ГЛАВА ВТОРАЯ.

Троякое составленіе данныхъ чиселъ, или о трехъ явныхъ — открытыхъ равенствахъ, именуемыхъ тожествами.

ОТДѢЛЕНІЕ I.

СЛОЖЕНІЕ.

a.) Общія изслѣдованія.

§ 6.

Изъ §§ 1, 2 и 3, видѣли какимъ образомъ раскладывается по частямъ изслѣдуемый мѣрою предметъ, и какъ сіи части выражаются знаками: но, если обратно соединимъ первыя, то безъ сомнѣнія, по § 1, слѣд. 4, составится цѣлый предметъ; если же соединимъ ихъ выраженія или цыфры, то—числовая его величина; (слѣдствіе 5). Соединеніе послѣднихъ называется *сложеніемъ* и изображается слѣдующимъ образомъ: 5 *съ* 4 *очевидно* составляютъ число 9, но чтобы *написать*

5 *съ* 4=9 (§ 4, 111),

то вмѣсто слова *съ*, вносятъ знакъ (+) *плюсъ* (значитъ больше) и чрезъ то общая форма сложенія принимаетъ слѣдующій видъ:

$$5+4=9$$

Дѣйствительность сего равенства, доказывается разложенiемъ 5 и 4 на ихъ единицы; а именно: $5 + 4 = (1 + 1 + 1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1) = 9$, слѣд.

$$5 + 4 = 9;$$

что выговаривается такъ: 9 *равно* 5 *плюсъ* 4, или 5 *съ* 4 *равно* 9. Сей выводъ или результатъ сложенiя называется *суммою*; т. е. 9 есть сумма чиселъ 5 и 4, которыя именуются *слагаемыми*. И такъ *сумма равна всѣмъ слагаемимъ, вмѣстѣ взятымъ*. Отсюда слѣдствiя:

1. Совокупить или сложить нѣсколько чиселъ, значитъ составить изъ нихъ общее число, которое бы заключало въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ находится во всѣхъ слагаемыхъ, отдѣльно разсматриваемыхъ; слѣд. *сложенiе есть соединенiе многихъ чиселъ, въ одно общее и всѣмъ имъ вмѣстѣ равное*.

2. Выраженiе $9 = 5 + 4$ вообще именуется *открытымъ равенствомъ* или *тожествомъ* перваго вида, въ которомъ, 9 есть первая часть, а $5 + 4$ вторая; слѣд. *тожество состоитъ изъ двухъ частей, совершенно между собою равныхъ*. И такъ сумма безъ слагаемыхъ, и слагаемыя безъ суммы несуществуютъ; понятiе одного нераздѣльно слито съ понятiемъ другихъ, такъ что безъ равенства нѣтъ ни суммы, ни слагаемыхъ.

3. Поелику сумма есть слѣдствiе слагаемыхъ, то *первая должна быть однородна съ послѣдними*.

4. Ни съ чемъ такъ хорошо нельзя сравнить слагаемыхъ и суммы, или вообще говоря тожества, какъ съ *вѣсами*, въ равновѣсiе приведенными, чрезъ положенiе на обѣ чаши равныхъ тяжестей, изъ коихъ на одной будетъ она раздробленною, а на другой цѣлою: если на одну чашу, такимъ

образомъ уравновѣшенную, еще прибавимъ какую либо тяжесть, или нѣсколько разъ оную прибавимъ, что значитъ *увеличить въ нѣсколько разъ* или: если изъ одной чаши отымемъ туже тяжесть, или нѣсколько разъ отымемъ оную, что значитъ *уменьшить въ нѣсколько разъ*, то и на другой чашѣ тоже надлежитъ здѣлать, для того, *чтобъ равновѣсія ненарушить*. Такое же свойство имѣетъ и тожество или открытое равенство, въ умственномъ, отвлеченномъ значеніи. Такъ, если $9 = 5 + 4$, то и $9 + 3 = (5+4) + 3$. Ибо 9, принявъ 3, хотя и удалилось отъ $5+4$ на *три* степени, но $5 + 4$, равное 9, принявъ тоже 3 опять приблизилось на тѣ же три степени; то же выйдетъ, если обѣ части $9 = 5 + 4$ увеличимъ въ нѣсколько разъ; или: если изъ двухъ частей $9=5+4$ отымемъ 3, или въ нѣсколько разъ уменьшимъ 3-мя. Вообще *равныя количества послѣ равныхъ измененій, каковыбы сіи измененія не были, остаются всегда равными между собою*. Но равныя количества, послѣ разныхъ измененій, не бываютъ равными; а потому отсюда новая аксіома: *если къ двумъ равнымъ числамъ придадутся неравныя, или первыя въ нѣсколько разъ увеличатся на неравныя степени, то тотъ выводъ будетъ больше, въ которомъ придаваемое больше*. Если же, изъ двухъ равныхъ чиселъ *отымется по неравному*, или оба равныя *въ нѣсколько разъ уменьшатся на неравныя степени, то на оборотъ, тотъ выводъ будетъ больше, въ которомъ отнимаемое меньше*. Для яснѣйшаго уразумѣнія этихъ истинъ, должно обратится къ вѣсамъ и съ ними здѣлать эти измененія. И обратно, если *къ неравнымъ числамъ придастся по рав-*

ному, или первыя *увеличатся на равныя степени; или*, если изъ двухъ неравныхъ—*отымется по равному*, или оба неравныя *уменьшатся на равныя степени; то тотъ выводъ будетъ больше, въ которомъ уже измѣняющееся больше*: $5<9$, слѣд. $5+3<9+3$ и проч. Ибо число 5 принявъ 3, хотя и приближается къ 9; но въ то же время 9, *принявъ* то же 3, отъ него удаляется; и проч. Здѣсь 5 и 9 суть *измѣняющіяся* и т. д.

Въ этихъ трехъ аксіомахъ заключается главное основаніе всѣхъ математическихъ изслѣдованій.

5. Поелику въ приведенномъ тожествѣ результатъ или выводъ 9 равенъ $5+4$ или $2+3+4$, слѣд.

изъ $9=5+4=2+3+4$

получаемъ

$$9>\left\{\begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}2+3=5\\2+4=6\\3+4=7\end{matrix}\right.$$

т. е. *сумма больше каждаго слагаемаго, количествомъ прочихъ слагаемыхъ;* и обратно, *слагаемыя тѣмъ ближе подходятъ къ суммѣ своей, чѣмъ ихъ будетъ взято больше.*

Замѣчаніе 1). Нуль есть *ничто* слѣд. сколько бы ихъ неслагалось вмѣстѣ, не могутъ произвести чего либо, *посему и число не увеличится, если къ нему придастся*, (но не припишется) *нѣсколько нулей.* Такъ $0+0+0=0$, $5+0=5$; но если къ 5 съ правой руки припишется 0, то оно будетъ не 5 а 50.

2). Основаніемъ сложенія всѣхъ данныхъ чиселъ служитъ сумма первыхъ десяти знаковъ, а потому начинающіе должны сперва выучить ее твердо. Она предлагается въ слѣдующихъ столбцахъ, и преимущественно полезна для вычитанія.

0+0=0	1+3= 4	2+7= 9	4+5= 9	6+7=13
0+1=1	1+4= 5	2+8=10	4+6=10	6+8=14
0+2=2	1+5= 6	2+9=11	4+7=11	6+9=15
0+3=3	1+6= 7	3+3= 6	4+8=12	7+7=14
0+4=4	1+7= 8	3+4= 7	4+9=13	7+8=15
0+5=5	1+8= 9	3+5= 8	5+5=10	7+9=16
0+6=6	1+9=10	3+6= 9	5+6=11	8+8=16
0+7=7	2+2= 4	3+7=10	5+7=12	8+9=17
0+8=8	2+3= 5	3+8=11	5+8=13	9+9=18
0+9=9	2+4= 6	3+9=12	5+9=14	
1+1=2	2+5= 7	4+4= 8	6+6=12	
1+2=3	2+6= 8			

b.) *Частныя изслѣдованія.*

§ 7.

Вычисленіе суммы. Совокупить *сложныя* числа значитъ *сосчитать сколько въ нихъ содержится вообще числъ*: *единицы перваго порядка*, *втораго*, *третьяго и* т. д. Слѣд. стоитъ только соединять одинакіе роды числъ порознь. А какъ при этомъ соединеніи числа единицы перваго порядка могутъ давать число десятка; числа десятка—число сотни; числа сотни—число тысячи и т. д., то отъ чиселъ единицы отсчитываютъ число десятка, отъ десятка—число сотни, отъ сотни—число тысячи и т. д. и придаютъ ихъ къ даннымъ числамъ десятка, сотни, тысячи и проч. *вообще къ однороднымъ.* Вотъ примѣръ, чему равняется: 509068 +748+7482 + 800090+8000+3600 459+3333 + 555+777? Сосчитавши числа единицы перваго порядка получаю 34 т. е. 4 единицы и 3 десятка, которыя придаю къ десяткамъ и нахожу 44 т. е. 4 десятка и 4 сотни; послѣднія отнесши къ сотнямъ составляю 27 т. е. 7 сотень и двѣ тысячи; придавши 2 тысяч. къ тысячамъ составляю 34 т. е. 4 тысячи и три десятка оныхъ; слѣд. цыѳру 3 надобно отнести къ десяткамъ тысячь,— выдетъ только 3; наконецъ сотень тысячь выходитъ 9, а милліоновъ—4. Вообще, *десятки выходящія при сложеніи въ суммахъ каждаго порядка единицъ, относятся къ послѣдующему высшему порядку;* итакъ 4934744 равно искомой суммѣ.

Для большой удобности слагаемыя числа подписываютъ одно подъ другимъ, располагая единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д. въ однихъ столбцахъ; или иначе, чтобъ единицы соотвѣтствовали единицамъ, десятки—десяткамъ, сотни—сотнямъ и проч; и такое расположеніе слагаемыхъ общеупотребительно. Напримѣръ, чтобъ сложить

502+709009+9008+72030456

то пишутъ такъ:

$$
\begin{array}{r}
502 \\
709009 \\
9008 \\
72030456 \\
\hline
72,748,975.
\end{array}
$$

Если бы сумма цыѳръ каждаго столбца, непревышала числа 9, то можно было бы начинать сложеніе съ чиселъ единицы высшаго разряда, переходя къ сложенію числъ низшаго; въ противномъ же случаѣ такое дѣйствіе—весьма затруднительно; потому что, производя сложеніе съ лѣвой руки, часто должны были бы возвращаться назадъ, для повѣрки написанной предъ тѣмъ цыѳры и для увеличенія ее столькими единицами, сколько слѣдующій разрядъ имѣетъ десятковъ и единицъ; почему для *предосторожности* всегда лучше начинать дѣйствіе съ правой, а потому для сложенія общее правило: *должно расположить данныя слагаемыя числа такъ, чтобъ однородныя были въ однѣхъ столбцахъ, потомъ проведши подъ ними черту*, — въ этомъ состоитъ пріуготовленіе, *слагать однородныя, стоящія въ первомъ съ правой стороны столбцѣ и подъ чертою противъ онаго писать сумму найденныхъ цыфръ, если оная непревышаетъ* 9; *иначе же число десятка должно удерживать, для прибавленія къ непосредственно—однороднымъ слѣдующаго столбца.* Поступая такимъ образомъ со всѣми разрядами *опредѣлимъ требуемую сумму.*

§ 8.

