СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ

1885 ГОДА.

I.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1885.

Напечатано по опредѣленію совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *И. Щелковъ.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Протоколы засѣданій:

Стран.

15-го февраля 1885 года . . . . 1—2.

1-го марта . . . . 28.

15-го марта . . . . 34.

Сообщенія:

1. *К. А. Торопова*, Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ одного класса дифференціаловъ. . . . 3—27.

2. *А. А. Маркова*, Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей . . . . 29—33.

3. *К. А. Поссе*, Къ вопросу о предѣльныхъ значеніяхъ интеграловъ или суммъ . . . . 35—58.

4. *А. П. Грузинцева*, Физическія замѣтки (съ таблицею рисунковъ). . . . . 59—66.

6. *Его-же*, Объ одномъ частномъ законѣ поглощенія свѣта . . . . 67—81.

Приложеніе.

М. А. Тихомандрицкаго, Отчетъ о занятіяхъ въ Лейпцигѣ . . . . I—XXII.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА, СОСТОЯЩАГО ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ, 15 ФЕВРАЛЯ 1885 ГОДА.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, Г. В. Левицкій, А. В. Маевскій, Г. А. Синяковъ, А. А. Клюшниковъ, П. С. Флоровъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель сообщилъ о полученіи слѣдующихъ книгъ:

1) Физико-Математическія науки, № 1, 1885.

2) Mathesis, №№ 10 и 12.

3) Journal de mathématiques élémentaires et spéciales. Dec. 1884 и Janvier 1885.

4) Журналъ элементарной математики, № 11.

5) Кіевскія университетскія извѣстія, №№ 10 и 11. 1884.

6) Bulletin de la société mathématique de France, №№ 4 et 5, tome XII.

7) Bulletin de la société Impérial de naturalistes de Moscou. № 2, 1884.

8) М. А. Тихомандрицкій: Ueber das Umkehrprobleme der elliptischen Integrale (брошюра).

9) Бредихинъ: Quelques formules de la théorie des comètes (брошюра).

10) Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. Francisco Gomes Teixeira. Volume III, Coimbra. 1881.

2. Постановили: выслать г. профессору Teixeira въ обмѣнъ за издаваемый имъ журналъ полный экземпляръ «Сообщеній математическаго общества».

3. Профессоръ Васильевъ обратился съ письмомъ къ К. А. Андрееву, прося предложить харьк. математ. обществу принять участіе въ подпискѣ на бюстъ профессору и академику Вейерштрассу въ память 70-лѣтняго юбилея его, имѣющаго быть 31 октября 1885 года. Математическое общество приняло участіе въ предлагаемой подпискѣ; собранныя деньги (12 р.) предсѣдатель имѣетъ отправить къ профессору Васильеву.

4. Предсѣдатель сообщилъ о полученіи статей отъ:

1) *К. А. Торопова* изъ С.Петербурга подъ заглавіемъ — «Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ одного класса дифференціаловъ». Статью эту взялся доложить М. Ѳ. Ковальскій.

2) *А. А. Маркова* изъ С.Петербурга подъ заглавіемъ — «Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей».

3) *К. А. Поссе* — «Къ вопросу о предѣльныхъ значеніяхъ интеграловъ или суммъ».

Послѣднія двѣ статьи взялъ на себя доложить К. А. Андреевъ.

5. *П. С. Флоровъ* прочелъ свою статью подъ заглавіемъ — «По поводу уравненія Рикатти».

---

*

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦІАЛОВЪ.

К. А. Торопова.

Я разсматриваю здѣсь нѣсколько видовъ алгебраическихъ ирраціональныхъ дифференціаловъ, интегрирующихся въ конечномъ видѣ. Дифференціалы эти содержатъ ирраціонально или полиномъ третьей, или полиномъ четвертой степени, или, наконецъ, отношеніе квадратныхъ полиномовъ и, слѣдовательно, вообще не интегрируются въ логариѳмическихъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Одни изъ разсматриваемыхъ здѣсь дифференціаловъ принадлежатъ къ классу, который характеризуется тождествомъ

$$f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{x}\right) d\,\frac{1}{x}; \qquad (1)$$

другіе приводятся посредствомъ простѣйшихъ преобразованій къ дифференціаламъ этого класса.

1. Прежде чѣмъ приступить къ перечисленію дифференціаловъ, интегрирующихся въ конечномъ видѣ, мы сдѣлаемъ нѣсколько общихъ замѣчаній.

Будемъ называть цѣлою возвратною функціей степени n такую:

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_2x^2 + A_1x + A_0,$$

гдѣ коэффиціенты членовъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца, одинаковы, т. е.

$$A_i = A_{n-i}.$$

Знакоперемѣнною возвратною функціей степени n будемъ называть функцію

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots - A_2 x^2 - A_1 x - A_0,$$

въ которой коэффиціенты членовъ, равноотстоящихъ отъ начала и конца, одинаковы, но противныхъ знаковъ, т. е.

$$A_i = -A_{n-i}.$$

Напримѣръ, функцію x^α будемъ называть возвратною степени 2α; функцію же $x^\alpha - x^\beta$ знакоперемѣнною возвратною степени $\alpha + \beta$.

Замѣчаемъ, что знакоперемѣнная возвратная функція имѣетъ всегда корень равный единицѣ, и если она четной степени $2m$, то не имѣетъ члена съ x^m. Возвратная функція нечетной степени имѣетъ корень равный -1. Возвратная функція нулевой степени есть какая-нибудь постоянная величина; знакоперемѣнная же возвратная нулевой степени есть нуль.

2. Нетрудно убѣдиться въ слѣдующемъ.

Если дифференціалъ

$$f(x)\,dx = \frac{P\,dx}{Q\sqrt[m]{R}}, \tag{2}$$

гдѣ P, Q и R цѣлыя функціи x съ вещественными коэффиціентами, удовлетворяетъ тождеству (1), то при m четномъ функція R и одна изъ функцій P и Q должны быть возвратными, другая же изъ нихъ должна быть знакоперемѣнною возвратною; при m нечетномъ должно быть или то-же самое, что при m четномъ или же R есть знакоперемѣнная возвратная, и тогда обѣ P и Q должны быть возвратными. Кромѣ того, если P, Q и R будутъ соотвѣтственно степеней p, q и r, то во всякомъ случаѣ должно быть

$$q - p + \frac{r}{m} - 2 = 0. \tag{3}$$

Мы не будемъ здѣсь приводить доказательства этого, а разсмотримъ только два частныхъ случая, которые будутъ для насъ необходимы въ дальнѣйшемъ.

3. Пусть намъ данъ дифференціалъ

$$\frac{P(x)\,dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} = \frac{A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p}{a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \ldots + a_q} \times$$

$$\times \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}}, \tag{4}$$

удовлетворяющій тождеству (1), т. е. мы имѣемъ:

$$\sqrt{x^4 R\left(\frac{1}{x}\right)} . x^q Q\left(\frac{1}{x}\right) P(x) = -x^{q-p} Q(x) x^p P\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt{R(x)}. \tag{5}$$

Такъ какъ предполагается, что коэффиціенты D и E одновременно не нули, то мы заключаемъ

$$x^4 R\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha\, R(x),$$

т. е.

$$E = \alpha A, D = \alpha B, C = \alpha C, B = \alpha D, A = \alpha E,$$

откуда

$$\alpha^5 = 1,$$

т. е.

$$\alpha = 1,$$

такъ какъ коэффиціенты A, B, C, D и E вещественны.

Слѣдовательно, мы имѣемъ возвратную функцію

$$R = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A,$$

если E не нуль, и

$$R = Bx^3 + Cx^2 + Bx,$$

если $E = 0$.

Функціи P и Q не имѣютъ общихъ множителей, что всегда можно предположить; поэтому, если A_p и a_q не равны нулю, изъ (5) получаемъ $q = p$ и

$$P(x) = \alpha x^p P\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Q(x) = -\alpha x^q Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

или

$$P(x) = -\alpha x^p P\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Q(x) = \alpha x^q Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

Откуда, подобно предыдущему, заключаемъ, что одна изъ P и Q должна быть возвратною, другая знакоперемѣнною возвратною и притомъ обѣ одинаковой степени.

Мы предполагали, что ни A_p, ни a_q не равны нулю. Одновременно они не могутъ быть нулями; поэтому разсмотримъ случай, когда одна изъ нихъ равна нулю.

Положимъ

$$A_p = 0, A_{p-1} = 0, \ldots A_{p-i+1} = 0,$$

тогда изъ тождества (5) слѣдуетъ или

$$Q(x) = \alpha x^q\, Q\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$P(x) = -\alpha x^{p+i}\, P\left(\frac{1}{x}\right) \tag{6}$$

или

$$Q(x) = -\alpha x^q Q\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$P(x) = \alpha x^{p+i}\, P\left(\frac{1}{x}\right) \tag{6'}$$

и

$$q = p + i.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$A_0\, x^p + A_1\, x^{p-1} + \ldots + A_{p-i}\, x^i =$$
$$= \pm \alpha (A_{p-i}\, x^p + A_{p-i-1}\, x^{p-1} + \ldots + A_0\, x^i),$$

и P будетъ такого вида

$$A_0\, x^p + A_1\, x^{p-1} + \ldots \pm A_1\, x^{i+1} \pm A_0\, x^i,$$

т. е., P есть возвратная или знакоперемѣнная возвратная функція степени $p+i$. Что же касается Q, то она, какъ видно изъ (6') и (6), будетъ тогда знакоперемѣнною возвратною, или возвратною степени тоже $p+i$.

4. Разсмотримъ теперь дифференціалъ

$$\frac{P(x)\, dx}{Q(x)\sqrt[3]{R(x)}} = \frac{A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_p}{a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \ldots + a_q} \times$$
$$\times \frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}, \tag{7}$$

удовлетворяющій тождеству (1). Мы имѣемъ

$$\sqrt[3]{x^3 R\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot P(x)\, x^q Q\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -x^{q-p-1} Q(x)\, x^p P\left(\frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{R(x)}, \tag{8}$$

откуда

$$x^3 R\left(\frac{1}{x}\right) = \alpha R(x), \tag{9}$$

т. е.

$$\alpha = \pm 1$$

и

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 \pm Bx \pm A.$$

Если

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 + Bx + A,$$

также, какъ и въ n° 3, заключимъ, что одна изъ функцій P и Q есть возвратная, другая же знакоперемѣнная возвратная; степень Q на единицу болѣе степени P.

Если $\alpha = -1$, т. е.

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 - Bx - A,$$

мы, подобно предыдущему найдемъ, что P и Q суть функціи одновременно или возвратныя или знакоперемѣнныя возвратныя; но послѣдняго быть не можетъ, такъ какъ P и Q не имѣютъ общихъ множителей; слѣдовательно, P и Q обѣ возвратныя и степень Q на единицу болѣе степени P. Замѣтимъ, что отъ втораго случая можемъ перейдти къ первому, замѣняя x на $-x$, такъ какъ, въ чемъ не трудно убѣдиться, возвратная функція нечетной степени при такой замѣнѣ переходитъ въ знакоперемѣнную возвратную и обратно, а возвратная функція четной степени остается возвратною.

Ограничиваясь двумя разобранными случаями дифференціала (2), мы перейдемъ къ перечисленію дифференціаловъ, интегрирующихся въ конечномъ видѣ.

5. Въ дальнѣйшемъ вездѣ буква f будетъ обозначать раціональную функцію, удовлетворяющую тождеству (1).

Дифференціалы вида

$$f(x, \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E})\,dx \tag{10}$$

интегрируются въ конечномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, дифференціалъ (10) всегда можно представить такъ:

$$\frac{M(x)}{N(x)}dx + \frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ M, N, P и Q цѣлыя функціи x и

$$R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E.$$

Въ силу (1) будемъ имѣть тождество

$$\frac{M(x)dx}{N(x)} + \frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} = \frac{M\left(\frac{1}{x}\right)d\,\frac{1}{x}}{N\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)d\,\frac{1}{x}}{Q\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{R\left(\frac{1}{x}\right)}},$$

откуда

$$\frac{P(x)dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} = \frac{P\left(\frac{1}{x}\right)d\,\frac{1}{x}}{Q\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{R\left(\frac{1}{x}\right)}}.$$

Слѣдовательно, мы имѣемъ (n° 3):

$$R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A,$$

$$P(x) = A_0x^p + A_1x^{p-1} + \ldots \pm A_1x \pm A_0,$$

$$Q(x) = a_0x^q + a_1x^{q-1} + \ldots \mp a_1x \mp a_0,$$

гдѣ въ P и Q нужно брать одновременно или верхніе или нижніе знаки.

Для интегрированія дифференціала

$$\frac{P(x)\,dx}{Q(x)\sqrt{R(x)}} \tag{11}$$

введемъ новую перемѣнную уравненіемъ

$$x=\frac{1+t}{1-t}.$$

Такъ какъ одна изъ функцій P и Q есть сумма членовъ вида

$$\alpha_i=A_i(x^{p-i}+x^i),$$

а другая сумма членовъ вида

$$\beta_i=a_i(x^{p-i}-x^i),$$

которые, по внесеніи въ нихъ t вмѣсто x, представятся такъ:

$$\alpha_i=\frac{A_i(1-t^2)^i[(1+t)^{p-2i}+(1-t)^{p-2i}]}{(1-t)^p}=\frac{\varphi_i(t^2)}{(1-t)^p},$$

$$\beta_i=\frac{a_i(1-t^2)[(1+t)^{p-2i}-(1-t)^{p-2i}]}{(1-t)^p}=\frac{t\psi_i(t^2)}{(1-t)^p},$$

то отношеніе $\frac{P}{Q}$ будетъ имѣть видъ

$$\frac{t\varphi(t^2)}{\psi(t^2)}.$$

Далѣе, также найдемъ

$$R(x)=\frac{\omega(t^2)}{(1-t)^4},$$

гдѣ $\omega(t^2)$ есть биквадратный трехчленъ; кромѣ того имѣемъ

$$dx = \frac{2dt}{(1-t)^2}.$$

Слѣдовательно, дифференціалъ (11) будетъ имѣть видъ

$$\frac{2t\varphi(t^2)\,dt}{\psi(t^2)\sqrt{\omega(t^2)}},$$

откуда мы заключаемъ, что дифференціалъ (11), а слѣдовательно, и (10) интегрируются въ конечномъ видѣ.

6. Примѣръ. Найдти интегралъ

$$S = \int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\text{ *}.$$

Полагая

$$x = \frac{1+t}{1-t},$$

получимъ

$$S = -2\sqrt{2}\int \frac{tdt}{(1+t^2)\sqrt{1+6t^2+t^4}},$$

откуда, черезъ замѣну t^2 на v, будемъ имѣть

$$S = -\sqrt{2}\int \frac{dv}{(1+v)\sqrt{1+6v+v^2}}.$$

Замѣчая, что при перемѣнѣ v на $-v$ подъинтегральный дифференціалъ переходитъ въ такой, который удовлетворяетъ тождеству (1), полагаемъ

$$v = \frac{u+1}{u-1},$$

тогда

---

* Institutionum Calculi Integralis volumen quartum. L. Euleri, p. 22.

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{u\sqrt{2u^2 - 1}},$$

откуда, полагая

$$2u^2 - 1 = y^2,$$

получимъ

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} y.$$

Опредѣляя y въ функціи x, найдемъ уравненіе

$$y = -\frac{\sqrt{1 + x^4}}{x\sqrt{2}},$$

которое употребляетъ Эйлеръ для нахожденія интеграла S.

И такъ,

$$\int \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^4}}.$$

Совершенно такимъ же maнеромъ найдемъ и другіе интегралы Эйлера:

$$\int \frac{1 + x^2}{1 - x^2} \frac{dx}{\sqrt{+x^4}}, \int \frac{\sqrt{1 + x^4}\,dx}{1 - x^4}, \int \frac{x^2}{1 - x^4} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}\ *$$

Замѣтимъ, что дифференціалъ (11) можетъ быть интегрированъ также при помощи подстановки

$$x = z + \frac{1}{z}\ **.$$

* Ibidem.

** *Буняковскій*, О частныхъ случаяхъ интегрируемости дифференціала $\frac{x + c_1}{x + c_2} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$ въ конечномъ видѣ. (Записки академіи наукъ. Томъ III).

7. Дифференціалы вида

$$f(x, \sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Cx+D})\,dx \tag{12}$$

интегрируются въ конечномъ видѣ.

Такъ какъ дифференціалъ (12) можно представить въ видѣ суммы трехъ:

$$\frac{M}{N}dx+\frac{Pdx}{Q\sqrt[3]{R}}+\frac{Sdx}{T\sqrt[3]{R^2}}, \tag{13}$$

гдѣ M, N, P, Q, S и T цѣлые полиномы, и $R=Ax^3+$ $+Bx^2+Cx+D$, изъ которыхъ каждый будетъ удовлетворять тождеству (1), то мы заключаемъ (n^0 4) о второмъ дифференціалѣ, что

$$R=Ax^3+Bx^2+Bx+A,$$
$$P=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots\pm A_1x\pm A_0,$$
$$Q=a_0x^{p+1}+a_1x^p+\ldots\mp a_1x\mp a_0.$$

Случай, когда

$$R=Ax^3+Bx^2-Bx-A,$$

какъ мы замѣтили, приводится къ этому.

Относительно третьяго дифференціала замѣтимъ, что такъ какъ онъ удовлетворяетъ тождеству (1) и, кромѣ того,

$$\frac{dx}{\sqrt[3]{(Ax^3+Bx^2+Bx+A)^2}}=$$

$$=-\frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(A\left(\frac{1}{x}\right)^3+B\left(\frac{1}{x}\right)^2+B\left(\frac{1}{x}\right)+A\right)^2}}, \tag{14}$$

то

$$\frac{S(x)}{T(x)} = -\frac{S\left(\frac{1}{x}\right)}{T\left(\frac{1}{x}\right)}. \qquad (15)$$

Для интегрированія дифференціала (12) полагаемъ,

$$x = \frac{1+t}{1-t},$$

тогда также, какъ и въ n° 5, найдемъ, что второй изъ (13) дифференціаловъ приметъ видъ или

$$\frac{\frac{\varphi(t^2)}{(1-t)^n}\,\frac{dt}{(1-t)^2}}{\frac{t\psi(t^2)}{(1-t)^{n+1}}\sqrt[3]{\frac{A+Bt^2}{(1-t)^3}}} = \frac{\varphi(t^2)\,dt}{t\psi(t^2)\sqrt[3]{A+Bt^2}}, \qquad (16)$$

или

$$\frac{\frac{t\varphi(t^2)}{(1-t)^n}\,\frac{dt}{(1-t)^2}}{\frac{\psi(t^2)}{(1-t)^{n+1}}\sqrt[3]{\frac{A+Bt^2}{(1-t)^3}}} = \frac{t\varphi(t^2)\,dt}{\psi(t^2)\sqrt[3]{A+Bt^2}}. \qquad (17)$$

На основаніи (15), т. е.

$$\frac{S\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{T\left(\frac{1+t}{1-t}\right)} = -\frac{S\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}{T\left(\frac{1-t}{1+t}\right)}$$

заключаемъ, что отношеніе $\frac{S}{T}$ преобразуется въ нечетную функцію относительно t, т. е. въ функцію вида $t\omega(t^2)$; откуда слѣдуетъ, что третій изъ дифференціаловъ (13) переходитъ въ такой

$$\frac{t\varphi(t^2)\,dt}{\sqrt[3]{(A+Bt^2)^2}}. \qquad (18)$$

Изъ выраженій (16), (17) и (18) заключаемъ, что дифференціалъ (12) интегрируется въ конечномъ видѣ.

8. Примѣръ 1. Найдти интегралъ

$$S=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Bx+A}}.$$

Полагая

$$x=\frac{1+t}{1-t}$$

будемъ имѣть интегралъ

$$S=\int\frac{dt}{t\sqrt[3]{2(A+B)+(3A-B)t^2}},$$

который замѣною $2\,(A+B)+(3A-B)t^2$ на v^3 приводится къ интегралу отъ раціональной дроби.

Въ результатѣ получимъ

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Bx+A}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2(A+B)}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{4R}+(x+1)\sqrt[3]{A+B}}{\sqrt{3}(x+1)\sqrt[3]{A+B}}+$$

$$\frac{1}{4\sqrt[3]{2(A+B)}}\lg\frac{[\sqrt[3]{4R}-\sqrt[3]{A+B}(x+1)]^2}{2\sqrt[3]{2R^2}+(x+1)\sqrt[3]{4(A+B)R}+(x+1)^2\sqrt[3]{(A+B)^2}}, \qquad (19)$$

гдѣ $R=Ax^3+Bx^2+Bx+A$.

Измѣняя здѣсь x на $-x$ и A на $-A$, получимъ выраженіе интеграла

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2-Bx-A}}.$$

При $A=-B$, выраженіе (19) получаетъ неопредѣленный видъ, но тогда мы имѣемъ извѣстный интегралъ

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$$

9. Примѣръ 2. Найдти интегралъ

$$S=\int \frac{x\,dx}{(x^3-1)\sqrt[3]{1+x^3}}. \qquad (20)$$

Подъинтегральный дифференціалъ приводимъ къ раціональному виду, полагая

$$x=\frac{1+t}{1-t} \text{ и } 1+3t^2=8v^3.$$

Положивъ въ (20)

$$x^3=\frac{\alpha+y}{\beta+y},$$

будемъ имѣть интегралъ:

$$S=-\frac{1}{3}\int \frac{dy}{\sqrt[3]{(\alpha+y)(\beta+y)(\alpha+\beta+2y)}},$$

откуда заключаемъ: если одинъ изъ корней полинома

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

есть средняя ариѳметическая двухъ остальныхъ, то интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Cx+D}} \qquad (21)$$

выражается въ логариөмическихъ функціяхъ.

Напримѣръ, интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

выражается въ логариөмахъ.

Замѣняя въ (20) x на $-x$, получимъ интегралъ

$$\int \frac{xdx}{(x^3+1)\sqrt[3]{x^3-1}}.$$

Полагая здѣсь

$$x=\frac{\alpha+y}{\beta+y},$$

заключаемъ, что интегралъ

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sqrt[3]{(x+\alpha)(x+\beta)}} \qquad (22)$$

выражается въ лагариөмахъ.

