепла?

Отв. 0,000 000 1115 *кг.*

2. Сколько килограммов должно было бы падать в среднем ежедневно на каждый квадратный километр? Тонн на всю Землю?

Отв. 160 *кг*. 90 300 000 *т*

3. Найдите количество работы, совершенной при сжатии шара на определенную долю радиуса, когда закон плотности есть $\sigma = \frac{1}{R^2}$.

$$\textit{Отв.}\ W = 16\pi^2 k^2 l^2 \left(\frac{C-1}{C}\right) \cdot R = k^2 \left(\frac{C-1}{C}\right) \cdot \frac{M_0^2}{R_0}$$

или $^5/_3$ совершенной работы, когда шар однороден.

4. Лаплас предположил, что сопротивление жидкости сжатию прямо пропорционально ее плотности, и на основании этого предположения нашел, что закон изменения плотности в шарообразном теле будет:

$$\sigma = \frac{G \sin\left(\mu \frac{R}{a}\right)}{\frac{R}{a}},$$

где G и μ — постоянные, зависящие от вещества, из которого состоит тело, и a — радиус шара.

Этот закон плотности, примененный к Земле, находится в согласии с рядом явлений, как, например, прецессия равноденствий. Найдите количество тепла, образованного сжатием от бесконечно больших размеров до радиуса R_0 тела, имеющего закон плотности Лапласа.

5. Найдите, насколько тепло, образованное при сжатии Земли от плотности метеоритов 3,5 до настоящей плотности в 5,6, подняло бы температуру всей Земли, считая, что удельная теплота равна 0,2.

Отв. $T = 6520°,5$.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Законы падения тел при постоянном ускорении были открыты Галилеем и Стевином, а для многих случаев переменных ускорений — Ньютоном. Эти законы сравнительно просты, если их рассматривать аналитически. Движение по параболе было рассмотренно Галилеем и Ньютоном.

Кинетическая теория газов, повидимому, впервые была высказана И. Бернулли около середины XVIII в., но математически она была впервые развита Клаузиусом, Максвеллом, Больцманом, О. Мейером и позднее Бюрбури; Джинс и Гильберт сделали важные вклады в эту теорию.

Приводим некоторые из основных книг по этому предмету: Risteen, Moleculus and the Molecular Theory (описательная работа); Boltzmann, Gastheorie; H. Watson, Kinetic Theory of Gases; O. Meyer, Die Kinetische Theorie der Gase; S. Burbury, Kinetic Theory of Gases; J. Jeans, Kinetic Theory of Gases[1]).

Метеоритная теория солнечного тепла была впервые высказана Робертом Майером (R. Mayer). Контракционная теория была впервые изложена Гельмгольцем на публичной лекции в Кёнигсберге 7 февраля 1854 г. и опубликована позднее в *Phil. Mag*, 1856. Важная статья Гомера Лена (Homer Lane) появилась в *Am. Journ. of Sci.*, июль 1870. Количество произведенного тепла зависит от закона изменения плотности газового шара. Исследованиям в этой области посвящены 16 статей Риттера (Ritter., *Wiedemann's Annalen*, т. V, 1878 до т. XX, 1883); Хилла (G Hill, *Annals. of Math.*, т. IV, 1888) и Дарвина (G. Darwin, *Phil. Trans.*, 1888).

О природе солнечного тепла рекомендуется прочитать оригинальные статьи. Внутриатомная энергия рассмотрена Резерфордом (Rutherford) в «Radioactive Substances and their Radiation ».

О доказательствах большого возраста Земли см. Chamberlin в «Salisbury's Geology» т. II и III, стр. 413 и сл.; общие рассуждения возраста Земли см. Arthur Holmes, The Age of the Earth.

---

[1]) См. также. К. Шефер, Теория теплоты, и А. К. Тимирязев, Кинетическая теория материи.

ГЛАВА III

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ СИЛЫ

45. Центральная сила. Эта глава посвящена исследованию движения материальной точки, подверженной действию силы притяжения или отталкивания, всегда направленной по прямой, проходящей через некоторую неподвижную точку. Эта неподвижная точка называется центром силы. При этом не обязательно предполагать, что сила исходит из этого центра или что имеется лишь одна сила, но под этим подразумевается просто, что равнодействующая всех сил, действующих на материальную точку, всегда проходит через эту неподвижную точку. Сила может быть направлена к точке или от нее. Она может по временам равняться нулю, но если материальная точка проходит через точку, где сила, действующая на нее, становится бесконечной, то для того чтобы проследить ее дальнейшее движение, нужно специальное исследование, которое здесь не может быть проведено. Так как в астрономических и физических проблемах наиболее часто встречаются именно силы притяжения, то рассмотренные формулы относятся к этому случаю; перемена знака при коэфициенте напряжения силы на единицу расстояния сделает формулы годными и для случая сил отталкивания.

Возьмем начало координат в центре силы и назовем расстояние движущейся точки от начала *радиусом-вектором.* Путь, описанный точкой, будем называть *орбитой.* Орбиты, которые мы будем рассматривать в этой главе, суть плоские кривые. Плоскость движения определяется положением центра силы и направлением начальной скорости точки. Так как выбор системы координат совершенно произволен, то мы всегда можем считать плоскость орбиты за плоскость xOy.

46. Закон площадей. Первая задача состоит в том, чтобы вывести общие свойства движения, применимые для всех центральных сил. Первое свойство, имеющее большое значение, есть закон площадей и составляет первое предложение ньютоновских «Начал». Этот закон гласит: если точка находится под действием центральной силы, то площади, описываемые радиусом-вектором, пропорциональны промежуткам времени, в течение которого они описаны. Доказательство Ньютона таково.

Пусть O — центр силы, и точка в начальный момент движется из A по направлению к B со скоростью AB (рис. 7). Тогда если бы не было внешних сил, действующих на нее, то по первому закону движения она дошла бы за две первые единицы времени до C'. Но предположим, что когда она достигнет B, на нее подействует мгновенная сила, направленная так, что в единицу времени точка передвинулась бы к b, если бы она не имела предшествующего движения. Тогда по второму закону движения точка будет двигаться по диагонали параллелограма $BbCC'$ до C. Если бы не было действия никакой другой силы, то в следующую единицу времени она продвинулась бы с равномерной скоростью к D'. Но предположим, что когда она придет в C, на нее подействует в направлении к началу другая мгновенная сила с таким напряжением, что она продвинулась бы в единицу времени в r, если бы не было предшествующего движения. Тогда, как и прежде, точка будет двигаться по диагонали параллелограма и придет в D в конце единицы времени. Этот процесс может быть повторен бесконечное число раз.

Рассматривая треугольники OAB, OBC', OBC и т. д., мы легко обнаружим, что они равны. Следовательно, можно написать:

$$OAB = OBC' = OBC = OCD' = OCD = \text{ и т. д.}$$

Отсюда следует, что $OAB = OBC = OCD = ODE$ и т. д., т. е. площади треугольников, пройденные в последовательные единицы времени, равны, и поэтому суммы площадей треугольников описанных в любые интервалы времени, пропорциональны этим интервалам.

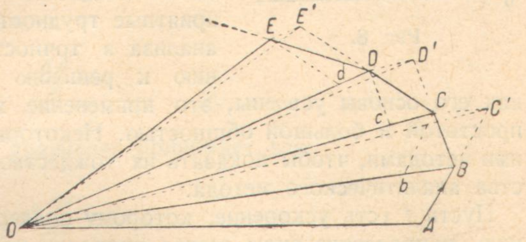

Рис. 7.