Всѣ задачи на сложеніе разрѣшаются скрывающимся въ нихъ смысломъ: *чѣмъ больше, тѣмъ больше.*

Вотъ примѣръ:

1. Купецъ продалъ товара въ первой день на 3460 руб., во второй на 10,790 руб., въ третій на 286 руб. Спраш. какую сумму выручилъ въ три дни?

Рѣшеніе. Небольшое вниманіе нужно, дабы усмотрѣть, что здѣсь требуется опредѣлить сумму всего дохода, который будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе частныя доходы, а потому вычисляю:

$$\begin{array}{r} 3460 \\ 10790 \\ +286 \\ \hline 14536 \end{array}$$

14536 руб. выручилъ въ три дни.

Примѣч. Подробное изложеніе вопросовъ, какъ на это, такъ и на всѣ послѣдующія дѣйствія, читай въ собраніи ариѳметическихъ задачь, составленномъ Департаментомъ Народнаго Просвѣщенія, для руководства Уѣздныхъ Училищъ.

ОТДѢЛЕНІЕ II.

УМНОЖЕНІЕ.

a.) Общія изслѣдованія.

§ 9.

Когда требуется складывать числа равныя, какъ: $2+2+2+2=8$, то сей видъ сложенія называется *умноженіемъ* и выражается сокращенно такъ:

$$2.4=8, \text{ или } 2\times 4=8.$$

Числа 2 и 4 вообще называются *факторами* или *про-*

изводителями; данное слагаемое 2 — *множимымъ;* 4, означающее *число равныхъ слагаемыхъ — множителемъ,* а результатъ или выводъ 8 — *произведенiемъ.* Изъ сего слѣдуетъ, что произведенiе безъ производителей и производители безъ произведенiя невозможны; понятiе одного слито съ понятiемъ другихъ; слѣд. выраженiе умноженiя есть тожество *втораго вида,* которое разсматривая подробнѣе, находимъ, что *число повторенiй одного производителя въ своемъ произведенiи означается другимъ производителемъ.* Такъ въ приведенномъ тожествѣ 2.4=8 производитель 2 показываетъ, что другой производитель 4 долженъ повторится два раза, дабы составить 8; также 4 означаетъ, что 2 повторяется четыре раза, чтобъ произвести тоже 8; такъ что вообще произведенiе противъ одного изъ своихъ производителей *во столько разъ больше,* сколько въ другомъ производителѣ заключается единицъ и обратно, данный производитель *во столько разъ меньше* своего произведенiя, сколько содержится единицъ въ другомъ данномъ производителѣ; словомъ: *произведенiе равно множимому увеличенному,* (умноженному) *множителемъ.*

Почему при изображенiи открытыхъ равенствъ:

$$2.4=8, \text{ или } 2\times4=8$$

говорятъ: 2 *взятое* 4 раза *равно* 8; (ибо равныхъ слагаемыхъ 4); или *четырежды* 2 *равно* 8; или 2 помноженное на 4 *равно* 8.

Откуда слѣдуетъ:

I. Поелику произведенiе составляется изъ равныхъ слагаемыхъ; то первое, какъ слѣдствiе вторыхъ, должно быть *однородно съ однимъ изъ производителей*, который есть собственно множимое и *разнородно съ другимъ—съ множителемъ;* слѣд. множитель есть число *чисто отвлеченное*, множимое же, и произведеніе—*выраженіе количествъ;* изъ коихъ первое, какъ данная мѣра, а второе, какъ данное мѣримое (§ 1 и 2.).

II. Въ умноженіи даются два числа 2 и 4 и требуется составить третье 8 такъ какъ одно данное, напр. 4 составлено изъ *единицы*; ибо умножить число 2 на 4 значитъ 2 повторить 4 раза; для составленія же 4 тоже надобно единицу повторить 4 раза и обратно чтобъ умножить 4 на 2, то 4 повторяю 2 раза; и для составленія 2 единицу повторяю два раза.

III. Помножить одно число на другое, значитъ сложить первое столько разъ, сколько въ второмъ *единицъ безъ одной*; ибо

$$\underbrace{2+2}_{1}\underbrace{+2}_{2}\underbrace{+2}_{3}=8 \text{ и } 2.\ 4=8$$

IV. *Произведеніе неперемѣняется отъ перемѣны порядка производителей*; т. е. *когда множимое сдѣлается множителемъ, а множитель множимымъ произведеніе остается постояннымъ.* Ибо, число повтореній одного производителя въ своемъ произведеніи означается другимъ производителемъ (§ 9). Такъ, если надобно 5×3, то собственно должно 5 единицъ повторить 3 раза т. е. написать:

$$\begin{array}{c}1+1+1+1+1\\1+1+1+1+1\\1+1+1+1+1\end{array}$$

и потомъ сложить; выдетъ 3+3+3+3+3 или 3. 5. И такъ 5.3=3.5;—заключеніе справедливо.

V. Предлагаемая ниже сего таблица, которой составленіе приписываютъ Пиѳагору одному изъ Греческихъ Философовъ, содержитъ произведенія первыхъ десяти числъ, взаимно перемноженныхъ и служитъ основаніемъ для нахожденія произведенія всѣхъ данныхъ чиселъ.

0.0=0	1.8= 8	3.9=27	7.7=49
1.0=0	1.9= 9	4.4=16	7.8=56
2.0=0	2.2= 4	4.5=20	7.9=63
3.0=0	2.3= 6	4.6=24	8.8=64
4.0=0	2.4= 8	4.7=28	8.9=72
5.0=0	2.5=10	4.8=32	9.9=81
6.0=0	2.6=12	4.9=36	
7.0=0	2.7=14	5.5=25	
8.0=0	2.8=16	5.6=30	
9.0=0	2.9=18	5.7=35	
1.1=1	3.3= 9	5.8=40	
1.2=2	3.4=12	5.9=45	
1.3=3	3.5=15	6.6=36	
1.4=4	3.6=18	6.7=42	
1.5=5	3.7=21	6.8=48	
1.6=6	3.8=24	6.9=54	
1.7=7			

§ 10.

Весьма продолжительно находить произведеніе большаго числа, складывая множимое столько разъ, сколько во множителѣ единицъ безъ одной, какъ требуетъ опредѣленіе § 10 член. III; для того предлагаемъ сокращеннѣйшій способъ, на основаніи (§ 9, V,). Онъ состоитъ изъ *двухъ случаевъ:* или когда данное сложное число помножается на простую цыфру; или, когда сложное— на сложное. Но предварительно замѣтимъ:

I. Изъ § 4, III, видѣли, что десятокъ повторенный 10 разъ составляетъ сотню; слѣд. и выраженіе десятка повторенное десять же разъ производитъ 100 или 10.10=100. Также 10 сотень составляютъ тысячу слѣд. и 100.10=1000 и. т. д. Изъ чего слѣдуетъ, что если *единицы разныхъ порядковъ перемножатся между собою, то въ произведеніи получится выраженіе единицы высшаго порядка, содержащей нули всѣхъ низшихъ.*

II. На основаніи сего, чтобъ 1000 умножить напр: числомъ 7, то по § 7 выдетъ 7000; ибо

1000. 7 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 1000 1000=7000; также (по § 9. IV.)

100. 375=375. 100=37500.

Вообще, *если число должно увеличить въ* 10,000,1000......*разъ, то въ произведеніи пишется множимое и при немъ нули множителя.* Посему и обратно: *число, имѣющее на концѣ нули можно принимать за произведеніе, коего одинъ производитель ровенъ числу, а другой единицѣ съ нулями произведенія.* Такъ 57000 все тоже что 57.1000.

III. Послѣ сего легко найти правила для перемноженія чиселъ, имѣющихъ на концахъ нули. Напр., если требуется помножить 300. 4, то по общимъ правиламъ имѣемъ

300.4=300+300+300+300=1200

но 1200=12.100, а 12=3.4.

Слѣд. подставивъ 3.4 вмѣсто 12 получимъ общее правило а:)

$$300.4=3.4.100=1200$$

т. е. *чтобъ число выраженное одною цыфрою съ нулями* (какъ въ нашемъ рѣшеніи 300) *умножить на число выраженное одною же цыфрою безъ нулей,* (какъ 4), *то должно только* по Пиѳагоровой таблицѣ, *самыя числа перемножить и къ произведенію приписать нули множимаго.* Сравнивая же найденное произведеніе 1200 съ обоими производителями 300 и 4 находимъ, что оно содержитъ 12 сотенъ; въ слѣдствіе того общее правило Ѣ): *произведеніе, выходящее отъ числа высшаго порядка на простыя единицы,* или обратно *отъ простыхъ единицъ на число высшаго порядка, всегда однородно съ симъ послѣднимъ.* Это заключеніе весьма важно, для умноженія и дѣленія сложныхъ чиселъ.

IV. Если же требуется умножить 210.78500, то знаемъ, что 210=21. 10 и 78500=785.100; слѣд.

$$210\times78500=21.\ 10.\ 785.100.$$

Но порядокъ производителей можемъ перемѣнить безъ измѣненія произведенія; посему

$$210\times78500=785.\ 21.\ 100.\ 10.$$

Поелику же

$$100.\ 10=1000, \text{ то}$$
$$210\times78500=(785.21).\ 1000.$$

Вообще *въ произведеніи выходитъ столько нулей, сколько содержится ихъ во множимомъ и мно-*

житель; по чему для сокращенія выкладокъ перемножаютъ одни числа, напр. 785 на 21 и къ найденному уже произведенію приписываютъ прямо извѣстное число нулей; здѣсь ихъ должно быть три.