Замѣтимъ, что интегралы (21) и (22) приводятся къ извѣстнымъ и посредствомъ подстановки

$$x+\frac{\alpha+\beta}{2}=y.$$

10. Дифференціалы вида

$$F\left(\sqrt[n]{\frac{ax^2+bx+a}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}},\ \sqrt[m]{\frac{ax^2+bx+a}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}}\ldots\ldots\right)f(x)dx\,, \qquad (23)$$

гдѣ n, m,.... раціональныя числа и F знакъ раціональной функціи, интегрируются въ конечномъ видѣ.

Полагая

$$x = \frac{1+t}{1-t},$$

замѣчаемъ, что функція F преобразуется въ такую:

$$F\left(\sqrt[n]{\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}}, \sqrt[m]{\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2}}, \ldots\ldots\right).$$

Такъ какъ $f(x)$ удовлетворяетъ тождеству (1), то

$$f\left(\frac{1+t}{1-t}\right) d\,\frac{1+t}{1-t} = f\left(\frac{1-t}{1+t}\right) d\,\frac{1-t}{1+t},$$

т. е. $f(x)dx$ переходитъ въ $\varphi(t)dt$, который удовлетворяетъ тождеству

$$\varphi(t)dt = \varphi(-t)d(-t),$$

заключаемъ, что $\varphi(t)$ есть функція вида

$$t\psi(t^2).$$

Слѣдовательно, полагая далѣе

$$\frac{A+Bt^2}{C+Dt^2} = v^N,$$

гдѣ N есть наименьшее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$,...,
мы приведемъ дифференціалъ (23) къ виду

$$\omega(v)dv,$$

гдѣ $\omega(v)$ есть раціональная функція v.

11. Примѣръ. Найдти интегралъ

$$S=\int\frac{(x^2-1)\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\,.\,dx}{(x^4-x^3+2x^2-x+1)\left(1+\sqrt[5]{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\right)}.$$

Полагая

$$x=\frac{1+t}{1-t},$$

получимъ

$$S=2\int\frac{t\sqrt[3]{\frac{1+3t^2}{2(1+t^2)}}\,.\,dt}{(1+4t^2+3t^4)\left(1+\sqrt[5]{\frac{1+3t^2}{2(1+t^2)}}\right)},$$

замѣняя $\frac{1+3t^2}{2(1+t^2)}$ чрезъ v^{15}, найдемъ

$$S=\frac{15}{2}\int\frac{v^4\,dv}{1+v^3},$$

слѣдовательно

$$S=\frac{15}{4}\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{15}}+\frac{5}{2}\lg\left(1+\sqrt[15]{\frac{x^2-x+1}{1+x^2}}\right)-$$

$$-\frac{5}{4}\lg\left(1-\sqrt[15]{\frac{x^2-x+1}{1+x^2}}+\left(\frac{x^2-x+1}{1+x^2}\right)^{\frac{2}{15}}\right)-$$

$$-\frac{5}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[15]{\frac{x^2-x+1}{1+x^2}}-1}{\sqrt{3}}.$$

12. Нетрудно убѣдиться также, какъ и въ n° 10, что дифференціалы

$$F\left(\sqrt[m]{A+\sqrt[n]{B+\sqrt[p]{C+\ldots+\sqrt[s]{\frac{ax^2+bx+a}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}}}}}\right)f(x)dx, \quad (24)$$

$$F\left(\frac{\sqrt{ax^2+bx+a}}{1+x}, \frac{\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\alpha}}{1+x}\right)f(x)\,dx, \quad (25)$$

гдѣ m, n, p, ... s раціональныя числа, а F знакъ раціональной функціи, интегрируются въ конечномъ видѣ.

13. Если коэффиціенты полинома

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

удовлетворяютъ равенству

$$2B^3-9ABC+27A^2D=0, \quad (26)$$

то интегралъ

$$S=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3+Bx^2+Cx+D}} \quad (27)$$

выражается чрезъ логариѳмическія функціи.

Введя въ (27) новую перемѣнную уравненіемъ

$$x=\frac{\lambda}{y-1},$$

гдѣ λ постоянная величина, получимъ

$$S=\int\frac{-\lambda dy}{(y-1)\sqrt[3]{A\lambda^3-B\lambda^2+C\lambda-D+y(B\lambda^2-2C\lambda+3D)+y^2(C\lambda-3D)+Dy^3}}.$$

Если λ удовлетворяетъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned}A\lambda^3-B\lambda^2+C\lambda-2D=0,\\ B\lambda^2-3C\lambda+6D=0,\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

то (n° 7) интегралъ (27) выражается въ конечномъ видѣ.

Изъ уравненій (28) весьма просто опредѣляется и, слѣдовательно, исключается λ. Въ самомъ дѣлѣ, умножая первое на три и складывая со вторымъ, находимъ

$$3A\lambda - 2B = 0;$$

подставляя полученное значеніе λ въ одно изъ уравненій (28), будемъ имѣть зависимость (26), что и требовалось показать. Мы видимъ, что для нахожденія интеграла (27), когда существуетъ равенство (26), слѣдуетъ положить:

$$x = \frac{2B}{3A(y-1)}. \tag{29}$$

Такимъ образомъ, интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{Ax^3 + Bx^2 + \frac{2B^3 + 27A^2D}{9AB}x + D}} \tag{30}$$

при всякихъ значеніяхъ A, B и D выражается чрезъ логариөмическія функціи.

14. Въ дифференціалѣ

$$\frac{x+\alpha}{x+\beta} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Ax^2 + Bx + C}} \tag{31}$$

постоянныя α и β всегда можно подобрать такъ, чтобы онъ интегрировался въ конечномъ видѣ.

Пусть

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = (x^2 + Dx + E)\,(x - \gamma)$$

и положимъ

$$x = \gamma + \delta y,$$

тогда дифференціалъ (31) будетъ имѣть видъ:

$$\frac{\sqrt{\delta}\,(\alpha+\gamma+\delta y)\,dy}{(\gamma+\beta+\delta y)\sqrt{\delta^2 y^3+\delta(A+3\gamma)y^2+(3\gamma^2+2A\gamma+B)y}}. \quad (32)$$

Если постоянную δ опредѣлимъ изъ уравненія

$$\delta^2 = B + 2\gamma A + 3\gamma^2,$$

а за α и β возьмемъ величины

$$\alpha = \pm\,\delta - \gamma,$$
$$\beta = -(\gamma \pm \delta);$$

дифференціалъ (32), а слѣдовательно и (31) будетъ интегрироваться въ конечномъ видѣ (n^0 5).

15. Примѣръ. Дифференціалъ

$$\frac{x-4}{x+2}\,\frac{dx}{\sqrt{2x^3+5x^2+2x-9}}$$

интегрируется въ конечномъ видѣ.

Полагая

$$x = 3y + 1,$$

представляемъ данный дифференціалъ въ видѣ

$$\frac{1}{3}\,\frac{y-1}{y+1}\,\frac{dy}{\sqrt{6y^3+11y^2+6y}}.$$

Этотъ же послѣдній интегрируемъ, полагая

$$y = \frac{1+t}{1-t}.$$

Въ результатѣ будемъ имѣть

$$\int\frac{x-4}{x+2}\,\frac{dx}{\sqrt{2x^3+5x^2+2x-9}} = \frac{1}{3}\,\text{arc sin}\,\frac{x^2+3x+5}{(x+2)^2}.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ $(x=y+1)$, $\left(y=\frac{1+t}{1-t}\right)$ интегралъ

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{x\sqrt{x^3+3x^2-8x+4}}=\lg\frac{\sqrt{5x^2-8x+8+\sqrt{x^3+3x^2-8x+4}}}{x\sqrt{2}}.$$

16. Какъ и въ n° 14, легко показать, что въ дифференціалѣ

$$\frac{ax^2+bx+c}{\lambda x^2+\mu x+\nu}\,\frac{dx}{\sqrt{x^3+Ax^2+Bx+C}} \qquad (33)$$

можно всегда подобрать два изъ коэффиціентовъ a, b и c и одинъ изъ λ, μ и ν,—или два изъ λ, μ и ν и одинъ изъ a, b, c такъ, что предложенный дифференціалъ будетъ интегрироваться въ конечномъ видѣ. Этимъ путемъ мы можемъ идти сколько угодно далеко.

Примѣръ. Полагая въ интегралѣ

$$\int\frac{(x^2-4x-21)\,dx}{(x^2-4x+29)\sqrt{x^3+x^2+9x-30}}$$

$x=5y+2$, прійдемъ къ интегралу, который выражается въ логариѳмическихъ функціяхъ (по n° 5).

Мы будемъ имѣть

$$\int\frac{x^2-4x-21}{x^2-4x+29}\,\frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+9x-30}}=\frac{1}{\sqrt{y}}=\lg\frac{\sqrt{R}-(x-2)\sqrt{7}}{\sqrt{R}+(x-2)\sqrt{7}},$$

гдѣ $R=x^3+x^2+9x-30$.

17. Если между коэффиціентами полинома

$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$$

существуетъ зависимость

$$\beta^3-4\alpha\beta\gamma+8\delta\alpha^2=0, \qquad (34)$$

то въ дифференціалѣ

$$dS = \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon}} \tag{35}$$

постоянное A всегда можно подобрать такъ, чтобы онъ интегрировался въ конечномъ видѣ.

Положивъ

$$x = \frac{\lambda}{y+1},$$

получимъ

$$dS = \frac{-\lambda A\left(y+1+\frac{\lambda}{A}\right)dy}{(y+1)\sqrt{\varepsilon y^4 + \beta_1 y^3 + \gamma_1 y^2 + \delta_1 y + \varepsilon_1}},$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \delta\lambda + 4\varepsilon \\ \gamma_1 &= \gamma\lambda^2 + 3\delta\lambda + 6\varepsilon \\ \delta_1 &= \beta\lambda^3 + 2\gamma\lambda^2 + 3\delta\lambda + 4\varepsilon \\ \varepsilon_1 &= \alpha\lambda^4 + \beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon, \end{aligned}$$

Если λ удовлетворяетъ уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} \alpha\lambda^3 + \beta\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta = 0 \\ \beta\lambda^2 + 2\gamma\lambda + 2\delta = 0, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

то, выбравъ A такъ

$$+1 + \frac{\lambda}{A} = -1,$$

т. е.

$$A = -\frac{\lambda}{2},$$

увидимъ, что дифференціалъ (35) будетъ интегрироваться въ конечномъ видѣ (n° 5).

Помножая первое изъ (36) на два и вычитая второе, получимъ

$$2\alpha\lambda + \beta = 0.$$

Подставляя это выраженіе λ въ одно изъ уравненій (36), найдемъ зависимость (34), что и требовалось показать.

Для интегрированія слѣдуетъ положить

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha(y+1)},$$

тогда

$$A = \frac{\beta}{4\alpha}.$$

17. Примѣръ. Найдти интегралъ

$$S = \int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}}.$$

Полагая

$$x = \frac{-5}{y+1},$$

имѣемъ

$$S = 25\int \frac{(y-1)\,dy}{(y+1)\sqrt{(y-4)(2y-3)(3y-2)(4y-1)}},$$

замѣняя здѣсь y на $\frac{1+t}{1-t}$ и t^2 на v, получимъ

$$S = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{\left(v-\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{3}{125}}}.$$

Слѣдовательно, находимъ

$$\int \frac{(2x-5)\,dx}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\lg\left\{4(x^2+5x+5) + \sqrt{16(x^2+5x+5)^2 - 15}\right\}.$$

Точно такимъ же манеромъ можемъ найдти интегралъ

$$\int \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{x^4-2x^3-6x^2+7x+C}}.$$

18. Въ четвертомъ томѣ «Institutionum Calculi Integralis» Эйлеръ даетъ нѣсколько дифференціаловъ (Problema 17 и слѣд.), содержащихъ корень степени n изъ трехчлена степени $2n$, интегрирующихся въ конечномъ видѣ. Эти дифференціалы можно разсматривать, какъ частные случаи дифференціала (23). Въ самомъ дѣлѣ, положивъ въ (23)

$$a=0,\ f(x)=\frac{x^{2i}}{(1-x^2)^{2i+i}},\ F=F\left(\sqrt[n]{\frac{6x}{\alpha x^2+\beta x+\alpha}}\right),$$

$$x=\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\ y^n,$$

получимъ дифференціалъ

$$F\left(\frac{6y}{\sqrt[n]{\gamma y^{2n}+\beta y^n+\alpha}}\right)\frac{y^{(2i+1)n-1}\,dy}{(\alpha-\gamma y^{2n})^{2i+1}},\tag{37}$$

интегрирующійся въ конечномъ видѣ.

Если

$$F\left(\frac{6y}{\sqrt[n]{\gamma y^{2n}+\beta y^n+\alpha}}\right)=\left(\frac{\sqrt[n]{\alpha+\beta y^n+\gamma y^{2n}}}{y}\right)^{\lambda+1},$$

дифференціалъ (37) приметъ видъ

$$\frac{y^{(2i+1)n-\lambda-2}\sqrt[n]{(\alpha+\beta y^n+\gamma y^{2n})^{\lambda+1}}}{(\alpha-\gamma y^{2n})^{2i+1}}\,dy$$

(См. I. C. I. vol. quartum, § 70).

Къ этому же виду приводится и дифференціалъ

$$\frac{dx}{\left(1-x^m\right)\sqrt[2m]{2x^m-1}}. \tag{38}$$

Полагая

$$2x^m - 1 = y^{2m},$$

найдемъ

$$2^{\frac{2m-1}{m}} m \left(\frac{y}{\sqrt[m]{1+y^{2m}}}\right)^{m-1} \frac{y^{m-1}}{1-y^{2m}}\, dy,$$

что, очевидно, есть тоже частный случай дифференціала (37).

19. Въ заключеніе замѣтимъ слѣдующее. Пусть намъ данъ дифференціалъ, удовлетворяющій тождеству

$$f(x)\, dx = f\left(\frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}\right) d\, \frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x}. \tag{39}$$

Если мы введемъ въ это тождество новую перемѣнную уравненіемъ

$$x = \frac{m+nt}{p+qt},$$

то постоянныя m, n, p и q во множествѣ случаевъ можно выбрать такъ, что тождество (39) перейдетъ въ такое

$$\varphi(t)\, dt = \varphi\left(\frac{1}{t}\right) d\, \frac{1}{t},$$

откуда заключаемъ, что каждая возможная и самостоятельная (а онѣ существуютъ) комбинація постоянныхъ α, β, γ и δ дастъ также много частныхъ случаевъ интегрируемости въ конечномъ видѣ дифференціаловъ, вообще не интегрирующихся, какъ много даетъ разобранная здѣсь комбинація $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \delta$.

Спб.
7 Января 1885 г.

Протоколъ засѣданія 1 марта 1885 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Θ. Ковальскій, А. А. Клюшниковъ, В. П. Алексѣевскій, П. С. Флоровъ, Н. Д. Пильчиковъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

Предметы занятій:

1. Г. предсѣдатель прочиталъ письмо отъ завѣдующаго студенческой библіотекой въ Институтѣ инженеровъ путей сообщенія, содержащее просьбу о высылкѣ изданій харьковскаго математическаго общества.

Постановлено: выслать полный экземпляръ (11 вып.) «Сообщеній» и занести студенческую библіотеку И. П. С. въ число корреспондентовъ харьковскаго математическаго общества.

2. Г. секретарь сообщилъ о полученіи слѣдующихъ изданій:

а) Mathesis. Janvier 1885.

б) Bulletin de la société mathématique de France. T. XII, № 6 (dernier) 1884.

в) Записки математическаго общества студентовъ с.-петербургскаго университета. — Листы 7 и 8.

г) Бредихинъ — Sur la grande comète de 1811 a. (брошюра).

д) Бредихинъ — Sur les têtes des comètes.

е) Журналъ элементарной математики, № 12 и № 13 (1885).

3. *М. Θ. Ковальскій* передалъ содержаніе статьи К. А. Торопова подъ заглавіемъ — «Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ одного класса дифференціаловъ».

4. *К. А. Андреевъ* изложилъ содержаніе статьи А. А. Маркова — «Доказательство сходимости многихъ непрерывныхъ дробей».

5. *А. П. Грузинцевъ* сообщилъ объ одномъ частномъ законѣ для срединъ, поглощающихъ свѣтъ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ

МНОГИХЪ НЕПРЕРЫВНЫХЪ ДРОБЕЙ.

А. А. Маркова.

Обозначенія и предположенія. Сохранимъ тѣ же обозначенія, какъ въ моемъ разсужденіи — «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей». Будемъ также предполагать, что функція $f(y)$, входящая подъ знакомъ интеграла

$$\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y},$$

въ предѣлахъ интегрированія постоянно больше нуля.

Цѣль настоящей замѣтки состоитъ въ доказательствѣ сходимости непрерывной дроби

$$\cfrac{C_1}{p_1 - \cfrac{C_2}{p_2 - \cfrac{C_3}{p_3 - \cfrac{C_4}{p_4 - \dotsb}}}}$$

соотвѣтствующей интегралу $\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y}$, для всѣхъ значеній z внѣ предѣловъ интегрированія.

Лемма.

$\int_{x_n}^{b} f(y)\,dy$ по мѣрѣ возрастанія n стремится къ предѣлу, равному нулю.

Доказательство.

Не трудно видѣть, что x_n при возрастаніи n постоянно возрастаетъ и остается меньше b.

Слѣдовательно, при безпредѣльномъ возрастаніи n, x_n стремится къ нѣкоторому опредѣленному предѣлу, не превосходящему b.

И коль скоро

$$\text{предѣлъ } (x_n)_{n=\infty} = b,$$

очевидно

$$\text{предѣлъ} \int_{x_n}^{b} f(y)\,dy = 0.$$

Допустимъ теперь, что

$$\text{предѣлъ } (x_n)_{n=\infty} = \beta' < b.$$

Тогда всякое число β, между b и β', больше x_n и потому выраженіе

$$\left(1 + \frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^2$$

меньше единицы при $a < y \leqq x_n$.

Напротивъ, это выраженіе больше единицы при $y > \beta$.

Если же возвысимъ это выраженіе въ достаточно большую цѣлую положительную степень h, получимъ выраженіе

$$\left(1 + \frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h},$$

которое при $a > y \leqq x_n$ будетъ меньше

$$\frac{\int_\beta^b f(y)\,dy}{\int_a^b f(y)\,dy}.$$

Полагая затѣмъ $n > h$, имѣемъ

$$\int_a^b \left(1 + \frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} f(y)\,dy = \sum \left(1 + \frac{x_i-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} \frac{\psi_n(x_i)}{\varphi'_n(x_i)},$$

откуда

$$\int_a^b \left(1 + \frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} f(y)\,dy < \frac{\int_\beta^b f(y)\,dy. \sum \frac{\psi_n(x_i)}{\varphi'_n(x_i)}}{\int_a^b f(y)\,dy} = \int_\beta^b f(y)\,dy.$$

Съ другой стороны, нетрудно убѣдиться, что тотъ же интеграль $\int_a^b \left(1 + \frac{y-\beta}{\beta-a}\right)^{2h} f(y)\,dy$ больше $\int_\beta^b f(y)\,dy$.

Такимъ образомъ допущеніе, что предѣлъ $(x_n)_{n=\infty}$ неравенъ b, привело насъ къ неизбѣжному противурѣчію.

И такъ

предѣлъ $(x_n)_{n=\infty} = b$ и предѣлъ $\left[\int_{x_n}^b f(y)\,dy\right]_{n=\infty} = 0$*.

---

* Это доказательство заимствовано мною въ главныхъ чертахъ изъ мемуара *M. T. J. Stieltjes* «Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques», который помѣщенъ въ № 12 журнала «Annales scientifiques de l'École normale supérieure» за 1884 годъ.

Теорема.

Коль-скоро вещественное число u лежитъ внѣ предѣловъ a и b, навѣрно

$$\text{предѣлъ}\ \left\{\frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)}\right\}_{n=\infty} = \int_a^b \frac{f(y)\,dy}{u-y}.$$

Доказательство.

Разсмотримъ сначала случай $u > b$.

Тогда при $a < z < b$ функція

$$\Omega(z) = \frac{1}{u-z}$$

сохраняетъ постоянно знакъ плюсъ, равно какъ и всѣ ея производныя по z.

Слѣдовательно, согласно неравенствамъ 7 и 11 моей статьи — «О нѣкот. прил. алгебр. непрер. дробей», имѣемъ

$$\int_a^b \frac{f(y)}{u-y}dy > \sum \frac{\psi_n(x_i)}{(u-x_i)\varphi_n'(x_i)} > \int_a^{x_n} \frac{f(y)}{u-y}dy$$

$$\left(i=1, 2, 3, \ldots, n\right).$$

Откуда, принимая во вниманіе очевидное равенство

$$\sum \frac{\psi_n(x_i)}{(u-x_i)\varphi_n'(x_i)} = \frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)},$$

выводимъ

$$0 < \int_a^b \frac{f(y)}{u-y}dy - \frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)} <$$

$$< \int_{x_n}^b \frac{f(y)}{u-y}\,dy < \frac{1}{u-b}\int_{x_n}^b f(y)\,dy.$$

Остается сопоставить послѣднее неравенство съ только-что доказанною леммою, и наша теорема при $u > b$ доказана.

Подобнымъ-же образомъ можно доказать ее и въ случаѣ $u < a$. Однако, тогда надо нѣсколько измѣнить только-что доказанную лемму, равно какъ и лемму вторую со всѣми ея слѣдствіями.

А именно, при $u < a$ будемъ имѣть:

$$0 < \left|\int_a^b \frac{f(y)}{y-u} + \frac{\psi_n(u)}{\varphi_n(u)}\right| < \int_a^{x_1} \frac{(y)}{y-u} < \text{сколь}$$

угодно малой величины.

Эти измѣненія удобнѣе всего можно получить при помощи слѣдующей подстановки:

$$y = a + b - Y$$

$$u = a + b - U.$$

С.-Петербургъ.
1-го января 1885 г.

Протоколъ засѣданія 15 марта.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Θ. Ковальскій, А. А. Клюшниковъ, Н. Д. Пильчиковъ, П. С. Флоровъ, А. П. Грузинцевъ и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ М. Θ. Ковальскій.

Предметы занятій:

I. Секретарь сообщилъ о полученіи слѣдующихъ изданій:

1) Кіевскія университетскія извѣстія № 12 (1884 г.) и № 1 (1885 г.).