Это рассуждение остается справедливым для любых промежутков времени, как бы они ни были малы. Рассмотрим путь, пройденный точкой за некоторый определенный конечный промежуток времени. Разделим этот промежуток на очень большое число очень малых промежутков и допустим, что отношение напряжения действующей в конце каждого промежутка мгновенной силы к величине самого промежутка остается конечным.

Путь точки представится в виде ломаной линии с очень большим числом звеньев.

Будем теперь неограниченно уменьшать наши частичные промежутки. Число звеньев ломаной линии будет неограниченно увеличиваться, и сама ломаная линия будет неограниченно приближаться к некоторой плавной кривой линии. При этом процессе площади, описанные радиусом-вектором, всегда будут пропорциональны временам, в течение которых они описаны.

Это будет верно и тогда, когда мы перейдем к пределу и когда ломаная линия превратится в плавную кривую, а последовательность мгновенных сил — в непрерывно действующую центральную силу.

Таким образом теорема площадей доказана.

Заметим, что совсем не обязательно, чтобы центральная сила изменялась непрерывно. Она может быть притяжением и мгновенно измениться в отталкивание или стать равной нулю, и закон все же будет иметь место, но, однако, необходимо исключить случай, требующий особого исследования, когда она становится бесконечно большой.

Линейная скорость движения изменяется обратно пропорционально длине перпендикуляра, опущенного из начала на касательную к кривой, по которой движется точка; действительно, площадь, описанная в единицу времени, равна произведению скорости на перпендикуляр к касательной. Так как площадь, описанная в единицу времени, остается постоянной, то отсюда следует, что линейная скорость точки изменяется обратно пропорционально длине перпендикуляра, опущенного из начала на касательную к орбите.

47. Аналитическое доказательство закона площадей. Хотя доказательство § 46 было проведено геометрически, однако там мы основывались по существу на элементах методов диференциального и интегрального исчислений. Мы увидим в дальнейшем, что методы исследования всех проблем небесной механики по существу суть методы анализа, даже если мы пользуемся языком геометрии. Начинающему обычно легче понять и проследить доказательство, если оно дано в геометрической форме, но геометрические рассуждения не имеют общности и содержат многие, часто неприятные трудности. С другой стороны, развитие анализа в точности соответствует его применению к решению этих проблем, и после того, как его основы усвоены, это применение характеризуется сравнительной простотой и большой общностью. Некоторые задачи будут решены обоими методами, чтобы показать их тождество и иллюстрировать преимущества аналитического метода.

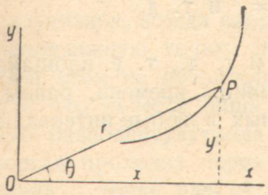

Рис. 8.

Пусть f есть ускорение, которому подвергается точка. По предположению, направление силы всегда проходит через неподвижную точку, которую примем за начало координат.

Пусть O — центр силы (рис. 8) и P — некоторое положение движущейся точки, прямоугольные координаты которой x и y, а полярные координаты r и θ. Тогда составляющие ускорения по осям x и y соответственно равны $\mp f\cos\theta$ и $\mp f\sin\theta$, и диференциальные уравнения движения напишутся в виде:

ускорение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mp f\cos\theta = \mp f\,\frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \mp f\sin\theta = \mp f\,\frac{y}{r}. \tag{1}$$

В правых частях этих уравнений должен быть взят отрицательный знак для сил притяжения и положительный для сил отталкивания.

Умножим первое уравнение (1) на $-y$, второе на $+x$ и сложим. Получаем:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Интегрируя это уравнение, найдем:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h, \tag{2}$$

где h есть постоянная интегрирования.

Обычно интегралы диференциальных уравнений приводят к важным теоремам и свойствам движения, даже если вся задача не решена. Более подробно мы рассмотрим это в дальнейшем.

Вспоминая результаты § 16, мы видим, что уравнение (2) может быть написано в форме:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=r^2\frac{d\theta}{dt}=2\frac{dA}{dt}=h,$$

где A есть площадь, описанная радиусом-вектором за время t. Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$A=\frac{1}{2}ht+c,$$

что показывает, что площадь A изменяется прямо пропорционально времени. Это и есть теорема, которую требовалось доказать.

48. Обратная теорема площадей. Допустим, что

$$A=c_1t+c_2.$$

Диференцируя по t, находим:

$$\frac{dA}{dt}=c_1.$$

В полярных координатах это уравнение принимает вид:

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=2c_1,$$

и в прямоугольных координатах:

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=2c_1.$$

Диференцируя снова по t это уравнение, имеем:

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

откуда

$$\frac{d^2x}{dt^2}:\frac{d^2y}{dt^2}=x:y.$$

Это равенство показывает, что составляющие ускорения пропорциональны координатам; поэтому если закон площадей верен по отношению к точке, то равнодействующая ускорений проходит через эту точку.

Или, так как $r^2\frac{d\theta}{dt}=2c_1$, то, следовательно, $\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$. Отсюда из уравнений (19) § 4 видно, что ускорение, перпендикулярное радиусу-вектору, равно нулю, откуда следует, что ускорение направлено по прямой, проходящей через начало, что и требовалось доказать.

49. Законы угловой и линейной скорости. Из выражения для закона площадей в полярных координатах следует, что

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{h}{r^2}, \tag{3}$$

поэтому *угловая скорость обратно пропорциональна квадрату радиуса-вектора.*

Линейная скорость равна:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt}=\frac{ds}{d\theta}\,\frac{h}{r^2}.$$

Пусть p обозначает длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную, тогда из диференциального исчисления известно, что

$$\frac{ds}{d\theta}=\frac{r^2}{p}.$$

Следовательно, выражение для линейной скорости принимает вид:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{h}{p}, \tag{4}$$

т. е. *линейная скорость обратно пропорциональна перпендикуляру, опущенному из начала координат на касательную.*

СОВМЕСТНЫЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

50. Порядок системы совместных диференциальных уравнений. В § 47 мы нашли один интеграл системы диференциальных уравнений движения (1) в виде (2). Спрашивается, сколько еще нужно найти интегралов этой системы, чтобы иметь полное решение проблемы.

Число интегралов, которое требуется найти для полного решения системы диференциальных уравнений, называется *порядком* системы. Так, уравнение:

$$\frac{d^n x}{dt^n}=c \tag{5}$$

n-го порядка, потому что, чтобы получить его решение, мы должны проинтегрировать его n раз.

Подобным же образом более общее уравнение

$$f_n\frac{d^n x}{dt^n}+f_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+f_1\frac{dx}{dt}+f_0=0, \tag{6}$$

где $f_n, \ldots, f_0$ суть функции от x и t, должно быть проинтегрировано n раз, чтобы выразить x как функцию от t. Следовательно, оно также n-го порядка.