V. *Число знаковъ произведенія зависитъ отъ крайнихъ съ лѣвой руки цыфръ обоихъ производителей.* Такъ 500. 700=35000 а 1000. 100=10000. Откуда заключаемъ, *что число знаковъ произведенія равно числу оныхъ въ обоихъ производителяхъ, или однимъ меньше,* если крайнія съ лѣвой руки цыфры такъ малы, что немогутъ произвести десятка.

b). Частныя изслѣдованія.

§ 11.

Вычисленіе произведенія. Перейдемъ теперь къ опредѣленію правилъ, для перемноженія самыхъ чиселъ.

Случай 1. Положимъ, что требуется 348×7. Разсуждаю: 348 тогда повторится 7 разъ или сложится шесть разъ, когда повторится столько же разъ каждое изъ членовъ 300+40+8, составляющихъ число 348 и потому пишу

$$348.\ 7=300.\ 7+40.7+8.7=\left\{\begin{array}{r}300.7\\+40.7\\+8.7\end{array}\right.$$

Но по § 9,V; § 10,III вижу, что 8.7=56, 40.7=280; 300. 7=2100. Слѣд., соединивши эти частныя произведенія въ одно общее, получимъ

$$\begin{array}{r}300.7=2100\\40.7=\ \ 280\\8.7=\ \ \ \ 56\\\hline 348.7=2436\end{array}$$

Изъ самаго хода рѣшенія замѣчаемъ, что продолжительность выкладки можно сократить тѣмъ, если частныя произведенія будемъ соединять при самомъ умноженіи. Напр., помножая 8607 на 9 отъ повторенія единицъ нахожу 63, откуда, отдѣливъ 6 десятковъ придаю ихъ къ произведенію десятковъ, которое есть нуль; потомъ изъ 54—произведенія сотень, исключаю 5 тысячь и прикладываю къ произведенію тысячь: 72 получаю 77. И такъ полное произведеніе будетъ:

$$8607.9=77463.$$

Изъ сихъ изслѣдованій выводимъ общее правило: *чтобъ данное сложное число помножить на множителя выраженнаго одною цыфрою, то должно* 1-е, *помножать, начиная съ правой руки, отдѣльно кажду цыфру множимаго;* 2-е, *выходящія отъ сего единицы писать по порядку однѣ за другими влѣво, а десятки удерживать, для приложенія ихъ къ каждому слѣдующему помноженію высшей цыфры;* 3-е, *что продолжать до крайняго съ лѣвой руки знака, отъ котораго полученный десятокъ,* уже неудерживать, а *писать возлѣ послѣднихъ слѣва единицъ;* то 4-е, *найденный такимъ образомъ рядъ чиселъ и опредѣлитъ искомое произведеніе.*

§ 12.

Случай II. Найти произведеніе 5673×9050.

Поелику число 5673 должно повторить 9000+50 разъ; слѣд.

$$5673.\ 9050=5673\times50+5673\times9000 \quad (\S\ 11)$$

$$\text{но } 5673.\ 50=283650$$

$$\text{и } 5673\times9000=51057000;$$

$$\overline{5673.\ \ 9050=51340650}$$

И такъ, *при сложномъ множимомъ и множителѣ должно помножить все множимое на каждую цыфру множителя* (§ II); *назначить порядокъ каждаго частнаго произведенія приписываніемъ къ нему столько нулей, сколько отъ той цыфры множителя, которая произвела данное произведеніе, остается оныхъ во множителѣ вправо* (§ 10 IV,); *то сумма частныхъ произведеній будетъ искомое произведеніе.*

Для удобности все дѣлопроизводство располагается въ такомъ видѣ:

$$\begin{array}{r} 5673.9050=283650 \\ \underline{51057000} \\ 51340650 \end{array}$$

Или подписываютъ множителя подъ множимымъ, ставя числа одинакого рода въ одномъ столбцѣ и потомъ, подчеркнувъ, перемножаютъ по выведенному правилу:

$$\begin{array}{r} 900030 \\ \underline{7002003} \\ 2700090 \\ 1800060000 \\ \underline{6300210000000} \\ 6302012760090 \end{array}$$

Въ практикѣ для сокращенія опускаются нули, поставленные съ правой руки въ частныхъ произведеніяхъ, на десятки сотни и пр., а за то выступаютъ каждымъ слѣдующимъ частнымъ произведеніемъ на одну цыфру влѣво; т. е. *первую цыфру справа каждаго частнаго произведенія пишутъ подъ тѣмъ разрядомъ, къ которому принадлежитъ цыфра множителя* (§ 10, III прав. Ь). Вотъ примѣръ

$$\begin{array}{r} 87468 \\ 5847 \\ \hline 612276 \\ 349872 \\ 699744 \\ 437340 \\ \hline 511425396 \end{array}$$

Если множимое и множитель будутъ весьма многосложны и во множителѣ нѣкоторыя цыфры повторяются, то для составленія полнаго произведенія, должно сперва составить, (для сокращенія дѣйствія), частныя произведенія, чрезъ умноженіе множимаго на разныя цыфры множителя, потомъ симъ произведеніямъ назначить ихъ порядокъ и складывать. Напримѣръ, въ 563×820391732? разныхъ частныхъ произведеній шесть: отъ 1...... 563; отъ 2......1126; отъ 3.....1689; — 7.....3941;8.... 4504;—9.......5067, изъ которыхъ составляю:

```
        563
  820391732
-----------
       1126
      1689
     3941
     563
   5087
  1689
 1126
4504
------------
461880545116
```

Сей примѣръ заставляетъ спросить, не лучше ли бы помножить на множимое 563 весь множитель? Безъ сомнѣнія гораздо удобнѣе, а при томъ имѣемъ на это и полное право; поелику знаемъ, что произведеніе непеременяется, когда множимое сдѣлается множителемъ, а множитель множимымъ.

Примѣчаніе. Правила на рѣшеніе практическихъ вопросовъ и самыя рѣшенія оныхъ излагаютъ по тѣсной связи въ (§ 54 и 55), вмѣстѣ съ таковыми же на дѣленіе.

ОТДѢЛЕНІЕ III.

СТЕПЕНИ.

Общія изслѣдованія.

§ 13.

Умноженіе получаетъ наименованіе *возвышенія въ степень,* если его составляютъ равныя производители, какъ:

$$5.5=25$$
$$5.5.5=125$$
$$5.5.5.5=625$$
$$5.5.5.5.5=3125$$
$$5.5.5.5.5.5=15{,}625 \text{ и проч.}$$

Эти равенства суть тожества *третьяго вида.* Откуда видно, что чѣмъ выше степень, тѣмъ неудобнѣе ея изображеніе въ видѣ произведенія; а какъ цыфра 5 входитъ производителемъ 2, 3, 5......разъ, по этой причинѣ, показанный видъ умноженія сокращаютъ такъ:

$$5^2=25;\ 5^3=125;\ 5^4=625;\ 5^5=3125;\ 5^6=15625 \text{ и проч.}$$

т. е. *вмѣсто всѣхъ производителей берутъ одинъ и надъ нимъ съ правой руки ставятъ цыфру, показывающую ихъ число;* почему 2, 3, 4, называются *показателями;* производитель 5 — *основаніемъ,* произведенія 25, 125, 625—*степенями.* О изображеніяхъ же

$$5^2=25;\ 5^3=125;\ 5^4=625 \text{ и проч.}$$

говорятъ: 5, *возвышенное* до 2-хъ, *равно* 25; 5, *возвышенное* до трехъ, *равно* 125; 5, *возвышенное до* 4-хъ, *равно* 625 и т. д.; посему вообще

I. *Степень равна основанію возвышенному до показателя.*

II. Возвысить же основаніе, *значитъ помножить его на себя столько разъ, сколько единицъ содержитъ показатель безъ одной;* ибо

$$5^6=5.\ 5.\ 5.\ 5.\ 5.\ 5.$$

1, 2, 3, 4, 5.

III. Степень составленная изъ двухъ равныхъ производителей имѣетъ званіе *квадратной,* или просто *квадрата,* какъ 5.5=25; если изъ трехъ, то—подъ именемъ *куба* ее разумѣютъ: 5.5.5.=125; если изъ четырехъ—*четвертою* степенью, или *биквадратомъ;* и. т. д.

Весьма полезно знать слѣдующую таблицу степеней квадратовъ и кубовъ первыхъ десяти знаковъ

$0^2=0$	$0^3=0$
$1^2=1$	$1^3=1$
$2^2=4$	$2^3=8$
$3^2=9$	$3^3=27$
$4^2=16$	$4^3=64$
$5^2=25$	$5^3=125$
$6^2=36$	$6^3=216$
$7^2=49$	$7^3=343$
$8^2=64$	$8^3=512$
$9^2=81$	$9^3=729$

Опредѣленія степени сложныхъ чиселъ.

§ 14.

Вычисленіе степени даннаго числа на основаніи (§ 13) весьма легко; но при немъ неполучимъ желаемыхъ правилъ; для нашей же цѣли необходимо во первыхъ разсмотрѣть степени основаній: 1,10,100,1000 . . . . какъ *предѣловъ*, между коими помѣщаются всѣ числа (§ 3 чл. IV;). Но по (§ 10,1,) находимъ, что

$$1^2=1$$
$$10^2=10.10=100$$
$$100^2=100.100=10000$$
$$1000^2=1000.1000=1,0000,000 \text{ и проч.}$$

т. е. *квадраты предѣловъ чиселъ содержатъ вдвое болѣе нулей, чѣмъ ихъ основанія.*

Далѣе, поелику кубъ составляется изъ помноженія квадрата на основаніе; квадратъ же содержитъ двойное число нулей основанія, а вообще въ произведеніи столько нулей, сколько въ обоихъ производителяхъ; слѣд. *въ предѣлахъ, число нулей куба втрое больше числа нулей основанія.*

Такъ $10^3=10.^210=1000$; $100^3=100^2.1000=1000000$; и проч.

§ 15.

Послѣ сихъ замѣчаній легко вывести правила, о числѣ цыфръ въ квадратахъ и кубахъ. Изъ (§ 10, V,) видѣли, что число цыфръ произведенія равно числу оныхъ въ обоихъ производителяхъ, или однимъ меньше; но квадратъ есть такое произведеніе, котораго оба производители равны, посему *число цыфръ квадрата въ два раза больше числа цыфръ основанія или въ два раза—безъ одной.* Впрочемъ это заключеніе можно вывести изъ разсмотренія предѣловъ чиселъ 1, 10, 100, 1000 и. т. д. и изъ сравненія ихъ съ самыми числами; а имянно: всѣ числа выраженныя одною цыфрою содержатся между

$$1 \text{ и } 10$$

выраженныя двумя—между

$$10 \text{ и } 100$$

выраженныя тремя—между

$$100 \text{ и } 1000$$

и прочее.