2) Bulletin de la société mathématique de France. T. XIII, № 1 (1885).

3) Протоколъ 39-го засѣданія казанскаго общества естествоиспытателей. Секція физико-математическихъ наукъ.

4) М. А. Ковальскій (1821—1884). Брошюра отъ казанскаго общ. естествоиспытателей.

5) Programm of observatory of Washington (листъ).

6) Journal de mathématiques élémentaires et spéciales. №№ 1 и 2.

II. *М. Θ. Ковальскій* изложилъ свою статью подъ заглавіемъ: «Условіе интегрируемости радикальныхъ функцій вида $\frac{M}{\sqrt[m]{T}}$, гдѣ M и T суть цѣлыя раціональныя функціи, въ логариѳмическихъ».

III. *П. С. Флоровъ* сообщилъ доказательство тождества:

$$\left(x^m D_x{}^k\right)^\delta u = \left(k-m\right)^{k\delta} z^{-\delta+\frac{k}{k-m}} \left(z^{\delta-\frac{1}{k-m}} D_z^{\delta}\right)^k u,$$

$$z = x^{k-m}.$$

КЪ ВОПРОСУ

О ПРЕДѢЛЬНЫХЪ ЗНАЧЕНІЯХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ИЛИ СУММЪ.

К. А. Поссе.

Въ мемуарѣ П. Л. Чебышева «Sur les valeurs limites des intégrales» (Journal de Liouville, 1874) намѣченъ вопросъ о разысканіи предѣльныхъ значеній интеграловъ или суммъ, состоящій въ слѣдующемъ:

Даны значенія интеграловъ

$$\int_a^b f(y)\,dy,\ \int_a^b yf(y)\,dy,\ \ldots\ldots\ \int_a^b y^\mu f(y)\,dy,$$

гдѣ $f(y)$ неизвѣстная функція, остающаяся положительною въ предѣлахъ интегрированія, a и b — данныя числа, и требуется найти maximum и minimum интеграла $\int_0^x f(y)\,dy$, гдѣ x — данное число, лежащее между a и b.

Вопросъ этотъ рѣшенъ А. А. Марковымъ въ сочиненіи его «О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей» (С.-Петербургъ, 1884). Изучая это сочиненіе, я пришелъ къ тому заключенію, что изложеніе полученныхъ имъ результатовъ въ 3-й главѣ сочиненія можетъ быть существенно упрощено и въ нѣкоторомъ отношеніи дополнено. Я считаю не безполезнымъ указать въ настоящей замѣткѣ эти упрощенія и дополненія, причемъ стараюсь изложить предметъ такимъ образомъ, чтобы содержаніе моей замѣтки было понятно читателю и незнакомому съ содержаніемъ 3-й главы сочиненія А. А. Маркова.

Не нарушая общности вопроса, положимъ нижній предѣлъ интеграловъ равнымъ 0, верхній обозначимъ черезъ l; будемъ разсматривать элементы интеграла $\int_0^l f(y)dy$ какъ массы точекъ на прямой AC, длина которой $=l$, различныя значенія y въ предѣлахъ интегрированія какъ разстоянія этихъ точекъ отъ A, длину AB обозначимъ черезъ x и поставимъ вопросъ слѣдующимъ образомъ

$A \qquad\qquad\qquad\qquad B \qquad\qquad\qquad\qquad C$

На прямой $AC=l$ неизвѣстнымъ образомъ распредѣлена масса, величина которой $\alpha_0=\int_0^l f(y)dy$ дана; даны также суммы произведеній массъ различныхъ точекъ на первыя, вторыя,.... μ-ыя степени соотвѣтственныхъ разстояній отъ A, т. е. даны

$$\alpha_0=\int_0^l f(y)dy\,,\ \alpha_1=\int_0^l yf(y)dy\,,\ \alpha_2=\int_0^l y^2f(y)dy,\dots.$$

$$\dots.\alpha_\mu=\int_0^l y^\mu f(y)dy.$$

Требуется найти maximum и minimum массы отрѣзка AB данной длины x, т. е. интеграла $\int_0^x f(y)dy$.

I *случай.* $\mu=$ четному числу $2n$.

Представимъ себѣ, что вся масса концентрирована въ нѣсколькихъ отдѣльныхъ точкахъ, въ числѣ которыхъ находится и данная точка B, и предложимъ себѣ опредѣлить разстоянія этихъ точекъ $x_1, x_2,\dots x_k$ и соотвѣтствующія имъ массы $m_1\,, m_2,\dots m_k$

такъ, чтобы всѣ данныя сохранили свои значенія, т. е. подъ условіями

$$\sum_1^k m_i = \alpha_0, \sum_1^k m_i x_i = \alpha_1, \ldots \sum_1^k m_i x_i^{2n} = \alpha_{2n}.$$

Легко видѣть, что существуютъ только двѣ концентраціи, въ которыхъ число неизвѣстныхъ равно числу условныхъ уравненій.

1) Концентрація въ точкѣ B и еще n другихъ точкахъ, въ которой неизвѣстныя будутъ m_x — масса точки B и n паръ неизвѣстныхъ x_i и m_i, опредѣляющихъ разстоянія и массы остальныхъ точекъ, а всего $2n+1$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n+1$ уравненій

$$x^k m_x + \sum_1^n m_i x_i^k = \alpha_k \ (k = 0, 1, 2, \ldots 2n).$$

2) Концентрація въ точкахъ A, B, C и еще $n-1$ другихъ точкахъ, въ которой неизвѣстныя будутъ m_0 — масса точки A, m_x — масса точки B, m_l — масса точки C и $n-1$ паръ неизвѣстныхъ x_i и m_i, опредѣляющихъ разстоянія и массы остальныхъ точекъ, а всего $2n+1$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n+1$ уравненій

$$\left.\begin{aligned} & m_0 + m_x + m_l + \sum_1^{n-1} m_i = \alpha_0 \\ & x^k m_x + l^k m_l + \sum_1^{n-1} x_i^k m_i = \alpha_k \ (x = 1, 2, \ldots\ldots 2n) \end{aligned}\right| \quad (2)$$

II *случай*. $\mu =$ нечетному числу $2n-1$.

Въ этомъ случаѣ единственныя концентраціи, въ которыхъ число неизвѣстныхъ равно числу условныхъ уравненій, будутъ:

1) Концентрація въ точкахъ A, B и $n-1$ другихъ точкахъ; неизвѣстныя будутъ m_0, m_x — массы точекъ A, B и $n-1$ паръ неизвѣстныхъ x_i и m_i, соотвѣтствующихъ остальнымъ точкамъ, а всего $2n$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n$ уравненій

$$\left.\begin{aligned} & m_0 + m_x + \sum_1^{n-1} m_1 = \alpha_0 \\ & x^k m_x + \sum_1^{n-1} x_i^k m_i = \alpha_k \ \ (k=1,\, 2, \ldots\ldots 2n-1). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

2) Концентрація въ точкахъ B, C и $n-1$ другихъ точкахъ; неизвѣстныя будутъ m_x, m_l — массы точекъ B, C и $(n-1)$ паръ неизвѣстныхъ x_i и m_i, а всего $2n$ неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ $2n$ уравненій

$$l^k m_l + x^k m_x + \sum_1^{n-1} x_i^k m_i = \alpha_k, \ (k=0,\, 1,\, 2, \ldots 2n-1). \quad (4)$$

Для того, чтобы указанныя концентраціи были возможны, необходимо и достаточно, чтобы всѣ величины x_i, удовлетворяющія соотвѣтствующимъ системамъ уравненій, были > 0 и $< l$ и чтобы всѣ числа m_0, m_x, m_l и m_i были > 0.

Рѣшеніе системы (1) и условія возможности 1-ой концентраціи въ I случаѣ.

Составляемъ цѣлую функцію $n+1$ степени

$$\varphi(z)=A_0(z-x)(z-x_1)(z-x_2)\ldots.(z-x_n)$$

удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-1}(y)\,dy=0, \qquad (\alpha)$$

гдѣ $\theta_{n-1}(y)$ означаетъ произвольную цѣлую функцію степени $n-1$.

Обозначая черезъ $\Omega(y)$ какую угодно цѣлую функцію степени не выше $2n$, будемъ имѣть

$$\Omega(y)=\varphi(y)\,\omega(y)+\frac{\Omega(x)\varphi(y)}{(y-x)\,\varphi'(x)}+\sum_1^n\frac{\Omega(x_i)\,\varphi(y)}{(y-x_i)\,\varphi'(x_i)},$$

гдѣ $\omega(y)$ — цѣлая функція степени не выше $n-1$; а отсюда, полагая

$$\psi(z)=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

получаемъ, въ силу условія (α), формулу

$$\int_0^l f(y)\,\Omega(y)\,dy=-\Omega(x)\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}+\sum_1^n\Omega(x_i)\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $\Omega(y)=1,\ y,\ y^2,\ldots\, y^{2n}$, получимъ слѣдующій рядъ равенствъ

$$\int_0^l f(y)\,y^k\,dy=x^k\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}+\sum_1^n x_i^k\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},\ (k=0,1,2,\ldots 2n,$$

изъ сравненія которыхъ съ системою уравненій (1) находимъ слѣдующія выраженія искомыхъ массъ

$$m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}\,,\ m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}\,.$$

Величины же x_i опредѣляются какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi(z)}{z-x} = 0,$$

гдѣ $\varphi(z)$ опредѣляется условіями

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0\,.$$

Функція эта $\varphi(z)$ легко можетъ быть составлена при помощи данныхъ величинъ $\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots\ \alpha_{2n}$.

Обозначая черезъ $U_n{}^0(z)$ знаменателя n-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y\,dy}{z-y}\,,$$

а черезъ $U_n{}^l(z)$ знаменателя n-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)\,(l-y)\,dy}{z-y}\,,$$

очевидно, можемъ положить

$$\varphi(z) = Az\,U_n{}^0(z) + B(l-z)\,U_n{}^l(z)\,, \qquad (\beta)$$

гдѣ A и B — постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, выраженіе (β) даетъ цѣлую функцію $n+1$ степени, удовлетворяющую условію (α), потому что

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy =$$

$$= A\int_0^l f(y)\, y\, U_n^0(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy +$$

$$+ B\int_0^l f(y)\,(l-y)\,U_n^l(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy$$

обращается въ 0, въ силу извѣстныхъ свойствъ функцій $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$.

Условіе $\varphi(x) = 0$ служитъ затѣмъ для опредѣленія отношенія постоянныхъ A и B и даетъ

$$Ax\,U_n^0(x) + B(l-x)\,U_n^l(x) = 0, \text{ т. е.}$$

$$\frac{A}{(l-x)\,U_n^l(x)} = \frac{B}{-x\,U_n^0(x)}. \qquad (\gamma)$$

Функціи же $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$ вполнѣ опредѣляются данными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{2n}$, до постояннаго множителя, какъ это видно изъ разложеній

$$\int_0^l \frac{f(y)\,y\,dy}{z-y} = \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{z^n} + \ldots$$

$$\int_0^l \frac{f(y)(l-y)\,dy}{z-y} = \frac{l\alpha_0 - \alpha_1}{z} + \frac{l\alpha_1 - \alpha_2}{z^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{l\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}}{z^{2n}} + \ldots\ldots$$

Переходя къ выходу условій возможности 1-ой концентраціи для I случая, т. е. къ выводу условій, при которыхъ будутъ соблюдены требованія:

1) чтобы всѣ числа x_i лежали между 0 и l и

2) чтобы всѣ m_i и m_x были > 0,

замѣчаемъ, что первое требованіе сводится къ тому, чтобы

$$\varphi(l) \text{ и } (-1)^{n+1}\varphi(0)$$

были одного знака, а второе выполняется безусловно.

Въ самомъ дѣлѣ, замѣчая, что корни уравненій $U_n^0(z)=0$ и $U_n^l(z)=0$ всѣ лежатъ между 0 и l, и что, въ силу выраженія (β), корни уравненія $\varphi(z)=0$ будутъ перемежаться какъ съ корнями уравненія $zU_n^0(z)=0$, такъ и съ корнями уравненія $U_n^l(z)\,(l-z)=0$, мы видимъ, что только одинъ изъ корней уравненія $\varphi(z)=0$ можетъ лежать внѣ предѣловъ 0 и l. Для того, чтобы и этотъ корень попалъ въ промежутокъ между 0 и l, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы $(-1)^{n+1}\varphi(0)$ и $\varphi(l)$ были одинаковаго знака. [Къ тому-же заключенію, впрочемъ, приводитъ и формула (α)].

По формулѣ (β) будемъ имѣть

$$(-1)^{n+1}\varphi(0)=(-1)^{n+1}Bl\,U_n^l(0),\ \varphi(l)=Al\,U_n^0(l).$$

Коэффиціенты при z^n въ $U_n^0(z)$ и $U_n^l(z)$ можемъ всегда взять положительными, а тогда, очевидно, будемъ имѣть

$$U_n^0(l)>0 \text{ и } (-1)^n U_n^l(0)>0$$

и наше условіе сводится къ тому, чтобы A и $(-B)$ были одинаковыхъ знаковъ или, на основаніи формулы (γ), чтобы $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ были одинаковыхъ знаковъ.

Для того же, чтобы убѣдиться въ безусловномъ выполненіи 2-го требованія, замѣчаемъ, что если u есть корень уравненія $\varphi(z)=0$, то

$$\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}=1+(y-u)\,\omega(y),$$

гдѣ $\omega(y)$ — цѣлая функція $n-1$ степени, откуда

$$\left(\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}\right)^2=\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}+\frac{\varphi(y)\,\omega(y)}{\varphi'(u)},$$

а потому, въ силу формулы (α), будемъ имѣть

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)\,dy}{(y-u)\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\left(\frac{\varphi(y)}{(y-u)\varphi'(u)}\right)^2 dy>0,$$

откуда и слѣдуетъ, что $m_x=\dfrac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$ и $m_i=\dfrac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$ будутъ >0.

Итакъ, единственное условіе возможности первой концентраціи въ I случаѣ состоитъ въ томъ, что числа $U_n{}^0(x)$ и $U_n{}^l(x)$ должны быть одинаковыхъ знаковъ.

Рѣшеніе системы (2) и условія возможности второй концентраціи въ I случаѣ.

Составляемъ цѣлую функцію степени $n+2$

$$\varphi(z)=A_0 z(z-l)(z-x)(z-x_1)\ldots\ldots(z-z_{n-1}),$$

удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy=0,$$

гдѣ $\theta_{n-2}(y)$ обозначаетъ произвольную цѣлую функцію $n-2$ степени.

Обозначая черезъ $\Omega(y)$ какую угодно цѣлую функцію степени не выше $2n$ и полагая

$$\psi(z)=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

получаемъ, подобно предыдущему, формулу

$$\int_0^l f(y)\Omega(y)\,dy = \Omega(0)\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} + \Omega(l)\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} +$$

$$+\,\Omega(x)\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)} + \sum_1^{n-1}\Omega(x_i)\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Полагая въ этой формулѣ послѣдовательно $\Omega(y) = 1, y, y^2, \ldots y^{2n}$, получаемъ рядъ равенствъ, изъ сравненія котораго съ системою уравненій (2) получимъ слѣдующія выраженія искомыхъ массъ:

$$m_0 = \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)},\; m_l = \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)},\; m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},\; m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}.$$

Величины же x_i опредѣлятся какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi(z)}{z(z-l)(z-x)} = 0,$$

гдѣ функція $\varphi(z)$ степени $n+2$ опредѣляется условіями

$$\varphi(x) = 0,\; \varphi(0) = 0,\; \varphi(l) = 0 \text{ и}$$

$$\int_0^l f(y)\,\varphi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0.$$

Функцію эту легко выразить при помощи данныхъ.

Полагая $\varphi(z) = z(z-l)\Phi(z)$, гдѣ $\Phi(z)$ — цѣлая функція n-ой степени, для опредѣленія $\Phi(z)$ будемъ имѣть условія

$$\int_0^l f(y)\,y(l-y)\,\Phi(y)\,\theta_{n-2}(y)\,dy = 0 \qquad (\alpha)^*$$

и

$$\Phi(x) = 0.$$

Условію $(\alpha)^*$, очевидно, удовлетворимъ, положивъ

$$\Phi(z) = AU_n^0(z) + BU_n^l(z), \qquad (\beta)^*$$

гдѣ A и B постоянныя, а $U_n^{\,0}(z)$ и $U_n^{\,l}(z)$ имѣютъ вышеуказанныя значенія.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\int_0^l f(y)\, y(l-y)\, \Phi(y)\, \theta_{n-2}(y)\, dy =$$

$$= A\int_0^l f(y)\, y\, U_n^{\,0}(y)\,(l-y)\,\theta_{n-2}(y)\, dy +$$

$$+ B\int_0^l f(y)\,(l-y)\, U_n^{\,l}(y)\, y\, \theta_{n-2}(y)\, dy$$

обращается въ 0, въ силу извѣстныхъ свойствъ функцій $U_n^{\,0}(z)$ и $U_n^{\,l}(z)$.

Условіе $\Phi(x) = 0$ дастъ затѣмъ

$$\frac{A}{U_n^{\,l}(x)} = \frac{B}{-U_n^{\,0}(x)} \qquad (\gamma)^*$$

Переходя къ выводу условій возможности второй концентраціи, т. е. условій, при которыхъ выполняются требованія:

1) чтобы всѣ x_i были въ предѣлахъ 0 и l и

2) чтобы $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)}, \dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)}, \dfrac{\psi(x)}{\varphi'(x)}, \dfrac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$ были > 0,

замѣчаемъ, что первое требованіе, какъ видно изъ формулы $(\beta)^*$, будетъ выполнено при условіи, что $(-1)^n\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковаго знака, а второе — при выполненіи условій $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)} > 0$, $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$, такъ-какъ $\dfrac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$ и $\dfrac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$, при выполненіи перваго требованія, будутъ безусловно положительными. Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ u любой корень уравненія $\Phi(z)=0$, будемъ имѣть, по формулѣ $\varphi(z)=z(z-l)\,\Phi(z)$

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}=\int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)}{(y-u)\,\varphi'(u)}\,dy=$$

$$=\int_0^l f(y)\frac{y(l-y)}{u(l-u)}\,\frac{\Phi(y)}{(y-u)\,\Phi'(u)}\,dy$$

$$=\int_0^l f(y)\frac{y(l-y)}{u(l-u)}\left(\frac{\Phi(y)}{(y-u)\,\Phi'(u)}\right)^2 dy,$$

въ силу условія (α)*. Отсюда и видимъ, что для $0<u<l$,

$$\frac{\psi(u)}{\varphi'(u)}>0.$$

Остаются, слѣдовательно, условія

a) $(-1)^n\,\Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковыхъ знаковъ

b) $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$, c) $\dfrac{\psi(l)}{\varphi(l)}>0$.

Замѣчая, что

$$(-1)^n\,\Phi(0)=(-1)^n\,[AU_n^0(0)+BU_n^l(0)]$$
$$\Phi(l)=AU_n^0(l)+BU_n^l(l)$$

и припоминая, что всегда можемъ распорядиться такъ, чтобы

$$(-1)^n\,U_n^0(0),\,(-1)^n\,U_n^l(0),$$
$$U_n^0(l),\,U_n^l(l)\ \text{были} > 0,$$

видимъ, что условіе a) выполнено, если A и B — одинаковыхъ знаковъ, т. е., на основаніи (γ)*, когда $U_n^0(x)$ и $U_n^{\cdot}(x)$ — противоположныхъ знаковъ.

Далѣе

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}=\int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(0)}\,dy=\int_0^l f(y)\,\frac{(l-y)\,\Phi(y)\,dy}{l\Phi(0)}=$$

$$=\int_0^l \frac{f(y)(l-y)\left[A\,U_n^0(y)+B\,U_n^l(y)\right]}{l\left[A\,U_n^0(0)+B\,U_n^l(0)\right]}\,dy=$$

$$=\frac{A}{A\,U_n^0(0)+B\,U_n^l(0)}\int_0^l f(y)\,U_n^0(y)\,dy,$$

въ силу того, что

$$\int_0^l f(y)\,(l-y)\,U_n^l(y)\,dy=0 \text{ и } \int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,dy=0;$$

умножая и раздѣляя на $U_n^0(0)$, получаемъ

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}=\frac{1}{1+\dfrac{B\,U_n^l(0)}{A\,U_n^0(0)}}\cdot\int_0^l f(y)\,\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy.$$

Замѣчая, что $\int_0^l f(y)\,\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy>0$, потому, что

$$\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}=1+y\omega(y), \text{ гдѣ } \omega(y)\text{ — степени } n-1$$

и

$$\int_0^l f(y)\,y\,U_n^0(y)\,\omega(y)\,dy=0,$$

откуда $\int_0^l f(y)\left(\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\right)^2 dy=\int_0^l f(y)\,\frac{U_n^0(y)}{U_n^0(0)}\,dy>0,$

тотчасъ заключаемъ, что $\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)}>0$ при A и B — одинаковыхъ знаковъ т. е. при томъ же условіи, которое имѣли для (а).

Совершенно тѣмъ же путемъ убѣждаемся, что и $\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)}>0$ при выполненіи этого условія.

Итакъ, единственное условіе возможности второй концентраціи состоитъ въ томъ, чтобы $U_n^0(x)$ и $U_n^l(x)$ были противоположныхъ знаковъ. Условіе это какъ разъ противоположно условію возможности первой концентраціи. Вышеизложенное заключаетъ въ себѣ, какъ видимъ, весьма простое доказательство теоремы, найденной А. А. Марковымъ и приведенной имъ на стр. 130 его сочиненія.

Рѣшеніе системы (3) и условія возможности первой концентраціи во II случаѣ.

Составляемъ функцію $\varphi(z)=A_0 z(z-x)(z-x_0)\ldots(z-x_{n-1})$ цѣлую $(n+1)$ степени, удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy=0, \qquad (\delta)$$

гдѣ $\theta_{n-2}(y)$ произвольная цѣлая функція $(n-2)$ степени, и, полагая

$$\psi(z)=\int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy$$

совершенно также, какъ сдѣлано было выше, убѣждаемся, что искомыя массы будутъ

$$m_0=\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)},\quad m_x=\frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},\quad m_i=\frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

а величины x_i опредѣляются какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi(z)}{z(z-x)}=0,$$

гдѣ $\varphi(z)$ опредѣляется условіями (δ) и $\varphi(x)=0$.

