ТЕОРІЯ ДВИЖЕНІЯ ТѢЛЪ

БРОСАЕМЫХЪ НА ПОВЕРЬХНОСТИ ЗЕМНОЙ.

Тимоѳея Осиповскаго.

---

1. Вообразимъ, что шарообразное тѣло брошено на поверьхности земной со скоростію c подъ угломъ къ горизонту ζ. Какъ силы управляющія его движеніемъ суть, сила метанія, сопротивленіе воздуха, и тяжесть; и какъ первыя двѣ простираются всегда по направленію одной прямой линѣи, а послѣдняя по направленію прямой же линѣи перпендикулярной къ горизонту; плоскость же опредѣляемая сими двумя линѣями, по коей оныя силы разполагаются, остается всегда одна и таже, то и все движеніе тѣла произходить будетъ по сей плоскости.

Назначимъ координаты кривой линѣи по сей плоскости тѣломъ описываемой буквами x и y, разумѣя подъ x горизонтальную и подъ y вертикальную; и назовемъ постоянную силу тяжести $2g$ и сопротивленіе производимое воздухомъ R; то по прошествіи какого либо времени t отъ того мгновенія, когда тѣло брошено, будетъ

$$\frac{1}{dt}.d.\frac{dx}{ds}. = -R.\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{1}{dt}.d.\frac{dy}{dt} = -R.\frac{dy}{ds} - 2g;$$

понимая подъ ds дифференціалъ дуги описанной тѣломъ во время t.

2. Поелику теорія и опытъ согласно показываютъ, что сопротивленіе производимое жидкостію пропорціонально квадратамъ скорости, съ коею тѣло въ ней движется, то будетъ $R = k.\frac{ds^2}{dt^2}$; гдѣ k означаетъ постояннаго коеффиціента зависящаго наиболѣе отъ содержанія плотности движимаго тѣла къ плотности жидкости, и отъ радіуса движимаго тѣла; которой коеффиціентъ относительно къ воздуху, по его рѣдкости, очень малъ. Такимъ образомъ оныя уравненія обратятся въ

$$d.\frac{dx}{dt} + k.\frac{ds.dx}{dt} = 0,$$

$$d.\frac{dy}{dt} + k.\frac{dsdy}{dt} + 2gdt = 0;$$

кои, при предположеніи дифференціала dx постояннымъ, будутъ

$$ddt - kdsdt = 0,$$
$$dtddy - dyddt + kdsdydt + 2gdt^3 = 0.$$

Естьли первое изъ сихъ уравненій помноженное на dy сложится со вторымъ, то второе чрезъ то сократится, и уравненія сведутся на

$$ddt - kdsdt = 0,$$
$$ddy + 2gdt^2 = 0;$$

кои, по назначеніи dt чрезъ pdx и dy чрезъ qdx, при чемъ будетъ $ds = dx\sqrt{(1+qq)}$, обратятся въ

$$dp - kpdx\sqrt{(1+qq)} = 0 \;\ldots\ldots\; (a)$$
$$dq + 2gppdx = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; (b).$$

3. Выключивъ изъ уравненій (a) и (b) величину dx получимъ

$$\left.\begin{array}{l} 2gpdp + kdq\sqrt{(1+qq)} = 0, \\ \text{коего интегралъ будетъ} \\ gpp + k\int dq\sqrt{(1+qq)} = a. \end{array}\right\} \ldots\ldots (c)$$

4. Какъ уравненіе (b) доставляетъ $dx = -\frac{dq}{2gpp}$ и $dy = qdx = -\frac{qdq}{2gpp}$, то будетъ

$$x = C - \tfrac{1}{2}\int \frac{dq}{a - k\int dq\sqrt{(1+qq)}} \;\ldots\ldots\; (d)$$

$$y = C' - \tfrac{1}{2}\int \frac{qdq}{a - k\int dq\sqrt{(1+qq)}} \;\ldots\ldots\; (e).$$

5. Для вычисленія по симъ формуламъ опредѣлимъ сперва въ уравненіи (c) постоянную величину a. На сей конецъ положимъ $\sqrt{(1+qq)} = q + u$, то будетъ $q = \frac{1-uu}{2u}$, $dq = -\left(\frac{1+uu}{2uu}\right).du$ и $\sqrt{(1+qq)} = \frac{1+uu}{2u}$; чрезъ что величина $dq\sqrt{(1+qq)}$ обратится въ $-\tfrac{1}{4}.\frac{(1+u^2)^2}{u^3}du = -\tfrac{1}{4}\left\{\frac{1}{u^3} + \frac{2}{u} + u\right\}du$, коея интегралъ будетъ $\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1-u^4}{4uu}\right\} + \tfrac{1}{2}log.\frac{1}{u} = \tfrac{1}{2}q\sqrt{(1+qq)} + \tfrac{1}{2}log.[q + \sqrt{(1+qq)}]$. По сему уравненіе (c) будетъ

$gpp + \tfrac{1}{2}k[q\sqrt{(1+qq)} + log.(q + \sqrt{(1+qq)})] = a \ldots (c)$. Какъ величина $\frac{1}{p} = \frac{dx}{dt}$ означаетъ горизонтальную скорость тѣла, и $q = \frac{dy}{dx}$ означаетъ тангенсъ угла, которой составляетъ съ горизонтомъ направленіе кривой линѣи въ точкѣ движенія тѣла; то при началѣ движенія будетъ $\frac{1}{p} = c. \cos. \zeta$, и $q = tang. \zeta$; а по сему будетъ

$$a = \frac{g}{cc. \cos \zeta^2} + \tfrac{1}{2} k \left\{ \frac{\sin \zeta}{\cos. \zeta^2} + \log. \left(\frac{1 + \sin \zeta}{\cos. \zeta} \right) \right\},$$

или

$$a = \frac{g}{cc. \cos \zeta^2} + \tfrac{1}{2} k \left\{ \frac{\sin \zeta}{\cos \zeta^2} + \log. tang. \left(\tfrac{1}{4} \pi + \tfrac{1}{2} \zeta \right) \right\},$$

разумѣя подъ π два прямыхъ угла.