Уравнение n-го порядка всегда может быть приведено к эквивалентной системе n совместных уравнений, из которых каждое первого порядка. Так, чтобы привести (6) к системе совместных уравнений, положим:

$$x_1 = \frac{dx}{dt}, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dt}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = \frac{dx_{n-2}}{dt},$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = x_1, \ \frac{dx_1}{dt} = x_2, \ \frac{dx_2}{dt} = x_3, \ \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = -\frac{f_{n-1}}{f_n} x_{n-1} - \ldots - \frac{f_1}{f_n} x_1 - \frac{f_0}{f_n}. \quad (7)$$

Поэтому эти n совместных уравнений, каждое первого порядка, составляют систему n-го порядка. Об уравнении или системе уравнений, приведенных к форме (7), говорят, что они приведены к *нормальной форме*, и система такого вида называется *нормальной системой*.

Два совместных уравнения порядков m и n могут быть приведены к нормальной системе порядка $m+n$. Рассмотрим, например, уравнения:

$$\left.\begin{aligned} f_m \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + f_1 \frac{dx}{dt} + f_0 = 0, \\ \varphi_n \frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + \varphi_1 \frac{dy}{dt} + \varphi_0 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где f_i и φ_i являются функциями от x, y и t. При помощи подстановки, аналогичной предыдущей, найдем, что система эквивалентна следующей нормальной системе:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dx_{m-1}}{dt} = -\frac{f_{m-1}}{f_m} x_{m-1} - \ldots - \frac{f_1}{f_m} x_1 - \frac{f_0}{f_m}, \\ &\frac{dy}{dt} = y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_{n-1}}{dt} = -\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} y_{n-1} - \ldots - \frac{\varphi_1}{\varphi_n} y_1 - \frac{\varphi_0}{\varphi_n}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

порядок которой равен $m+n$.

Обратно, *нормальная система n-го порядка может быть вообще преобразована в одно уравнение n-го порядка с одной зависимой переменной*. Для доказательства рассмотрим систему второго порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = f(x, y, t), \\ \frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, t). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Продиференцируем какое-нибудь из этих уравнений, например первое, по t. Мы получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (11)$$

Исключая y и $\frac{dy}{dt}$ из (10) и (11), получаем уравнение в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+F\left(x, \frac{dx}{dt}\right)=0,$$

где F есть функция как x, так и $\frac{dx}{dt}$. Конечно, функции f и φ в уравнениях (10) могут быть таковы, что исключение y и $\frac{dy}{dt}$ будет очень затруднительно или даже практически невозможно.

Если бы нормальная система была третьего порядка относительно зависимых переменных x, y и z, то пришлось бы взять первую и вторую производную от первого уравнения и первую производную от второго и третьего уравнений. Эти четыре новых уравнения с первоначальными тремя составят семь, из которых вообще можно исключить y, z, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$, получая в результате уравнение третьего порядка с одним x. Этот процесс можно распространить на систему любого порядка.

Диференциальные уравнения (1) могут быть приведены путем подстановки $x'=\frac{dx}{dt}$, $y'=\frac{dy}{dt}$ к нормальной системе четвертого порядка:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=x', & \frac{dx'}{dt}&=\mp f\frac{x}{r},\\ \frac{dy}{dt}&=y', & \frac{dy'}{dt}&=\mp f\frac{y}{r}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Поэтому, чтобы иметь полное решение задачи, надо найти четыре интеграла. В уравнениях (12) составляющие скорости x' и y' играют роли, подобные координатам, и для краткости в будущем мы часто будем говорить о них как о координатах.

51. Понижение порядка. Если найден один интеграл системы диференциальных уравнений, то получить решение можно двумя методами. Во-первых, могут быть найдены остающиеся интегралы из первоначальных диференциальных уравнений, как если бы ни один не был еще известен; во-вторых, при помощи известного интеграла порядок системы диференциальных уравнений может быть понижен на единицу. Покажем, как можно понизить порядок системы уравнений при помощи известных интегралов. Рассмотрим систему диференциальных уравнений n-го порядка:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=f_1(x_1,\ldots,x_n,t),\\ \frac{dx_2}{dt}&=f_2(x_1,\ldots,x_n,t),\\ \frac{dx_n}{dt}&=f_n(x_1,\ldots,x_n,t).\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Предположим, что мы нашли один интеграл

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)=\text{const.}=c.$$

Предположим дальше, что это уравнение может быть решено относительно x_n. Результат этого решения можно написать в виде:

$$x_n = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, c, t).$$

Внесем это выражение для x_n в первые $n-1$ уравнения (13); они примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varphi_1 \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}, c, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varphi_2 \quad (x_1, \ldots, x_{n-1}, c, t), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= \varphi_{n-1} (x_1, \ldots, x_{n-1}, c, t), \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

что представляет совместную систему порядка $n-1$ и не зависящую от переменной x_n.

Из этих теорем и замечаний следует, что порядок совместной системы диференциальных уравнений равен сумме порядков отдельных уравнений, что уравнения могут быть написаны в различных формах, например как одно уравнение n-го порядка или n уравнений первого порядка, и что все интегралы могут быть выведены из первоначальной системы или что порядок может быть понижен после нахождения каждого интеграла. В механических и физических проблемах для определения метода решений важна интуиция, но вообще удобно употреблять переменные, имеющие простые геометрические и физические значения. Поэтому обычно проще не понижать порядка задачи после нахождения каждого интеграла.

ЗАДАЧИ

1. Докажите геометрическим методом обратный закон площадей и покажите, что ход решения согласуется с анализом § 48.

2. Докажите геометрическим методом закон угловой скорости.

3. Почему уравнения (1) не могут быть проинтегрированы каждое в отдельности?

4. Получите закон площадей непосредственно из уравнения (2) без перехода к полярным координатам.

5. Покажите подробно, что нормальная система четвертого порядка может быть приведена к одному уравнению четвертого порядка и обратно.

6. Понизьте систему уравнений (12) до третьего порядка посредством интеграла площадей.

52. Интеграл живых сил. Предположим, что ускорение направлено к началу; тогда перед правыми частями уравнения (1) должен быть взят отрицательный знак. Умножим первое уравнение (1) на $2\frac{dx}{dt}$, второе — на $2\frac{dy}{dt}$ и сложим. Мы получим:

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt} = -\frac{2f}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right).$$

Из $r^2 = x^2 + y^2$ следует, что:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = r \frac{dr}{dt},$$

поэтому

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} = -2f \frac{dr}{dt}.$$

Предположим, что f зависит лишь от одного r, как это имеет место в большинстве астрономических и физических задач. Тогда $f = \varphi(r)$ и

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} = -2\varphi(r) \frac{dr}{dt}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем интеграл системы (1) в виде:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2 = -2 \int \varphi(r)\, dr + c. \tag{15}$$

Если функция $\varphi(r)$ дана, то интеграл в правой части может быть вычислен. Обозначим этот интеграл через $\Phi(r)$; тогда

$$v^2 = -2\Phi(r) + c. \tag{16}$$

Если $\Phi(r)$ — однозначеная функция от r, как это имеет место в физических задачах, то из (16) следует, что если центральная сила зависит только от расстояния, то скорость одинакова во всех точках, равноудаленных от начала. Ее величина в любой точке зависит только от начального расстояния и начальной скорости, а не от пройденного пути. Так как сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния между притягивающими телами, то любое тело солнечной системы, например комета, имеет ту же скорость на данном расстоянии от Солнца, независимо от того, удаляется она или приближается.