Чтобы выразить эту функцію $\varphi(z)$ при помощи данныхъ величинъ $\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots\ldots\alpha_{2n-1}$, полагаемъ

$$\varphi(z)=z\Phi(z),$$

гдѣ $\Phi(z)$ цѣлая функція n-ой степени, опредѣляемая условіями

$$\int_0^l f(y)\, y\, \Phi(y)\, \theta_{n-2}(y)\, dy = 0 \text{ и } \Phi(x) = 0.$$

Первому изъ этихъ условій, очевидно, удовлетворимъ, полагая

$$\Phi(z) = A\varphi_n(z) + B(z-l)\, V_{n-1}(z) \qquad (\varepsilon)$$

гдѣ A и B постоянныя, $\varphi_n(z)$ — знаменатель n-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y},$$

а $V_{n-1}(z)$ — знаменатель $(n-1)$-ой подходящей къ

$$\int_0^l \frac{f(y)\, y(l-y)\, dy}{z-y}.$$

Условіе $\Phi(x) = 0$ даетъ затѣмъ

$$\frac{A}{(l-x)\, V_{n-1}(x)} = \frac{B}{\varphi_n(x)}. \qquad (\lambda)$$

Функціи $\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$ опредѣляются данными $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ $\ldots \alpha_{2n-1}$, до постояннаго множителя, какъ это видно изъ разложеній

$$\int_0^l \frac{f(y)\,dy}{z-y} = \frac{\alpha_0}{z} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \ldots + \frac{\alpha_{2n-1}}{z^{2n}} + \ldots\ldots$$

$$\int_0^l \frac{f(y)\, y(l-y)\, dy}{z-y} = \frac{l\alpha_1 - \alpha_2}{z} + \frac{l\alpha_2 - \alpha_3}{z^2} + \ldots + \frac{l\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}}{z^{2n-2}} + \ldots$$

Условія возможности этой концентраціи приводятся къ двумъ

a) $(-1)^n \Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковыхъ знаковъ,

b) $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)} > 0.$

Замѣчая, что $(-1)^n \Phi(0) = (-1)^n A\varphi_n(0) + $

$$+ B(-1)^{n-1} V_{n-1}(0)\, l \text{ и } \Phi(l) = A\varphi_n(l),$$

находимъ, что условіе а) выполняется, когда A и B одинаковыхъ знаковъ, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ одинаковыхъ знаковъ, такъ какъ всегда можемъ такъ распорядиться коэффиціентами при высшихъ степеняхъ z въ $\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$, чтобы $(-1)^n\varphi_n(0)$ и $(-1)^{n-1}V_{n-1}(0)$ были >0.

Далѣе имѣемъ

$$\frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} = \int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)}{y\varphi'(0)}dy = \int_0^l f(y)\frac{\Phi(y)}{\Phi(0)}dy =$$

$$= \frac{1}{A\varphi_n(0) - Bl V_{n-1}(0)} \int_0^l f(y)\left[A\varphi_n(y) + B(y-l)V_{n-1}(y)\right]dy =$$

$$= \frac{-B V_{n-1}(0)}{A\varphi_n(0) - Bl V_{n-1}(0)} \int_0^l f(y)(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy.$$

Здѣсь $\int_0^l f(y)(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy > 0$, потому - что

$$\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)} = 1 + y\,\omega(y), \text{ гдѣ } \omega(y) \text{ — степени } (n\text{-}2).$$

Отсюда

$$(l-y)\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}\right)^2 = (l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)} + y(l-y)\frac{V_{n-1}(y)\,\omega(y)}{V_{n-1}(0)}$$

и, по извѣстному свойству функціи $V_{n-1}(y)$,

$$\int_0^l f(y)(l-y)\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}dy = \int_0^l f(y)(l-y)\left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(0)}\right)^2 dy > 0.$$

Припоминая еще, что $\varphi_n(0)$ и $V_{n-1}(0)$ — противоположныхъ знаковъ, видимъ, что $\dfrac{\psi(0)}{\varphi'(0)} > 0$, когда A и B одинаковыхъ знаковъ, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ — одинаковыхъ знаковъ.

Рѣшеніе системы (4) и условія возможности второй концентраціи во II случаѣ.

Составляемъ функцію $\varphi(z) = A_0(z-l)(z-x)(z-x_1)\ldots\ldots(z-x_{n-1})\ldots\ldots$ степени $n+1$, удовлетворяющую условію

$$\int_0^l f(y)\varphi(y)\theta_{n-2}(y)\,dy = 0, \qquad (\delta)^*$$

гдѣ $\theta_{n-2}(y)$ — произвольная цѣлая функція $(n-2)$ степени, и, полагая

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy,$$

находимъ для искомыхъ массъ выраженія

$$m_l = \frac{\psi(l)}{\varphi'(l)},\ m_x = \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},\ m_i = \frac{\psi(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

а величины x_i опредѣлятся какъ корни уравненія

$$\frac{\varphi(z)}{(z-x)(z-l)} = 0.$$

Функція $\varphi(z)$, опредѣляемая условіями $\varphi(x)=0$, $\varphi(l)=0$ и $(\delta)^*$, очевидно, можетъ быть представлена подъ видомъ

$$\varphi(z) = (z-l)\Phi(z),$$

гдѣ

$$\Phi(z) = [A\varphi_n(z) + BzV_{n-1}(z)]; \qquad (\varepsilon)^*$$

$\varphi_n(z)$ и $V_{n-1}(z)$ имѣютъ вышеуказанныя значенія, а A и B постоянныя, для которыхъ условіе $\Phi(x)=0$ даетъ

$$\frac{A}{x V_{n-1}(x)} = \frac{B}{-\varphi_n(x)}. \qquad (\lambda)^*$$

Условія возможности второй концентраціи будутъ

a) $(-1)^n \Phi(0)$ и $\Phi(l)$ — одинаковыхъ знаковъ

b) $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$

$$(-1)^n \Phi(0) = (-1)^n A \varphi_n(0), \quad \Phi(l) = A\varphi_n(l) + Bl\, V_{n-1}(l),$$

откуда видно, что условіе (a) выполняется, когда A и B — одинаковыхъ знаковъ, т. е. когда $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ — противоположныхъ знаковъ.

При томъ-же условіи и $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$, потому что

$$\frac{\psi(l)}{\varphi'(l)} = \int_0^l f(y) \frac{\varphi(y)}{(y-l)\varphi'(l)}\, dy = \int_0^l f(y) \frac{\Phi(y)}{\Phi(l)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{A\varphi_n(l) + Bl\, V_{n-1}(l)} \int_0^l f(y) [A\varphi_n(y) + ByV_{n-1}(y)]\, dy =$$

$$= \frac{BV_{n-1}(l)}{A\varphi_n(l) + Bl\, V_{n-1}(l)} \int_0^l f(y)\, y \frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\, dy,$$

гдѣ

$$\int_0^l f(y)\, y \frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\, dy = \int_0^l f(y)\, y \left(\frac{V_{n-1}(y)}{V_{n-1}(l)}\right)^2 dy > 0;$$

Слѣдовательно $\dfrac{\psi(l)}{\varphi'(l)} > 0$, при A и B — одинаковыхъ знаковъ.

И такъ, условіе возможности второй концентраціи состоитъ въ томъ, чтобы $\varphi_n(x)$ и $V_{n-1}(x)$ были противоположныхъ знаковъ, и это условіе какъ разъ противоположно условію возможности первой концентраціи.

Такимъ образомъ доказана и теорема, приведенная А. А. Марковымъ на стр. 102 его сочиненія.

Что же касается того, что указанныя выше концентраціи даютъ maximum и minimum массы отрѣзка AB, смотря по тому, причислимъ ли мы точку B къ AB или BC, то это слѣдуетъ прямо изъ неравенствъ П. Л. Чебышова, обобщенныхъ А. А. Марковымъ во 2-й главѣ его сочиненія, что имъ самимъ и указано.

Формулы (β) и $(\beta)^*$, (ε) и $(\varepsilon)^*$, дающія выраженія функцій, къ составленію которыхъ приводится рѣшеніе системъ (1), (2), (3) и (4) и при помощи которыхъ, какъ мы видѣли, весьма просто получаются условія возможности разсматриваемыхъ концентрацій, даютъ также возможность весьма просто показать распредѣленіе корней этихъ функцій.

Ограничимся разсмотрѣніемъ случая I-го ($\mu = 2n$), такъ какъ II-й можетъ быть разобранъ совершенно аналогичнымъ указанному ниже путемъ.

Удерживая прежнія обозначенія, докажемъ прежде всего, что корни уравненій $U_n^{0}(z) = 0$ и $U_n^{l}(z) = 0$ перемежаются, т. е. что между каждыми двумя корнями одного изъ этихъ уравненій лежитъ одинъ и только одинъ корень другаго.

Положимъ $F(z) = zU_n^{0}(z)$, $\Pi(z) = (z-l)\,U_n^{l}(z)$.

Обозначимъ корни функціи $F(z)$ черезъ $z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots . z_n$, расположивъ ихъ въ возрастающемъ порядкѣ величинъ, такъ что $z_0 = 0$ и $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots . . < z_n < l$.

Корни функціи $\Pi(z)$ обозначимъ черезъ $z', z'' \ldots z^{(n)}, z^{(n+1)}$ и можемъ положить $0 < z' < z'' < \ldots < z^{(n)} < z^{(n+1)}$, $z^{(n+1)} = l$.

Функція $F(z)$, очевидно, удовлетворяетъ условію

$$\int_0^l f(y)\,F(y)\,\theta_{n-1}(y)\,dy = 0, \tag{5}$$

гдѣ $\theta_{n-1}(y)$ — произвольная цѣлая функція $(n-1)$ степени.

По этому, обозначая через $\Omega(y)$ какую угодно цѣлую функцію степени не выше $2n$, замѣчая, что $F(y)$ есть цѣлая функція $n+1$ степени, и полагая $\Psi(z) = \int f(y) \frac{F(y)-F(z)}{y-z} dy$, будемъ имѣть

$$\int_0^l f(y)\Omega(y)\,dy = \sum_{i=0}^{i=n} \Omega(z_i) \frac{\Psi(z_i)}{F'(z_i)}.$$

Полагая въ этой формулѣ

$$\Omega(y) = \Pi(y)\theta_{n-1}(y),$$

гдѣ $\theta_{n-1}(y)$—произвольная цѣлая функція степени не выше $n-1$, и замѣчая, что

$$\int_0^l f(y)\Pi(y)\theta_{n-1}(y)\,dy = 0,$$

получаемъ

$$\sum_{i=0}^{i=n} \Pi(z_i)\theta_{n-1}(z_i)\frac{\Psi(z_i)}{F'(z_i)} = 0. \qquad (6)$$

Полагая въ этой формулѣ

$$\theta_{n-1}(y) = \frac{F(y)}{(y-z_k)(y-z_{k+1})},$$

находимъ

$$\theta_{n-1}(z_k) = \frac{F'(z_k)}{z_k - z_{k+1}},\quad \theta_{n-1}(z_{k+1}) = \frac{F'(z_{k+1})}{z_{k+1}-z_k}$$

и при i не $= k$ или $k+1$, $\theta_{n-1}(z_i) = 0$, а потому формула (6) даетъ

$$\Pi(z_k)\Psi(z_k) = \Pi(z_{k+1})\Psi(z_{k+1}). \qquad (7)$$

Замѣчая же, что числа $\frac{\Psi(z_k)}{F'(z_k)} > 0$, потому что, въ силу формулы (5), можемъ написать (какъ уже нѣсколько разъ было показано)

$$\frac{\Psi(z_k)}{F'(z_k)} = \int_0^l f(y)\frac{F(y)}{(y-z_k)F'(z_k)}dy = \int_0^l f(y)\left(\frac{F(y)}{(y-z_k)F'(z_k)}\right)^2 dy,$$

заключаемъ изъ предыдущаго, что числа

$\Pi(z_k)F'(z_k)$ и $\Pi(z_{k+1})F'(z_{+1})$ —одинаковыхъ знаковъ, откуда и слѣдуетъ, что между двумя корнями функціи $F(z)$ лежитъ одинъ и только одинъ корень функціи $\Pi(z)$.

На основаніи доказаннаго можемъ, слѣдовательно, написать слѣдующія неравенства

$$0 < z' < z_1 < z'' < z_2 < \ldots\ldots < z^{(n)} < z^n < l.$$

Припомнимъ теперь, что, разсматривая первую концентрацію въ точкѣ B и еще n точкахъ и рѣшая систему уравненій (1), мы нашли, что разстоянія искомыхъ точекъ и данная величина x будутъ корнями уравненія

$$\varphi(z) = 0,$$

гдѣ $\varphi(z) = AzU_n{}^0(z) + B(l-z)U_n{}^l(z)$ (β)

и $$\frac{A}{(l-x)U_n{}^l(x)} = \frac{B}{-xU_n{}^0(x)}.$$

Формула (β), очевидно, показываетъ, что корни функціи $\varphi(z)$ перемежаются какъ съ корнями функціи $F(z) = zU_n{}^0(z)$, такъ и съ корнями функціи $\Pi(z) = (z-l)U_n{}^l(z)$; кромѣ того, условіе возможности первой концентраціи, состоящее въ томъ, что $U_n{}^0\ x$ и $U_n{}^l(x)$ должны быть одинаковыхъ знаковъ, показываетъ, что данное число x должно лежать въ одномъ изъ слѣдующихъ промежутковъ между . . . .

$$0 \text{ и } z', \; z_1 \text{ и } z'', \ldots z_k \text{ и } z^{(k+1)}, \ldots z_n \text{ и } l.$$

Поэтому, если обозначимъ черезъ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1}$ корни функціи $\varphi(z)$, расположенные въ возрастающемъ порядкѣ величинъ, причемъ данная величина x будетъ совпадать съ однимъ изъ этихъ корней, то, на основаніи вышесказаннаго, можемъ написать въ разсматриваемомъ случаѣ слѣдующія неравенства

$$0 < x_1 < z' < z_1 < x_2 < z'' < \ldots .$$
$$\ldots . < z_k < x_{k+1} < z^{(k+1)} < \ldots < z^{(n)} < z_n < x_{n+1} < l.$$

Припомнимъ далѣе, что, рѣшая систему уравненій (2), соотвѣтствующую второй концентраціи въ A, B, C и еще $n-1$ другихъ точкахъ, мы нашли, что разстоянія этихъ точекъ отъ A будутъ корнями уравненія

$$\varphi(z) = z(z - l)\,\Phi(z) = 0,$$

гдѣ
$$\Phi(z) = A\,U_n{}^0(z) + B\,U_n{}^l(z) \qquad (\beta)^*$$

и
$$\frac{A}{U_n{}^l(x)} = \frac{B}{-U_n{}^0(x)},$$

и что условіе возможности второй концентраціи состоитъ въ томъ, чтобы $U_n{}^0(x)$ и $U_n{}^l(x)$ были различныхъ знаковъ. Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ данное число x должно лежать въ одномъ изъ слѣдующихъ промежутковъ между

$$z' \text{ и } z_1, \; z'' \text{ и } z_2, \ldots z^{(k)} \text{ и } z_k, \ldots z^{(n)} \text{ и } z_n,$$

а потому, обозначая черезъ $x', x'', \ldots x^{(n)}$ корни функціи $\Phi(z)$, причемъ одинъ изъ нихъ совпадаетъ съ даннымъ числомъ x, можемъ написать слѣдующія неравенства

$$0 < z' < x' < z_1 < z'' < x'' < z_2 < \ldots \ldots$$
$$\ldots . < z^{(k)} < x^{(k)} < z_k < \ldots . < z^{(n)} < x^{(n)} < z_n < l.$$

Изъ всего вышеизложеннаго вытекаетъ окончательно слѣдующій результатъ.

Если данное число x совпадаетъ съ x_{k+1}, т. е. если $z_k < x < z^{(k+1)}$, то уравненіе

$$\varphi(z) = \begin{vmatrix} zU_n^{\circ}(z),\ (l-z)\ U_n^{\,l}(z) \\ xU_n^{\circ}(x),\ (l-x)\ U_n^{\,l}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(A)}$$

имѣетъ k корней $x_1, x_2, \ldots . x_k$ меньшихъ x и предѣльныя значенія интеграла

$$\int_0^x f(y)\,dy \text{ будутъ } M = \frac{\psi(x_1)}{\varphi'(x_1)} + \frac{\psi(x_2)}{\varphi'(x_2)} + \ldots . + \frac{\psi(x_k)}{\varphi'(x_k)} + \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$$

и
$$M - \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},$$

гдѣ
$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z}\,dy.$$

Если-же x лежитъ между $z^{(k)}$ и z_k, то уравненіе

$$\varphi(z) = z(z-l)\begin{vmatrix} U_n^{\circ}(z),\ U_n^{\,l}(z) \\ U_n^{\circ}(x),\ U_n^{\,l}(x) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(B)}$$

имѣетъ k корней $0, x', x'', \ldots .. x^{(k-1)}$ меньшихъ x

и предѣльныя значенія интеграла $\int_0^x f(y)\,dy$ будутъ

$$M_1 = \frac{\psi(0)}{\varphi'(0)} + \frac{\psi(x')}{\varphi'(x')} + \ldots\ldots + \frac{\psi(x^{(k-1)})}{\varphi'(x^{(k-1)})} + \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)}$$

и
$$M_1 - \frac{\psi(x)}{\varphi'(x)},$$

гдѣ $\varphi(z)$ составляется по формулѣ (B), а

$$\psi(z) = \int_0^l f(y)\,\frac{\varphi(y) - \varphi(z)}{y - z}\,dy.$$

1-го февраля 1885.

ФИЗИЧЕСКІЯ ЗАМѢТКИ.

(Съ таблиц. рисунковъ).

А. П. Грузинцева.

Подъ такимъ заглавіемъ мы намѣрены изложить описаніе и употребленіе нѣкоторыхъ физическихъ приборовъ, полезныхъ, по нашему мнѣнію, при преподаваніи начальной физики. Ниже описанные приборы въ русской литературѣ неизвѣстны, а между тѣмъ они представляютъ нѣкоторыя удобства какъ со стороны простоты и наглядности своего устройства, такъ и со стороны легкости производства опытовъ съ ними. Есть за ними еще одно немаловажное достоинство, именно — они легко обращаются изъ демонстративныхъ приборовъ въ измѣрительные (съ точностью достаточною для элементарнаго преподаванія) и могутъ по этому служить для учащихся пособіями при рѣшеніи физическихъ задачь, состоящихъ въ опредѣленіи тѣхъ или другихъ физическихъ постоянныхъ.

Всѣ описанные приборы испытаны[1] при преподаваніи элементарной физики и оказались весьма удобными. При изложеніи я не буду держаться особаго систематическаго порядка, а буду только стараться сгруппировать приборы, относящіеся до одного отдѣла физики, въ одномъ мѣстѣ.

Въ заключеніе этихъ предварительныхъ словъ замѣчу, что мнѣ при этомъ служили пособіями — извѣстный курсъ физики Дагена,

[1] Всѣ эти приборы устроены мной и были показаны, равно какъ и опыты съ ними, въ засѣданіи харьковскаго математическаго общества 30 ноября и 15 декабря прошлаго 1884 года.

затѣмъ превосходная книга проф. Вейнгольда — «Die physikalische Demonstrationen», которую особенно можно рекомендовать всѣмъ, кто занимается преподаваніемъ элементарной физики, даже было бы въ высшей степени желательнымъ появленіе этой книги въ русскомъ переводѣ; затѣмъ я пользовался періодическою литературой по физикѣ и т. п.

Расширеніе жидкостей.

1. Для показанія расширенія жидкостей весьма удобенъ слѣдующій приборъ, который легко приготовить каждому. Берется колба — шаромъ вмѣстимостью около $^1/_2$ фунта; на верху горла вытягивается родъ воронки *a* (черт. 1). Въ колбу наливаютъ керосинъ[1], подкрашенный для большей видимости корнемъ альканны (Radix alcannae можно получить во всякомъ аптекарскомъ магазинѣ на нѣсколько копѣекъ). Керосинъ наливаютъ примѣрно до черты *b* при обыкновенной температурѣ той комнаты, въ которой читаются лекціи физики. Затѣмъ эта колба осторожно подогрѣвается на песчаной банѣ до тѣхъ поръ, пока керосинъ, расширяясь, не дойдетъ до черты *c* (размѣры колбы и горла взяты такими, что это можетъ случиться), тогда запаиваютъ трубочку надъ *c* и приборъ готовъ. Затѣмъ когда керосинъ охладится, то, для показанія расширяемости жидкости отъ теплоты, стóитъ только погрузить колбу въ стаканъ съ горячею водой; керосинъ тотчасъ же сильно расширится. Можно было бы брать спиртъ вмѣсто керосина, такъ какъ спиртъ обладаетъ тоже большимъ коэффиціентомъ расширенія; но, вслѣдствіе болѣе легкой воспламеняемости, онъ уступаетъ керосину.

2. Въ статьѣ о расширеніи жидкостей въ учебникахъ элементарной физики обыкновенно указывается на способъ Дюлона и Пти, основанный на томъ законѣ гидростатики, что высоты разнородныхъ жидкостей, налитыхъ въ сообщающіеся сосуды, об-

[1] Вообще надо замѣтить, что во многихъ опытахъ съ жидкостями керосинъ очень удобенъ.

ратно пропорціональны ихъ плотностямъ, — и обыкновенно этотъ пріемъ не демонстрируется; для его демонстраціи можно употребить слѣдующій приборъ.

Берутъ трубку, изогнутую въ видѣ буквы U, длиной около 45^{cm} и толщиной 6^{mm}; къ концамъ этой трубки припаиваются, въ видахъ ослабленія вліянія волосности, болѣе широкія части (около 1^{cm} внутренняго діаметра) A и C (черт. 2); одна изъ трубокъ, AB, окружена болѣе широкою трубкой D, закрытою на обоихъ концахъ пробками, сквозь которыя проходитъ первая трубка и кромѣ того двѣ небольшія изогнутыя трубочки m и n; все это укрѣпляется вертикально на штативѣ. Размѣры прибора могутъ быть и больше показанныхъ здѣсь.

Вотъ приборъ. Теперь его наполняютъ жидкостью, обладающею большимъ расширеніемъ; для этого всего удобнѣе брать обыкновенный керосинъ, подкрашивая его, какъ и выше, для большей видимости корнемъ альканны[1].