6. Теперь уравненіе (c) опредѣлять будетъ отношеніе существующее между горизонтальною скоростію тѣла и тангенсомъ угла, которой составляетъ съ горизонтомъ направленіе кривой линѣи въ точкѣ движенія тѣла; уравненія же (d) и (e) опредѣлять будутъ координаты x и y чрезъ оной же тангенсъ, для коихъ постоянныя величины C и C' должны быть опредѣлены такъ, чтобъ при $x = o$ и $y = o$ была величина $q = tang. \zeta$.

7. Мы будемъ употреблять сіи формулы для нахожденія величинъ x и y до наибольшей аппликаты y, то есть до вершины кривой линѣи; и какъ при сей вершинѣ $\frac{dy}{dx} = q = o$, то, естьли наибольшая аппликата назначится чрезъ h, и соотвѣтсвующая ей абсцисса чрезъ f, будетъ $f = C$ и $h = C'$; величины же x и y будутъ

$$x = f - \tfrac{1}{2}\int\frac{dq}{a - k\int dq\,\sqrt{(1+qq)}}$$

$$y = h - \tfrac{1}{2}\int\frac{qdq}{a - k\int dq\,\sqrt{(1+qq)}}$$

или, по назначеніи $k = \mu a$,

$$x = f - \frac{1}{2a}\int\frac{dq}{1 - \mu\int dq\,\sqrt{(1+qq)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d),$$

$$y = h - \frac{1}{2a}\int\frac{qdq}{1 - \mu\int dq\,\sqrt{(1+qq)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e);$$

въ коихъ по интегрованіи подставить должно $q = o$;
величины же f и h будутъ

$$f = \frac{1}{2a}\int\frac{dq.}{1 - \mu\int dq\sqrt{(1+qq)}},$$

$$h = \frac{1}{2a}\int\frac{qdq}{1 - \mu\int dq\,\sqrt{(1+qq)}},$$

въ коихъ по интегрованіи подставить должно $q = \text{tang.}\ \zeta$.

8. Изъ уравненія же (c) опредѣлится и скорость, съ коею тѣло при сей вершинѣ двигаться будетъ; а имянно, поелику при сей вершинѣ $q = o$, будетъ при ней $gpp = a$, и $\frac{1}{pp} = \frac{g}{a}$; такъ что естьли скорость при вершинѣ назначится чрезъ v, то будетъ

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (f).$$

9. При движеніи тѣла далѣе вершины кривой линѣи можно его разсматривать такъ, какъ бы оно начало двигаться при оной, будучи брошено по горизонтальному направленію со скоростію $\sqrt{\frac{g}{a}}$. Естьли для кривой

линѣи идущей отъ вершины далѣе по движенію тѣла положится начало осей координатъ при сей самой вершинѣ, и назначатся координаты, вертикальная чрезъ y' и горизонтальная чрезъ x', *то сила по горизонтальному* направленію побуждающая тѣло будетъ $-k.\frac{ds'dx'}{dt^2}$ и по вертикальному $2g-k.\frac{ds'dy'}{dt^2}$. Слѣдовательно уравненія движенія для сей второй половины кривой линѣи будутъ одинаковы съ уравненіями для первой половины, выключая что будетъ здѣсь величина g съ противнымъ знакомъ. Итакъ естьли уравненія для сей второй половины, соотвѣтсвующія уравненіямъ (a), (b), (c) для первой половины назначены будутъ чрезъ (a'), (b'), (c'), то сіи уравненія будутъ

$$dp'-kp'dx'\surd(1+q'q')=0 \;\ldots\ldots\; (a')$$
$$dq'-2gp'p'dx'=0 \;\ldots\ldots\ldots\; (b')$$
$$\left.\begin{array}{l} 2gp'dp'-kdq'\surd(1+q'q')=0 \\ gp'p'-k\int dq'\surd(1+q'q')=a' \end{array}\right\}\ldots\ldots (c').$$

Что принадлежитъ до постоянной величины a', то, поелику при вершинѣ $gp'p'=a$ и $q=0$, будетъ $a'=a$; и какъ здѣсь $gp'p'=\frac{dq'}{2dx'}=\frac{q'dq'}{2dy'}$, то по назначеніи k чрезъ μa будетъ здѣсь

$$x'+C''=\frac{1}{2a}\int\frac{dq'}{1+\mu\int dq'\surd(1+q'q')} \;\ldots\ldots\; (d'),$$

$$y'+C'''=\frac{1}{2a}\int\frac{q'dq'}{1+\mu\int dq'\surd(1+q'q')} \;\ldots\ldots\; (e').$$

10 Естьли назначится $y'=h-y$, то тангенсы q и q' принадлежать будутъ къ одной

и той же горизонтальной ординатѣ кривой линѣи, то есть къ угламъ составляемымъ кривою линѣею съ одною и тоюже горизонтальною ординатою по ту и по сю сторону вертикальной оси координатъ y.

Въ семъ случаѣ будетъ

$$\frac{q'dq'}{1+\mu\int dq'\sqrt{(1+q'q')}}=\frac{qdq}{1-\mu\int dq\sqrt{(1+qq)}}$$

или

$$q'dq'-qdq=\mu\left\{qdq\int dq'\sqrt{(1+q'q')}+q'dq'\int dq\sqrt{(1+qq)}\right\}.$$

По сему будетъ $q'>q$; то есть во второй половинѣ кривая линѣя будетъ сильнѣе нагибаться къ вертикальной оси, нежели вь первой ея половинѣ.

Назначимъ $q'=\frac{q}{1-\mu u}$, то оное уравненіе обратится въ

$$dq\left\{2u-3\mu u^2+\mu\mu u^3\right\}+qdu=$$

$$qdq\left\{(1-\mu u)^2+\frac{1}{2.3}q^2-\frac{1}{2^3.5}q^4(1-\mu u)^{-2}+\frac{1}{2^4.7}q^6(1-\mu u)^{-4}\ldots\right\}$$

$$+\left\{qdq(1-\mu u)+\mu qqdu\right\}\left\{1+\frac{1}{2.3}q^2-\frac{1}{2^3.5}q^4+\frac{1}{2^4.7}q^6-\ldots\right\};$$

ибо $\int dq\sqrt{(1+qq)}=q+\frac{1}{2.3}q^3-\frac{1}{2^3.5}q^5+\frac{1}{2^4.7}q^7-\ldots\ldots;$

Положимъ потомъ $u=\alpha q+\beta q^2+\gamma q^3+\delta q^4+q^5+\zeta q^6+\ldots$ то оное уравненіе обратится въ