Вообще *въ данномъ числѣ содержится столько цыфръ, сколько оныхъ въ меньшемъ его предѣлѣ, или однимъ меньше противъ большаго*, словомъ: *равно числу нулей послѣдняго;* по сему и квадратъ числа, состоящаго 1-е, изъ одной цыфры, будетъ содержаться между

$$1^2 \text{ и } 10^2 \text{ или между } 1 \text{ и } 100$$

2. Изъ двухъ цыфръ—между

$$10^2 \text{ и } 100^2 \quad \text{или} \quad 100 \text{ и } 10000$$

3. Изъ трехъ цыфръ—между

$$100^2 \text{ и } 1000^2 \text{ или } 10000 \text{ и } 100000$$

и прочее.

Вообще и въ квадратѣ числа выраженнаго разными порядками единицъ содержится, по предыдущему, столько цыфръ, сколько въ квадратѣ меньшаго его предѣла, или однимъ меньше противъ большаго; словомъ, равно числу нулей послѣдняго; но, *сосчитавъ* всѣ знаки квадратовъ первыхъ предѣловъ и нули—вторыхъ, находимъ, что квадратъ числа состоящаго изъ одной цыфры т. е.

$(1$ цыф.$)^2$ содержится или между	1, или между	$2=(1).2$ цыф.
изъ $(2$ цыф.$)^2$	3, или —	$4=(2).2$
изъ $(3$ цыф.$)^2$	5, или —	$6=(3).2$
изъ $(4$ цыф.$)^2$	7, или —	$8=(4).2$

и прочее.

Но каждый изъ производителей, заключенныхъ въ скобки: (1), (2), (3), (4)........означаетъ число цыфръ своего основанія, другой же производитель 2, во всѣхъ произведеніяхъ постояненъ; при томъ 1 противъ 2 или противъ (1).2; 3 противъ 4 или (2).2; 5 противъ 6 или (3).2; 7 противъ 8 или (4).2 и. т. д. однимъ меньше; посему вообще *число цыфръ квадрата вдвое больше числа цыфръ основанія, или вдвое—безъ одной.*

Другими словами: на каждую цыфру основанія въ квадратѣ приходится по два знака, кромѣ послѣдней съ лѣвой руки, на которую можетъ быть два или одинъ знакъ. Вообще *исло граней квадрата, отмѣчаемыхъ съ правой руки влѣво по два знака, также опредѣляетъ число цыфръ основанія.* Если въ квадратѣ 13 цыфръ т. е. 2.7 безъ одной,—то въ основаніи должно быть 7 и проч.

§ 16.

Далѣе для кубовъ: числа выражаемыя одною цыфрою содержатся между 1 и 10; слѣд., кубы ихъ должны содержаться между 1^3 или 1 и 10^3 или 1000, а потому они могутъ быть выражены 1, 2 и 3 цыфрами т. е. *кубъ числа выраженнаго* одною *цыфрою* или $(1 \text{ цыф.})^3$ содержитъ 1, и 3, слѣд. *можетъ* содержать и 2 цыфры.

Продолжая эти разсужденія усмотримъ, что чиселъ заключающихся между 10 и 100 и кубы ихъ содержатся между 10^3 или 1000 и 100^3 или 1,000,000 и могутъ быть представлены 4, 5 и 6 цыфрами т. е. сколько всѣхъ знаковъ въ 10^3 или однихъ нулей въ 100^3; слѣд.

$(2 \text{ цыф.})^3$ содержитъ 4, 5 и 6 $=(2)$. 3 цыфры; такимъ же образомъ найдемъ, что

$(3 \text{ цыф.})^3$ содержитъ 7, 8 и 9 $=(3)$. 3 цыфры
$(4 \text{ цыф.})^3$ — 10, 11 и 12$=(4)$. 3
$(5 \text{ цыф.})^3$ — 13, 14 и 15$=(5)$. 3
$(6 \text{ цыф.})^3$ — 16, 17 и 18$=(6)$. 3
и проч.

Откуда также общее правило: *число цыфръ куба противъ числа цыфръ основанія втрое больше, или втрое безъ одной, или втрое — безъ двухъ цыфръ.*

Другими словами: на каждую цыфру основанія въ кубѣ приходится по три знака, кромѣ послѣдней съ лѣвой руки, на которую можетъ быть три, два или одинъ знакъ; посему вообще, *число граней куба отмѣчаемыхъ съ правой руки влѣво, потри цыфры,* также *опредѣляетъ число цыфръ основанія.* Такъ куба 123,456,789,101,213 основаніе должно состоять изъ пяти знаковъ разныхъ порядковъ единицъ.

§ 17.

Если требуется сложить напр. 40. 6+40. 6+40. 6 то на основаніи § 11, пишемъ 3. 40. 6; также

$$2.30.^2 5+30.^2 5=3.30.^2 5 \text{ ибо}$$
$$2.30.^2 5=30.^2 5+30.^2 5 \text{ слѣд.}$$
$$2.30.^2 5+30.^2 5=30.^2 5+30.^2 5+30.^2 5=3.30.^2 5.$$

Перейдемъ теперь къ изысканію правилъ составленія квадратовъ и кубовъ всѣхъ чиселъ. Во первыхъ квадратовъ: для чего, взявъ число 46, состоящее изъ ***десятковъ*** **и** ***единицъ*** **умножимъ его само на себя т. е. 46×46; или (40+6)×(40+6), по (§§ 12, 13,) будетъ**

$$\begin{array}{l} 46^2=40^2+40.6 \\ \qquad\qquad +40.6+6^2 \\ \hline 46^2=40^2+2.40.6+6^2 \end{array}$$

т. е. ***квадратъ числа выраженнаго двумя цыфрами состоитъ изъ квадрата десятковъ, + удвоеннаго произведенія десятковъ на единицы, + квадратъ единицъ.*** **Сокращенно:**

$$(\textit{дес.}+\textit{еди.})^2=\textit{дес.}^2+2\times\textit{дес.}\times\textit{еди.}+(\textit{еди.})^2$$

Если будетъ число напр. 326, т. е., состоящее изъ ***сотень, десятковъ*** **и** ***единицъ,*** **то опять**

$$326^2=(320+6)^2=320^2+2.320+6^2.$$

$$\text{но } 320^2=(300+20)^2=300^2+2.300.20+20^2; \text{ слѣд.,}$$

подставивъ вмѣсто 320^2 вторую часть, получимъ

$$326^2=300^2+2.300.20+20^2+2.\ (320).\ 6+6^2.$$

т. е. ***квадратъ числа выраженнаго тремя цыф-***

рами, состоитъ изъ квадрата сотень, + удвоеннаго произведенія сотень на десятки, + квадрата десятокъ, + удвоеннаго произведенія сотень и десятокъ на единицы, + квадратъ единицъ.

Или

$$(\textit{сот.}+\textit{дес.}+\textit{еди.})^2=\textit{сот.}^2+2\times\textit{сот.}\times\textit{дес.}+\textit{дес.}^2+2\times(\textit{сот.}+\textit{дес.}).\textit{еди.}+\textit{еди.}^2$$

III. Поступая такимъ же образомъ съ 4576, т. е. съ числомъ состоящимъ изъ *тысячь, сотень, десятковъ* и *единицъ* усмотримъ, что оно, или вообще

$$(\textit{тыс.}+\textit{сот.}+\textit{дес.}+\textit{еди.})^2=\textit{тыс.}^2+2\times\textit{ты.}\times\textit{сот.}+\textit{сот.}^2+2\times(\textit{ты.}+\textit{сот.})\textit{дес.}+\textit{дес.}^2+2\times(\textit{ты.}+\textit{сот.}+\textit{дес.})\textit{еди.}+\textit{еди.}^2$$

Вообще *квадратъ всякаго числа содержитъ квадраты всѣхъ цыфръ, съ соблюденіемъ ихъ порядковъ и удвоеннаго произведенія каждой высшей цыфры на всѣ низшія, и такъ же съ соблюденіемъ ихъ порядковъ.* Ибо квадратъ даннаго числа есть произведеніе сего числа самого на себя, а произведеніе находится чрезъ умноженіе единицъ, десятковъ, сотень, тысячь и проч. множимаго на единицы, десятки, сотни, тысячи и проч. множителя. На основаніи найденныхъ правилъ вычисляемъ

$$\begin{array}{rl} 8004^2 = 64000000 & = 8000^2 \\ +664000 & = 2.\ 800.\ 4 \\ +16 & = 4^2 \\ \hline 64,664,016 & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(111111)^2 &= 111111.111111 \\
&= 10000000000 = (100000)^2 \\
&\quad 2000000000 = 2.100000.10000 \\
&\quad 200000000 = 2.100000.1000 \\
&\quad 20000000 = 2.100000.100 \\
&\quad 2000000 = 2.100000.10 \\
&\quad 200000 = 2.100000.1 \\
&\quad 100000000 = (10000)^2 \\
&\quad 20000000 = 2.10000.1000 \\
&\quad 2000000 = 2.10000.100 \\
&\quad 200000 = 2.10000.10 \\
&\quad 20000 = 2.10000.1 \\
&\quad 1000000 = (1000)^2 \\
&\quad 200000 = 2.1000.100 \\
&\quad 20000 = 2.1000.10 \\
&\quad 2000 = 2.1000.1 \\
&\quad 10000 = (100)^2 \\
&\quad 2000 = 2.100.10 \\
&\quad 200 = 2.100.1 \\
&\quad 100 = (10)^2 \\
&\quad 20 = 2.10.1 \\
&\quad 1 = (1)^2 \\
\hline
&\quad 12345654321
\end{aligned}
$$

§ 18.

Когда извѣстенъ квадратъ числа напр. 18, то слѣдующаго можно найти такимъ образомъ: $19=18+1$ и $19^2=(18+1)^2=18^2+2.18+1$. И такъ $19^2=361.$, т. е. *если къ квадрату даннаго числа придастся его уд-*

военное произведеніе съ единицею, то получимъ квадратъ слѣдующаго числа.

§ 19.