ПРИМЕРЫ, ГДЕ f ЕСТЬ ФУНКЦИЯ ОДНИХ КООРДИНАТ

53. Сила изменяется прямо пропорционально расстоянию. Чтобы найти интегралы уравнений (1), отличные от интегралов площадей, надо знать f как функцию координат. В случае, когда напряжение силы прямо пропорционально расстоянию, интегрирование становится особенно простым. Пусть k^2 есть ускорение на единицу расстояния и f есть притягивающая сила. Тогда $f = k^2 r$, уравнения (1) принимают вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y. \tag{17}$$

Важным свойством этих уравнений является то, что они не зависят друг от друга, так как первое содержит только одну зависимую переменную x, а второе только y. Кроме того, они линейны, и, следовательно, ние может быть получено методом, данным в § 32. Если $x = x_0$, $\frac{dx}{dt} = x'_0$, $y = y_0$, $\frac{dy}{dt} = y'_0$ при $t = 0$, то эти решения будут иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= +x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k}\sin kt, \quad y = +y_0 \cos kt + \frac{y_0'}{k}\sin kt, \\ \frac{dx}{dt} &= -kx_0 \sin kt + x_0' \cos kt, \quad \frac{dy}{dt} = -ky_0 \sin kt + y_0' \cos kt. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Чтобы получить уравнение орбиты, нужно исключить t из первого и третьего уравнения (18). Умножая на соответствующие множители и складывая, получаем:

$$\left.\begin{aligned} (x_0 y_0' - y_0 x_0')\sin kt &= k(x_0 y - y_0 x), \\ (x_0 y_0' - y_0 x_0')\cos kt &= y_0' x - x_0' y. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Возводя каждое из этих уравнений в квадрат и сладывая, найдем:

$$(k^2 y_0^2 + y_0'^2) x^2 + (k^2 x_0^2 + x_0'^2) y^2 - 2(k^2 x_0 y_0 + x_0' y_0') xy = \\ = (x_0 y_0' - y_0 x_0')^2. \tag{20}$$

Это есть уравнение эллипса с центром в начале координат, если $x_0 y_0' - y_0 x_0'$ не равно нулю, когда орбита превращается в две совпадающие прямые, так как тогда

$$\frac{x_0}{x_0'} = \frac{y_0}{y_0'} = \text{const.} = c,$$

откуда

$$x_0 = cx_0', \quad y_0 = cy_0',$$

и в этом случае уравнение (20) принимает вид:

$$(k^2c^2 + 1)(y_0' x - x_0' y)^2 = 0, \tag{21}$$

откуда следует, что движение есть прямолинейное и колебательное. В каждом случае и координаты и составляющие скорости суть периодические функции t с периодом $\frac{2\pi}{k}$, независимо от начальных условий.

54. Диференциальное уравнение орбиты. Кривая, описанная движущейся точкой независимо от того, каким образом она может двигаться вдоль этой кривой, имеет большой интерес. Общий метод нахождения орбиты состоит в интегрировании диференциальных уравнений с последующим исключением времени. Это часто очень сложный процесс, и возникает вопрос, не может ли время быть исключено до интегрирования, так чтобы интегрирование дало непосредственно орбиту. Покажем, что это возможно в случае, когда сила не зависит от времени.

Диференциальные уравнения движения таковы (§ 47):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -f\frac{y}{r}. \tag{22}$$

ускорение

Так как f не зависит от времени, то t входит лишь в производные. Но выражение для второй производной не может быть рассматриваемо, как если бы оно представляло обыкновенную дробь, поэтому для исключения t нужно предварительно понизить порядок производных. Для большего удобства преобразуем уравнение (22) к полярным координатам. Мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= -f, \\ r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Интеграл второго из этих уравнений есть:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h.$$

Исключая $\frac{d\theta}{dt}$ из первого уравнения (23), при помощи этого интеграла получаем:

$$\frac{d^2r}{at^2} = \frac{h^2}{r^3} - f. \tag{24}$$

Положим $r = \frac{1}{u}$; тогда:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} \qquad = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{du}{d\theta},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{a\theta}{dt} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Отсюда, ввиду уравнения (24) получаем:

$$\boxed{f = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right).} \tag{25}$$

Диферен. ур-ние орбиты

Это диференциальное уравнение второго порядка, но для его нахождения мы употребили один интеграл, поэтому задача определения орбиты тела есть задача третьего порядка. Вся задача была четвертого порядка; четвертый интеграл выражает соотношение между координатами и временем или определяет положение точки на ее орбите.

Так как интеграл (25) выражает u и поэтому r как функцию от θ, то уравнение:

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h$$

после интегрирования дает соотношение между θ и t.

Обратно, уравнение (25) может быть использовано для нахождения закона центральной силы, заставляющей точку описывать данную кривую. Необходимо лишь написать уравнение кривой в полярных координатах и вычислить правую часть от (25). Это обычно значительно проще прямого процесса нахождения орбиты, когда дан закон силы.

55. Закон тяготения Ньютона. В начале XVII в. Кеплер дал три закона движения планет, полученные им путем долгих вычислений из длинного ряда наблюдений планет, особенно Марса. Эти законы формулируются следующим образом:

Закон I. *Радиус-вектор каждой планеты по отношению к Солнцу как к началу описывает в равные промежутки времени равные площади.*

Закон II. *Орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Закон III. *Квадраты времен обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей соответствующих орбит.*

На этих законах Ньютон основал свое доказательство, что планеты движутся под влиянием сил, направленных к Солнцу и обратно пропорциональных квадратам их расстояний от Солнца. Выведем здесь ньютонианский закон, употребляя аналитический метод вместо геометрических методов «Начал» [1]).

Из обратной теоремы площадей и первого закона Кеплера следует, что планеты движутся под влиянием центральных сил, направленных к Солнцу. Описанные кривые даются вторым законом, поэтому, чтобы найти выражение для ускорения в функции координат, мы можем использовать уравнение (25). Пусть a представляет большую полуось эллипса и e — его эксцентриситет; тогда уравнение эллипса в полярных координатах с началом в фокусе имеет вид:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

Отсюда

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}.$$

Подставляя это выражение в (25), получаем выражение для ускорения:

$$f = \frac{h^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{k^2}{r^2}.$$

Следовательно, ускорение, которому подвержена любая планета, обратно пропорционально квадрату ее расстояния от Солнца.

Если расстояние r исключить при помощи полярного уравнения конического сечения, то выражение для f принимает вид:

$$f = k_1^2(1+e\cos\theta)^2,$$

который зависит лишь от направления притягиваемого тела, а не от его расстояния. Для точек эллипса два выражения для f дают тождественные значения, но в других случаях они могут иметь разные значения. Ясно, что много других законов силы, дающих то же числовое значение f для

[1]) Книга I, предложение 11.

точек эллипса, могут быть получены при помощи уравнения конического сечения, исключая r другим путем. Например, так как из полярного уравнения эллипса для точек, лежащих на нем, следует, что

$$\frac{(1+e\cos\theta)\,r}{a\,(1-e^2)}=1,$$

то один такой закон есть:

$$f=\frac{k^2\,(1+e\cos\theta)^3\,r}{a\,(1-e^2)},$$

и это значение f, которое зависит и от направления и от расстояния притягиваемого тела, отличается от обоих предыдущих для точек, не лежащих на эллипсе. Все эти законы одинаково согласуются с движением рассматриваемой планеты по законам Кеплера. Однако законы Кеплера применимы для каждой из восьми планет и для двадцати шести известных спутников солнечной системы, а также для более тысячи малых планет, которые до сих пор были открыты. Естественно наложить условие, если это возможно, что сила меняется по одному и тому же закону для каждого тела.