$3\alpha+(4\beta-3\mu\alpha^2)q+(5\gamma-6\mu\alpha\beta+\mu\mu\alpha^3)q^2+[6\delta-3\mu(2\alpha\gamma+\beta\beta)+3\mu^2\alpha^2\beta]q^3+[7\varepsilon-6\mu(\alpha\delta+\beta\gamma)+3u^2\alpha(\alpha\gamma+\beta\beta)]q^4+[8\zeta-3\mu(2\alpha\varepsilon+2\beta\delta+\gamma^2]+\mu^2(3\alpha^2\delta+6\alpha\beta\gamma+\beta^3)q^5+\ldots\ldots$

$$= 2 - 2\mu\alpha q + (\mu^2\alpha^2 - \mu\beta + \tfrac{1}{3})q^2 + 2\mu^2\alpha\beta q^3 + [\mu\delta + \mu\mu(2\alpha\gamma + \beta\beta)$$
$$+ \frac{1}{2.3}\mu\beta - \frac{1}{2^2.5}]q^4 + [2\mu\varepsilon + 2\mu^2(\alpha\delta + \beta\gamma) - \frac{1}{2^2.5}\mu\alpha + \tfrac{1}{3}\mu\gamma)q^5$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\ ;$$

Откуда найдется

$$\alpha = \tfrac{2}{3},$$
$$\beta = 0,$$
$$\gamma = \frac{1}{3.5} + \frac{4}{3^3.5}\mu^2,$$
$$\delta = \frac{2}{3^2.5}\mu + \frac{8}{3^4.5}\mu^3,$$
$$\varepsilon = -\frac{1}{2^2.5.7} + \frac{2}{3^2.7}\mu^2 + \frac{8}{3^4.7}\mu^4,$$
$$\zeta = -\frac{83}{2.3^2.5^2.7}\mu + \frac{2108}{3^4.5^2.7}\mu^3 + \frac{314}{3^5.5^2.7}\mu^5,$$

и такъ далѣе.

Такимъ образомъ для каждаго тангенса q найдется соотвѣтственный тангенсъ q' по другую сторону вершины.

Естьли положится $q = tang.\ \zeta$, то будетъ q' тангенсъ того угла, подъ которымъ тѣло упадетъ опять на горизонтъ; и когда сей тангенъ q' подставится въ выраженіи велилины x', то, буде получится $x' = f'$, тогда вся горизонтальная широта кривой линѣи будетъ $= f + f'$.

11. По представленіи теперь формулъ для вычисленія какъ величинъ x и y, такъ и величинъ x' и y', остается показать способъ интегрованія функцій входящихъ въ ихъ выраженія, дабы сіи величины изображались въ строкахъ столь сильно сходящихся, чтобъ

выкладку удобно совершать было можно. На сей конецъ мы разберемъ особенно два случая: вопервыхъ, когда уголъ метанія ζ очень малъ, каковъ бываетъ при пушечныхъ выстрѣлахъ; во вторыхъ, когда уголъ метанія ζ великъ, каковъ бываетъ при метаніи бомбъ.

12. Положимъ для малаго угла ζ

$$\frac{1}{1-\mu\int dq\sqrt{(1+qq)}}=\frac{1}{1-\mu q}+\frac{\alpha q^3}{(1-\mu q)^2}+\beta q^5+\gamma q^6$$
$$+\delta q^7+\ldots.$$
$$=1+\mu q+\mu\mu qq+(\mu^3+\alpha)q^3+(\mu^4+2\alpha\mu)q^4+(\mu^5+3\alpha\mu^2$$
$$+\beta)q^5+(\mu^6+4\alpha\mu^3+\gamma)q^6+\ldots.$$

то, поелику $1-\mu\int dq\sqrt{(1+qq)}=$

$$1-\mu\left(q+\frac{1}{2.3}q^3-\frac{1}{2^3.5}q^5+\frac{1}{2^4.7}q^7-\ldots\ldots\right),$$

найдется

$$\alpha=\frac{1}{2.3}\mu,$$

$$\beta=-\frac{1}{2^3.5}\mu,$$

$$\gamma=\frac{1}{2^2.3^2}\cdot\mu^2,$$

$$\delta=\frac{7}{2^3.3.5}\mu^3+\frac{1}{2^4.7}\mu,$$

и такъ далѣе.

Такимъ образомъ, поелику $\frac{1}{1-\mu q}+\frac{\alpha q^3}{(1-\mu q)^2}=$

$$\left(1-\frac{1}{2\mu^2}\right)\cdot\frac{1}{(1-\mu q)}+\frac{1}{6\mu^2}\cdot\frac{1}{(1-\mu q)^2}+\frac{1}{3\mu^2}+\frac{1}{6\mu}\cdot q,$$

будетъ

$$x = C - \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right)\log.\ \frac{1}{1-\mu q} + \frac{1}{6\mu^3(1-\mu q)}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\mu^2}\cdot q + \frac{1}{12\mu}\ q^2 + \tfrac{1}{6}\beta q^6 + \tfrac{1}{7}\gamma q^7 + \tfrac{1}{8}\delta q^8 + \ldots\ldots \right\}$$

Поелику же $\frac{q}{1-\mu q} + \frac{\alpha q^4}{(1-\mu q)^2} = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{2}{3\mu^3}\right)\cdot\frac{1}{1-\mu q}$ $+ \frac{1}{6\mu^3}\cdot\frac{1}{(1-\mu q)^2} - \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) + \frac{1}{3\mu^2}\ q + \frac{1}{6\mu}\ q^2$, будетъ

$$y = C' - \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\right)\log.\ \frac{1}{1-\mu q} + \frac{1}{6\mu^4(1-\mu q)}\right.$$

$$- \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) q + \frac{1}{6\mu^2}\ q^2 + \frac{1}{18\mu}\ q^3 + \tfrac{1}{7}\beta q^7 + \tfrac{1}{8}\gamma q^8$$

$$\left. + \tfrac{1}{9}\delta q^9 + \ldots\ldots\right\}$$

На основаніи же уравненій (d') и (e'), чрезъ измѣненіе въ предъидущихъ формулахъ μ въ $-\mu$ и q въ q', получимъ