Кубы сложныхъ чиселъ составляются такимъ образомъ: взявъ напримѣръ число 75, котораго квадратъ

$$70^2+2.70.5+5^2$$

помножая еще на 75 или на 70+5, выдетъ

$$75^3=(70^2+2.70.5+5^2).(70+5)=70^3+2.70^2.5+70.5^2+70^2.5+2.70.5^2+5^3=70^3+3.70^2.5+3.70.5^2+5^3.$$

Посему *кубъ числа содержащаго десятки и единицы состоитъ изъ куба десятковъ, +утроеннаго квадрата десятковъ на единицы, +утроеннаго произведенія десятковъ на квадратъ единицъ, +куба единицъ;* т. е.

$$(\text{дес.}+\text{еди.})^3=\text{дес.}^3+3.\times\text{дес.}^2\times\text{еди.}+3.\text{дес.}\times\text{еди.}^2++\text{еди.}^3$$

Но, если основаніе будетъ многосложное, наприм. 845, тогда принимаемъ оное, какъ бы число за состоящее изъ десятковъ и единицъ, потомъ находимъ

$$(845)^3=(840+5)^3=(840)^3+3.(840)^2.5+3\ 840.5^2+5^3.$$

Послѣ чего 840 разложивъ на 8 десятковъ и на 40 единицъ, получимъ

$$(840)^3=(800)^3+3.(800)^2.40+3(800).40^2+40^3.$$

Вставивъ это выраженіе въ первое найдемъ, что

$$(845)^3=800^3+3.800^2.40+3(800).40^2+40^3+3(800+40)^2.5+3(800+40)5^2+5.^3$$

то есть

$$(сот.+дес.+еди.)^3=сот.^3+3.(сот.)^2.дес.+3(сот).дес.^2+дес.^3+3.(сот.+дес.)^2.еди.+3.(сот.+дес.)ед.^2+еди.^3$$

Также получимъ

$$(т.+с.+д.+е.)^3=т.^3+3.\ т.^2с.+3.\ т.\ с.^2+с.^3+3.(т.+с.)^2д+3.(т.+с).д.^2+д^3+3.(т.+с.+д.)^2ед.+3.(т.+с+д.).ед.^2+ед^3.$$

и т. д.

Поступая одинакимъ образомъ при составленіи кубовъ изъ многосложнѣйшихъ чиселъ, могли бы получить общее заключеніе о возвышеніи въ кубъ всякаго даннаго числа, но такое заключеніе оказывается безполезнымъ при разрѣшеніи обратнаго вопроса, т. е., для извлеченія *кубичныхъ корней*, которое несравненно удобнѣе производится по вышеизъясненному правилу составленія кубовъ изъ двухъ цыѳръ, поелику о кубѣ всякаго числа можно разсуждать, какъ о кубѣ числа изъ двухъ цыѳръ, изъ коихъ первая съ лѣвой руки вообще *принимается за число высшихъ порядковъ, а всѣ прочія вправо —за число низшихъ;* и именно:

$$(бол.\ чис.+мн.\ чис.)^3=(бол.\ чс.)^3+3.\ бл.^2мн.+3.\ бл.\ мн.^2+мн^3.$$

Въ числахъ:

$$(8352)^3=(8000+352)^3=8000^3+3.8000.^2352+3.8000.352^2+352^3.—$$

Теперь понятно, что составленіе всѣхъ цѣлыхъ чиселъ производится чрезъ *сложеніе, умноженіе, и возвышеніе въ степень;* кромѣ сихъ способовъ другихъ нѣтъ. При томъ, въ Ариѳметикѣ разсматривается только возвышеніе второй и третьей степени, всѣ же протчія принадлежатъ къ изслѣдованію Алгебры.

ГЛАВА ТРЕТІЯ.

Троякое разложеніе данныхъ чиселъ, или о трехъ закрытыхъ равенствахъ, кои опредѣляютъ искомыя, именуемыхъ уравненіями.

ОТДѢЛЕНІЕ I.

ОБЩЕЕ РАЗЛОЖЕНІЕ ИЛИ ВЫЧИТАНІЕ.

а.) Общія изслѣдованія.

§ 20.

Вышеизложеннымъ тремъ способамъ дѣйствія обратны *три другіе*, кои вообще составляютъ предметъ изысканія, одного изъ тѣхъ двухъ чиселъ, изъ коихъ третее данное составлено; или иначе: составляютъ предметъ *разложенія* даннаго числа на два другія, изъ коихъ одно также дано, а другое нѣтъ. Когда извѣстны два числа 5 и 4, то въ сложеніи требуется найти ихъ сумму 9, т. е. $5+4=9$; но, ежели дается сумма 9 и на прим., слагаемое 4, то можно потребовать, найти другое слагаемое (5) т. е. такое число х (§ 1, чл. VI), которое съ 4 составляетъ 9. Отсюда видимъ, что сумму 9, должно разложить на два слагаемыхъ, изъ коихъ одно уже дано и есть 4, а другаго величина неизвѣстна, но зависитъ отъ величины чиселъ 9 и 4, съ коими оно связано. Сей способъ разложенія называется *вычитаніемъ* и на основаніи опредѣленія его, подставивъ х (§ 1 чл. VI выноска къ заключенію с) на мѣсто 5, въ выраженіе $5+4=9$, имѣемъ право, по § 6, написать

$$x+4=9 \;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$

Это числовое выраженіе *вычитанія*, называется *закрытымъ равенствомъ* или *уравненіемъ* перваго вида, въ которомъ $x+4$ есть первая, а 9 вторая часть. Посему *уравненіе*, какъ и тожество, *состоитъ изъ двухъ совершенно равныхъ частей* (§ 1, чл. VI). Съ другой стороны, въ уравненіи (а), данная сумма 9, принѣмаетъ званіе *уменьшаемаго*, данное слагаемое (4) — *вычитаемаго*, а *искомое* слагаемое х — *разности* или *остатка*; въ слѣдствіе чего

$$x+4=9$$

даетъ такое заключеніе: *разность или остатокъ* (х) *вмѣстѣ съ вычитаемымъ* (4) *равняется уменьшаемому* (9); или обратно: *уменьшаемое равно разности* (х) *вмѣстѣ съ вычитаемымъ*; и вообще пишутъ

$$y=x+в \;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$

Вотъ это основное уравненіе вычитанія; смотрите на видъ его, и изучайте; въ немъ начальная буква (у) выражаетъ какое бы то нибыло число уменьшаемаго, (*в*) — вычитаемаго, а (х) — разности или остатка, зависящаго отъ (у) и (в); при томъ подъ *у* и *в* всегда разумѣемъ *данныя* числа, а подъ х — *искомое*.

Разрѣшить уравненіе

$$у = х + в,$$

значитъ объяснить способъ вычисленія х, поданнымъ числамъ *у* и *в*, и вмѣстѣ показать общую *форму* или *формулу*, которою сокращенно выражается вычисленый разультатъ х.

Рѣшеніе. Для вычисленія х, должно взять уравненіе въ числахъ, на прим., прежнѣе

$$x + 4 = 9.$$

Откуда намъ понятно, что изъ х — а, сумма 9 составится неиначе, какъ только тогда, когда къ х *приложимъ* или *присчитаемъ* 4 единицы; равномѣрно, изъ 4 составится 9 тогда, когда къ 4 присчитаемъ х единицъ. На семъ основаніи, чтобъ х вычислить, изъ уравненія $x + 4 = 9$, то должно къ числу 4, даннаго слагаемаго, или иначе, вычитаемаго, присчитать столько единицъ, чтобъ составилась данная сумму 9, тогда взятыя единицы и покажутъ величину х; и такъ, присчитавъ къ 4, одну единицу, получаю 5; присчитавъ 2, нахожу 6; присчитавъ 3, имѣю 7; присчитавъ 4, выходитъ 8; а присчитавъ *пять* составляется данная сумма 9; слѣд. число 5 *равно* х, и х равно 5, т. е. $5 = x$, и $x = 5$.

Съ другой стороны, разсматривая уравненіе

$$x + 4 = 9,$$

видимъ, что х противъ 9 *меньше* 4 единицами, или 9 противъ х *больше* 4 единицами; это очевидно, какъ само по себѣ (§ 1 чл. IV), такъ и потому, что 9 есть сумма, а x слагаемое (§ 6 чл. 5); слѣд., чтобъ x вывести изъ уравненія

$$4 + x = 9,$$

то 9, должно уменьшить 4 единицами; и такъ x равенъ 9 да только *безъ* 4. На пишемъ сказанное:

$$x = 9 \textit{ безъ } 4 \ldots\ldots (Ѣ)$$

Вотъ это видъ *результата вычитанія*. Изъ него ясно указывается, что, для опредѣленія его, число 4, въ уравненіи

$$x + 4 = 9$$

отдѣлилось отъ x, и перешло во вторую часть и имянно къ 9, гдѣ 4 уже неслагивается, но отымается изъ 9; посему, внеся въ уравненіе (Ѣ), на мѣсто слова *безъ*, знакъ (—) *минусъ* (значитъ меньше и прямо противно знаку +), получимъ результатъ x, въ слѣдующей общей формѣ

$$x = 9 - 4 \ldots\ldots (Ѣ)$$

т. е. 9—4 есть видъ результата. Вообще же *цѣлое* выраженіе выговаривается такъ: x *равенъ* 9 *безъ* 4; или x *равенъ* 9 *минусъ* 4. При томъ помня, что x называется разностію или остаткомъ, 9 — уменьшаемымъ, а 4 — вычитаемымъ, выводимъ, изъ формулы результата вычитанія (Ѣ), слѣдующе заключеніе: *разность* или *остатокъ* (x), *равенъ уменьшаемому* (9) *безъ вычитаемаго* (4); а на основаніи общаго изображенія, основнаго уравненія вычитанія, пишутъ

$$x = y - в \ldots\ldots (Ѣ)$$

Теперь, чтобъ посему общему виду разультата, вычислить частный, т. е. чтобъ, на самомъ дѣлѣ, о предѣлить величину x, изъ уравненія

$$x = 9 - 4,$$

то должно, въ противуположность § 6 и § 7, изъ 9 единицъ, въ строкѣ написанныхъ

$$(1+1+1+1)+1+1+1+1+1$$

отнять, вычесть 4 единицы, на примѣръ, *отдѣля ихъ скобками,* или совсѣмъ *уничтожа,* то остальныя $1+1+1+1+1$ *пять* и означать искомое слагаемое или разность x, т. е. $x=1+1+1+1+1=5$. И такъ, вставивъ въ результатъ вычитанія, на мѣсто x, ему равное число 5, получимъ

$$5=9-4;$$

т. е. вычисленная разность 5, равна уменьшаемому 9, безъ вычитаемаго 4; или уменьшаемое 9 *минусъ* вычитаемое 4 равно разности 5.

Повѣрка показаннаго вычисленія разности, по результату вычитанія, производится чрезъ обратную подъставку 5 на мѣсто x въ условное уравненіе $x+4=9$, которое, по § 6, обращается въ тожество или выкладку суммы $5+4=9$. Изъ сего легко усмотрить, что $5+4=9$, и $x+4=9$ неодно и тоже, хотя оба связаны однѣмъ и тѣмъ же дѣйствіемъ и равенствомъ.