Пропускаемъ водяные пары изъ особой реторты или мѣднаго котелка въ трубку D черезъ трубочку m, тогда столбъ жидкости AB значительно повышается. Опытъ должно считать оконченнымъ, если жидкость въ A болѣе не повышается. Этотъ опытъ служитъ очень хорошею демонстраціей способа Дюлона и Пти.

При указанныхъ размѣрахъ прибора опытъ даетъ слѣдующія числа (полученныя на лекціи передъ учениками). Высота холодной колонны $= 47^{cm}$ (при $17^{\circ},5$ C.); расширеніе керосина при нагрѣваніи до 100° (т. е. на $82^{\circ},5$) было равно $3,4^{cm}$; отсюда коэффиціентъ истиннаго расширенія керосина при температурѣ $17^{\circ},5$ C. есть

$$\frac{3,4}{47.82,5} = 0,00088.$$

[1] Можно брать для той-же цѣли и старый керосинъ — сильно пожелтѣвшій подъ вліяніемъ свѣта.

3. Для демонстраціи способа Дюлона и Пти, служащаго для опредѣленія коэффиціента расширенія ртути, очень удобенъ приборъ Вейнгольда. Этотъ приборъ состоитъ изъ двухъ высокихъ стекляныхъ стакановъ (высота 54^{cm}, діаметръ около 5^{cm}), имѣющихъ внизу боковыя отверстія A и B (черт. 3) и закрытыхъ вверху деревяными пробками съ отверстіями C и D; сквозь эти отверстія пропускаются трубки, загнутыя на нижнихъ концахъ; къ этимъ трубкамъ вверху припаиваются болѣе широкія (около 12^{mm} въ діаметрѣ) трубки, K и L (9^{cm} длины), нижніе наружные концы трубокъ соединяются каучуковою толстостѣнною трубкой M (около 20^{cm} длиною). Сквозь 2-е отверстіе пробки C пропускаютъ длинную открытую съ обоихъ концовъ трубку F, почти доходящую до дна стакана A, на верхній конецъ ея надѣвается каучуковая трубка. Въ томъ-же стаканѣ помѣщаютъ еще термометръ, укрѣпляя его въ 3-е отверстіе пробки C.

Для производства опыта наполняютъ приборъ ртутью такъ, чтобы уровни ртути были около середины трубокъ K и L. Затѣмъ пропускаютъ въ стаканъ A при помощи упомянутой (второй) длинной трубки F водяной паръ, а въ стаканъ B кладутъ снѣгъ или толченый ледъ.

Ртуть въ трубкѣ стакана A расширяется въ то время, какъ въ другой трубкѣ понижается. Для опредѣленія высотъ теплой и холодной колоннъ ртути можетъ служить вертикально укрѣпленный масштабъ; можно прибѣгать и къ другимъ способамъ опредѣленія высотъ (напримѣръ катетометромъ, буде онъ имѣется).

Описанный сейчасъ приборъ уже встрѣчается въ продажѣ.

Расширеніе газовъ.

4. Въ курсахъ начальной физики обыкновенно излагается способъ Гей-Люссака [1] для опредѣленія коэффиціента расширенія га-

---

[1] Этотъ-же способъ служитъ и для повѣрки закона Шарля (Гей-Люссака).

зовъ (при постоянномъ давленіи); но способъ этотъ для лекціонныхъ демонстрацій не удобенъ, ибо требуетъ выполненія продолжительныхъ и довольно тонкихъ манипуляцій. Ниже описанный приборъ, представляя упрощеніе прибора Вейнгольда, оказался, какъ обнаружилъ опытъ, болѣе удобнымъ — тѣмъ болѣе, что этотъ приборъ можно дать учащемуся для самостоятельнаго опыта съ цѣлію опредѣленія коэффиціента расширенія газа (именно воздуха).

Вотъ описаніе и употребленіе этого прибора.

Запаянная съ одного конца и изогнутая сифонообразно трубка ABD (черт. 4), длинное колѣно которой около 52^{cm} при діаметрѣ трубки около 8^{mm}; короткое колѣно этой трубки около 30^{cm}; длинный конецъ окруженъ болѣе широкою трубкой, вытянутою вверху [1] въ тонкую загнутую почти подъ прямымъ угломъ трубочку m; въ этой широкой трубкѣ помѣщается сзади AB стеклянная линейка (лучше — фарфоровая) съ дѣленіями на сантиметры и миллиметры (причемъ на миллиметры достаточно раздѣлить только тѣ мѣста ея, гдѣ останавливается уровень сѣрной кислоты); сама же широкая трубка укрѣпляется вертикально на деревяномъ штативѣ. Внизу широкой трубки вставляется короткая изогнутая и открытая съ обоихъ концовъ трубочка, служащая для вывода, какъ увидимъ ниже, образующейся въ широкой трубкѣ воды; подъ этою трубочкой устанавливается небольшая стеклянная чашечка для стока этой воды. Въ изогнутую трубку наливаютъ до извѣстнаго уровня крѣпкой сѣрной кислоты, подкрашенной индиго-карминомъ, причемъ кислоты наливаютъ столько, чтобы она стояла выше въ запаянной части, чѣмъ въ открытой; такимъ образомъ въ части AE будетъ находиться сухой воздухъ (для чего собственно и берется сѣрная кислота). Замѣчаютъ высоту запертаго столбика воздуха въ AE, затѣмъ пропускаютъ водяной паръ въ широкую трубку; тогда

[1] Можно закрыть широкую трубку вверху пробкой и черезъ эту послѣднюю пропустить маленькую трубочку m.

воздухъ въ AE будетъ расширяться, уровень сѣрной кислоты въ ней будетъ понижаться, и когда наступитъ равновѣсіе, то замѣчаютъ уровень жидкости. Такимъ образомъ знаемъ высоту столба воздуха при температурѣ кипѣнія воды, т. е. при 100° (пренебрегая измѣненіемъ температуры отъ давленія); объемы же воздуха при комнатной температурѣ и при температурѣ кипѣнія воды будутъ относиться, очевидно (пренебрегая расширеніемъ стеклянной трубки, которое въ сравненіи съ расширеніемъ воздуха крайне незначительно), какъ ихъ высоты при тѣхъ же температурахъ; по этому будемъ имѣть:

$$\frac{v_{100}}{v_t} = \frac{h_{100}}{h_t}$$

отсюда:

$$\frac{v_{100} - v_t}{v_t} = \frac{h_{100} - h_t}{h_t}$$

Лѣвая часть есть расширеніе единицы объема при t° (комнатной температуры), — раздѣливъ это расширеніе на $(100^\circ - t^\circ)$, мы найдемъ коэффиціентъ расширенія газа при комнатной температурѣ; его можно, если угодно, свести къ температурѣ 0°, но при элементарномъ изученіи расширенія газовъ это излишне; точно такъ же излишне проводить этотъ коэффиціентъ къ постоянному давленію, ибо въ курсѣ начальной физики обыкновенно не дѣлается различія между коэффиціентомъ расширенія при постоянномъ объемѣ и постоянномъ давленіи.

Коэффиціентъ расширенія получается около 0,0037, что совершенно достаточно для нашихъ цѣлей.

Когда опытъ конченъ, то открытый конецъ трубки D закрывается пробиркой соотвѣтственной толщины, на дно которой положенъ кусокъ ваты, для предохраненія сѣрной кислоты отъ влаги воздуха.

5. Модель воздушнаго термометра. Весьма удобенъ для лекцій воздушный термометръ, предложенный Шуллеромъ (Widemann's Annalen der Physik und Chemie. Bd. XIX. 1883. S. 256). Онъ представленъ на чертежѣ 5 и состоитъ изъ длинной (около 72^{cm}) стекляной трубки A малаго внутренняго діаметра, соединенной каучуковою трубкой B съ резервуаромъ C; этотъ послѣдній можетъ имѣть или форму цилиндра, какъ на чертежѣ, или форму шара (діаметръ около 4 или 5^{cm}) смотря по тому какая форма удобнѣе. Трубка A прикрѣплена къ деревяной линейкѣ, раздѣленной на равныя части (напримѣръ на 2^{mm}), начиная отъ ея средины въ обѣ стороны; сама же линейка прикрѣплена къ деревяному штативу E, снабженному установочными винтами. Въ трубку A вводится столбикъ подкрашеннаго карминомъ спирта; это производится такимъ-же путемъ, какъ наполненіе обыкновеннаго термометра ртутью, т. е. подогрѣваніемъ (очень легкимъ въ нашемъ случаѣ) резервуара C въ то время, какъ конецъ A погруженъ въ подкрашенную жидкость. Надо устроить такъ, чтобы столбикъ жидкости установился противъ O шкалы; этого достигнемъ такъ: сначала установимъ столбикъ вблизи O и затѣмъ, передвигая трубку A вдоль шкалы въ ту или другую стороны, установимъ столбикъ точно противъ средины шкалы.

Термометръ этотъ весьма чувствителенъ: отъ теплоты руки столбикъ перемѣщается почти на всю шкалу (въ этомъ случаѣ резервуаръ C былъ весьма значительнаго[1] объема въ сравненіи съ внутреннимъ объемомъ трубки A). При помощи этого термометра очень удобно показать пониженіе температуры при раствореніи сахара или соли въ водѣ, — только предварительно надо дать установиться столбику m, когда резервуаръ C находится въ стаканѣ съ водой, а затѣмъ уже бросить въ эту воду толченаго сахара или соли.

---

[1] 20^{cm} длины и 2^{cm} діаметромъ.

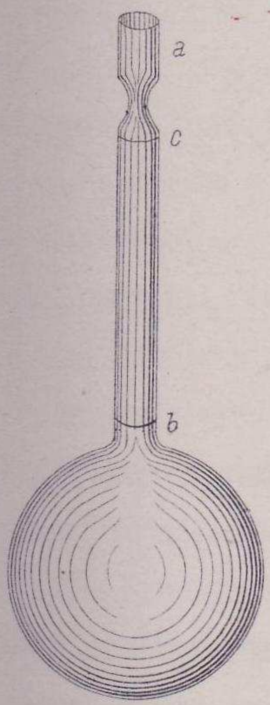
6. Упругость водяного пара при температурахъ, лежащихъ между 0° и 100°.

Если нѣтъ спеціально устроеннаго для этихъ опредѣленій прибора (описываемаго въ руководствахъ къ элементарной физикѣ), то довольно удобенъ слѣдующій приборъ (Pickering's Physical manipulations), легко составляемый даже учениками. Большая колба A (черт. 6), емкостью около литра, затыкается пробкой, сквозь которую пропускаютъ термометръ T и изогнутую трубку, длинное колѣно которой нѣсколько болѣе 760^{mm}. Въ колбу A до уровня, показаннаго на чертежѣ, наливается вода. Эту воду кипятятъ, и когда можно быть увѣреннымъ, что воздухъ изъ колбы весь (почти) вышелъ вмѣстѣ съ водяными парами, тогда подставляютъ подъ конецъ длинной трубки чашечку C съ ртутью, прекращая въ тотъ же моментъ подогрѣваніе колбы. Послѣ того слѣдуетъ приступить къ измѣреніямъ, состоящимъ въ записываніи показаній термометра (напримѣръ черезъ каждые 5°) и высотъ— ртутнаго столба въ трубкѣ B и водяного, образующагося надъ ртутью. Если h и h' будутъ эти высоты, H—высота барометра въ это время и ∂ плотность ртути при температурѣ, даваемой термометромъ колбы A, то упругость водяного пара, заключеннаго въ колбѣ A при той-же температурѣ t, будетъ:

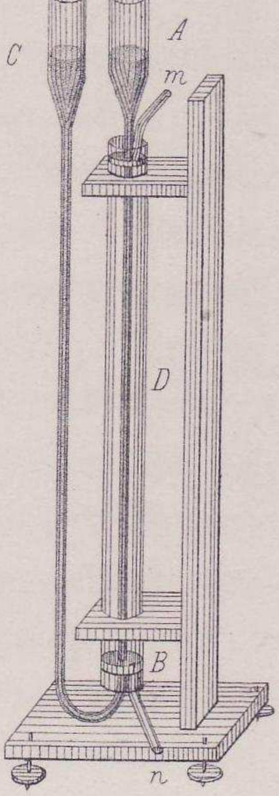
$$H-\left(h+\frac{h'}{\partial}\right).$$

Сравнивая такимъ образомъ числа съ числами таблицъ упругости пара (Реньо), можемъ убѣдиться — насколько выгнанъ воздухъ изъ колбы A. Въ случаѣ большого разногласія слѣдуетъ повторить опытъ. Для опредѣленія h и h' достаточно ставить сзади трубки B вертикальную линейку, раздѣленную на миллиметры или, еще лучше, вѣшать свободно такую линейку. Получаемые результаты достаточны для элементарнаго преподаванія.

Черт. 1.



Черт. 2.



Черт. 3.

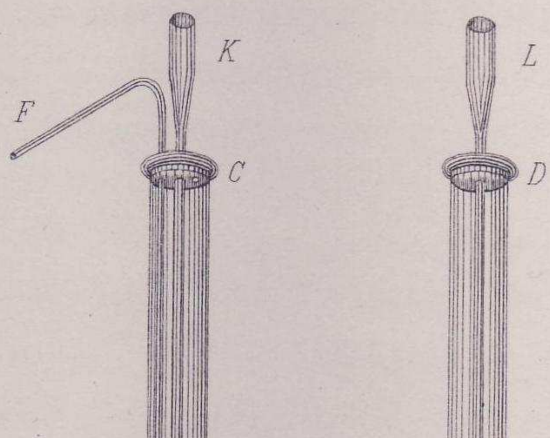
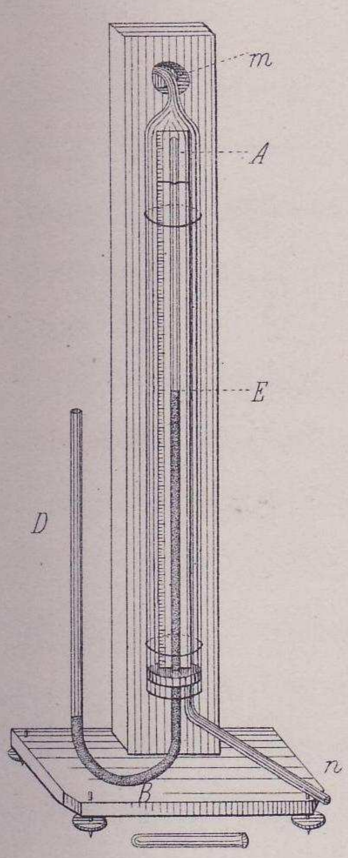
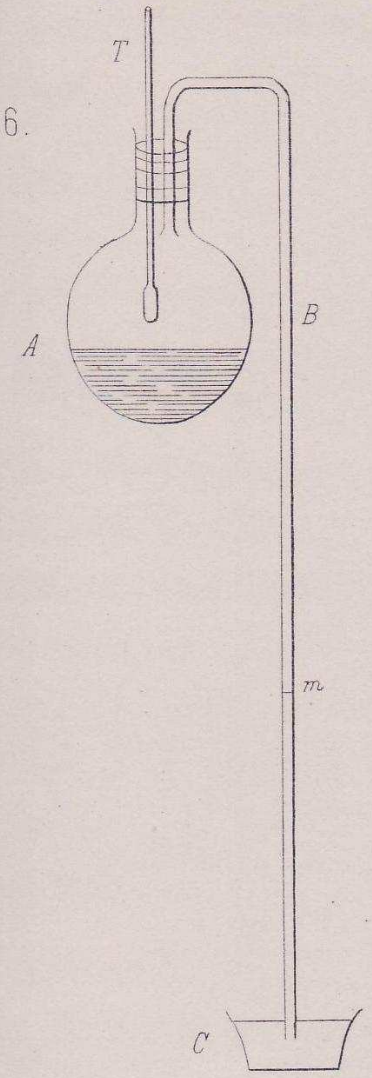


РИС. АВТОРЪ.

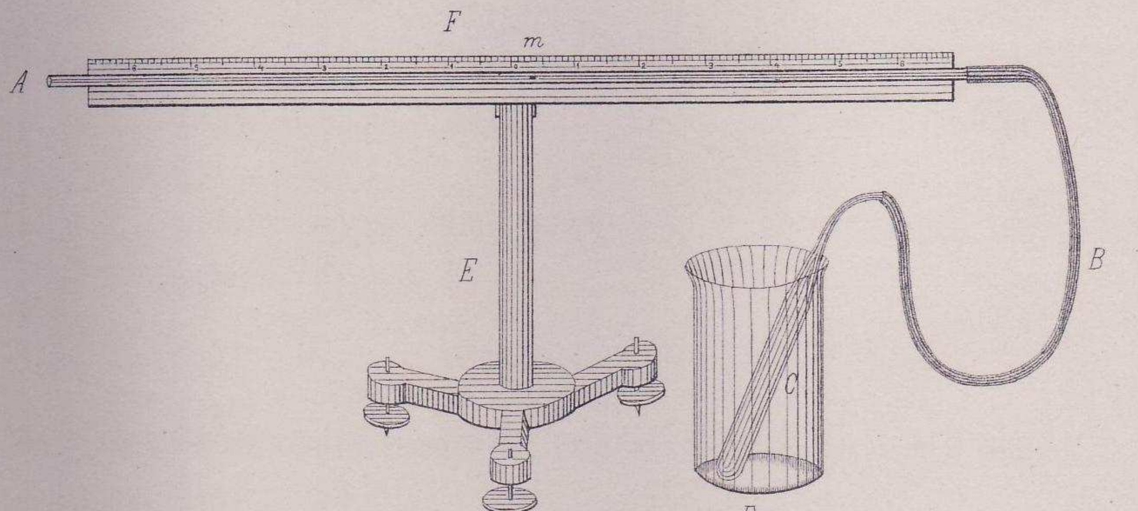
Черт. 4.



Черт. 6.



Черт. 5.



ЛИТ. БЕВЕРСДОРФЪ, ХАРЬКОВЪ.

ОБЪ ОДНОМЪ ЧАСТНОМЪ ЗАКОНѢ

ПОГЛОЩЕНІЯ СВѢТА.

А. П. Грузинцева.

Когда свѣтъ проходитъ черезъ средину, поглощающую лучи той или другой преломляемости, то между свойствами средины и родомъ поглощаемыхъ лучей должна существовать нѣкоторая опредѣленная зависимость. Это очевидно à priori. Средина можетъ характеризоваться различными качествами, равно какъ и свѣтовой лучъ, проходящій черезъ нее. Въ настоящей замѣткѣ мы имѣемъ намѣреніе обратить вниманіе на одинъ частный законъ, относящійся къ поглощенію свѣта srединой, съ опредѣленною поглощательною способностью. Пусть дана средина, поглощающая лучи опредѣленной преломляемости, соотвѣтствующей длинѣ волны, которую мы обозначимъ буквой

$$\lambda_m.$$

Если назовемъ массу единицы объема, т. е. плотность поглощающей средины, буквой

$$m,$$

то законъ, о которомъ говоримъ, выразится въ слѣдующей формѣ:

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m,$$

причемъ

$$\alpha \text{ и } \beta$$

суть нѣкоторые постоянные коэффиціенты, характеризующіе средину. Законъ этотъ теоретически вытекаетъ изъ тѣхъ общихъ взглядовъ на свѣторазсѣяніе (дисперсію), которые принимаются нынѣ физиками, и можетъ быть полученъ изъ формулъ, которыя развиты въ моей теоріи дисперсіи, данной въ 1882 году въ «Сообщеніяхъ» харьк. матем. общества. Для вывода этого закона я предварительно приведу нужныя для того формулы и, пользуясь случаемъ, дамъ имъ нѣсколько бóльшее развитіе, чѣмъ это сдѣлано въ упомянутой моей статьѣ.

Основныя уравненія движенія въ поглощающей срединѣ, приведенныя въ моей статьѣ «О двойномъ лучепреломленіи въ связи съ свѣторазсѣяніемъ»[1], и дадутъ, по подстановкѣ значеній входящихъ въ нихъ составляющихъ колебанія эфирной и матеріальной частицы, основныя уравненія настоящей замѣтки.

Положимъ:

$$H_1 = S h_x^2 A^2,\ h_x^2 = \frac{\varkappa_x}{2\pi c_0 \mu},\ \alpha_x = m_x \sqrt{\frac{m}{\mu}},\ a_1 = S \alpha_x^2 A^2,$$

$$g_x = \frac{1}{2\pi c_0} \sqrt{\frac{\delta_x}{\mu}},\ G_1 = S g_x^2 A^2.$$

Тогда

$$S \frac{F_1 A^2 \nu^2}{4\pi^2 c_0^2 \mu} = S \frac{A^2}{4\pi^2 c_0^2 \mu} \left\{ \beta_x^{(0)} + \beta_x^{(1)} N^2 + \beta_x^{(2)} N^4 + \ldots \right\} =$$

$$= S A^2 \left\{ \frac{\beta_x^{(0)}}{4\pi^2 c_0^2 \mu} - \frac{\beta_x^{(1)} \nu^2}{c_0^2 \mu \lambda^2} + \frac{4\pi^2 \beta_x^{(2)} \nu^4}{c_0^2 \mu \lambda^4} - \ldots \right\}.$$

[1] «Сообщенія» харьк. матем. общества за 1882 г. кн. 1, стр. 77, уравненія 2, или стр. 73 отдѣльно изданной брошюры подъ тѣмъ-же заглавіемъ.

Значенія входящихъ здѣсь количествъ объяснены въ упомянутой статьѣ.