Так как эксцентриситеты и долготы перигелиев их орбит все различны, то закон силы одинаково применим для всех этих тел лишь тогда, когда он имеет форму:

$$f=\frac{k^2}{r^2}.$$

Другое основание для принятия этого выражения для f состоит в том, что в случае всех других выражений притяжение зависит от направления притягиваемого тела, а это представляется невероятным. Это заключение подтверждается дальше тем фактом, что силы, действующие на кометы, когда они движутся через всю планетную систему, изменяются согласно этому закону. И наконец, как будет показано в § 89, ускорения, которым подвергаются различные планеты, изменяются между собой также согласно этому закону.

Из рассмотрения законов Кеплера, силы тяжести на земной поверхности и движения Луны вокруг Земли Ньютон пришел к открытию закона всемирного тяготения, который гласит, что *каждые две материальные частицы во вселенной притягивают друг друга с силой, действующей по прямой, их соединяющей, и напряжение которой изменяется пропорционально произведению их масс и обратно пропорционально квадрату их взаимного расстояния.*

Заметим, что закон тяготения содержит в себе гораздо больше, чем может быть извлечено из кеплеровых законов движения планет, чем мы обязаны гению Ньютона, который охватил это во всем объеме и определил настолько точно, что этот закон просуществовал без изменения в течение более двухсот лет. Если рассмотреть его во всей полноте, то он является одной из величайших концепций физических наук.

56. Примеры нахождения закона силы. a) Если точка описывает окружность, проходящую через начало, то закон силы (зависящий от одного расстояния), по которому она движется, выражается очень просто. Пусть a — радиус, тогда полярное уравнение окружности таково:

$$r = 2a\cos\theta, \quad u = \frac{1}{2a\cos\theta}.$$

Поэтому:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = Sa^2u^3.$$

Подставляя это выражение в (25), находим:

$$f = \frac{Sa^2h^2}{r^5} = \frac{k^2}{r^5}.$$

b) Предположим, что точка описывает эллипс с центром в начале. Полярное уравнение эллипса с центром в начале таково:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}.$$

Отсюда следует, что

$$bu = \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta},$$

$$b\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{e^2\cos^2\theta - e^2\sin^2\theta}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}} - \frac{e^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1 - e^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$u + \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1 - e^2}{b^4}\cdot\frac{1}{u^3}.$$

Подставляя в (25), получаем следующее выражение:

$$f = \frac{h^2(1 - e^2)}{b^4}\cdot r = k^2r.$$

УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ЗАКОНА НЬЮТОНА

57. Орбиты двойных звезд. Закон тяготения выводится из законов Кеплера при известных предположениях относительно его единства в солнечной системе. Поэтому естественно возникает вопрос, действительно ли он является *всемирным* законом. Неподвижные звезды так удалены, что невозможно наблюдать планеты, вращающиеся вокруг них, конечно, если таковые имеются. Единственные полученные до сих пор наблюдения, проливающие свет на этот вопрос, относятся к движениям двойных звезд.

Астрономия двойных звезд началась примерно около 1780 г. поисками тесных звездных пар Вильямом Гершелем с целью определения параллакса диференциальным методом. Нескольких лет было для него достаточно, чтобы увидеть, к его большому удивлению, что в некоторых случаях две составляющих пары обращаются одна вокруг другой, так что они физически связаны, а не только видимым образом представляются в одной части неба. Открытие и измерение этих систем производилось астрономами с возрастающим интересом и рвением. Большой каталог двойных звезд Бернгама (Burnham) содержит около 13 000 этих объектов. Относительные движения в большинстве случаев так медленны, что лишь немногие из них совершили одно обращение или достаточную часть одного обращения, чтобы можно было с уверенностью определить форму их орбит. Теперь имеется около тридцати пар, наблюденные угловые движения которых достаточно велики, чтобы доказать в пределах ошибок наблюдений, что они движутся по эллипсам относительно друг друга с соблюдением закона площадей. Ни в одном случае главная звезда не находится в фокусе или в центре соответствующего эллипса, описанного спутником, но занимает какое-нибудь другое место внутри эллипса, весьма различное в разных системах. Из наблюдений и обратного закона площадей следует, что равнодействующая сил, действующих на одну звезду пары, всегда направлена ко второй. Закон изменения напряжения силы зависит от положения центра силы в эллипсе. Однако не надо забывать того, что орбиты двойных звезд не наблюдаются непосредственно, и то, что мы видим, есть их проекции на плоскости, касательные к небесной сфере в соответствующих местах. Действие такой проекции заключается в изменении *истинного* эллипса в другой *видимый* эллипс (рис. 9), большая ось которого имеет другое направление и который различно располагается относительно центральной звезды. Может даже случиться, что если одна звезда действительно находится в фокусе истинного эллипса, описанного другой, то проекция будет лежать на меньшей оси видимого эллипса.

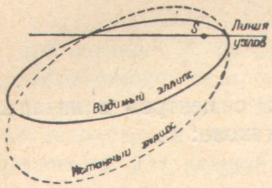

Рис. 9.

Астрономы принимают, что орбиты представляют собой плоские кривые и что видимое отклонение центральной звезды от фокуса эллипса, описываемого спутником, зависит от проекции, и вычислили угол линии узлов и наклонность. Это не вызывает никаких противоречий, но остается возможность, что эти предположения неправильны. Теперь рассмотрим, каким должен быть закон силы, если он не является законом тяготения Ньютона.

58. **Закон силы в двойных звездах.** Если сила прямо пропорциональна расстоянию, то главная звезда будет в центре эллипса, описанного спутником (§ 53). Никакая проекция не изменит этого относительного положения, и так как этого никогда не наблюдалось, то отсюда заключаем, что сила не изменяется прямо пропорционально расстоянию.

Теперь допустим, что кривая есть коническое сечение с произвольным положением центра, и найдем выражение для центральной силы. Общее уравнение конического сечения:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy = g. \tag{26}$$

Переходя к полярным координатам и полагая $r = \frac{1}{u}$, мы перепишем это уравнение в виде:

$$u = A \sin\theta + B\cos\theta \pm \sqrt{C\sin 2\theta + D\cos 2\theta + H}, \tag{27}$$

$$A = \frac{f}{g}, \quad B = \frac{d}{g}, \quad C = \frac{fd + bg}{g^2},$$

$$D = \frac{d^2 + ag - f^2 - cg}{2g^2}, \quad H = \frac{d^2 + ag + f^2 + cg}{2g^2}.$$

Диференцируя дважды (27), находим:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -A\sin\theta - B\cos\theta \pm$$

$$\pm \frac{-C^2 - D^2 - (C\sin 2\theta + D\cos 2\theta)^2 - 2H\,(C\sin 2\theta + D\cos 2\theta)}{(C\sin 2\theta + D\cos 2\theta + H)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (28)$$

Подставляя (27) и (28) в (25), мы найдем:

$$f = \pm \frac{h^2}{r^2} \frac{(H^2 - C^2 - D^2)}{(C\sin 2\theta + D\cos 2\theta + H)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (29)$$

Ввиду формулы (27) это выражение принимает вид:

$$f = \pm \frac{h^2}{r^2} \frac{(H^2 - C^2 - D^2)}{\left(\frac{1}{r} - A\sin\theta - B\cos\theta\right)^3}. \qquad (30)$$

Имеется еще бесконечно много других законов, дающих то же значение f для точек рассматриваемого эллипса, которые получаются умножением этого выражения на любую функцию от u и θ, которая обращается в единицу на эллипсе в силу уравнения (27).