Общее замѣчаніе. Что сказано и здѣлано надъ уравненіями $x+4=9$ и $x=9-4$, выраженными чрезъ числа 4 и 9, то самое можно приложить, отъ слова до слова, и ко всѣмъ прочимъ; вся разность, только въ частной величинѣ тѣхъ и другихъ, сущность же дѣла для всѣхъ общая; такъ что, все преличиствующее $x+4=9$ и $x=9-4$, равномѣрно приличествуетъ и уравненіямъ $x+в=y$, и $x=y-в$, вообще разсматриваемымъ, какъ представителямъ способа дѣйствій, надъ всѣми возможными числами.

§ 21.

Общія слѣдствія. 1. Изъ хода рѣшенія основного уравненія (а) и результата (Ь), слѣдуетъ, что выраженіе послѣдняго:

$$x = y - в,$$

показываетъ не только общій ходъ способа вычисленія х, т. е. то, что имянно должно здѣлать съ 9, чтобъ изъ него получить частную разность, но вмѣстѣ и видъ х, какъ онъ долженъ представиться въ общемъ результатѣ, по самомъ вычисленіи; слѣд. одна и таже формула удовлетворяетъ, въ одно время, двумъ требованіямъ: и способу дѣйствія, и виду результата дѣйствія. И такъ воспользуемся этимъ замѣчаніемъ и повторимъ, что въ послѣднемъ случаѣ, — въ результатѣ, сія формула представляетъ общій видъ *избытка* (*у*) надъ (*в*), т. е. *чемъ* именно (у) *больше* (в), и обратно, *чемъ* (в) *меньше* (у).

2. На основаніи *двойственнаго значенія* результата вычитанія (Ь), слѣдуетъ, что вычитаніе есть вмѣстѣ и *способъ* и *дѣйствіе*; способъ, поелику оно приличнымъ изображеніемъ общаго результата, въ формѣ уравненія, показываетъ общій видъ дѣйствія для вычисленія разности х; дѣйствіе, поелику изъ той же формулы вычисляется, на самомъ дѣлѣ, и частный результатъ разности х. Вообще, способъ относится къ универсальнымъ изслѣдованіямъ, а дѣйствіе — къ частнымъ. И такъ,

1. ***Вычитаніе*** есть способъ и дѣйствіе, коими совокупно опредѣляется разность или избытокъ уменьшаемаго надъ вычитаемымъ, чрезъ исключеніе втораго изъ перваго.

2. *Уменьшаемое* есть число, изъ котораго исключается вычитаемое.

3. *Вычитаемое* есть число, которое исключается изъ уменьшаемаго.

Откуда наконецъ 4, числа уменьшаемаго и вычитаемаго вообще суть *выраженія двухъ количествъ* (§ 1, 2 и 6) а *разность*—часть уменьшаемаго, т. е. *количество же*, остающееся отъ исключенія, какъ избытокъ, перваго надъ вторымъ.

Въ закоюченіе не худо также сказать, основываясь на опредѣленіи вычитанія, что ариѳметическое дѣйствіе только одно: сложеніе; умноженіе же возвышеніе въ степень, вычитаніе, дѣленіе и извлеченіе корнѣй выходятъ изъ этого механическаго значенія; поелику суть вмѣстѣ и способъ и дѣйствіе.

§ 22.

Частныя заключенія:

1. Итакъ уравненіе вычитанія, которое составляетъ существенное *цѣлое*—вычитаніе, одного вида

$$x = y - в$$

и основаніемъ ему служитъ другое,

$$y = x + в$$

кои въ частномъ случаѣ, какъ въ нашемъ рѣшеніи, имѣютъ видъ:

$$x = 9 - 4$$
$$9 = x + 4$$

и, изъ коихъ послѣднее не все тоже, что $5+4=9$. Ибо, это есть тожество и принадлежитъ къ дѣйствію сложенія, т. е. къ выкладки суммы 9 по даннымъ 5 и 4, между тѣмъ первое, къ способу изысканія слагаемаго x.

2. Уравненіе общаго результата вычитанія (Ь) выведено изъ основнаго уравненія (а), съ помощію произвольнаго условія принять именно такое, а не другое изображеніе, въ противуположность уравненію (а). Но какъ бы ни было, а существенная противуположность въ

$$x+в=y$$

и

$$x=y-в$$

какъ выше видѣли, дѣйствительно находится; въ первомъ x слагается съ *в* и обратно *в* слагается съ x, для того, чтобъ произвести сумму *y*; словомъ x съ *в* находятся въ связи и въ одной части уравненія; во второмъ же, *в* отъ x отторгнуто или раздѣлено противуположною частію уравненія, гдѣ *в* неслагается, но уже вычитается изъ *y*, для того, чтобъ уменьшить *y* и тѣмъ дойти до искомой разности x. Въ слѣдствіе такой противуположности уравненій и знаки ихъ (+) и (—) между собою *условно* противуположны. Первый именуется *положительнымъ*, а вторый — *отрицательнымъ*.

§ 23.

Пользуясь симъ изученнымъ различіемъ, по коему уравненіе результата вычитанія (Ь) противуположно основному уравненію вычитанія (а), легко первое обращать во второе. Для ясности дѣла снесемъ ихъ опять вмѣстѣ:

$$x + в = y \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$
$$x = y - в \ldots\ldots\ldots\ldots (Ѣ)$$

изъ разсмотрѣнія коихъ явствуетъ, что при опредѣленіи изъ уравненія (a) общаго результата (Ѣ) число $(+в)$ перенесено изъ первой во вторую часть онаго съ *провнымъ* или отрицательнымъ знакомъ $(-)$; посему и обратно, если требуется изъ результата (Ѣ) составить основное уравненіе (a), то должно $(-в)$ изъ второй части перенести опять въ первую съ положительнымъ знакомъ т. е. съ $(+)$-мъ, какъ это яснѣе видѣть можно изъ самаго уравненія (a); и такъ вообще, *чтобъ число изъ одной части уравненія перенести въ другую, то всегда должно въ переносимомъ перемѣнить его знакъ*; т. е. $+$ *на* $-$, *а* $-$ *на* $+$.

§ 24.

Сей часъ видѣли, что изъ основнаго уравненія:

$$x + в = y \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

разность x опредѣляется уравненіемъ

$$x = y - в;$$

Но, если разность дана, а будетъ отыскиваться вычитаемое $в$, то, положивъ x за $в$, а $в$, измѣнивъ въ разность p, основное уравненіе (a) принимаетъ видъ

$$p + x = y$$

Откуда x по общимъ правиламъ вычитанія будетъ

$$x = y - p \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

Слѣд. *вычитаемое* x *равно уменьшаемому* y *безъ разности* p. Вообще уравненія (Ь) и (с) суть нечто другое, какъ переобразованіе основнаго (а) изъ *предѣла* котораго, онѣ никакъ выйти немогутъ.

§ 25.

И такъ выведенныя *три* уравненія:

$$y=в+p \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$
$$p=y-в \ldots\ldots\ldots\ldots (Ь)$$
$$в=y-p \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

составляютъ общее основаніе для всей математики, гдѣ только входитъ способъ вычитанія количествъ. Такъ

1. Если потребуется разрѣшить числовое уравненіе

$$x+8=17,$$

то x, какъ искомое слагаемое, по уравненію (Ь) опредѣляю разностію:

$$x=17-8=9$$

2. Если дано будетъ

$$x-6=10,$$

то отсюда x, какъ уменьшаемое, по уравненію (а) получу

$$x=10+6=16$$

3. Когда же предложено разрѣшить

$$20-x=3,$$

то x, какъ вычитаемое, по уравненію (с) найду

$$x=20-3=17$$

4. Такимъ же образомъ, если отдѣльно данъ избытокъ (7) двухъ неровныхъ чиселъ (x) и (30), то по оному можно составить и самое равенство послѣднихъ; такъ, если будетъ извѣстно, что x $>$ (больше) разности 7 числомъ 30, то чтобъ x приравнить или уравнить 7, должно изъ x вычесть 30 или къ 7 придать 30; т. е $x-30=7$, или $x=30+7$. Если же 30 $>$ 7 числомъ x, то, дабы 30 приравнить 7, должно или изъ 30 вычесть x, или къ 7 придать x; такъ что $30 - x = 7$ или $30=7+x$, откуда $x=30-7=23$. Какъ ниясенъ теперь ходъ сихъ преобразованій, но при изложеніяхъ обыкновенныхъ Ариѳметикъ оныя всегда оставались неудобно—понятными.

Общее замѣчаніе. И такъ, если когда либо будемъ имѣть числовое уравненіе вида

$$x+5=20 \text{ или}$$
$$5+x=20,$$

гдѣ на мѣсто 5 и 20 могутъ быть всякія числа, такъ на прим. возьмите какія угодно, то оное всегда должно принимать за основное уравненіе вычитанія, въ которомъ 20 есть уменьшаемое, а 5 вычитаемое или разность, смотря по требованію.

§ 26.

1. Вставивъ въ основное уравненіе (a):

$$y=x+в$$

вмѣсто x самый результатъ его: $y - в$, получимъ

$$y=(y-в)+в \ldots\ldots\ldots\ldots (d)$$

И такъ, *уменьшаемое* (у) *равно общему результату вычитанія* ($у—в$) *вмѣстѣ съ вычитаемымъ* ($в$).

2. Но дабы въ семъ тожественномъ выраженіи (d) $у$ въ дѣйствительности было равно ($у+в$)$+в$, то необходимо, чтобъ $в$ съ $в$ производили нуль; ибо въ семъ только случаѣ $у$ первой части уравненія (d) можетъ быть тожественно $у$ второй части, содержащемуся въ изображеніи общаго результата (§ 20), и имянно когда будетъ

$$у=у+0=у \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

гдѣ нуль производитъ $в$ съ $в$. Но сложеніе $в$ съ $в$ нуля произвести не можетъ; ибо $в+в=2\,в$ (§ 9,); слѣд. между $в$ и $в$ существуетъ вычитаніе, какъ показываетъ и самое выраженіе взятое изъ уравненія (d):

$$-в+в=0,\ \text{или}\ +в-в=0\ \text{или}\ в-в=0$$

въ послѣднемъ выводѣ предъ $в$ подразумѣвается ($+$), такъ что, вставивъ $в—в$ ва уравненіе (1) вмѣсто нуля получаемъ

$$у=у+(в-в)=у$$

И такъ выраженіе

$$+в-в=0 \ldots\ldots\ldots (е)$$

показываетъ, что *два равныя числа съ противными знаками другъ друга уничтожаютъ*; или, остатокъ между равными часлами есть нуль; другими словами: *между равными числами остатка нѣтъ*.