Если далѣе положимъ:

$$b_1 = S\frac{\beta_x{}^{(0)} A^2}{4\pi^2 c_0{}^2\mu},\ c_1 = -\ S\frac{\beta_x{}^{(1)} A^2}{c_0{}^2\mu},\ldots,$$

то

$$S\frac{F_1 A^2 \nu^2}{4\pi^2 c_0{}^2\mu} = \left(b_1 + \frac{c_1}{\lambda^2}N^2 + \frac{\partial_1}{\lambda^4}N^4 + \ldots\right)\nu^2$$

или еще

$$S\frac{F_1 A^2 \nu^2}{4\pi^2 c_0{}^2\mu} = \left\{b_1 + \frac{b^{(1)}}{\lambda^2}N^2 + \frac{b^{(2)}}{\lambda^4}N^4 + \ldots\right\}\nu^2, \qquad (1)$$

гдѣ

$$b^{(i)} = \frac{(2\pi)^{2i-2}(-1)^i}{c_0{}^2\mu} S\beta_x{}^{(i)} A^2.$$

Если подставимъ въ формулу (1) значеніе N, т. е.

$$K + \frac{q}{c}\sqrt{-1},$$

причемъ K пропорціонально коэффиціенту поглощенія средины, какъ это объяснено въ упомянутой статьѣ, равно какъ тамъ же объяснено значеніе q и c*, тогда получимъ:

$$S\frac{F_1 A^2 \nu^4}{4\pi^2 c_0{}^2\mu} = \left\{b_1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} c^{(i)}\ \frac{\nu^2 i}{\lambda^{2i}}\right\}\nu^2 \qquad (2)$$

причемъ положено

$$c^{(i)} = \frac{(2\pi)^{4i-2}}{(c_0\sqrt{\mu})^2} S\beta_x{}^{(i)} A^2. \qquad (a)$$

---

* Въ упоминаемой статьѣ $\sqrt{-1}$ обозначенъ извѣстнымъ символомъ: i.

Подставляя значеніе количествъ, входящихъ въ другіе члены упомянутыхъ уравненій, найдемъ:

$$a_1 = S\alpha_x{}^2 A^2 = S\frac{m}{\mu}A^2 m_x{}^2 ,$$

но

$$m_x = \gamma_x + \sum_{i=1}^{i=\infty} \gamma_x{}^{(i)} N^{2i}$$

и такъ какъ

$$N^{2i} = (2\pi)^{2i}(-1)^{i}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{2i},$$

т. е.

$$a_1 = a_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{a^{(i)}}{\lambda^{2i}}\nu^{2i},$$

гдѣ

$$a_0 = \frac{m}{\mu}\partial_0 , \; a^{(i)} = \frac{m}{\mu}\partial^{(i)}. \qquad \text{(b)}$$

Замѣтимъ, что коэффиціенты $\partial^{(i)}$ зависятъ отъ взаимодѣйствія между эфирными и матеріальными частицами.

Теперь всѣ члены упомянутыхъ уравненій вычислены и мы получимъ:

$$-1 - a_0 - {}^2\nu\frac{a^{(1)}}{\lambda^2} - \nu^4\frac{a^{(2)}}{\lambda^4} - \ldots = -\nu^2 + \lambda^2 G_1 + \lambda H_1\sqrt{-1}$$

$$- b_1\nu^2 - c^{(1)}\frac{\nu^4}{\lambda^4} - c^{(2)}\frac{\nu^6}{\lambda^6} - \ldots$$

или:

$$\nu^2(1+b_1)-1=a_0+G_1\lambda^2+a^{(1)}\frac{\nu^2}{\lambda^2}+\left(a^{(2)}-c^{(1)}\right)\frac{\nu^4}{\lambda^4}+$$

$$+\left(a^{(3)}-c^{(2)}\right)\frac{\nu^6}{\lambda^6}+\ldots+H_1\lambda\sqrt{-1}=$$

$$=a_0+G_1\lambda^2+\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(a^{(i)}-c^{(i-1)}\right)\frac{\nu^{2i}}{\lambda^{2i}}+H_1\lambda\sqrt{-1} \quad (3)$$

при условіи

$$c^{(0)}=0.$$

Уравненія (a) и (b) показываютъ, что коэффиціенты $a^{(i)}$ пропорціональны плотности поглощающей средины и зависятъ отъ колебаній матеріальныхъ частицъ, а коэффиціенты $c^{(i)}$ — отъ измѣненія упругости эфира подъ вліяніемъ матеріальныхъ частицъ; количество G_1 — отъ сопротивленія матеріальныхъ частицъ и H_1 — отъ тренія; a_0 зависитъ отъ того-же, отъ чего зависятъ $a^{(i)}$; b_1 — отъ того, отъ чего $b^{(i)}$.

Положимъ теперь

$$f^{(i)}=a^{(i)}-c^{(i-1)} \quad (c)$$

тогда

$$\nu^2(1+b_1)-1=a_0+G_1\lambda^2+H_1\lambda\sqrt{-1}+\sum_{i=1}^{i=\infty}f^{(i)}\frac{\nu^{2i}}{\lambda^{2i}}.$$

Пусть

$$\frac{a_0}{1+b_1}=a-\varepsilon,\ \frac{G_1}{1+b_1}=G,\ \frac{H_1}{1+b_1}=H,\ \frac{f^{(i)}}{1+b_1}=D_i$$

и

$$\frac{1}{1+b_1}=1+\varepsilon$$

или, другими словами, возьмемъ вмѣсто b_1 и a_0 новыя количества ε и a, такъ что будетъ:

$$b_1 = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon},\ a_0 = \frac{a-\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

тогда:

$$\nu^2 - 1 = a + G\lambda^2 + H\lambda\sqrt{-1} + \sum_{i=1}^{i=\infty} D_i \frac{\nu^{2i}}{\lambda^{2i}} \ldots \quad \text{(A)}$$

Это есть формула (3) стр. 73 цитированной выше статьи (стр. 77 «Сообщеній» Х. М. О. 1882, I).

Займемся теперь дальнѣйшими преобразованіями формулы (А).

Мы знаемъ, что

$$\nu = n + p\sqrt{-1},$$

гдѣ n показатель преломленія средины, а p коэффиціентъ поглощенія; слѣдовательно

$$\nu^{2i} = \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h,i}\, n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+ \sqrt{-1} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1,i}\, n^{2i-2h-1} p^{2h+1},$$

гдѣ

$$a_{2h,i} = \frac{2i(2i-1)\ldots(2i-2h+1)}{1.2.3.\ldots 2h}$$

и

$$a_{0,i} = 1, \quad a_{2i,i} = 1;$$

также

$$a_{2h+1,i} = \frac{2i(2i-1)\ldots(2i-2h)}{1.2.3.\ldots(2h+1)}$$

$$a_{1,i} = 2i, \qquad a_{2i+1,i} = 0.$$

При помощи этихъ выраженій формула (A) превращается въ слѣдующую:

$$n^2 - p^2 - 1 + 2np\sqrt{-1} = a + G\lambda^2 + H\lambda\sqrt{-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h \Big(a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+ \sqrt{-1}\, a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \Big) = a + G\lambda^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} +$$

$$+ \sqrt{-1} \left\{ H\lambda + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \right\}.$$

Сравнивая дѣйствительныя и мнимыя части, найдемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h,i} n^{2i-2h} p^{2h} \tag{I}$$

$$2np = H\lambda + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i}{\lambda^{2i}} \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1} \tag{II}$$

или

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i R_i}{\lambda^{2i}} \qquad \text{(I bis)}$$

$$2np = H\lambda + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{D_i S_i}{\lambda^{2i}}\ ; \qquad \text{(II bis)}$$

если ради краткости письма положимъ:

$$R_i = \sum_{n=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h\,,\,i}\, n^{2i-2h}\, p^{2h}$$

$$S_i = \sum_{h=0}^{h=i} (-1)^h a_{2h+1\,,\,i} n^{2i-2h-1} p^{2h+1}\ .$$

Выдѣлимъ теперь въ формулѣ (I bis) коэффиціенты при различныхъ степеняхъ n.

Подставляя въ формулу (I bis) значенія R_1, R_2, ... R_i и отбирая члены съ одинаковыми степенями отношенія $p : n = x$ и полагая:

$$X_i = 1 - a_{2\,,\,i} x^2 + a_{4\,,\,i} x^4 - a_{6\,,\,i} x^6 + \ldots + (-1)^i x^{2i}\ ,$$

гдѣ слѣдовательно

$$a_{2k\,,\,i} = \frac{2i(2i-1)(2i-2)\ldots(2i-2k+1)}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,2k},$$

получимъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{D_1 X_1 n^2}{\lambda^2} + $$
$$+ \frac{D_2 X_2 n^4}{\lambda^4} + \ldots + \frac{D_k X_k n^{2k}}{\lambda^{2k}} + \ldots \qquad \text{(A)}$$

Если бы поглощенія не было (т. е. $p=0$), то всѣ X_k были бы равны 1-цѣ, т. е. имѣли бы для всякаго k (цѣлаго и положительнаго) тождество

$$X_k = 1.$$

Если поглощеніе мало (т. е. p очень мало), то всѣ X_k будутъ очень близки къ 1-цѣ, тогда вмѣсто формулы (A) имѣемъ приближенную формулу:

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{D_1 n^2}{\lambda^2} + \frac{D_2 n^4}{\lambda^4} + \ldots \qquad \text{(A bis)}$$

Если допустимъ гипотезу (подтвержденную опытомъ à posteriori)

$$D_k X_k = F^k,$$

тогда

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{D_k X_k n^{2k}}{\lambda^{2k}} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{Fn^2}{\lambda^2}\right)^k = \frac{Fn^2}{\lambda^2 - Fn^2},$$

такъ какъ

$$\frac{Fn^2}{\lambda^2} < 1.$$

И такъ имѣемъ:

$$n^2 - p^2 - 1 = \frac{Fn^2}{\lambda^2 - Fn^2} + a + G\lambda^2,$$

или

$$n^2 - p^2 - 1 = a + G\lambda^2 + \frac{F}{\dfrac{\lambda^2}{n^2} - F}. \qquad \text{(A ter)}$$

Эта формула представляетъ одинъ изъ частныхъ видовъ общей формулы свѣторазсѣянія. Она уже повѣрялась опытомъ.

Преобразуемъ подобнымъ же образомъ и формулу (II bis). Поступая совершенно такъ-же, какъ и выше, и полагая

$$a_{2k-1,i} = \frac{2i(2i-1)(2i-3)\ldots(2i-2k+2)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots(2k-1)}$$

и

$$Y_i = a_{1,i}x - a_{3,i}x^3 + a_{5,i}x^5 - \ldots + (-1)^{i+1}a_{2i-1,i}x^{2i-1},$$

тогда

$$2np = H\lambda + \frac{D_1Y_1n^2}{\lambda^2} + \frac{D_2Y_2n^4}{\lambda^4} + \frac{D_3Y_3n^6}{\lambda^6} + \ldots \qquad \text{(B)}$$

Если допустимъ, какъ гипотезу,

$$D_kY_k = F^kx,$$

причомъ это F отлично отъ предыдущаго; то

$$2np = H\lambda + x\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Fn^2}{\lambda^2}\right)^k;$$

но

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{Fn^2}{\lambda^2}\right)^k = \frac{Fn^2}{\lambda^2-Fn^2},$$

слѣдовательно

$$2np = H\lambda + \frac{Fnp}{\lambda^2-Fn^2}, \qquad \text{(B bis)}$$

если вмѣсто x внесемъ его значенiе $p:n$.

Если возьмемъ, какъ 1-е приближенiе,

$$2np = H\lambda,$$

тогда, какъ 2-е приближенiе,

$$2np = H\lambda + \frac{FH\lambda}{2(\lambda^2 - Fn^2)}$$

или

$$2np = \lambda\left(H + \frac{\mathrm{E}}{\lambda^2 - Fn^2}\right),$$

гдѣ

$$\mathrm{E} = \frac{FH}{2}.$$

Членъ Fn^2 измѣняется мало и его вліяніе незначительно, поэтому можно принять его за постоянное и означить C, тогда

$$2np = \lambda\left(H + \frac{\mathrm{E}}{\lambda^2 - C}\right). \qquad \text{(B ter)}$$

Эту формулу можно разсматривать какъ 2-е приближеніе.

Теперь легко перейдти къ закону поглощенія, о которомъ упомянуто въ началѣ статьи.

Формула (B ter) показываетъ, что поглощеніе тѣмъ больше, чѣмъ ближе λ^2 къ количеству C, такъ что maximum поглощенія получимъ, если λ^2 равно C; означимъ это значеніе λ буквой λ_m, тогда

$$\lambda^2_m = C.$$

Таково условіе для простой поглощающей средины, т. е. для средины съ одною полосой поглощенія; если такихъ полосъ нѣсколько, то приведенное уравненіе имѣетъ мѣсто для каждой полосы отдѣльно. Опредѣляя значеніе коэффиціента C, т. е. помня, что онъ пропорціоналенъ коэффиціенту D или D_k, найдемъ, что

$$C = \alpha + \beta m$$

гдѣ α и β будутъ коэффиціенты, независящіе отъ m, т. е. отъ плотности поглощающей средины.

И такъ имѣемъ:

$$\lambda_m{}^2 = \alpha + \beta m. \qquad \text{(d)}$$

Посмотримъ теперь, въ какой мѣрѣ подтверждается этотъ законъ наблюденіями.

Для такой повѣрки мы возьмемъ наблюденія Кеттелера, Пульфриха и Гессе.

Представимъ себѣ, что поглощающее вещество (твердое) растворено въ непоглощающемъ (жидкомъ), напримѣръ ціанинъ въ спиртѣ, пусть степень концентраціи такого раствора будетъ k; тогда можно принять, что m пропорціонально k и выраженіе (d) будетъ имѣть видъ:

$$\lambda_m{}^2 = A + Bk,$$

гдѣ A и B постоянные коэффиціенты (весьма приближенно).

I. Примѣнимъ сказанное къ наблюденіямъ Кеттелера (Wied. Annalen. Bd. XII, 1881. S. 481).

Кеттелеръ опредѣлялъ λ_m для растворовъ ціанина въ спиртѣ, концентраціи коихъ были слѣдующія:

$$k = \frac{5}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36},$$

причемъ k выражены въ произвольныхъ единицахъ; значенія λ_m были (въ тысячныхъ доляхъ миллиметра) 0,58010; 0,58616; 0,58992; 0,59193; 0,59320; 0,59401.

Подставляя эти значенія k и λ_m въ формулу

$$\lambda_m{}^2 = A + Bk,$$

мы вычислимъ A и B по способу наименьшихъ квадратовъ и найдемъ:

$$A = 0{,}3534\,;\quad B = -0{,}0098.$$

Если бы теперь мы вычислили обратно по A и B величины λ_m^2 и сравнили бы съ наблюденіями, то получили бы слѣдующее:

вычисленные λ_m^2	0,3369	0,3436	0,3469	0,3501	0,3526	0,3531
наблюденные	0,3365	0,3436	0,3480	0.3504	0,3519	0,3528
разности	+4	0	—11	—3	—7	—3

при этомъ средняя ошибка наблюденія есть $\pm 0{,}0007$.

II. Примѣнимъ теперь найденный законъ къ наблюденіямъ Пульфриха надъ ціаниномъ же (Wied. An. Bd. XIV, 1881. S. 177). Вычисляя подобнымъ же образомъ, нашли бы:

$$A = 0{,}3317\,,\quad B = -0{,}0186.$$

Разницу отъ выше-найденныхъ должно объяснить различіемъ въ температурахъ растворовъ, равно какъ и различіемъ взятаго ціанина въ обоихъ случаяхъ.

III. Воспользуемся теперь наблюденіями Гессе[1] (Wied. Ann. Bd. XI, S. 871. 1880).

a) Возьмемъ наблюденія надъ растворомъ анилина въ водѣ. Значеніе k здѣсь были:

$$1\,;\ 0{,}8\,;\ 0{,}6\,;\ 0{,}4\,;\ 0{,}2.$$

Опредѣляя B по формулѣ:

$$B = \frac{\lambda_m'^2 - \lambda_m^2}{k' - k},$$

гдѣ λ_m, k; λ'_m, k' суть длина волны и степень концентраціи для двухъ наблюденій, найдемъ въ среднемъ:

$$B = -0{,}0056.$$

[1] Замѣтимъ, что Гессе эмпирически получилъ законъ, подобный нашему.

Теперь для повѣрки закона опредѣлимъ A по формулѣ

$$A = \lambda_m^2 - Bk;$$

найдемъ:

$$A = 0,3177$$
$$80$$
$$79$$
$$77$$
$$78$$

среднее $A = 0,3178$.

b) Растворъ анилина въ спиртѣ даетъ

$$B = -0,0114,$$

и для A получаемъ значеніе

$$A - 0,3371$$
$$63$$
$$72$$
$$76$$
$$73$$

среднее $A = 0,3371$.

c) Ціанинъ въ спиртѣ. Находимъ совершенно такъ-же какъ и выше, комбинируя по два наблюденія:

$$B = -0,0131.$$

По B находимъ:

$$A = 0,3601$$
$$01$$
$$00$$
$$14\ (?)$$
$$01$$

среднее $A = 0,3603$.

Это значеніе A вообще незначительно отличается отъ A, найденнаго изъ наблюденій Кеттелера и даже Пульфриха; причины разницы тѣ же.

d) Фуксинъ въ спиртѣ. Находимъ

$$B = -0{,}0120$$

и для A находимъ:

$$\begin{aligned} A &= 0{,}3589 \\ &\phantom{= 0{,}3}572 \\ &\phantom{= 0{,}3}609 \\ &\phantom{= 0{,}3}593 \\ &\phantom{= 0{,}3}589 \\ \hline \text{среднее } A &= 0{,}3590. \end{aligned}$$

e) Еще ціанинъ въ спиртѣ. Онъ даетъ:

$$B = -0{,}0061$$

и

$$\begin{aligned} A &= 0{,}3380 \\ &\phantom{= 0{,}33}78 \\ &\phantom{= 0{,}33}76 \\ &\phantom{= 0{,}33}80 \\ \hline \text{среднее } A &= 0{,}3379. \end{aligned}$$

Всѣ эти наблюденія показываютъ достаточное согласіе (ибо наблюденія λ_m весьма трудны), и поэтому мы можемъ принять законъ

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m$$

за достаточно точный законъ.

Это значеніе A вообще незначительно отличается отъ A, най-
деннаго изъ наблюденій Кеттелера и даже Пульфриха; причины
разницы тѣ же.

d) Фуксинъ въ спиртѣ. Находимъ

$$B = -0{,}0120$$

и для A находимъ:

$$A = 0{,}3589$$
$$572$$
$$609$$
$$593$$
$$589$$

$$\text{среднее } A = 0{,}3590.$$

e) Еще ціанинъ въ спиртѣ. Онъ даетъ:

$$B = -0{,}0061$$

$$A = 0{,}3380$$
$$78$$
$$76$$
$$80$$

$$\text{среднее } A = 0{,}3379.$$

Всѣ эти наблюденія показываютъ достаточное согласіе (ибо
наблюденія λ_m весьма трудны), и поэтому мы можемъ принять
законъ

$$\lambda_m^2 = \alpha + \beta m$$

а достаточно точный законъ.

ОТЧЕТЪ

О ЗАНЯТІЯХЪ ВЪ ЛЕЙПЦИГѢ,

КОМАНДИРОВАННАГО ЗА ГРАНИЦУ СЪ УЧЕНОЮ ЦѢЛЬЮ,

ДОЦЕНТА ИМПЕРАТОРСКАГО ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

Матвѣя Тихомандрицкаго.

Отправляясь за границу съ цѣлью ознакомленія съ тѣмъ состояніемъ, въ которомъ находится тамъ въ настоящее время ученіе о функціяхъ вообще и Абелевыхъ въ-особенности, и главнымъ образомъ съ Вейерштрассовскою теоріей послѣднихъ, я избралъ Лейпцигъ первымъ пунктомъ своего пребыванія за границей вслѣдствіе того, что въ лѣтній семестръ Вейерштрассъ долженъ былъ читать не Абелевы интегралы, а варіаціонное исчисленіе; въ Лейпцигѣ же проф. Клейнъ читалъ въ это время вторую часть теоріи эллиптическихъ функцій, и мнѣ, какъ занимающемуся этимъ предметомъ, интересно было познакомиться съ преподаваніемъ его такимъ ученымъ, какъ Клейнъ. Но еще болѣе меня привлекало въ Лейпцигъ то обстоятельство, что Клейнъ занимался и Римановою теоріей алгебраическихъ функцій и ихъ интеграловъ; слѣдовательно, я могъ получить отъ него разъясненіе многихъ неясныхъ пунктовъ этой теоріи, а также вопроса о томъ, какъ подошелъ Риманъ къ своей теоріи; объ этомъ же какъ-разъ Клейнъ издалъ брошюру, о которой рѣчь будетъ ниже.

Въ Лейпцигъ я пріѣхалъ $\frac{22\text{ мая}}{3\text{ іюня}}$ сего года, на другой день Тройцына дня, когда начинаются здѣсь каникулы Pfingstferien, длящіяся недѣлю. Эту недѣлю я употребилъ на ознакомленіе съ мѣстоположеніемъ университетскихъ зданій, а также на просмотръ купленныхъ мною у Тэйбнера книгъ.