$$x' + C'' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) log.\ (1+\mu q') - \frac{1}{6\mu^3(1+\mu q')}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\mu^2}\cdot q' - \frac{1}{12\mu}\cdot q'^2 - \tfrac{1}{6}\beta q'^6 + \tfrac{1}{7}\gamma q'^7 - \tfrac{1}{8}\delta q'^8 + \ldots\ldots\right\}$$

$$y' + C''' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\right)\log.\ \frac{1}{1+\mu q'} + \frac{1}{6\mu^4(1+\mu q')}\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) q' + \frac{1}{6\mu^2}\ q'^2 - \frac{1}{18\mu}\ q'^3 - \tfrac{1}{7}\beta q'^7 + \tfrac{1}{8}\gamma q'^8$$

$$\left. - \tfrac{1}{9}\delta q'^9 + \ldots\ldots\right\}.$$

Какъ при $x = o$ и $y = o$ величина $q = tang.\ \zeta$, то по назначеніи для краткости $tang.\ \zeta$ чрезъ b получимъ

$$C = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) \log.\ \frac{1}{1-\mu b} + \frac{1}{6\mu^3(1-\mu b)} + \frac{1}{3\mu^2}\cdot b\right.$$
$$\left. + \frac{1}{12\mu} b^2 + \tfrac{1}{6}\beta b^6 + \tfrac{1}{7}\gamma b^7 + \tfrac{1}{8}\delta b^8 + \ldots\right\}.$$

$$C' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\right) \log.\ \frac{1}{1-\mu b} + \frac{1}{12\,\mu^4(1-\mu b)}\right.$$
$$-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) b + \frac{1}{6\mu^2} b^2 + \frac{1}{18\mu} b^3 + \tfrac{1}{7}\beta b^7 + \tfrac{1}{8}\gamma b^8$$
$$\left. + \tfrac{1}{9}\delta b^9 + \ldots\right\}.$$

Поелику же при $x' = o$ и $y' = o$ величина $q' = o$, будетъ $C'' = -\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{6\mu^3}$, $C''' = \frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{6\mu^4}$.

По сему будетъ

$$f = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) log.\ \frac{1}{1-\mu b} + \frac{b}{6\mu^2(1-\mu b)} + \frac{1}{3\mu^2}\ b\right.$$
$$\left. + \frac{1}{12\mu} bb + \tfrac{1}{6}\beta b^6 + \tfrac{1}{7}\gamma b^7 + \tfrac{1}{8}\delta b^8 + \ldots\right\}$$

$$h = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{2}{3\mu^4}\right) log.\ \frac{1}{1-\mu b} + \frac{b}{6\mu^3(1-\mu b)}\right.$$
$$-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) b + \frac{1}{6\mu^2}\ bb + \frac{1}{18\mu} b^3 + \tfrac{1}{7}\beta b^7 + \tfrac{1}{8}\gamma b^8$$
$$\left. + \tfrac{1}{9}\delta b^9 + \ldots\right\}$$

$$f' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) log.\ (1+\mu b') + \frac{b'}{6\,\mu^2(1+\mu b')}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3\mu^2}\ b' - \frac{1}{12\mu} b'^2 - \tfrac{1}{6}\beta b'^6 + \tfrac{1}{7}\gamma b'^7 - \tfrac{1}{8}\delta b'^8\right\}$$

$$f' + f' = \frac{1}{2a}\left\{\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu^3}\right) log.\ \frac{1+\mu b'}{1-\mu b} + \frac{1}{6\mu^2}\times\right.$$

$$\frac{b+b'}{(1-\mu b)(1+\mu b')}+\frac{1}{3\mu^2}(b+b')-\frac{1}{12\mu}(b'^2-b^2)$$
$$\left.-\tfrac{1}{6}\beta(b'^6-b^6)+\tfrac{1}{7}\gamma(b'^7+b^7)-\ldots\right\}$$

13. Когда уголъ ζ великъ, тогда назначимъ сперва, по § 5, $q=\frac{1-uu}{2u}$; то будетъ $dq=-\left\{\frac{1+uu}{2uu}\right\}du$ и $\int dq\sqrt{(1+qq)}=\frac{1-u^4}{8uu}+\frac{1}{2}log.\frac{1}{u}$. Положимъ потомъ $u=1-s$, то будетъ $q=\frac{s(1-\frac{1}{2}s)}{1-s}$, $dq=\frac{(1-s+\frac{1}{2}ss)ds}{(1-s)^2}$ и $\int dq\sqrt{(1+qq)}=\frac{\frac{1}{2}s-\frac{3}{4}s^2+\frac{1}{2}s^3-\frac{1}{8}s^4}{(1-s)^2}-\frac{1}{2}log(1-s)$, а по сему

$$x=C-\frac{1}{2a}\int\frac{dq}{1-\mu\int dq\sqrt{(1+qq)}}=$$
$$C-\frac{1}{2a}\int\frac{(1-s+\frac{1}{2}ss)ds}{1-(2+\mu)s+(1+\frac{3}{2}\mu)s^2-\frac{2}{3}\mu s^3+\frac{1}{12}\mu s^4-\frac{1}{60}\mu s^5-\ldots}$$

Назначимъ теперь

$$\frac{1-s+\frac{1}{2}ss}{1-(2+\mu)s+(1+\frac{3}{2}\mu)s^2-\frac{2}{3}\mu s^3+\ldots}=\frac{1}{1-\lambda s-\nu ss}+\alpha s^2+\beta s^3$$
$$+\gamma s^4+\ldots=1+\lambda s+(\lambda\lambda+\nu+\alpha)s^2+(\lambda^3+2\lambda\nu+\beta)s^3+(\lambda^4$$
$$+3\lambda^2\nu+\nu\nu+\gamma)s^4+(\lambda^5+4\lambda^3\nu+3\lambda\nu^2+\delta)s^5+\ldots\ldots$$

то найдется

$\lambda=1+\mu$;
$\nu+\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mu$;
$2\lambda\nu+\beta=1-\frac{1}{3}\mu-\mu^2$
$3\lambda^2\nu+\nu\nu+\gamma=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\mu-2\frac{3}{12}\mu^2-\frac{3}{2}\mu^3$
$4\lambda^3\nu+3\lambda\nu^2+\delta=2+\frac{11}{30}\mu-2\frac{3}{4}\mu^2-4\frac{1}{4}\mu^3-2\mu^4$

