СООБЩЕНІЯ

И

ПРОТОКОЛЫ ЗАСѢДАНІЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА

ПРИ

Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ.

1884 года.

I.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.
1884.

Напечатано по опредѣленію совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *Г. Цѣхановецкій.*

СОДЕРЖАНІЕ.

Поправка. — Въ предыдущей тетради («Сообщенія» 1883 г.), стр. 129, строка 7 снизу

напечатано:

$$u = c_1 e^{\varrho_1 x} + c_2 e^{\varrho_2 x} + c_3 e^{\varrho_3 x},$$

должно быть:

$$u = c_1 x^{\varrho_1} + c_2 x^{\varrho_2} + c_3 x^{\varrho_3}$$

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ

математическаго общества, состоящаго при Императорскомъ Харьковскомъ университетѣ,

20 января 1884 года.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Ѳ. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, М. С. Косенко, С. А. Раевскій, И. К. Шейдтъ, А. В. Маевскій, А. А. Клюшниковъ, М. А. Тихомандрицкій и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К. А. Андреевъ.

1. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о вновь полученныхъ книгахъ, а именно:

a) Кіевскія университетскія извѣстія, №№ 11 и 12.

b) Mathesis, № 12, 1883. Т. III.

c) Journal de mathématiques élémentaires. 2 série, 7 année (1883). № 12.

d) Journal de mathématiques spéciales. 2 série, 7 année (1883). № 12.

e) Histoire de l'hypothèse des ondes cosmiques composée pour l'explication des formes cométaires. Par *Th. Brédichin*. 1883. 23 Oct.

f) Supplément à l'histoire de l'hypothèse des ondes cosmiques composée pour l'explication des formes cométaires. *Th. Brédichin.* 1883. 17 Nov.

g) Sur quelques anomalies apparentes dans la structure des queues cométaires, par *Th. Brédichin.* 1883. 13 Décembre.

2. О составленіи А. А. Клюшниковымъ каталога библіотеки общества. Положено выразить благодарность А. А. Клюшникову за этотъ трудъ.

3. *В. П. Алексѣевскій* прочелъ свою замѣтку объ уравненіи вида: $y^{(n)} + \frac{\alpha}{x} y^{(n-1)} = y$.

4. *П. С. Флоровъ* — объ уравненіи вида:

$$x^2u'' + (2x+1)u' + nu = 0.$$

5. *К. А. Андреевъ* доложилъ собранію статью А. А. Маркова: «Объ одномъ неравенствѣ Чебышева».

6. Г. предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о присылкѣ г. Яковомъ Постоевымъ изъ Курска рѣшенія задачи, предложенной г. Аршауловымъ.

7. *М. С. Косенко* указалъ пріемъ рѣшенія той-же задачи.

8. *П. С. Флоровъ* сообщилъ свое рѣшеніе той-же задачи.

9. *М. Ѳ. Ковальскій* изложилъ свой пріемъ рѣшенія той-же задачи.

Протоколъ засѣданія 24-го февраля.

Присутствовали: К. А. Андреевъ, М. Θ. Ковальскій, А. П. Грузинцевъ, А. А. Клюшниковъ Г. В. Левицкій, Н. Д. Пильчиковъ, М. С. Косенко, М. А. Тихомандрицкій и гг. студенты физико-математическаго факультета.

Предсѣдательствовалъ К А. Андреевъ.

1. Г. Предсѣдательствовавшій доложилъ собранію о полученіи обществомъ слѣдующихъ изданій:

1) Математическій сборникъ, издаваемый московскимъ математическимъ обществомъ, Т. XI. выпускъ 2.

2) Journal de mathématiques élémentaires, № 1, 1884. 2 s.

3) Journal de mathématiques spéciales, № 1. 1884. 2 s.

4) Bulletin de la société mathématiques de France. T. XI. № 5 et dernier.

5) Кіевскія университетскія извѣстія. № 1, 1884.

6) *Brédichin*, Sur les anomalies apparentes dans la structure de la grande comète de 1744. 19 Janvier. 1884.

7) Mathesis. T. IV. №№ 1 и 2. 1884.

2. *Онъ-же* сообщилъ о полученіи рѣшенія г. студентомъ Гусаковскимъ задачи г. Аршаулова.

3. *А. П. Грузинцевъ* сдѣлалъ сообщеніе подъ заглавіемъ: «Опытъ изученія стаціонарнаго состоянія упругой изотропной среды».

4. Г. студентъ *И. А. Гусаковскій* изложилъ свое рѣшеніе задачи г. Аршаулова.

5. *К. А. Андреевъ* сообщилъ замѣтку, относящуюся къ вопросу о многоугольникахъ Понселе.

6. *Онъ-же* предложилъ отъ имени г. Аршаулова слѣдующую задачу:

«Данъ многоугольникъ какого угодно числа сторонъ. Соединяя средины послѣдовательныхъ сторонъ, получимъ новый многоугольникъ. Тѣмъ-же построеніемъ переходимъ отъ найденнаго опять къ новому и т. д. Требуется найдти предѣлъ, къ которому приводитъ это построеніе при безконечномъ его повтореніи».

ОБЪ УРАВНЕНІЯХЪ РИКАТТИ.

П. С. Флорова.