Математическія лекціи читаются главнымъ образомъ въ особомъ зданіи — Чермакскомъ институтѣ, который находится въ 15-минутномъ разстояніи отъ университета въ юго-восточной части города, между зданіями зоологическаго и сельско-хозяйственнаго институтовъ, на Teich-Str. Это небольшое зданіе, полукруглое спереди, гдѣ аудиторія, выстроенная амфитеатромъ, первоначально, должно полагать, предназначалось для преподаванія естественныхъ наукъ; тѣмъ не менѣе оно весьма удобно и для лекцій по математикѣ; слышно въ аудиторіи съ послѣдней скамьи также хорошо какъ и съ первой и, благодаря освѣщенію сверху, доска никогда не отсвѣчиваетъ. Доска состоитъ изъ двухъ частей, соединенныхъ перекинутыми чрезъ блоки веревками: исписанная половина, если нужно сохранить формулы, поднимается, и пишутъ на другой, спущенной на высоту удобную для профессора. Позади аудиторіи находится комната съ гипсовыми моделями разныхъ кривыхъ поверхностей, другая комната — чертежная и третья — Sprechzimmer des Docenten, гдѣ профессоръ по окончаніи лекціи даетъ желающимъ объясненія. Прежде въ этомъ зданіи помѣщался и математическій семинаръ (Königliches mathematisches Seminar der Universität), нынѣ же онъ помѣщается на Ritterstrasse № 14. Квартира семинара состоитъ изъ двухъ Sprechzimmer des Docenten, аудиторіи, въ которой происходятъ разъ въ недѣлю чтенія сообщеній семинаристовъ и профессоровъ, а также занимаются черченіемъ; библіотеки, читальни, гдѣ лежатъ вновь выходящія періодическія изданія и книги, и двухъ Arbeitszimmer. Открытъ семинаръ лѣтомъ съ 7-ми часовъ утра до 8-ми вечера. Прислуги въ квартирѣ семинара нѣтъ; поэтому каждому семинаристу дается ключъ отъ дверей того отдѣленія, гдѣ библіотека и кабинеты, а также другой отъ ящика въ столѣ, гдѣ онъ можетъ хранить свои вещи; приходя въ удобное для него время, онъ можетъ заниматься такъ, какъ у себя въ кабинетѣ, доставая самъ изъ библіотеки все, что ему нужно; на-домъ брать ничего не дозволяется. Такъ-какъ семинаръ существуетъ всего три года, на скромныя средства, то понятно, что библіотека еще не можетъ быть богатою: она еще формируется; но уже и теперь она содержитъ много полезнаго: журналъ Crell'я съ 50-го тома, Mathematische Annalen съ основанія; записки берлинской, вѣнской, парижской академій и другія математическія періодическія изданія, въ томъ числѣ и американскій математическій журналъ, основанный Сильвестромъ (вернувшимся теперь въ Оксфордъ), за послѣдніе годы, также сочиненія Абеля, Якоби, Гаусса, Римана, Штейнера, Плюкера, Эйзенштейна, Шаля, Ли (всѣ статьи о частныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ собраны въ одинъ томъ), Неймана; Коши, Лагранжа, Лапласа новыя изданія также пріобрѣтаются; кромѣ того, тамъ имѣются рукописныя лекціи Клейна, Майера, Дика, Вейерштрасса, Кронекера, что для меня было весьма важно. Каждый семинаристъ вноситъ 10 марокъ за семестръ. Большею частію они доктора или докторанты; былъ между ними и приватъ-доцентъ изъ Праги. Въ семинарѣ кромѣ проф. Клейна, который состоитъ директоромъ семинара, занимается и проф. Майеръ; также приватъ-доцентъ Шуръ. Занятія семинаристовъ состоятъ обыкновенно въ самостоятельной разработкѣ разныхъ частныхъ вопросовъ изъ области преподаваемаго на лекціяхъ. Разъ въ недѣлю, по понедѣльникамъ, происходятъ собранія, на которыхъ, послѣ прочтенія протокола предыдущаго засѣданія, одинъ изъ семинаристовъ читаетъ свою работу, во время чего, если нужно, проф. Клейнъ дѣлаетъ замѣчанія или возраженія, а по окончаніи иногда резюмируетъ, или дополняетъ, или ставитъ новый вопросъ. Большая часть рефератовъ, мною слышанныхъ, были спеціальнаго характера, относясь къ частнымъ вопросамъ дѣленія и преобразованія эллиптическихъ функцій — о чемъ въ то время читалъ проф. Клейнъ, и только мое сообщеніе «объ обращеніи эллиптическихъ интеграловъ» (которое г. Клейнъ хотѣлъ напечатать въ Mathem. Annalen* и русскій переводъ котораго мною представленъ въ математическое общество при Императорскомъ харьковскомъ университетѣ **) имѣло уклоняющійся характеръ. Засѣданія семинара мнѣ напомнили нѣсколько засѣданія нашего математическаго общества.

Математическій семинаръ навѣщается обыкновенно всѣми заѣзжающими въ Лейпцигъ математиками; здѣсь я встрѣтилъ, между прочими, профессора дерптскаго университета Линдштедта, Шуберта изъ Гамбурга, извѣстнаго проф. Вебера изъ Берлина (теперь перешелъ въ марбургскій университетъ), котораго солидными работами многое разъяснено въ теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

Я позволилъ себѣ распространиться о математическомъ семинарѣ, доступъ въ который мнѣ любезно открылъ проф. Клейнъ даже и на каникулярное время (августъ, сентябрь), не только потому, что, благодаря этому учрежденію, я получилъ возможность въ короткое время пріобрѣсти общее знакомство съ литературою занимающаго меня предмета и такимъ образомъ подготовиться къ дальнѣйшимъ моимъ занятіямъ, но также и потому, что я признаю пользу такого института не только для начинающихъ ученыхъ, которымъ онъ доставляетъ много удобствъ для занятій и руководство опытныхъ ученыхъ, но также и для самихъ руководителей, которымъ онъ доставляетъ сотрудниковъ; много частныхъ вопросовъ и задачъ, представляющихся при круп-

* Напечатано въ XXV т.

** См. III книжку «Сообщеній» за 1884 г.

номъ научномъ изслѣдованіи, нетребующихъ особенной подготовки, но много времени, весьма полезно — въ видахъ сбереженія своего времени и силъ для преодолѣнія болѣе существенныхъ трудностей главнаго вопроса — предоставлять своимъ ученикамъ, которые болѣе пользы извлекутъ какъ для своего развитія, такъ и для науки, трудясь надъ рѣшеніемъ вопросовъ и задачъ непридуманныхъ нарочно какъ примѣры для упражненія, но выдвинутыхъ на очередь ходомъ развитія науки, и потому всегда, какъ все живое, болѣе способныхъ вызвать интересъ къ себѣ и побудить къ труду. Много изслѣдованій, напечатанныхъ въ Mathem. An., журналѣ Schlömilch'a, а также нѣкоторыя изъ помѣщенныхъ въ итальянскихъ журналахъ и др., получили свое начало въ семинарѣ Клейна (въ которомъ всегда бываетъ нѣсколько иностранцевъ). Въ семинарѣ молодые люди, занимаясь въ одно время родственными вопросами, легче могутъ вступать въ обмѣнъ мыслей между собою и такимъ образомъ поддерживать другъ друга въ научной работѣ. Постояннымъ обмѣномъ мыслей Клебша съ товарищами по наукѣ и учениками объясняютъ его біографы его чрезвычайную научную продуктивность.

Проф. Клейнъ, ученикъ Плюкера и Клебша, отчасти Кронекера и Вейерштрасса, принадлежитъ къ той школѣ математиковъ, наиболѣе, какъ кажется, въ настоящее время распространенной въ Германіи, которые не полагаютъ рѣзкаго разграниченія между чистымъ анализомъ и геометріей и не только анализъ примѣняютъ къ геометріи, но и геометрію къ анализу. Въ университетѣ занимаетъ онъ каѳедру геометріи, и нынѣшній зимній семестръ будетъ читать элементарный курсъ проективной геометріи (въ семинарѣ же будутъ продолжаться занятія эллиптическими функціями), но въ различное время читалъ и разные другіе курсы. Такъ, я видѣлъ въ семинарѣ его лекціи о рѣшеніи уравненія 5-й степени. Изъ этого курса, вновь переработаннаго, вышла только-что изданная имъ книга подъ заглавіемъ: «Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade». Leipz. B. G. Teubner. 1884. Этотъ курсъ большой и трудный, а потому при всемъ интересѣ, который онъ возбуждалъ во мнѣ, я въ виду большой затраты времени, которой потребовало бы основательное изученіе его, долженъ былъ воздержаться отъ этого уклоненія отъ прямой моей задачи, тѣмъ болѣе, что ожидался выходъ только-что названной книги. Изъ курсовъ проф. Клейна я познакомился съ двумя: съ курсомъ теоріи эллиптическихъ функцій, читаннымъ въ зимній и лѣтній семестры нынѣшняго года, и курсомъ «Functionentheorie in geometrischer Behandlungsweise» — въ зимній и лѣтній семестры 1880—1881 г. Курсъ теоріи эллиптическихъ функцій состоитъ изъ двухъ частей: въ первой, прочитанной въ зимній семестръ $18^{83}/_{84}$ года, разсматриваются эллиптическіе интегралы и функціи въ обыкновенномъ смыслѣ, во второй, читанной въ лѣтній семестръ, разсматриваются эллиптическіе Modulfunctionen, т. е. въ зависимости не только отъ аргумента, но и отъ обоихъ періодовъ. Въ первой части показывается выводъ эллиптическихъ интеграловъ трехъ родовъ по Клебшу въ зависимости отъ плоской кривой третьяго порядка перваго рода, а также отъ кривой 4 порядка, происходящей отъ пересѣченія двухъ цилиндровъ второго порядка; разсматриваются и сравниваются между собою различныя каноническія формы эллиптическихъ интеграловъ: Лежандровская, Римановская и Вейерштрассовская. Послѣдняя получается такимъ образомъ, что сперва находятся «ирраціональные инваріанты» полинома 4. степени, т. е. функціи корней его; потомъ изъ нихъ составляются такіе инваріанты, которые выражаются раціонально чрезъ коэффиціенты полинома. Затѣмъ показывается изображеніе одной плоскости на другой съ помощію эллиптич. интеграловъ. Періодичность выводится по Риману. За основную эллиптическую функцію берется не sinam u, а Вейерштрассовская $p(u)$. Въ заключеніе показывается разложеніе эллиптич. функцій въ ряды и безконечныя произведенія и вводится функція $\sigma(u)$ Вейерштрасса, которая сравнивается съ Якобіевскими Θ-функціями. Изъ второй части курса я прослушалъ только вторую половину, посвященную умноженію, преобразованію и дѣленію эллиптическихъ функцій, которая существенно новаго для меня ничего не представляла кромѣ того, что вмѣсто $\sin \operatorname{am} u$ и $\Theta(u)$ фигурировали $p(u)$ и $\sigma(u)$, благодаря чему дѣло представлялось проще, и это потому, что функція $p(u)$, зависящая по своему опредѣленію отъ инваріантовъ, не измѣняется отъ линейныхъ преобразованій періодовъ съ опредѣлителемъ $= 1$, тогда какъ Лежандровскій модуль k^2 принимаетъ вслѣдствіе этого 6 формъ. Въ пропущенной мною части, которая была подготовительною къ этой, эллиптическія функціи разсматривались какъ функціи періодовъ. Хотя листы лекцій Клейна появлялись въ семинарѣ обыкновенно чрезъ недѣлю по прочтеніи лекціи, тѣмъ не менѣе мнѣ не удалось прочитать этой части его курса, такъ-какъ она постоянно находилась въ употребленіи у его слушателей; на каникулы же, уѣзжая изъ Лейпцига, Клейнъ взялъ ихъ съ собою, чтобы пересмотрѣть. Судя по предисловію къ вышеупомянутой книгѣ его, можно полагать, что онъ приготовляетъ другое сочиненіе: Die Lehre von den elliptischen Modulfunctionen, изъ котораго можно будетъ познакомиться и съ этою частію курса. На лекціяхъ пр. Клейнъ вычисленій обыкновенно не производитъ, ограничиваясь большею частію указаніемъ пріемовъ и сообщеніемъ результатовъ. Это имѣетъ для развитыхъ слушателей то преимущество, что процесъ вычисленія не отвлекаетъ ихъ отъ хода идей. Вообще курсы Клейна разсчитаны на хорошо подготовленныхъ слушателей.

Я не буду подробно описывать другаго курса пр. Клейна, котораго заглавіе достаточно показываетъ, что въ этомъ курсѣ, изслѣдуя фукціи, начиная съ элементарныхъ и до Абелевыхъ интеграловъ, онъ также придерживается методовъ Клебша и Римана; но отмѣчу только то, что показалось мнѣ новымъ въ этомъ курсѣ. Первое — это переходъ отъ алгебраической кривой въ пространствѣ n измѣреній, отъ которой зависитъ Абелевъ интегралъ по Клебшу (распространеніе на n измѣреній принадлежитъ его ученикамъ Клейну и Нётеру) къ Римановой поверхности чрезъ постепенное проэктированіе въ пространство непосредственно низшаго числа измѣреній изъ центра, взятаго на кривой. Объ этомъ лучше всего дастъ понятіе слѣдующій примѣръ, взятый изъ курса Клейна: пусть дана кривая четвертаго порядка въ пространствѣ трехъ измѣреній: взявъ за центръ проэкцій точку на кривой, проводимъ изъ нея прямыя чрезъ всѣ точки данной кривой до пересѣченія съ какою-нибудь плоскостью, непроходящею чрезъ центръ проэкцій: въ пересѣченіи получимъ рядъ точекъ, образующихъ кривую третьяго порядка (дѣйствительно, если мы пересѣчемъ полученную кривую какою-нибудь прямою въ плоскости проэкцій и чрезъ эту прямую и центръ проэкцій проведемъ новую плоскость, то эта послѣдняя пересѣчетъ данную кривую 4-го порядка еще только въ трехъ точкахъ, и если мы эти точки соединимъ съ центромъ проэкцій прямыми, то эти послѣднія опредѣлятъ точки пересѣченія кривой проэкціи съ сѣкущею прямою, которыхъ будетъ такимъ образомъ три, откуда и слѣдуетъ сказанное). Если теперь возьмемъ точку на этой кривой 3. порядка и будемъ проводить изъ нея прямыя къ прочимъ точкамъ кривой и опредѣлимъ точки ихъ пересѣченія съ какою-либо прямою въ той-же плоскости, не проходящею чрезъ этотъ второй центръ проэкцій, то будемъ имѣть точки этой прямой, соотвѣтственныя въ силу обоихъ проэктированій точками данной кривой 4. порядка въ пространствѣ трехъ измѣреній. При этомъ каждой точкѣ кривой 4. порядка будетъ въ силу обоихъ проэктированій отвѣчать одна точка прямой, но, наоборотъ, каждой точкѣ этой прямой линіи будутъ отвѣчать уже двѣ точки кривой третьяго порядка (а слѣд. и данной четвертаго), потому что каждая прямая, соединяющая точку прямой со вторымъ центромъ проэкцій, встрѣтитъ кривую 3. порядка еще въ двухъ точкахъ; такъ что прямыя соединяющія точки кривой 3. порядка съ центромъ проэкціи будутъ совпадать по двѣ, откуда и слѣдуетъ сказанное. Функція отъ координатъ точекъ данной кривой въ каждой точкѣ послѣдней прямой будетъ имѣть, слѣдовательно, по два значенія, которыя сдѣлаются равными только въ точкахъ, отвѣчающихъ касательнымъ изъ центра проэкцій къ точкамъ кривой 3. порядка. Такъ какъ изъ точки на кривой 3. порядка можно провести четыре касательныя къ ней-же, то мы будемъ имѣть на нашей дважды покрытой значеніями функціи прямой четыре точки развѣтвленія функціи. Если теперь перестанемъ ограничиваться вещественными значеніями, а примемъ въ разсмотрѣніе комплексныя, то наша дважды покрытая значеніями функціи прямая обратится въ двулиственную Риманову плоскость съ четырьмя винтовыми точками (Windungspunkte), которую Риманъ построилъ для однозначнаго представленія функцій, зависящихъ отъ квадратнаго корня изъ полинома четвертой степени. Еще Нейманъ показалъ — въ своихъ «Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale». Leipzig. Teubner. 1865,—что чрезъ непрерывное измѣненіе можно сей-часъ упомянутую Риманову поверхность, послѣ предварительнаго обращенія въ двулиственную сферу, превратить въ кольцевую поверхность. Другой пунктъ въ разсматриваемомъ курсѣ Клейна, который я желаю отмѣтить, это есть именно распространеніе этого результата на какую угодно Риманову поверхность, чрезъ что получается *нормальная* Риманова поверхность, имѣющая видъ шара съ ручками (наподобіе ручекъ торговыхъ вѣсовыхъ гирь). Всякая функція принимающая одно только значеніе въ каждой точкѣ такой поверхности будетъ на ней однозначною. На такой поверхности (если ручекъ p) можно провести $2p$ системъ кривыхъ, которыя нельзя стянуть въ одну точку: однѣ образуютъ меридіаны ручки (соотвѣтственно меридіанамъ кольца), другія — параллели. Всякій другой путь изъ одной точки въ другую можетъ быть чрезъ непрерывное измѣненіе приведенъ къ пути по кратчайшей на поверхности линіи + рядъ полныхъ путей вокругъ меридіановъ и параллелей ручекъ. Интегралъ отъ однозначной и конечной функціи на такой поверхности будетъ нуль по пути, который можно стянуть въ одну точку, и будетъ отличенъ отъ нуля по пути, который нельзя стянуть въ одну точку. Такимъ образомъ меридіанъ каждой ручки H_i даетъ интегралъ A_i, параллель другой B_i, которыя будутъ періодами интеграла, такъ какъ всѣ интегралы, взятые по различнымъ путямъ изъ одной точки въ другую, будутъ различаться на линейныя функціи съ цѣлыми коэффиціентами отъ этихъ величинъ A_i и B_i.

Третій пунктъ, который я желаю отмѣтить, заключаетъ въ себѣ отвѣтъ на вопросъ: какимъ образомъ Риманъ пришелъ къ своей теоріи алгебраическихъ функцій и ихъ интеграловъ. Клейнъ полагаетъ, что онъ былъ приведенъ къ ней чрезъ разсмотрѣніе физическихъ вопросовъ, именно *установившихся теченій на плоскости* (Stationäre Strömungen in der Ebene). Изъ этой части курса пр. Клейна вышла его брошюра: «Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. Eine Ergänzung der gewöhnlichen Darstellungen». Leipzig. Teubner. 1882.

Хотя такимъ образомъ чрезъ отчетъ объ этомъ курсѣ пр. Клейна я подошелъ къ главному предмету моихъ занятій, именно Абелевымъ интеграламъ, я позволю себѣ еще одно отступленіе, чтобы покончить съ предметами, имѣвшими для меня второстепенное значеніе. Въ семинарѣ я бѣгло ознакомился также и съ лекціями Вейерштрасса по теоріи эллиптическихъ функцій. Въ нихъ самое интересное — это подходъ къ эллиптическимъ функціямъ. Вейерштрассъ къ нимъ приходитъ чрезъ рѣшеніе такой задачи:

найти всѣ однозначныя функціи одной независимой перемѣнной, для которыхъ имѣетъ мѣсто теорема сложенія; потомъ онъ показываетъ, что функція $p(u)$, къ которой приводитъ разсмотрѣніе интеграловъ отъ раціональной функціи отъ квадратнаго корня изъ полинома 4 степени, есть та-же самая, которая рѣшаетъ его задачу. Приведеніе интеграловъ къ его, Вейерштрасса, канонической формѣ я нашелъ во второй части его курса, посвященной приложенію эллиптическихъ функцій. Это приведеніе изложено въ брошюрѣ Миттагъ-Леффлера, цитированной мною въ вышеприведенной статьѣ моей, посланной въ математическое общество. Къ сожалѣнію, эта брошюра написана на шведскомъ языкѣ и, безъ знанія этого языка, только съ большимъ трудомъ одолѣвается при помощи лексикона. Къ этимъ лекціямъ Вейерштрасса я еще разъ надѣюсь вернуться въ Берлинѣ. — Перехожу теперь къ Абелевымъ интеграламъ.

Теорія Абелевыхъ интеграловъ началась съ знаменитой теоремы Абеля. Первымъ, кто послѣ Абеля приступилъ къ ея разработкѣ, былъ Якоби, сосредоточившій свое вниманіе на спеціальномъ классѣ Абелевыхъ интеграловъ, нынѣ называемыхъ ультра- или гиперэллиптическими, которыя зависятъ отъ квадратнаго корня изъ полинома какой угодно степени. Онъ подробно изслѣдовалъ Абелеву теорему для этихъ интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ, теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ для интеграловъ 3-го рода; показалъ многопеによる періодичность этихъ интеграловъ и первый правильнымъ образомъ поставилъ вопросъ объ обращеніи Абелевыхъ интеграловъ, отчего эта задача объ обращеніи Абелевыхъ интеграловъ и называется теперь Якобіевою.

Якоби однако не рѣшилъ этой задачи: первое рѣшеніе ея принадлежитъ Göpel'ю и Rosenhain'у, которые получили его чрезъ обобщеніе Якобіевской функціи $\vartheta(u)$: Якоби показалъ — какимъ образомъ изъ свойствъ ея можно вывести дифференціальное уравненіе эллиптическихъ функцій, которыя представляются частнымъ двухъ различныхъ $\vartheta(u)$. Göpel и Rosenhain, принявъ въ разсмотрѣніе ряды $\vartheta(u, v)$, составленные по тому-же закону, но уже двойные и зависящіе отъ двухъ аргументовъ — u и v, вывели изъ ихъ свойствъ частныя дифференціальныя уравненія для функцій, представляемыхъ частнымъ двухъ такихъ $\vartheta(u, v)$, и такимъ образомъ пришли къ дифференціальнымъ уравненіямъ Якобіевой задачи (Методъ Rosenhain'а весьма хорошо очерченъ въ докторской диссертаціи К. А. Поссе подъ заглавіемъ — «О функціяхъ ϑ отъ двухъ перемѣнныхъ и о задачѣ Якоби.» Спб. 1882). Съ-тѣхъ-поръ и понынѣ теорія ϑ-функцій многихъ перемѣнныхъ продолжаетъ разрабатываться главнымъ образомъ въ Германіи, и хотя трудами Римана, Фукса, Томэ, Прима, Крацера, Вебера, Нӧтера, Вейерштрасса и Шотки много подвинута впередъ, однако все-таки съ этой стороны подойдти къ рѣшенію Якобіевой задачи до-сихъ-поръ удалось только для непосредственно слѣдующаго за рангомъ 2 (по Вейерштрассу; Geschlecht Клебша) которымъ ограничились Göpel и Rosenhain, именно Веберу въ его «Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin, 1876, и Шотки (Schottky) въ его — «Abriss einer Theorie der Abelschen Functionen von drei Variabeln.» Leipzig. 1880, для ранга 3. Трудности такого рѣшенія Якобіевской задачи, какъ намъ теперь кажется — послѣ предстоящаго мнѣ болѣе глубокаго изученія этого способа можетъ быть взглядъ мой и измѣнится, — не принципіальнаго свойства, а такъ-сказать — количественнаго; вслѣдствіе того, что съ увеличеніемъ ранга увеличивается гораздо быстрѣе число самихъ ϑ, различающихся характеристиками, и число соотношеній между ними, увеличивается и монотонная работа разбора этихъ отношеній такъ, что остается только подождать, чтобы явился ученый, у котораго хватило бы мужества приняться за эту скучную работу и умѣнья представить результаты ея въ удобообозримой формѣ. Это было бы весьма желательно — хотя такой способъ рѣшенія задачи Якоби, какъ непрямой, намъ и кажется менѣе естественнымъ, чѣмъ переходъ отъ интеграловъ къ θ,—потому что, когда въ наукѣ будутъ существовать оба способа рѣшенія задачи Якоби—прямой и обратный, то эта фундаментальная часть теоріи Абелевыхъ интеграловъ получитъ округленность, причемъ лучше обнаружится внутренняя глубокая связь между обѣими трансцендентными, подобно тому, что мы имѣемъ теперь въ теоріи эллиптическихъ функцій.