и такъ далѣе;

гдѣ должно назначить ν по состоянію величины μ, дабы величины $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, и пр. оставаясь въ положительномъ состояніи выходили отчасу меньшія дроби. Послѣ чего найдется

$$x = C - \frac{1}{2a}\left\{ \int \frac{ds}{1-\lambda s-\nu ss} + \tfrac{1}{3}\alpha s^3 + \tfrac{1}{4}\beta s^4 + \tfrac{1}{5}\gamma s^5 + \tfrac{1}{6}\delta s^6 + \dots \right\} (d)$$

Естьли на пр. назначится $\nu = \frac{3}{4}(1-2\mu)$, то будетъ

$$\alpha = \mu - \tfrac{1}{4}$$
$$\beta = 2\mu^2 + \tfrac{7}{6}\mu - \tfrac{1}{2}$$
$$\gamma = 3\mu^3 + 2\tfrac{7}{12}\mu^2 + 2\tfrac{5}{12}\mu - \tfrac{21}{16}$$
$$\delta = 4\mu^4 + 4\mu^3 + 6\tfrac{1}{4}\mu^2 + 3\tfrac{13}{80}\mu - 2\tfrac{11}{16}$$

и такъ далѣе.

Поелику же при семъ будетъ $1-\lambda s-\nu ss = (1-\frac{3}{2}s)\,[1+\frac{1}{2}(1-2\mu)s]$, а по сему $\frac{1}{1-\lambda s-\nu ss} = \frac{3}{4-2\mu}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}s} + \frac{1-2\mu}{4-2\mu}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}(1-2\mu)s}$, то будетъ

$$x = C - \frac{1}{2a}\left\{ \frac{1}{2-\mu}\log.\frac{1+\frac{1}{2}(1-2\mu)s}{1-\frac{3}{2}s} + \tfrac{1}{3}\alpha s^3 + \tfrac{1}{4}\beta s^4 + \tfrac{1}{5}\gamma s^5 + \tfrac{1}{6}\delta s^6 + \dots\dots \right\};$$

и какъ при $x = o$ величина $q = tang.\ \zeta$, величина же $s = 1 + q - \sqrt{(1+qq)}$, то по назначеніи при $q = tang.\ \zeta$ величины s чрезъ b получимъ

$$C = \frac{1}{2a}\left\{ \frac{1}{2-\mu}\log.\frac{1+\frac{1}{2}(1-2\mu)b}{1-\frac{3}{2}b} + \tfrac{1}{3}\alpha b^3 + \tfrac{1}{4}\beta b^4 + \tfrac{1}{5}\gamma b^5 + \tfrac{1}{6}\delta b^6 + \dots \right\};$$

и какъ при верьху кривой линѣи $q=0$ и $s=0$, то будетъ

$$f=C.$$

Какъ $dy=qdx=\frac{s(1-\frac{1}{2}s)}{1-s}\,dx$, то естьли назначится

$$\frac{1-\frac{3}{2}s+ss-\frac{1}{4}s^3}{1-(3+\mu)s+(3+\frac{5}{2}\mu)s^2-(1+\frac{13}{6}\mu)s^3+\frac{3}{4}\mu s^4-\frac{1}{10}\mu s^5+\frac{1}{120}\mu s^6-\ldots}$$

чрезъ $\frac{1}{1-\alpha' s}+\frac{\beta' s}{(1-\alpha' s)^2}+\frac{\gamma' s^2}{(1-\alpha' s)^3}+\delta' s^3+\varepsilon' s^4+\zeta' s^5+\ldots\ldots$

$$=1+(\alpha'+\beta')s+(\alpha'\alpha'+2\alpha'\beta'+\gamma')s^2+(\alpha'^3+3\alpha'^2\beta'+3\alpha'\gamma'+\delta')s^3$$
$$+(\alpha'^4+4\alpha'^3\beta'+6\alpha'^2\gamma'+\varepsilon')s^4+(\alpha'^5+5\alpha'^4\beta'+10\alpha'^3\gamma'+\zeta')s^5$$
$$+\ldots\ldots$$

то найдется

$$\alpha'+\beta'=\tfrac{3}{2}+\mu$$
$$\alpha'^2+2\alpha'\beta'+\gamma'=\tfrac{5}{2}+2\mu+\mu^2$$
$$\alpha'^3+3\alpha'^2\beta'+3\alpha'\gamma'+\delta'=\tfrac{15}{4}+\tfrac{47}{12}\mu+\tfrac{5}{2}\mu^2+\mu^3$$
$$\alpha'^4+4\alpha'^3\beta'+6\alpha'^2\gamma'+\varepsilon'=\tfrac{21}{4}+\tfrac{27}{4}\mu+\tfrac{67}{12}\mu^2+3\mu^3+\mu^4$$
$$\alpha'^5+5\alpha'^4\beta'+10\alpha'^3\gamma'+\zeta'=7+10\tfrac{13}{30}\mu+10\tfrac{19}{24}\mu^2+8\tfrac{1}{2}\mu^3+3\tfrac{1}{2}\mu^4$$
$$+\mu^5$$

и такъ далѣе;

для коего выраженія величину α' должно назначить такъ, чтобъ при наибольшей въ выкладкѣ величинѣ s было количество $\alpha' s<1$, и чтобъ при томъ прочія величины β, γ, δ, и пр. выходили дроби меньшія единицы. Естьли назначимъ на пр. $\alpha'=1+\frac{1}{3}\mu$, то будетъ

$$\beta'=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}\mu;$$
$$\gamma'=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\mu+\tfrac{4}{9}\mu^2$$
$$\delta'=-\tfrac{1}{4}+\tfrac{5}{12}\mu-\tfrac{1}{3}\mu^2+\tfrac{8}{27}\mu^3$$
$$\varepsilon'=-\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{4}\mu-\tfrac{1}{12}\mu^2+\tfrac{1}{3}\mu^3+\tfrac{16}{27}\mu^4$$
$$\zeta'=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{13}{30}\mu+\tfrac{19}{24}\mu^2+\tfrac{55}{54}\mu^3+\tfrac{14}{9}\mu^4+\tfrac{192}{243}\mu^5$$

и такъ далѣе.