Нет основания предполагать, что притяжение двух звезд друг к другу зависит от их ориентировки в пространстве.

Выражение (29) не зависит от θ, если $C = D = 0$, и (30), если $A = B = 0$. Первое дает:

$$f = \pm \frac{\text{const.}}{r^2},$$

и второе

$$f = \pm \text{const.} \cdot r.$$

Первое есть закон Ньютона, а второе исключается тем фактом, что не было найдено ни одной главной звезды в центре орбиты, описанной спутником.

Ясно, что θ можно исключить из (29) и (30) при помощи (27), не налагая условий, что $A = B = C = D = 0$. Но Гриффин [1]) показал, что для всех таких законов, кроме ньютонианского, сила либо исчезает, когда расстояние между телами обращается в нуль, или становится мнимой для некоторых значений r. Ясно, что эти законы невероятны с физической точки зрения. Поэтому весьма возможно, что закон тяготения господствует во всей звездной системе, и это заключение подтверждается спектроскопом, показывающим, что звезды состоят из знакомых земных элементов.

---

1) *American Journal of Mathematics*, т. 31, 1909, стр. 62—85.

59. Геометрическая интерпретация второго закона. Выражение для центральной силы, данное в (30), может быть приведено к очень простому и интересному виду. Пусть $g^3h^2(H^2-C^2-D^2)=N$; преобразуем $\frac{1}{r}-A\sin\theta-B\cos\theta$ в прямоугольные координаты и в начальные постоянные, тогда (30) принимает вид:

$$f=\frac{\mp Nr}{(dx+fy-g)}. \tag{31}$$

Уравнение поляры для точки (x', y') по отношению к общему коническому сечению[1] (26) имеет вид:

$$ax_1x'+b(x_1y'+y_1x')+cy_1y'+d(x_1+x')+f(y_1+y')-g=0,$$

где x_1 и y_1 — текущие переменные. Если (x', y') — начало координат, то это уравнение принимает вид:

$$dx_1+fy_1-g=0 \tag{32}$$

и имеет ту же форму, как знаменатель в (31). Значения x и y в (31) таковы, что они удовлетворяют уравнению конического сечения, в то время как x_1 и y_1 (32) удовлетворяют уравнению поляры. Поэтому они вообще по числовой величине отличаются от x и y. Расстояние от любой точки конического сечения до поляры по отношению к началу дается формулой:

$$p=\frac{dx+fy-g}{\sqrt{d^2+f^2}},$$

где x и y — координаты точек онического сечения. Пусть:

$$N'=\frac{N}{(d^2+f^2)^{\frac{3}{2}}},$$

тогда (31) принимает вид:

$$f=\mp\frac{N'r}{p^3}. \tag{33}$$

Поэтому, *если движущаяся точка, подчиненная центральной силе, описывает какое-либо коническое сечение, то напряжение силы меняется прямо пропорционально расстоянию точки от начала и обратно пропорционально кубу его расстояния от поляры начала по отношению к коническому сечению.*

60. Примеры движений по коническим сечениям. а) Если орбита является центральным коническим сечением с центром в начале, то поляра уходит в бесконечность и $\frac{N'}{p^3}$ надо рассматривать как постоянную. Тогда сила прямо пропорциональна расстоянию, как это показано в § 53, b.

---

[1] «Conic Sections» Сальмона, § 89. См. также Млодзеевский, Аналитическая геометрия на плоскости. *Прим. ред.*

b) Если начало находится в одном из фокусов конического сечения, то поляра является директрисой и $p = \frac{r}{e}$, где e — эксцентриситет. Тогда (33) принимает вид:

$$f = \mp \frac{N' e^3}{r^2}.$$

Это закон Ньютона, выведенный из тех же условий в § 55.

ЗАДАЧИ

1. Найдите интеграл живой силы, когда $f = \frac{c}{r^2}$, $f = cr$, $f = \frac{c}{r^n}$.

2. Предположим, что в задаче § **53** точка брошена перпендикулярно к оси x. Найдите уравнения, соответствующие (19) и (20). Предположим дальше, что $k = 1$, $x_0 = 1$; найдите такую начальную скорость, при которой эксцентриситет эллипса равен $^1/_2$.

Отв. $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ или $v_0 = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

3. Найдите центральную силу как функцию расстояния, под влиянием которой точка может описывать спираль $r = \frac{1}{c\theta}$; спираль $r = e^{\theta}$.

Отв. $f = \frac{h^2}{r^3}$, $f = \frac{2h^2}{r^3}$.

4. Найдите зависимость центральной силы от расстояния, если точка описывает лемнискату: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

Отв. $f = \frac{3h^2 a^4}{r^7}$.

5. Найдите зависимость центральной силы от расстояния, если точка описывает кардиоиду: $r = a(1 + \cos\theta)$.

Отв. $f = \frac{3ah^2}{r^4}$.

6. Предположим, что точка описывает эллипс с началом, расположенным внутри на расстоянии n от оси x и m от оси y.

a) Покажите, что два закона силы следующие:

$$f = \frac{h^2}{r^2} \frac{(ac)^{\frac{1}{2}}}{[2mn \sin\theta \cos\theta + (a - c - n^2 + m^2)\cos^2\theta + c - m^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$f = \frac{h^2 a^2 c^2 r}{[ac - am^2 - cn^2 - cny - amx]^3},$$

где a и c имеют то же значение, как в (26), и где полярная ось параллельна большой оси эллипса.

b) Если начало находится между центром и фокусом, покажите, что сила на единице расстояния имеет максимум при $\theta = 0$ и минимум при $\theta = \frac{\pi}{2}$, что если начало находится между фокусом и ближайшей вершиной, то максимум при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и минимум при $\theta = 0$, и что если начало находится на малой оси, то максимум при $0 = 0$ и минимум при $0 = \frac{\pi}{2}$.

7. Дайте геометрическую интерпретацию уравнения (29).

Указание.

$$C\sin 2\theta + D\cos 2\theta + H = \frac{(dx+fy)^2 + g\,(ax^2+cy^2+2bxy)}{g^2 r^2}.$$

Числитель этого выражения, приравненный нулю, дает уравнение касательных (действительных или мнимых), проведенных из начала к коническому сечению («Конические сечения» Сальмона, § 92).

8. Найдите выражения для центральной силы, когда орбита есть эллипс с началом, лежащим соответственно на конце большой и малой оси. Покажите, что они приводятся к $\frac{k^2}{r^5}$, когда эллипс становится окружностью.

Отв. $f = \frac{h^2\sqrt{c}}{ar^2}\cdot\frac{1}{\cos^3\theta}$, $f = \frac{h^2\sqrt{a}}{cr^2}\cdot\frac{1}{\sin^3\theta}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТЫ ИЗ ЗАКОНА СИЛЫ

61. Сила прямо пропорциональна расстоянию. Задача нахождения орбиты, когда дан закон силы, обычно труднее обратной, так как она требует интегрирования уравнения (25). Метод интегрирования изменяется в зависимости от законов силы, и характер интегралов зависит от начальных условий. Рассмотрим сначала случай, когда сила пропорциональна расстоянию. Эта задача решена уже нами другим методом в § 53.