Первое прямое рѣшеніе Якобіевской задачи принадлежитъ Вейерштрассу, но тѣ результаты, которые онъ сообщилъ безъ доказательствъ въ 47 т., а также и тотъ неоконченный мемуаръ, который помѣщенъ въ 52 т. журнала Креля, способны больше возбудить интересъ къ его теоріи, чѣмъ дать о ней удовлетворительное понятіе; поэтому его теорія только медленно распространялась болѣе чрезъ его учениковъ, и неудивительно, если появившаяся въ томъ-же журналѣ 54 т. Риманова «Theorie der Abelschen Functionen» выдвинулась болѣе впередъ, отодвинувъ Вейерштрассовскую теорію на второй планъ. Риманова теорія нашла многихъ адептовъ и вызвала много работъ, предпринятыхъ или въ видахъ примѣненія его теоріи къ частнымъ случаямъ (Примъ, Нейманъ къ гиперэллиптическимъ, Томэ къ интеграламъ, зависящимъ отъ кубич. корня) или къ разъясненію или дополненію того или другаго пункта теоріи (Рохъ, Веберъ, Нётеръ, Клейнъ). Принципъ Дирихле, на которомъ Риманъ основалъ свою теорію, былъ подвергнутъ сомнѣнію и вызвалъ рядъ изслѣдованій — (Нейманъ, Шварцъ, Веберъ). Что же касается до задачи обращенія Абелевыхъ интеграловъ, то оно въ сущности эмпирическое,—употребляя выраженіе Клейна; Риманъ беретъ Θ-функцію готовою и изъ нея строитъ функціи, которыя были бы однозначны на подлежащей многосвязной поверхности, получившей названіе отъ его имени, и слѣд. алгебраическія, развѣтвленіе которыхъ опредѣляется этою поверхностію.

Это тотъ пунктъ Римановой теоріи, который не удовлетворилъ ни Неймана, прекрасно въ своихъ «Vorlesungen über Riemmann's

Theorie der Abelsch. Integr.» Leipzig. 1865 — популяризировавшаго Риманову теорію, ни Клебша.

Клебша не удовлетворялъ, какъ видно изъ его предисловія къ его и Гордана книгѣ — «Theorie der Abelschen Integrale.» Leipzig, Teubner. 1866, также и синтетическій характеръ построенія функцій, благодаря именно которому, по его мнѣнію, Риманова теорія распространялась лишь въ тѣсномъ кругу — скажу — отборныхъ математиковъ, представляя громадныя трудности для уразумѣнія. Этого мнѣнія нельзя не раздѣлять: дѣйствительно, лишь когда читатель Римана уже знакомъ изъ другихъ источниковъ съ Абелевыми интегралами, тогда только понятны для него raison d'être тѣхъ условій, которыми опредѣляетъ функцію Риманъ на основаніи принципа Дирихле. Не менѣе поражаетъ сперва и то, что въ его «Theorie der Abelschen Integrale» появляются прежде интегралы отъ алгебраическихъ функцій, а потомъ сами алгебраическія функціи. Теперь, послѣ выхода упомянутой мною выше книги Клейна, мы имѣемъ объясненіе весьма правдоподобное сформированія Римановой теоріи; но все же и послѣ этого кто же можетъ считать такой путь естественнымъ?.. Риманова теорія Абелевыхъ интеграловъ навсегда останется блестящимъ памятникомъ его геніальности, но должна современемъ уступить господство въ наукѣ другой болѣе простой, естественной, и, кто знаетъ, можетъ быть той самой, которую она сперва какъ-бы оттѣснила на второй планъ, — Вейерштрассовской, на-встрѣчу которой, въ лицѣ Нётера, идетъ теперь и третья школа — Клебшевская (первою я считаю — Гёпель-Розенгайновскую, второю Риманову, четвертою же Вейерштрассовскую). Клебшъ и Горданъ, вслѣдствіе сказанной причины, предпочли основать теорію Абелевыхъ интеграловъ на другихъ началахъ: они, какъ извѣстно, связали теорію Абелевыхъ интеграловъ съ геометріей, толкуя, какъ уравненіе плоской кривой, уравненіе, опредѣляющее ирраціональность, входящую въ интегралъ. Такое соединеніе было плодотворно для обѣихъ наукъ: Абелевы интегралы каждаго изъ трехъ родовъ получили отчетливое опредѣленіе, теорема Абеля и предложеніе о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3. рода ясное выраженіе; послѣ чего Клебшъ и Горданъ могли основать свою теорію функцій $T_{\xi\eta}(x)$, зависящей отъ интеграловъ 3. рода и функцій U и V, зависящихъ отъ этой функціи $T_{\xi\eta}(x)$, которыя служатъ, такъ-сказать, мостомъ, по которому совершается переходъ отъ Абелевыхъ интеграловъ къ Θ-функціямъ, а чрезъ посредство Абелевой теоремы они составляютъ и уравненіе, рѣшающее задачу Якоби, — уравненіе, котораго коэффиціенты зависятъ отъ $T_{\xi\eta}(x)$ и слѣд. отъ Θ.

Глава, посвященная теоріи функціи $T^{\xi}{}_{\eta}(x)$, самая трудная въ книгѣ Клебша и Гордана, но въ то-же время и самая важная: она даетъ то, чего не доставало Риману. Тѣмъ не менѣе, по причинѣ сложности теоріи этихъ функцій, какъ Бріо въ своей «Théorie de fonctions Abeliennes.» Paris. 1879, такъ и Линдеманъ въ своей обработкѣ лекцій Клебша по геометріи предпочли слѣдовать, съ этого пункта начиная, Риману.

Я сказалъ, что установленная Клебшемъ и Гордановъ связь Абелевыхъ интеграловъ съ геометріей была полезна для обѣихъ наукъ: геометріи она дала понятіе о родѣ (дефектъ—по Cayley) плоскихъ кривыхъ, рядъ предложеній касательно пересѣченія кривыхъ между собою (Schnittpunkt-Sätze), понятіе о сопряженныхъ кривыхъ (adjungirte Curven), теорію преобразованія кривыхъ. Изъ числа относящихся сюда работъ я отмѣчу рядъ работъ Нётера, начатыхъ совмѣстно съ Брилемъ и продолжаемыхъ теперь имъ однимъ; помѣщены онѣ въ Mathematische Annalen и въ «Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen». Въ этихъ работахъ онъ стремится къ тому, чтобы дать предложеніямъ, открытымъ съ помощію теоріи Абелевыхъ интеграловъ, но алгебраическаго характера, и доказательства алгебраическія — стремленіе, заслуживающее полной симпатіи, — и приходитъ къ весьма замѣчательному результату (въ 23 т. Mathem. An.), именно—къ раціональному опредѣленію, т. е. при помощи раціональныхъ дѣйствій, такихъ фундаментальныхъ вещей для теоріи Абелевыхъ интеграловъ, какъ рангъ ихъ* и сопряженныя функціи φ (геометрически adjungirte Curven n-3 порядка, если n степень уравненія основной кривой), которыя фигурируютъ въ числителяхъ дифференціаловъ Абелевыхъ интеграловъ перваго рода. Раньше найденъ былъ имъ другой замѣчательный результатъ въ статьѣ «Invariante Darstellung der algebraischen Functionen.» Math. An. Bd. 17, на который указываетъ самое заглавіе: въ этой статьѣ онъ показываетъ — какимъ образомъ можно разныя алгебраическія функціи выразить чрезъ функціи φ, частное которыхъ не измѣняется, какъ показали еще Клебшъ и Горданъ, отъ раціональныхъ преобразованій, т. е. при раціональномъ преобразованіи уравненія, опредѣляющаго ирраціональность, входящую въ Абелевъ интегралъ, переходитъ въ частное такихъ-же функцій, примѣнительно къ преобразованному уравненію. Яснѣе всего важное значеніе этихъ функцій φ для теоріи Абелевыхъ интеграловъ отмѣтилъ Веберъ въ своей Theorie der Abelschen Functionen vom Geschlechte 3. Berlin. 1876. Впрочемъ, это видно уже и изъ работы Римана о томъ-же предметѣ, появившейся въ первый разъ уже послѣ его смерти въ собраніи его сочиненій, изданныхъ подъ редакціей того-же Вебера. Возвращаясь къ Нётеру, должны замѣтить, что онъ принадлежитъ къ той школѣ математиковъ, о которой я упоминалъ выше, которые не отдѣляютъ алгебры отъ геометріи; вслѣдствіе этого у него не только форма предложеній геометрическая, но часто и доказательства; это дѣлаетъ изученіе работъ его затруднительнымъ для тѣхъ, кто не слѣ-

---

* Другой способъ раціональнаго опредѣленія ранга предложенъ Raffy въ томъ-же томѣ Mathem. An.

дилъ за нѣмецкою литературою съ самаго того момента, когда этими вопросами начали заниматься въ Германіи: приходится изучать массу работъ, неимѣющихъ прямого отношенія къ занимающему вопросу, для того, чтобы понять то подъ-часъ немногое, что собственно интересуетъ. По этой причинѣ желательно было бы тѣхъ-же результатовъ добиться чисто алгебраическими средствами: это навѣрно возможно, потому что въ основѣ всѣхъ этихъ предложеній лежитъ опредѣленіе кривыхъ уравненіями; играетъ роль число коэффиціентовъ въ этомъ уравненіи. Касательно работы, помѣщенной въ 23 т. Annal. о раціональномъ опредѣленіи рода кривыхъ и сопряженныхъ кривыхъ, можно замѣтить, что желательно было бы при опредѣленіи рода кривыхъ и сопряженныхъ кривыхъ обходиться безъ раціональнаго преобразованія данной кривой въ другую, которое употребляетъ Нётеръ въ случаѣ, когда въ кратной точкѣ нѣкоторыя изъ вѣтвей кривой касаются одна другой; это вноситъ усложненіе въ рѣшеніе, заставляя опредѣленіе особенныхъ точекъ зависѣть отъ преобразованія, въ которомъ эти самыя точки принимаются за фундаментальныя. Это, какъ намъ кажется, тоже возможно.—Въ трехъ послѣднихъ своихъ замѣткахъ, помѣщенныхъ въ отчетахъ эрлангенскаго физико-медицинскаго общества за 1883 и 1884 годы, онъ переходитъ уже прямо къ самимъ Абелевымъ интеграламъ и показываетъ въ первой — какимъ образомъ, оставаясь, такъ-сказать, на почвѣ Клебша и Гордана, выполняется приведеніе дифференціальныхъ выраженій къ нормальной формѣ, въ послѣднихъ двухъ — какимъ образомъ, опять таки не покидая той-же почвы, можно получить то дифференціальное тождество, которое по интегрированіи даетъ и теорему о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралѣ третьяго рода, интегралъ второго рода обращающійся въ какой-либо точкѣ въ ∞^1 приводитъ къ алгебраической функціи, обращающейся въ ∞^1 въ той-же точкѣ $+$ линейная функція отъ интеграловъ второго рода, обращающихся въ ∞^1 въ опредѣленныхъ, разъ навсегда выбранныхъ, точкахъ; чрезъ посредство Абелевой теоремы наконецъ приводитъ къ функціямъ $Al\,(u_1\, u_2 \ldots u_\rho)$ Вейерштрасса, и упрощаетъ теорію самихъ Клебшевскихъ функцій, о которыхъ упоминалось выше. То обстоятельсто, что Нётеръ такъ просто и естественно, безъ всякаго tour de force, оставаясь вѣрнымъ аналитико-геометрическимъ пріемамъ Клебша и Гордана, приходитъ къ результатамъ Вейерштрасса, подготовляющимъ обращеніе Абелевыхъ интеграловъ, фактъ въ высшей степени знаменательный, подтверждающій мое мнѣніе, что Вейерштрассовскій путь отъ Абелевыхъ интеграловъ къ Θ-функціи и есть настоящій, что его теорія окончательно сдѣлается господствующею.

Говоря это, я имѣю въ-виду самую теорію, а не его способы доказательствъ. Мнѣ не разъ случалось замѣчать, что, говоря про теорію Абелевыхъ интеграловъ Вейерштрасса, въ своемъ представленіи не отдѣляютъ теоріи отъ методы, — отчего сущность теоріи представляется смутною, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности въ существенныхъ пунктахъ своихъ его теорія, какъ мы видимъ теперь послѣ работъ Нётера, о которыхъ только-что была рѣчь, можетъ быть выведена и другими способами. Въ то время какъ Коши и особенно Риманъ опредѣляли функцію признаками разрыва и непрерывности, а не возможностью быть представленной тѣмъ или другимъ аналитическимъ выраженіемъ, выдвинувъ, напротивъ, зависимость послѣдняго отъ перваго, — Вейерштрассъ аналитическую функцію опредѣляетъ какъ такую, которая способна разлагаться въ рядъ по степенямъ независимой перемѣнной, сходящійся въ извѣстной области ея значенія, и это опредѣленіе, равно какъ вытекающій изъ него пріемъ характеризовать функцію въ смежности различныхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ формою ея разложенія въ рядъ, и на этомъ основанные способы доказательствъ различныхъ предложеній проходятъ чрезъ весь циклъ читаемыхъ проф. Вейерштрассомъ курсовъ, а именно: введеніе въ общую теорію аналитическихъ функцій, теорія эллиптическихъ функцій, теорія гиперэллиптическихъ интеграловъ, Абелевыхъ интеграловъ и варіаціонное исчисленіе. Такъ, въ курсахъ гиперэллиптическихъ и Абелевыхъ интеграловъ онъ постоянно, вмѣсто перемѣнныхъ x и y, связанныхъ алгебраическимъ уравненіемъ, опредѣляющимъ ирраціональность интеграловъ, употребляетъ безконечные ряды, которыми выражается эта пара перемѣнныхъ чрезъ третью вспомогательную перемѣнную t, ряды различные, разумѣется, для различныхъ областей. Теорія Абелевыхъ интеграловъ представляетъ обобщеніе его теоріи гиперэллиптическихъ, составляющихъ лишь частный случай первыхъ, къ которому относятся первыя работы Вейерштрасса (помѣщенныя: первая, подъ заглавіемъ — «Beitrag zur Theorie der Abelschen Integrale» въ Braunsberger-Program 1843; другія двѣ — «Zur Theorie der Abelschen Functionen» въ 47 т. журнала Крелля, и «Theorie der Abelschen Functionen» въ 52 т.); поэтому достаточно, такъ-какъ и безъ того мой отчетъ вопреки желанію вышелъ длиннымъ, ограничиться указаніемъ существенныхъ пунктовъ одного изъ нихъ, и я останавливаю свой выборъ на теоріи Абелевыхъ интеграловъ, какъ болѣе общей и въ которой впервые встрѣчается понятіе ранга (Rang). Понятіе это Вейерштрассъ опредѣляетъ такою теоремою: всякому неприводимому алгебраическому уравненію $f(x, y) = 0$ принадлежитъ совершенно опредѣленное цѣлое число ϱ, положительное или равное нулю, такого свойства, что всегда возможно составить раціональную функцію $F(xy; x'y')$ четырехъ величинъ $x, y; x', y'$; которая, разсматриваемая какъ функція (xy), обращается въ ∞^1 въ $(x'y')$ и кромѣ того еще только въ ϱ другихъ, различныхъ между собою и неизмѣнныхъ мѣстахъ $a_1 b_1, a_2 b_2 \ldots a_\varrho b_\varrho$, тогда какъ такой функціи, которая обращалась бы въ ∞^1 только въ этихъ послѣднихъ мѣстахъ, не существуетъ. Отсюда, какъ слѣдствіе, вытекаетъ неизмѣнность этого числа для всѣхъ алгебраическихъ уравненій, составляющихъ классъ, т. е. получаемыхъ одно изъ другого чрезъ раціональное преобразованіе. Функція, упомянутая въ этой теоремѣ, опредѣленная дополнительными условіями обращаться въ нуль въ $(x_0\, y_0)$ и имѣть при $(x-x')^{-1}$ въ разложеніи по степенямъ $(x-x')$ коэффиціентомъ единицу, называется имъ «главною» по той роли, которую она играетъ въ его теоріи. Это интеграндъ 3. рода; изъ этой функціи при помощи разложенія въ ряды по степенямъ вспомогательной перемѣнной t онъ получаетъ интегранды 1. и 2. рода и опредѣляетъ ихъ свойства. Изъ этой же функціи, дифференцируя ее по x и вычитая результатъ получаемый отсюда чрезъ перемѣну ролей xy и $x'y'$, получаетъ дифференціальное тождество, черезъ интегрированіе котораго по x, или x', или по обоимъ, получается рядъ важныхъ результатовъ: отсюда онъ получаетъ прежде всего періодичность интеграловъ и соотношенія между періодами интеграловъ перваго и второго рода; выраженіе интеграла второго рода, обращающагося въ ∞^1 въ $x'y'$, чрезъ алгебраическія функціи и интегралы, обращающіеся въ ∞^1 въ неизмѣнныхъ точкахъ $a_1\, b_1 \ldots a_\rho\, b_\rho$; предложеніе о перемѣнѣ параметра съ аргументомъ въ интегралахъ 3. рода, выраженіе интеграловъ всѣхъ трехъ родовъ чрезъ такъ-называемыя имъ Primfunctionen (по аналогіи съ первыми числами въ ариѳметикѣ), чрезъ которыя могутъ быть выражены также и всѣ раціональныя функціи отъ x и y, связанныхъ уравненіемъ, опредѣляющимъ ирраціональность, входящую въ разсматриваемые Абелевы интегралы,—откуда сейчасъ слѣдуетъ Абелева теорема. Эти Primfunctionen особенныя трансцендентныя двухъ родовъ: одни никогда не обращаются въ нуль; другія обращаются только въ одной точкѣ въ нуль перваго порядка и въ другой въ ∞^1; но кромѣ того какъ тѣ, такъ и другія имѣютъ «существенно особенныя точки» въ вышеупомянутыхъ мѣстахъ $a_1 b_1 \ldots a_\rho b_\rho$. Интегралы третьяго рода по сомкнутой для первыхъ и изъ одной точки въ другую для послѣднихъ, разсматриваемые какъ функціи параметра, суть логариѳмы этихъ Primfunctionen. Изъ нихъ же при помощи Абелевой теоремы Вейерштрассъ составляетъ функціи, частныя производныя которыхъ по перемѣннымъ независимымъ Якобіевой задачи выражаются чрезъ нѣкоторые интегралы второго рода. Отсюда выводится функціональное уравненіе обобщенной Θ-функціи, и такимъ образомъ съ этого пункта начинается уже теорія Θ-функцій. Въ силу связи примфункцій съ одной стороны съ интегралами, съ другой — съ Θ, получаются легко выраженія чрезъ послѣднія какъ интеграловъ 2. и 3. рода, такъ и раціональныхъ симметрическихъ функцій отъ паръ x_α, y_α — верхнихъ предѣловъ интеграловъ перваго рода Якобіевой задачи, т. е. такъ-называемыхъ Абелевыхъ функцій.

Было у меня сперва намѣреніе слушать также лекціи Майера по интегрированію уравненій съ частными производными, но занятія мои въ библіотекѣ семинара поглотили все время, такъ что я отъ этого намѣренія отказался; впослѣдствіи же узналъ, что самый курсъ не состоялся по недостатку слушателей.

На зимній семестръ объявленные въ Лейпцигѣ курсы мнѣ не были нужны. Чтенія по гиперэллиптическимъ и Абелевымъ интеграламъ на настоящій зимній семестръ объявлены слѣдующія:

Jena. Pr. *Frege*. Abelsche Integrale. 3 Vorl.

Königsberg. Pr. *Lindemann*. Theorie der Abelschen Functionen. 4 Vorles.

Rostock. Pr. *D. Krause*. Einleitung in die Theorie d. hyperelliptischen Functionen. 2 Vorl.

Strasburg. Pr. *Cristoffel*. Theorie d. Abelschen Functionen. 4 Vorlesungen.

Наконецъ, какъ я слышалъ отъ приватъ-доцента берлинскаго университета д-ра Рунге, только-что вернувшагося изъ Стокгольма, съ февраля мѣсяца начнетъ читать объ Абелевыхъ интегралахъ (по Вейерштрассу, конечно) приватъ-доцентъ тамошняго университета д-ръ С. Ковалевская, теперь съ успѣхомъ тамъ читающая дифференціальное и интегральное исчисленіе.

Программъ здѣсь не объявляютъ, а потому о томъ — каковъ будетъ курсъ, судить можно только по прежнимъ работамъ объявившихъ чтенія; такія данныя имѣются у меня только относительно пр. Линдемана, принадлежащаго къ Клебшевской школѣ; должно полагать, что его курсъ будетъ въ родѣ того, что представляетъ отдѣлъ объ Абелевыхъ интегралахъ въ изданной имъ обработкѣ лекцій Клебша.

Такъ-какъ меня въ настоящее время занимаетъ болѣе всего Вейерштрассовская теорія, то я предпочелъ по пріѣздѣ (31-го сент. н. стиля) въ Берлинъ остаться здѣсь, чтобы въ случаѣ надобности обратиться за разъясненіями и указаніями къ самому Вейерштрассу или его ученикамъ, которыхъ здѣсь много; кромѣ того здѣсь скорѣе можно получить и разныя диссертаціи учениковъ его, въ которыхъ разрабатывались разные частные вопросы изъ теоріи Абелевыхъ интеграловъ, которымъ не было мѣста въ его лекціяхъ. Что-же касается лекцій, то я намѣревался слушать лекціи Кронекера по высшей алгебрѣ, Вейерштрасса по введенію въ общую теорію аналитическихъ функцій и Фукса (перешелъ изъ Гейдельберга; избранъ также въ академію) объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій. Однако эти курсы пока очень элементарны; теорію же свою дифференціальныхъ уравненій пр. Фуксъ будетъ излагать въ лѣтній семестръ. Занятія въ семинарѣ еще не начались; заниматься будутъ пр. Вейерштрассъ, Кронекеръ и Фуксъ. Поэтому занятія мои здѣсь будутъ состоять главнымъ образомъ въ разработкѣ и уясненіи разныхъ частностей теоріи Абелевыхъ интеграловъ.

Берлинъ.

$\frac{6}{18}$ ноября 1884 г.