По приведеніи теперь членовъ $\frac{s}{1-\alpha' s}+\frac{\beta' s^2}{(1-\alpha' s)^2}$ $+\frac{\gamma' s^3}{(1-\alpha' s)^3}$ въ видъ $A+\frac{B}{1-\alpha' s}+\frac{C}{(1-\alpha' s)^2}+\frac{D}{(1-\alpha' s)^3}$ при чемъ будетъ,

$$A=-\frac{1}{\alpha'^3}(\gamma'-\alpha'\beta'+\alpha'\alpha')$$

$$B=\frac{1}{\alpha'^3}(3\gamma'-2\alpha'\beta'+\alpha'\alpha')$$

$$D=-\frac{1}{\alpha'^3}(3\gamma'-\alpha'\beta')$$

$$E=\frac{\gamma'}{\alpha'^3}$$

получимъ

$$\gamma = C'-\frac{1}{2a}\Big\{As+\frac{1}{\alpha'}B\log.\frac{1}{1-\alpha s}+\frac{D}{\alpha'}\cdot\frac{1}{1-\alpha' s}$$
$$+\frac{E}{2\alpha'}\cdot\frac{1}{(1-\alpha' s)^2}+\tfrac{1}{5}\delta' s^5+\tfrac{1}{6}\varepsilon' s^6+\tfrac{1}{7}\zeta' s^7+\ldots\Big\}$$

гдѣ будетъ

$$C'=\frac{1}{2a}\Big\{Ab+\frac{1}{\alpha'}B\log.\frac{1}{1-\alpha' b}+\frac{D}{\alpha'}\cdot\frac{1}{1-\alpha' b}+\frac{E}{2\alpha'}\times$$
$$\frac{1}{(1-\alpha' b)^2}+\tfrac{1}{5}\delta' b^5+\tfrac{1}{6}\varepsilon' b^6+\tfrac{1}{7}\zeta' b^7+\ldots\Big\}$$

и какъ при вершинѣ $s=0$, то будетъ

$$h=\frac{1}{2a}\Big\{Ab+\frac{1}{\alpha'}B\log.\frac{1}{1-\alpha' b}+\frac{Db}{1-\alpha' b}+\frac{Eb(2-\alpha' b}{2(1-\alpha' b)^2}$$
$$+\tfrac{1}{5}\delta' b^5+\tfrac{1}{6}\varepsilon' b^6+\tfrac{1}{7}\zeta' b^7+\ldots\Big\}.$$

Поелику $x'+C''=\frac{1}{2a}\int\frac{dq'}{1+\mu\int dq'\sqrt{(1+q'q')}}=$

$$\frac{1}{2a}\int\frac{(1-s'+\frac{1}{2}s's')ds'}{1-(2-\mu)s'+(1-\frac{3}{2}\mu)s'^2+\frac{2}{3}\mu s'^3-\frac{1}{12}\mu s'^4+\frac{1}{60}\mu s'^5+\ldots}$$

то положивъ

$$\frac{1-s'+\frac{1}{2}s's'}{1-(2-\mu)s'+(1-\frac{3}{2}\mu)s'^2+\frac{2}{3}\mu s'^3-\frac{1}{12}\mu s'^4+\frac{1}{60}\mu s'^5+\frac{1}{120}\mu s'^6+\ldots}$$

$$=\frac{1}{1-\lambda's'-\nu's's'}+\alpha''s'^2+\beta''s'^3+\gamma''s'^4+\delta''s'^5+\ldots\ldots$$

$$=1+\lambda's'+(\lambda'\lambda'+\nu'+\alpha'')s'^2+(\lambda'^3+2\lambda'\nu'+\beta'')s'^3+(\lambda'^4+3\lambda'^2\nu'$$
$$+\nu'^2+\gamma'')s'^4+(\lambda'^5+4\lambda'^3\nu'+3\lambda'\nu'^2+\delta'')s'^5+\ldots\ldots$$

Получимъ

$$\lambda'=1-\mu$$
$$\nu'+\alpha''=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\mu$$
$$2\lambda'\nu'+\beta''=1+\tfrac{1}{3}\mu-\mu^2$$
$$3\lambda'^2\nu'+\nu'^2+\gamma''=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{6}\mu-\tfrac{23}{12}\mu^2+\tfrac{3}{2}\mu^3$$
$$4\lambda'^3\nu'+3\lambda'\nu'^2+\delta''=2-\tfrac{11}{10}\mu-2\tfrac{3}{4}\mu^2+4\tfrac{1}{4}\mu^3-2\mu^4$$

и такъ далѣе;

гдѣ должно назначить ν' по состоянію величины μ, чтобъ величины α'', β'', γ'', δ'', и проч. выходили отчасу меньшія дроби. Послѣ чего найдется $x'+C''=\frac{1}{2a}\left\{\int\frac{ds'}{1-\lambda's'-\nu'ss}+\frac{1}{3}\alpha''s'^3+\frac{1}{4}\beta''s'^4\right.$

$$\left.+\tfrac{1}{5}\gamma''s'^5+\tfrac{1}{6}\delta''s'^6+\ldots\right\}\ldots\ldots(k')$$

Естьли на пр. назначимъ $\nu'=\mu$, то будетъ

$$\alpha''=\tfrac{1}{2}(1-\mu)$$
$$\beta''=1-\tfrac{5}{3}\mu+\mu^2$$
$$\gamma''=\tfrac{3}{2}-\tfrac{19}{6}\mu+\tfrac{37}{12}\mu^2-\tfrac{3}{2}\mu^3$$
$$\delta''=2-\tfrac{51}{10}\mu+\tfrac{25}{4}\mu^2-\tfrac{15}{4}\mu^3+2\mu^4$$

и такъ далѣе.

Поелику же будетъ

$\frac{1}{1-\lambda s'-\nu s's'}=\frac{1}{1+\mu}\left\{\frac{1}{1-s'}+\frac{\mu}{1+\mu s'}\right\}$, то получится

$$x' + C'' = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{1+\mu}\ log.\ \frac{1+\mu s'}{1-s'} + \frac{1}{3}\alpha'' s'^3 + \frac{1}{4}\beta'' s'^4 + \frac{1}{5}\gamma'' s'^5 + \frac{1}{6}\delta'' s'^6 + \ldots\right\}$$

гдѣ будетъ

$$C'' = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{1+\mu}\ log.\ \frac{1+\mu b'}{1-b'} + \frac{1}{3}\alpha'' b'^3 + \frac{1}{4}\beta'' b'^4 + \frac{1}{5}\gamma'' b'^5 + \frac{1}{6}\delta'' b'^6 + \ldots\right\}$$

и $f' = C''$.