И дѣйствительно, взявъ частный случай, напримѣръ тожество

$$16=16+0,\ (\text{§ 6, замѣч.}),$$

сказанное становится очевиднымъ; ибо, положивъ нуль за искомое слагаемое, имѣю

$$0=16-16$$

т. е. если изъ числа единицъ уменьшаемаго въ строкѣ написанныхъ (§ 20) отнимется тоже число вычитаемаго, то въ разности неокажется *ничего*. Значитъ выведенное выше заключенiе вѣрно. На основанiи того и $20-20=0$; $35-35=0$; $1705-1705=0$ и т. д.

§ 27.

И такъ 1, тожество (d)

$$y=y+в-в$$

Научаетъ, что а) *всякое число* (смотри на первую часть) *величины своей непеременяетъ*, т. е. не увеличивается и неуменьшается, *если къ нему* (смотри на вторую часть) *придается и въ тоже время опять отымется одно и тоже число*.

Ь). Чтобъ вычесть изъ суммы двухъ $y+в$ (или болѣе) чиселъ третье, то достаточно сiе вычесть изъ одного изъ данныхъ слагаемыхъ и остатокъ придать къ остальнымъ слагаемымъ.

II. Равенство уравненiя не нарушается, если къ обоимъ частямъ онаго придадимъ или отымемъ по ровному числу; равныя количества, послѣ равныхъ измѣненiй остаются всегда равными между собою; посему, придавши и вычетши изъ обѣихъ частей основнаго уравненiя

$$y=x+в$$

наприм. число 5, въ первомъ случаѣ получимъ

$$y+5=x+(в+5)$$

во второмъ также

$$y-5=x+(в-5)$$

откуда, опредѣляя разность x имѣемъ

$$x=y+5-(в+5)\ldots\ldots\ldots(f)$$
$$x=y-5-(в-5)\ldots\ldots\ldots(g)$$

И такъ *разность величины своей неперемѣняетъ* т. е. не увеличивается и не уменьшается, *есликъ уменьшаемому и вычитаемому*, въ одно и тоже время, *придается или отымется по одному и тому же числу*.

§ 28.

На основаніи урав. (e) можетъ взять

$$y-y=0$$

гдѣ, принявъ y, стоящее на мѣстѣ вычитаемаго, за искомое, по (§ 25,) урав. (c) будетъ

$$y-0=y\ldots\ldots(h)$$

т. е. *разность между числомъ и нулемъ есть данное число;* ибо число неуменьшаятся отъ вычитанія изъ него нуля. И такъ 16—0=16, 100—0=100 и прочее.

Перенеся же изъ уравненія (e)

$$в-в=0$$

$в$, стоящее на мѣстѣ уменьшаемаго, во вторую часть онаго съ противнымъ знакомъ (§ 23) т. е. съ (—) получимъ

$$-в=0-в \text{ или}$$
$$0-в=-в\ldots\ldots(k)$$

т. е. *разность между нулемъ и числомъ есть данное число съ знакомъ* (—); потому, что разность или все тоже, что избытокъ, въ семъ случаѣ, остается отъ вычитаемаго, имѣющаго или *присвоившаго* знакъ (—). Въ числахъ: 0—16=—16, 0—70=—70; а 5—11=—6; потому что 11=5+6; слѣд. 5—11=5—5—6=0—6=—6; ибо 5—5=0. и проч. Такія разности называются *отрицательными;* такъ:—2,—9,—35,.......суть числа отрицательныя, а 2, 9, 35.......предъ коими подразумѣвается знакъ (+), и которыя выходятъ также изъ вычитанія—*положительными.* Слѣд. числа положительныя и отрицательныя суть не другое что, какъ избытки; первыя уменьшаемаго надъ вычитаемымъ, а вторыя на оборотъ, вычитаемаго надъ уменьшаемымъ; уменьшаемое же и вычитаемое, сами по себѣ, неимѣютъ ни избытка ни недостатка, потому прилично назвать ихъ средними или неутральными — между тѣми и другими; т. е. такими, которыя могутъ изъ себя давать избытки и положительныя и отрицательныя и могутъ совсѣмъ недавать оныхъ, если невходятъ въ снесеніе или дѣйствіе.

§ 29.

На основаніи сказаннаго, если наприм. изъ числа 6 вычитаются числа 1, 2, 3, 4, 5, по натуральному ихъ порядку, то получимъ рядъ

6+5,+4,+3,+2,+1+0 (ибо 6—6=0)

количествъ положительныхъ, кромѣ 0, которое относится къ *уничтожающемуся.*

Продолжая далѣе изъ 6 вычитать, постоянно, числа 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, выйдетъ другой рядъ

$$+0, -1, -2, -3, -4, -5, -6$$

количествъ отрицательныхъ, который впрочемъ можно найти, если будемъ изъ 0 прямо вычитать 0 а потомъ первыя числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6,
Соединивъ же оба ряда, получимъ одинъ:

$$6+5, +4, +3, +2+1, +0-1, -2, -3, -4, -5, -6.$$

или

$$6+5, +4, +3, +2, +1 \pm 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6.$$

количествъ положительныхъ, отрицательныхъ и уничтожающихся; ибо, если изъ противуположныхъ отдѣленій возмутся какія нибудь два члена, отстоящія отъ нуля на равномъ разстояніи, съ тѣми знаками, какія при нихъ находятся, то по (§ 26, 2,) при снесеніи, онѣ другъ друга уничтожатъ. Изъ сего явствуетъ, что количество уничтожающееся или нуль есть *предѣлъ* положительныхъ и отрицательныхъ количествъ, идущихъ *по двоякому значенію, (при начертаніи) въ двѣ противуположныя стороны:* если положительныя въ правую, то отрицательныя въ лѣвую; если отрицательныя въ правую, то положительныя въ лѣвую, нуль же всегда остается постояннымъ, занимая по мѣсту средину между тѣми и другими.

§ 30.

Показанное троякое свойство количествъ ничѣмъ приличнѣе и проще нельзя выразить, какъ *начертательно* линіею АВ

А—|—|—|—|—|—|—⊙—|—|—|—|—|—В
+6,+5,+4,+3,+2,+1—0—1,—2,—3,—4,—5,—6.

коей средину 0, принявъ за нуль, а части оной отсчитываемыя отъ 0 въ лѣвую сторону—за количества положительныя, противуположныя же имъ,—отсчитываемыя въ правую — за отрицательныя; такъ что и вся часть ОА относительно части ОВ есть положительная, а эта къ первой—отрицательная и обратно.

Въ заключеніе общихъ изслѣдованій нашихъ повторимъ, что главныхъ уравненій вычитанія всего *девять*, выпишемъ ихъ для общаго свода:

1. *у=в+р*
2. *р=у—в*
3. *в=у—р*
4. *у=у+ƅ—ƅ*
5. *в—в=о*
6. *х=у+5—(в+5)*
7. *х=у—5—(в—5)*
8. *у—о=о*
9. *о—в=—в*

ƅ.) *Частныя изслѣдованія.*

§ 31.

Вычисленіе разности. Чтобъ опредѣлить разность сложныхъ чиселъ по данному уменьшаемому, напр. 567

и вычитаемому 243, то должно, какъ уже видѣли (§ 20), числа единицы, десятка, сотни и т. д. уменьшаемаго уменьшить тѣми же числами даннаго вычитаемаго т. е.

$$567-243=\begin{cases} 7-\ \ 3 \\ 60-\ 40 \\ 500-200 \end{cases}$$

Но какъ уменьшаемое равно вычитаемому вмѣстѣ съ разностію (§ 20), то, для опредѣленія послѣдней, слѣдуетъ къ числамъ единицы, десятка, сотни и т. д. даннаго вычитаемаго присчитать столько чиселъ единицы десятка, сотни и пр., чтобъ въ суммахъ выходили числа единицы, десятка, сотни и т. д. даннаго уменьшаемаго: тогда сумма взятыхъ прибавочныхъ чиселъ и покажетъ искомую разность. И такъ къ 3 единицамъ должно прибавить 4 единицы, къ 40 прибавить 20, къ 200 прибавить 300, чтобъ составить 7 един. 6 десят. и 5 сот. даннаго уменьшаемаго; слѣд.

$$567-243=\begin{cases} 7-\ \ 3=\ \ 4 \\ 60-\ 40=\ 20 \\ 500-200=300 \end{cases}$$

и

$$567-243=4+20+300=324$$

Въ практикѣ все это представляютъ такъ:

$$\begin{array}{r} 567 \\ 243 \\ \hline 324 \end{array}$$

т. е. *пишутъ меньшее число подъ большимъ такъ, чтобъ цыфры одного разряда стояли въ томъ же столбцѣ и проведя черту вычитаютъ* *постепенно, переходя отъ правой руки къ лѣвой, единицы изъ единицъ, десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ; полученныя остатки, поставленныя подъ чертою противъ своихъ однородныхъ, покажутъ требуемый выводъ разности.*

§ 32.

Теперь встрѣчается только одно затрудненіе: когда нѣкоторыя цыѳры уменьшаемаго меньше соотвѣтствующихъ цыѳръ вычитаемаго. Это затрудненіе уничтожается помощію слѣдующихъ припоминаній:

1. Сумма больше каждаго изъ своихъ слагаемыхъ, (§6,5).

2. Если складывается только два числа, то въ суммахъ каждаго порядка единицъ не можетъ выходить больше 18; ибо старшая цыѳра есть 9 а $9+9=18$.

3. Если отъ сложенія каждаго порядка единицъ въ суммахъ выходятъ десятки, то относятся къ слѣдующему порядку (§ 7).