Если $f = k^2 r$, то уравнение (25) принимает вид:

$$\frac{k^2}{u} = h^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right] \quad \text{или} \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{k^2}{h^2}\,\frac{1}{u^3} - u.$$

Первый интеграл этого уравнения есть:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = -\frac{k^2}{h^2}\,\frac{1}{u^2} - u^2 + c_1,$$

откуда:

$$d\theta = \frac{\pm u\,du}{\left[\frac{c_1^2}{4} - \frac{k^2}{h^2} - \left(\frac{c_1}{2} - u^2\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}. \tag{34}$$

Пусть

$$\frac{c_1}{2} - u^2 = z, \quad \frac{c_1^2}{4} - \frac{k^2}{h^2} = A^2.$$

Чтобы $\frac{du}{d\theta}$ было действительным, постоянная A^2 должна быть положительной, как это и будет, если начальные данные действительны.

Если взять верхний знак, то уравнение (34) примет вид:

$$2d\theta = \frac{-dz}{\sqrt{A^2 - z^2}}. \tag{35}$$

Интегрируя (35), получим:

$$\arccos \frac{z}{A} = 2(\theta + c_2),$$

откуда

$$z = A \cos 2(\theta + c_2).$$

Возвращаясь к переменной r, мы напишем это уравнение в виде:

$$r^2 = \frac{2}{c_1 - 2A\cos 2(\theta + c_2)}. \tag{36}$$

Это есть полярное уравнение эллипса с центром в начале. Отсюда следует, что движущаяся точка, находящаяся под влиянием силы притяжения, прямо пропорциональной расстоянию, описывает эллипс с центром в начале.

Единственные исключения бывают, когда точка проходит через начало и когда она описывает окружность. В первом случае $h = 0$, и уравнение (25) становится неприменимым, во втором случае значение c_1 таково, что оно удовлетворяет уравнению:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0^2 = -\frac{k^2}{h^2}\cdot\frac{1}{u_0^2} - u_0^2 + c_1 = 0,$$

и уравнение орбиты принимает вид: $u = u_0$. В этом случае уравнение (34) неприменимо.

62. Сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Предположим, что точка движется под влиянием центрального притяжения, напряжение которого обратно пропорционально квадрату расстояния; требуется определить ее орбиту при любых начальных условиях. Уравнение (25) в этом случае имеет вид:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{k^2}{h^2} - u. \tag{37}$$

Это уравнение может быть написано в виде:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k^2}{h^2}.$$

Это есть линейное неоднородное диференциальное уравнение и может быть проинтегрировано методом вариации произвольных постоянных, который был объяснен в § 37. Если пренебречь правой частью уравнения, то получаем общее решение:

$$u = c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta.$$

Ясно, что если к этому значению u прибавить $\frac{k^2}{h^2}$, то диференциальное уравнение будет тождественно удовлетворено. Следовательно, общее решение (37), которое таково же, как полученное вариацией произвольных постоянных, есть:

$$u = \frac{k^2}{h^2} + c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta$$

Беря обратную величину от этого выражения, находим:

$$r = \frac{1}{\frac{k^2}{h^2} + c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta}.$$

Положим теперь $c_1 = A\cos\theta_0$, $c_2 = A\sin\theta_0$, где A и θ_0 — постоянные. Ясно, что A может быть всегда взято положительным и равным $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, а действительное значение θ_0 может быть определено таким образом, что эти уравнения будут удовлетворены, каковы бы ни были действительные значения для c_1 и c_2. Тогда уравнение орбиты принимает вид:

$$r = \frac{1}{\frac{k^2}{h^2} + A\cos(\theta - \theta_0)}. \tag{38}$$

Это есть полярное уравнение конического сечения, один из фокусов которого находится в начале координат. Из этого исследования и из § 55 следует, что если орбита есть коническое сечение, один из фокусов которого находится в начале и сила зависит только от расстояния, то тело движется под влиянием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, и, наоборот, если сила изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, то тело описывает коническое сечение, один из фокусов которого находится в начале координат.

Пусть p — параметр конического сечения и e — его эксцентриситет. Тогда, сравнивая (38) с обычным полярным уравнением конического сечения $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, находим, что

$$p = \frac{h^2}{k^2}, \quad e = \frac{h^2}{k^2}A, \tag{39}$$

и θ_0 есть угол между полярной осью и концом большой оси, направленным к более далекой вершине. Постоянные h^2 и A определяются начальными условиями, и в свою очередь они определяют p и e при помощи (39). Если $e < 1$, то коническое сечение — эллипс; если $e = 1$, то коническое сечение — парабола; если $e > 1$, то коническое сечение — гипербола, и если $e = 0$, то коническое сечение — окружность.

63. Сила изменяется обратно пропорционально пятой степени расстояния. В этом случае $f = \frac{k^2}{r^5}$, и (25) принимает вид:

$$k^2 u^5 = h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\theta^2}\right). \tag{40}$$

Решая относительно $\frac{d^2 u}{d\theta^2}$ и интегрируя, находим:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{k^2}{h^2}u^4 - u^2 + c_1, \tag{41}$$

откуда

$$d\theta = \frac{du}{\sqrt{c_1 + \frac{1}{2}\frac{k^2}{h^2}u^4 - u^2}}. \tag{42}$$

Правая часть этого уравнения вообще не может быть проинтегрирована в элементарных функциях, но она может быть приведена к эллиптическому интегралу первого рода. Тогда u, а следовательно, и r выражаются эллиптическими функциями от θ и орбиты вообще либо закручиваются к началу координат, либо уходят в бесконечность, причем характер их зависит о начальных условий.

Заметим, что в некоторых особых случаях уравнение (42) можно проинтегрировать в элементарных функциях.

a) Уравнению (41) можно удовлетворить, беря для u постоянное значение, удовлетворяющее уравнению, которое получим, приравнивая правую часть (41) нулю. Орбита есть окружность с центром в начале. Легко видеть, что подобный особый случай существует для центральной силы, пропорциональной любой степени расстояния.

b) Другой особый случай имеет место, когда начальные условия таковы, что $c_1 \neq 0$ и правая часть (41) является полным квадратом, т. е. $c_1 = \frac{h^2}{2k^2}$. Тогда уравнение (41) принимает вид:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k}{h}u^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{h}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(A^2u^2 - \frac{1}{A^2}\right)^2.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\ln\frac{1 + A^2u}{1 - A^2u} = \sqrt{2}\ (\pm\theta - c_2),$$

откуда

$$r = -A^2\frac{\left[1 + e^{\sqrt{2}(\pm\theta - c^2)}\right]}{\left[1 - e^{\sqrt{2}(\pm\theta - c_2)}\right]} = +A^2\operatorname{cth}\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm\theta - c_2), \tag{43}$$

где $\operatorname{cth}\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm\theta - c_2)$ есть гиперболический котангенс от

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\ (\pm\theta - c_2).$$

c) Если начальные условия таковы, что $c_1 = 0$, то уравнение (41) дает:

$$\pm d\theta = \frac{du}{u\sqrt{\frac{1}{2}\frac{k^2}{h^2}u^2 - 1}},$$

интегрируя которое, получим:

$$\pm\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2h}}{ku}\right) + c_2.$$

Беря косинусы обеих частей и решая относительно r, находим полярное уравнение орбиты в виде:

$$r = \frac{k}{\sqrt{2h}}\cos(c_2 \mp \theta); \tag{44}$$

это есть уравнение окружности, проходящей через начало координат.

d) Если ни одно из этих условий не выполнено, то правая часть от (41) есть биквадратное выражение и уравнение (42) может быть написано в виде:

$$\pm d\theta = \frac{c\,du}{\sqrt{\pm(1 \pm \alpha^2 u^2)(1 \pm \beta^2 u^2)}}, \tag{45}$$

где c, α^2 и β^2 — постоянные, зависящие от коэфициентов уравнения (41). Уравнение (45) приводит к эллиптическому интегралу, который выражает θ в функции от u. Беря обратные функции и обратные величины, мы выразим r как эллиптическую функцию от θ.