14. Изъ снесенія уравненія (b) съ уравненіемъ (c) получимъ

$$ddq - 2\,kdxdq\,\sqrt{(1+qq)} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (g).$$

Пусть будетъ $q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots$, то по назначеніи $1+\alpha\alpha$ чрезъ ee будетъ

$$\sqrt{(1+qq)} = e + \frac{\alpha\beta}{e}x + \left(\frac{\alpha\gamma}{e} + \frac{\beta\beta}{2e^3}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha\delta}{e} + \frac{\beta\gamma}{e^3} - \frac{\alpha\beta^3}{2e^5}\right)x^3 + \left(\frac{\alpha\varepsilon}{e} + \frac{2\beta\delta+\gamma\gamma}{2e^3} - \frac{\beta\beta(3\alpha\gamma-\beta\beta)}{2e^5} - \frac{5\beta^4}{8e^7}\right)x^4 + \ldots,$$

чрезъ что оное уравненіе (g) обратится въ

$$\gamma + 3\delta x + 6\varepsilon x^2 + \ldots = k\left\{\beta + 2\gamma x + 3\delta x^4 + 4\varepsilon x^3 + \ldots\right\}\left\{e + \frac{\alpha\beta}{e}x + \left(\frac{\alpha\gamma}{e} + \frac{\beta^2}{2e^3}\right)x^2 + \left(\frac{\alpha\delta}{e} + \frac{\beta\gamma}{e^3} - \frac{\alpha\beta^3}{2e^5}\right)x^3 + \ldots\right\};$$

откуда найдется

$$\gamma = k\beta e$$

$$\delta = \tfrac{1}{3}k\left(\frac{\alpha\beta\beta}{e} + 2\gamma e\right)$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{6}k\left(\frac{3\alpha\beta\gamma}{e} + \frac{\beta^3}{2e^3} + 3\delta e\right)$$

$$\zeta = \tfrac{1}{15} k \left(\frac{2\alpha(2\beta\delta + \gamma\gamma)}{e} + \frac{2\beta\beta\gamma}{e^3} - \frac{\alpha\beta^4}{2e^5} + 4\varepsilon e \right)$$

и такъ далѣе.

Такимъ образомъ величины γ, δ, ε и проч. опредѣлятся чрезъ α и β. Чтожъ принадлежитъ до опредѣленія сихъ двухъ величинъ, то поелику при $x = o$ должно быть $q = tang. \zeta$, будетъ $\alpha = tang. \zeta$; потомъ поелику $\frac{dq}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + \ldots\ldots$

$= -2gpp$, и при $x = o$ величина $p = \frac{1}{c. cos \zeta}$, будетъ

$\beta = -\frac{2g}{cc. cos \zeta^2}$.

Наконецъ изъ уравненія $q = \frac{dy}{dx} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$

$+ \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \ldots\ldots$ найдется

$y = \alpha x + \frac{1}{2}\beta x^2 + \frac{1}{3}\gamma x^3 + \frac{1}{4}\delta x^4 + \frac{1}{5}\varepsilon x^5 + \frac{1}{6}\zeta x^6 + \ldots\ldots$

15. Естьли бы положить, что сопротивленіе причиняемое воздухомъ равно нулю, а по сему $k = o$, то, поелику при семъ величины γ, δ, ε и проч. обратились бы въ нуль, уравненіе для кривой линѣи было бы

$y = \alpha x + \frac{1}{2}\beta x^2$

или $y = x \, tang \zeta - \frac{gxx}{cc. Cos \zeta^2}$;

которое принадлежитъ къ Параболѣ. По сему естьли бы около нашей земли не было воздуха, то бы всѣ тѣла бросаемыя подъ косымъ угломъ къ горизонту описывали обыкновенную Параболу.

16. Естьли въ уравненіи (a) подставимъ вмѣсто $dx\sqrt{(1+qq)}$ количество ds, то полу-

чимъ $dp - kpds = o$, а по сему будетъ $\frac{dp}{p} = kds$ и $Ap = e^{ks}$; для коего уравненія постоянная величина A найдется по разсужденію, что при $s = o$ должно быть $p = \frac{1}{c. Cos \zeta}$. Слѣдовательно будетъ вообще $p. c. Cos \zeta = e^{ks}$; такъ что естьли горизонтальная скорость тѣла вообще назначится чрезъ v, то будетъ

$$v. e^{ks} = c. Cos \zeta.$$

17. Естьли величину дуги кривой линѣи тѣломъ описываемой взятую отъ начала до ея вершины, назначимъ чрезъ σ, и скорость при вершинѣ, какъ и въ § 8, назначимъ чрезъ v, то будетъ $v. e^{k\sigma} = c. Cos \zeta$; и какъ $v = \sqrt{\frac{g}{a}}$, то будетъ $e^{2k\sigma} = \frac{a. cc. Cos \zeta^2}{g}$; откуда найдется

$$\sigma = \frac{1}{2k} \log. \frac{acc. Cos \zeta^2}{g}.$$

18. Изъ уравненія $p = \frac{e^{ks}}{c. Cos \zeta}$ получится $pp = \frac{e^{2ks}}{cc. Cos \zeta^2}$, и $pdp = \frac{kds}{cc. Cos \zeta^2} . e^{2ks}$; которая величина когда подставится въ уравненіи (c), то будетъ

$$2 g. e^{2ks} ds + cc. Cos \zeta^2. dq \sqrt{(1+qq)} = o.$$

Назначимъ въ семъ уравненіи $k = o$, то оно, какъ мы выше видѣли, принадлежать будетъ къ параболѣ. Пусть дуга сея послѣдней линѣи, отъ того же начала взятая, назначится чрезъ s', то при такомъ же въ ней тангенсѣ q будетъ $2gds' + cc.\,Cos\zeta^2.\,dq\sqrt{(1+qq)} = o$; а по сему при одинакомъ тангенсѣ q какъ въ той такъ и въ другой кривой линѣи будетъ e^{2ks} $ds = ds'$, коего уравненія интегралъ будетъ $e^{2ks} = C + 2ks'$. И какъ величины s и s' начинаются въ одной точкѣ, то будетъ $C = 1$; а посему

$$e^{2ks} = 1 + 2ks'$$

или $s = \frac{1}{2k}\log(1 + 2ks')$.