Теперь пусть требуется вычесть 790863 изъ 875315, то опять по предыдущему составивъ

$$875315-790863=\left\{\begin{array}{c}5-3\\10-60\\300-800\\5000-0\\70000-90000\\800000-700000.\end{array}\right.$$

И такъ чтобъ получить 5 единицъ уменьшаемаго, должно къ 3 прибавить 2. Переходя ко второту вычитанію вижу, что вычитаемое 6 десят. и уменьшаемое 1 десят., а какъ въ немъ не можетъ выйти 1 по первому замѣчанію и болѣе 11 десят. по второму; слѣд. по третьему—заключаю, что при составленіи суммы 875315 десятокъ десятковъ отнесенъ былъ къ сотнямъ, который при настоящемъ вычисленіи долженъ опять возвратиться къ своему десятку. Также изъ 8 сотень неможетъ составится 3 сот., а 13; слѣд., опять 10 сотень отнесены были къ тысячамъ. Наконецъ изъ 9 десятковъ тысячь долженъ составить не 7 десят. тыс. но 18 слѣдов. уменьшаемое какъ сумма вычитаемаго и разности содержитъ

$$875315-790863=\left\{\begin{array}{l} 5-3=2 \\ 11 \text{ дес.}-6 \text{ дес.}=50 \\ 12 \text{ сот.}-8 \text{ сот.}=400 \\ 4 \text{ тыс.}-0 \text{ тыс}=4000 \\ 17 \text{ дес.тыс.}-9 \text{десят. тыс.}=80000 \\ 7 \text{ сот. тыс.}-7 \text{ сот.}=0. \end{array}\right.$$

или

$$875315-790863=2+50+400+4000+80000=84452.$$

Все это представляютъ такъ:

875315 *уменьш.*
790863 *вычит.*
84452 *ост.*

Если бы каждая цыфра низшаго разряда, была бы меньше соотвѣтствующей высшей цыфры, то дѣйствіе можно было бы производить съ правой и съ лѣвой стороны. Какъ же часто случается, что одна изъ низшихъ цыфръ, превосходитъ высшую, то вычитаніе чиселъ можно производить только занимая отъ слѣдующей цыфры въ лѣво или далѣе оной, но не наоборотъ; а потому всегда должно начинать дѣйствіе съ правой стороны, чтобы, въ случаѣ нужды, была возможность заимствовать высшую единицу, а въ вслѣдствіе чего для вычитанія—

общее правило: чтобы вычесть изъ большаго числа меньшее, *должно поступить по* § 31; *если же какая—либо цыфра вычитаемаго болѣе соотвѣтствующей цыфры уменьшаемаго, то для возможности вычитанія нужно умственно увеличить послѣднюю* 10 *единицами, полученными чрезъ уменьшеніе одною единицею слѣдующей непосредственно за нею влѣво цыфры* (§ 4, 5), обыкновенно для краткости говорятъ: *должно занять единицу отъ слѣдующаго высшаго знака, даннаго уменьшаемаго.*

Замѣч. 1. Можно неуменьшать единицею той цыфры уменьшаемаго, отъ которой требуется занять; въ замѣнъ этого должно увеличить единицею соотвѣтствующую цыфру вычитаемаго. Сей способъ дѣйствія удобнѣе въ практикѣ. Такъ въ слѣдующемъ примѣрѣ

36147
19328
16819

Во первыхъ вычитаютъ не изъ 7—8 но 17—8=9 потомъ изъ 4 не 2 а 3=1, поелику въ этомъ вычитаніи остатокъ выходитъ одинъ и тотъ же, какой и въ обыкновенномъ, отъ 3—2=1; такимъ же образомъ не изъ 1—3 а изъ 11—3=8, далѣе не изъ 6—9 а изъ 16—10=6, наконецъ изъ 3—2=1.

Примѣры:

уменьш.	5487	9693
вычит.	1234	987
	4253	8706

Примѣч. 2. Когда надобно вычесть изъ цыфры съ нулями, тогда цыѳра сія уменьшается единицею, послѣдній же вправо нуль превращается въ 10, а всѣ прочія въ 9; такъ

$$\begin{array}{r} 90000 \\ 82309 \\ \hline 7691 \end{array}$$

ибо 90000 превращается въ 8 дес. тыс. 9 тыс. 9 сот., 9 дес., и 10 единицъ также:

$$100000-6=99994$$

Примѣры:

10000	28100011000
37	28000909009
9963	99101991

§ 33.

Для вычитанія предложены всѣ правила; но если требуется сложить и вычесть многія числа, то, для удобности, вычитаніе помощію *ариѳметическаго дополненія* превращается въ сложеніе. Ариѳметическое же дополненіе есть не другое что, какъ разность между даннымъ числомъ и единицею высшаго порядка, содержащею при себѣ столько нулей, сколько въ предложенномъ числѣ знаковъ; или нѣсколькими единицами высшаго же порядка, которыхъ ни въ какомъ случаѣ недолжно быть болѣе 9, съ такимъ числомъ нулей, сколько цыѳръ въ данномъ вычитаемомъ безъ одной.

Напримѣръ ариѳметическое дополненіе числа 692 найдется, когда 692 вычтется изъ 1000; и такъ, 308 есть ариѳметическое дополненіе числа 692; но для 1325 оно будетъ 2000—1325=675.

Пусть требуется вычесть 15—6; и такъ, поелику число величины своей неперемѣняетъ, когда изъ него вычтется какое-либо другое число и въ тоже время оное опять приложится (§. 27, 1.); посему уменьшаемое $15=15-10+10$ слѣд. и $15-6=15-10+10-6$; но $10-6=$*ариѳм. допл.* 4; посему

$$15-6=15-10+4=15+4-10=19-10=9.$$

И такъ 1. Настоящая разность получается, когда вмѣсто вычитанія 6 изъ 15, приложится ариѳ. допол. 4 вычитаемаго 6 къ уменьшаемому 15 и потомъ исключится 10. Еще

$$863-7=863-10+10-7=863+3-10=856$$

или

$$863-7=863-1000+1000-7=863+\text{ариѳ. допол. } 993-1000=856.$$

2. Послѣдній примѣръ сравненный со вторымъ научаетъ, что, если число знаковъ уменьшаемаго будетъ больше числа знаковъ вычитаемаго, въ такомъ случаѣ, для удобности вычисленія, ариѳ. допол. лучше опредѣлять, вычитая вычитаемое изъ единицы съ такимъ числомъ нулей, сколько уменьшаемое содержитъ въ себѣ знаковъ.

Но если бы требовалось 3.) вычесть 3402—1002, въ такомъ разѣ, ариѳ. допол. числа 1002 будетъ $2000-1002=998$ и

$$3402-1002=3402+\text{ариѳ. допол. } 998-2000=4400-2000=2400.$$

т. е. должно послѣднюю цыфру 4, съ лѣвой руки найденной суммы 4400, уменьшить уже 2 единицами; посему,

4. Для ариѳметическаго дополненія общее правило: *чтобъ вычесть одно число изъ другаго, то къ уменьшаемому должно придать ариѳметическое*

дополненіе вычитаемаго, опредѣленное по правиламъ 2-му и 3-му; и изъ самой высшей цыфры найденной суммы вычесть столько единицъ, сколько оныхъ содержится въ главной цыфрѣ того уменьшаемаго, изъ котораго опредѣлилось дополненіе.

Сей способъ рѣшенія изображается такъ:

1.) $15-6=15+\bar{1}4=9$

2.) $863-7=863+13+856$

3.) $863-7=863+\bar{1}993+856$

4.) $3402-1002=3402+\bar{2}998=2400$.

т. е. въ первомъ примѣрѣ, число $\bar{1}4$, во второмъ $\bar{1}3$, въ третьемъ $\bar{1}993$, означаютъ, что ариѳметич. допол, 4, 3, 993 по порядку должно прибавлять: 4 къ 15; 3 къ 863; 993 къ 863 и потомъ изъ высшей цыфры, каждой суммы, вычесть 1; въ четвертомъ же, число $\bar{2}998$ показываетъ, что 998 должно придать къ 3402 и изъ высшей цыфры найденной суммы 4400 вычесть число 2; чрезъ что и получатся требуемыя разности: 9, 856, 856 и 2400. Вообще *числа $\bar{1}$, $\bar{1}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, поставленныя предъ ариѳметич. дополненіями выражаютъ, сколько нужно вычесть единицъ, изъ высшей цыфры найденной, чрезъ дѣйствіе ариѳметическаго дополненія, суммы, чтобъ опредѣлить желаемую разность.*

Подобно сему будетъ

$$9635-3763=9635+\bar{1}6237=5872$$

$$395094-123045=395094+\bar{1}876955=272049.$$

§ 34.

Послѣ чего укажемъ, гдѣ полезно употребленіе ариѳметическихъ дополненій. Пусть требуется изъ суммы двухъ чиселъ 672736 и 426452 вычесть сумму двухъ другихъ 432752 и 18675: то, вмѣсто двухъ сложеній и одного вычитанія, должно только первыя числа сложить съ ариѳметич. допол. послѣднихъ. Такъ:

672736
426452
ариѳм. допол. числа 432752. 1567248
ариѳм. допол. числа 18675 1981325
2,647761

и накопецъ изъ найденной суммы, отнявъ первый знакъ отъ лѣвой руки 2, остающееся число 647761 и будетъ требуемая разность данныхъ чиселъ. По обыкновенному же способу составили бы сумму слагаемыхъ и сумму вычитаемыхъ чиселъ и вычли бы меньшую сумму изъ большей; слѣд. сдѣлали бы два сложенія и одно вычитаніе; между тѣмъ, какъ сдѣсь, дѣлаемъ одно сложеніе, *а вычисленіе дополненій такъ легко, что нельзя принимать этого за особое дѣйствіе.*

Подобнымъ образомъ, если требуется сложить и вычесть 509—708+399—1002+563+2999; то, на основаніи сказаннаго, вычитаніе превращается въ сложеніе чиселъ:

2999
509
399
2292
1998
1437
5,634

откуда, отнявъ 4 съ лѣвой руки, получаемъ настоящую разность 1,634.

Еще 159—784+703; слагаю:

$$\begin{array}{r} 803 \\ \bar{1}59 \\ \hline \bar{1}216 \\ \hline 1{,}078, \end{array}$$

Гдѣ также, отнявъ предъ запятою 1, настоящая разность будетъ 78.

§ 35.

Общее замѣчаніе. Всѣ задачи на вычитаніе разрѣшаются скрывающимся въ нихъ смысломъ: *чѣмъ меньше, тѣмъ меньше.* Вотъ примѣръ:

1. Нѣкто присоединилъ къ своимъ крестьянамъ, купленныхъ 5079 человѣкъ, послѣ чего всѣхъ нашлось 6408 душъ. Спраш. сколько у него было своихъ крестьянъ?

Рѣшеніе. По смыслу вопроса пишу

$5079+x=6408$

откуда

$x=6408-5079=329$ душъ своихъ.

2. Нѣкто изъ числа своихъ денегъ издержалъ 3825 руб. и послѣ этого осталось у него 1313 руб. Спр. сколько всѣхъ денегъ та особа имѣла.

Пишу

$x-3825=1613$

и

$x=3825+1613=5438$ руб.

3. У командира полка взято изъ лучшихъ солдатъ нѣкоторое число въ гвардію, и послѣ сего еще осталось