Кривые есть спирали, для которых окружность, проходящая через начало, и окружность с началом в центре являются предельными случаями.

Если кривая — окружность, проходящая через начало, то сила изменяется обратно пропорционально пятой степени расстояния (§ 56); но если сила пропорциональна пятой степени расстояния, то орбиты, описанные точкой, суть кривые, где окружность является особым предельным случаем.

С другой стороны, если орбита есть коническое сечение с центром или одним из фокусов в начале, то сила меняется прямо пропорционально расстоянию или обратно пропорционально квадрату расстояния, и, наоборот, если сила прямо пропорциональна расстоянию или обратно пропорциональна квадрату расстояния, то орбиты — всегда коническое сечение с центром или соответственно с одним из фокусов в начале (§ 53, 55, 56).

Чтобы показать это обратное взаимоотношение, необходимо полное рассмотрение каждого закона.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите движение точки общим методом для линейных уравнений, когда сила обратно пропорциональна кубу расстояния. Начертите кривые для различных особых случаев.

2. Выразите c, α^2 и β^2 уравнения (45) через начальные условия. Исследуйте все возможные случаи для начальных движений, направленных под прямыми углами к радиусу-вектору, приводя интегралы к нормальной форме и выражая r через эллиптические функции от θ. Начертите кривые для каждого случая.

3. Положим, что сила действует по закону, данному в (29), т. е

$$f = \frac{M}{r^2 (C \sin 2\theta + D \cos 2\theta + H)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{r^2 [\varphi(\theta)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Проинтегрируйте диференциальное уравнение (25) орбиты методом вариации произвольных постоянных и покажите, что общее решение имеет форму:

$$\frac{1}{r} = c_1 \cos\theta + c_2 \sin\theta + \sqrt{\varphi(\theta)},$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Покажите, что кривая есть коническое сечение.

4. Покажите, что если сила $f=\frac{\mu}{r^2}+\frac{\nu}{r^3}$ при $\nu<h^2$, то общее уравнение орбиты имеет вид:

$$r=\frac{a}{1-e\cos(k\theta)},$$

где a, e и k — постоянные, зависящие от начальных условий и от μ и ν. Заметьте, что это может быть рассмотрено как коническое сечение, главная ось которого вращается вокруг фокуса со средней угловой скоростью

$$n=(1-k)\frac{2\pi}{T},$$

где T есть период обращения.

5. В случае центральной силы движение вдоль радиуса-вектора определяется уравнением:

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-f+\frac{h^2}{r^3}.$$

Рассмотрите интегрирование этого уравнения, когда

$$f=\frac{k^2}{r^5}.$$

6. Предположим, что закон силы дан уравнением (30), т. е.:

$$f=\frac{N}{r^2\left(\frac{1}{r}-A\sin\theta-B\cos\theta\right)^3}.$$

Подставьте в (25) и выведите общее уравнение орбиты.

Указание. Пусть $u=v+A\sin\theta+B\cos\theta$; тогда уравнение (25) принимает вид:

$$\frac{d^2v}{d\theta^2}+v=\frac{Nh^{-2}}{v^3}.$$

Отв. $$\frac{1}{r}=A\sin\theta+B\cos\theta+\sqrt{c_1\cos^2\theta+c_2\sin2\theta+c_3\sin^2\theta},$$

что является уравнением конического сечения.

7. Предположим, что закон силы определяется формулой:

$$f=\frac{c_1+c_2\cos2\theta}{r^2}.$$

Покажите, что для всех начальных условий орбита является алгебраической кривой четвертого порядка, если c_2 не равно нулю, в каковом случае она превращается в коническое сечение.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Вопрос о центральных силах был впервые рассмотрен Ньютоном. В отделах II и III первой книги «Начал» он дал великолепную геометрическую трактовку этого вопроса и пришел к некоторым весьма общим теоремам. Эти части «Начал» особенно заслуживают тщательного изучения.

Все более простые случаи были получены в XVIII в. аналитическими методами. Некоторые примеры подробно разобраны в «Traitè des Fonctions Elliptiques». Лежандра. Подробное изложение принципов и список примеров даны почти в каждом курсе аналитической механики; к лучшим изложениям относятся глава V Tait and Steele, Dynamics of a Particle и глава X тома I «Mécanique Rationelle» Аппеля. Мемуар Стадера (*Journal für Mathemätik* т. XLVI») этот вопрос рассматривает очень подробно. Полное и изящное рассмотрение специальной задачи, когда сила изменяется обратно пропорционально пятой степени расстояния, дано Макмилланом (MacMillan) в *American Journal of Mathematics*, т. XXX, стр. 282—306.

Задача нахождения общего выражения для возможных законов силы, действующей в системе двойных звезд, была предложена Бертраном в томе 84 *Comptes Rendus* и была немедленно решена Дарбу и Альфаном и опубликована в том же томе. Решение, приведенное нами выше, подобно предложенному Дарбу, которое также приведено в заметке в конце «Механики» Деспейрона. Метод Альфана дан в «Небесной механике» Тиссерана. т. I, стр. 36, и в «Mécanique Rationelle» Аппеля, т. I, стр. 372. Повидимому, обычно упускали из виду, что Ньютон решил ту же задачу в «Началах», книга I, Поучение к предложению XVII. Это было указано Глэшером (Glaisher) в *Monthly Notices of the A. R. S.*, т. 39. Бертран показал (*Comptes rendus*, т. 77), что единственные законы центральной силы, под действием которых точка описывает коническое сечение для всех начальных условий, суть $f = \pm \frac{k^2}{r^2}$ и $f = \pm k^2 r$. Кенигс (Koenigs) доказал (*Bulletin de la Société Mathématique*, т. XVII), что единственные законы центральной силы, зависящие от одного расстояния, для которых описанные кривые алгебраичны для всех начальных условий, суть $f = \pm \frac{k^2}{r^2}$ и $f = \pm k^2 r$. Гриффин (Griffin) показал (*Amerjkan journal of Mathematics*, т. XXXI), что единственный закон, когда сила является функцией одного расстояния, имеющей действительные значения во всей плоскости и не обращающейся в нуль в начале, который дает эллиптическую орбиту, есть ньютонианский закон.

См. также: E. T. Whittaker, Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper, Berlin 1924, IV; Tullio Levi-Civita e Ugo Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale, Bologna 1927, Готовится перевод на русский язык. *Прим. ред.*