19. Что принадлежитъ до коеффиціента сопротивленія k, то теорія, прилагая къ движенію тѣлъ въ жидкостяхъ законы сраженія тѣлъ определенной массы, для шарообразнаго тѣла радіуса r и плотности δ, движущагося въ жидкости, коея плотность D, доставляетъ при упругой жидкости $k = \frac{D}{\delta r}$, при неупругой же $k = \frac{D}{2\delta r}$. Но какъ сіе приложеніе по неопредѣленности жидкости, въ коей тѣло движется, мѣста имѣть не может, то сіи выраженія величины k много удаляются отъ истинны; опытъ же показываетъ, что для воздуха близко къ истиннѣ $k = \frac{2}{9} \cdot \frac{D}{\delta r}$.

Возьмемъ для метаній въ воздухѣ $k = \frac{2}{9} \cdot \frac{D}{\delta r}$, и приложимъ его къ примѣрамъ.

1. Свинцовая пуля радіуса 0,0265 Французскаго фута выстрѣлена изъ ружья со скоростію 1625 Французскихъ футовъ подъ угломъ къ горизонту $7° 15'$. Спрашивается, въ какомъ разстояніи она опять упадетъ на горизонтъ?

Плотность свинца 11,35, средняя же плотность воздуха по Лавоазіеру $\frac{1}{812}$ въ сравненіи съ плотностію воды; по сему $log.\ k = 6{,}9498893$, $log.\ hyp.\ tang.\ (\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\zeta) = log.\ hyp.\ tang.\ 48° 37\frac{1}{2}' =$ $0{,}126869$; $\frac{sin\,\zeta}{Cos\,\zeta^2} = 0{,}128241$, $a = 0{,}00011946$, $log.\ a = 6{,}0772225$; $log.\ \mu = 0{,}8726673$, $log.\ b = 9{,}1045420$, $log.\ b' = 9{,}6404998$; откуда найдется $f + f' = 2498$ футовъ. При опытахъ же дѣланныхъ въ Туринѣ сіе пространство на самомъ дѣлѣ было 2655 футовъ; а по сему сопротивленіе предположенное нами еще болѣе должнаго, что можетъ произойти отъ несоотвѣтственнаго предположенія плотности пули и воздуха.

2. Бомба имѣющая въ радіусѣ половину Французскаго фута, коея относительная тяжесть 5, брошена подъ угломъ 45° къ горизонту со скоростію 350 футовъ въ секунду. Спр. широта кривой линѣи, которую она опишетъ

При предположеніи средней плотности воздуха въ $\frac{1}{812}$ противъ воды найдется

$$k = \frac{4}{9.812.5} = \frac{1}{9.203.5} = 0{,}00010942;\ a = 0{,}00037211,$$

$log.\ \mu = 9{,}4686201$; $b = 0{,}5868$; $b' = 0{,}6560$; положивъ же $\nu = \frac{1}{2}(1 - 2\mu)$ и $\nu' = \frac{3}{2}\mu$, по формуламъ (h) и (h') получимъ

$$= \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{\sqrt{(3-2\mu+\mu\mu)}}\, log.\ hyp.\ \frac{1+\frac{1}{2}b[\sqrt{(3-2\mu+\mu\mu)}-(1+\mu)]}{1-\frac{1}{2}b[\sqrt{(3-2\mu+\mu\mu)}+1+\mu]} \right.$$
$$+\tfrac{1}{6}\mu b^3+(\tfrac{1}{3}\mu+\tfrac{1}{4}\mu^2)b^4+\tfrac{1}{5}(\tfrac{3}{2}\mu^3+\tfrac{19}{12}\mu^2+\tfrac{7}{6}\mu-\tfrac{1}{4})b^5$$
$$\left. +\tfrac{1}{6}(2\mu^4+2\tfrac{3}{4}\mu^3+3\tfrac{1}{4}\mu^2+\tfrac{21}{10}\mu-\tfrac{3}{4})b^6+\ldots\ldots \right\}$$

$$f' = \frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{\sqrt{(1+\mu+\mu^2)}}\, log.\ hyp.\ \frac{1+\frac{1}{2}b'[\sqrt{(1+\mu+\mu\mu)}-(1-\mu)]}{1-\frac{1}{2}b'[\sqrt{(1+\mu+\mu\mu)}+1-\mu)} \right.$$
$$+(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{3}\mu)b'^3+\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{8}{3}\mu+2\mu^2)b'^4+\tfrac{1}{5}(\tfrac{3}{2}-\tfrac{14}{3}\mu+\tfrac{29}{6}\mu^2-3\mu^3)b'^5$$
$$\left. +\tfrac{1}{6}(2-\tfrac{71}{10}\mu+8\tfrac{1}{2}\mu^2-7\mu^3+4\mu^4)b'^6+\ldots\ldots \right\}$$

По сему $f=1675$ фут. $f'=1340$ футовъ, и вся горизонтальная широта 5015 футовъ.

20. Въ разсужденіи употребленія выведенныхъ нами предъ симъ формулъ вообще замѣтить должно, что по измѣняющейся плотности воздуха δ величина k выражающаяся чрезъ $\frac{\lambda D}{\delta r}$ въ разныя времена бываетъ разная, такъ что когда при измѣненіи плотности воздуха δ въ δ' величина k измѣнится въ k', то будетъ $k'=\frac{\delta'}{\delta}k$; причемъ, буде плотность δ соотвѣтствовала высотѣ барометра h и теплотѣ $t°$ Реом., плотность же δ' соотвѣтствуетъ высотѣ барометра h' и теплотѣ $t'°$ Реом., будетъ

$$\delta'=\frac{h'\delta}{h\left\{1+\frac{3(t'-t)}{640}\right\}},\ \text{и}\ \frac{\delta'}{\delta}=\frac{h'}{h\left\{1+\frac{3(t'-t)}{640}\right\}};\ \text{а по сему}$$

будетъ $k'=\dfrac{h'k}{h\left\{1+\frac{3(t'-t)}{640}\right\}}$.