§ I. Дифференціальное уравненіе перваго порядка

$$\frac{dy}{dx}+ry+py^2+q=0, \qquad (1)$$

въ которомъ количества r, p и q означаютъ функціи одного только x, принадлежитъ къ разряду не проинтегрированныхъ уравненій. Поэтому умѣстна задача объ отысканіи такихъ соотношеній между количествами r, p и q, при существованіи которыхъ вопросъ объ интегрированіи упомянутаго уравненія можно было бы свести къ квадратурамъ. Рѣшеніе этой задачи мы ставимъ въ зависимость отъ слѣдующихъ свойствъ уравненія (1): отъ способности его сохранять свой видъ послѣ подстановки

$$y=u+v\frac{1}{y_1}$$

гдѣ u и v функціи x, а y_1 новая зависимая; и отъ способности его сполна интегрироваться по одному изъ частныхъ интеграловъ (теорема Эйлера). Эти свойства мы полагаемъ въ основаніе нашего изслѣдованія потому, что ими устанавливается одинъ изъ раціональныхъ методовъ интегрированія уравненія (1):

во многихъ случаяхъ по первому изъ нихъ оказывается возможнымъ найдти частный интегралъ этого уравненія; по второму — докончить интеграцію. Въ смыслѣ отысканія признаковъ интегрируемости разсматриваемаго нами уравненія наиболѣе незамѣнимыя услуги оказываетъ первое его свойство: оно даетъ возможность, исходя изъ этого уравненія, строить системы новыхъ уравненій, интегралы которыхъ опредѣленнымъ образомъ (помощью нѣкоторыхъ непрерывныхъ дробей) связаны съ интеграломъ исходнаго и которые по виду тождественны съ нимъ; оно даетъ, слѣдовательно, возможность — таково заключеніе a priori — по одному изъ признаковъ интегрируемости уравненія (1), опредѣленному заранѣе, открывать цѣлыя системы ихъ.

Такимъ образомъ тому изслѣдованію уравненія (1), которое мы намѣрены предпринять, должны предшествовать двѣ операціи: непосредственное опредѣленіе одного изъ признаковъ интегрируемости этого уравненія и построеніе системы уравненій по виду подобныхъ данному. Мы произведемъ сначала вторую операцію. Предварительно замѣтимъ, что, нисколько не уменьшая общности уравненія (1), его можно разсматривать подъ видомъ

$$\frac{dz}{dx}+Pz^2=Q, \tag{2}$$

гдѣ P и Q по прежнему функціи одного x. Слѣдуетъ это изъ того, что, положивъ

$$y=e^{-\int r dx}.z,$$

мы найдемъ для опредѣленія z уравненіе (2), если въ немъ P и Q опредѣлены условіями

$$\left.\begin{aligned} P&=pe^{-\int r dx} \\ Q&=-qe^{\int r dx} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Обращаясь теперь къ уравненію (2), полагаемъ

$$z = u + v \cdot \frac{1}{z_1}.$$

Чтобы результатъ этой подстановки

$$\frac{dz_1}{dx} - \frac{1}{v}(v' + 2Puv)z_1 - \frac{1}{v}(u' + Pu^2 - Q)z_1{}^2 = Pv$$

получилъ опредѣленный характеръ, нужно функціямъ u и v сообщить частныя значенія. Мы допустимъ

$$u' + Pu^2 = 0\ ,\ v' + 2Puv = 0,$$

а значитъ допустимъ

$$u = (\beta + \int Pdx)^{-1}\ ,\ v = \alpha(\beta + \int Pdx)^{-2},$$

гдѣ α и β постоянныя величины. Для такихъ u и v предыдущее уравненіе даетъ

$$\frac{dz_1}{dx} + P_1 z_1{}^2 = Q_1$$

причемъ

$$P_1 = \frac{Q}{\alpha}(\beta + \int Pdx)^2$$

$$Q_1 = \alpha P(\beta + \int Pdx)^{-2}.$$

Такимъ же образомъ полагая

$$z_1 = (\beta_1 + \int P_1 dx)^{-1} + \alpha_1(\beta_1 + \int P_1 dx)^{-2} \cdot \frac{1}{z_2},$$

мы отъ уравненія для z_1 перейдемъ къ уравненію

$$\frac{dz_2}{dx} + P_2 z_2{}^2 = Q_2$$

въ которомъ

$$P_2 = \frac{Q_1}{\alpha_1}(\beta_1 + \int P_1 dx)^2$$

$$Q_2 = \alpha_1 P_1 (\beta_1 + \int P_1 dx)^{-2}.$$

Теперь понятно, что послѣ k преобразованій будемъ имѣть

$$\frac{dz_k}{dx} + P_k z_k^2 = Q_k$$

причемъ

$$\left.\begin{aligned} P_k &= \frac{Q_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\Big(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx\Big)^2 \\ Q_k &= \alpha_{k-1} P_{k-1}\Big(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx\Big)^{-2}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

И такъ система искомыхъ уравненій построена. Понятно, что возможны иныя системы; для нашей цѣли достаточно разсмотрѣть только эту.

Теперь, согласно предначертанному нами пути, нужно еще найдти одинъ изъ признаковъ интегрируемости занимающаго насъ уравненія. Чтобы легче оріентироваться въ обозначеніяхъ, мы возьмемъ для этой цѣли уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Hy^2 = G,$$

въ которомъ подъ H и G будемъ разумѣть функціи одного x. Легко подмѣтить, что уравненіе это можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{dv}{dx} + v^2 = \frac{1}{4H^2}(4GH^3 + 3H'^2 - 2HH'').$$

Дѣйствительно, для этого достаточно сдѣлать подстановку

$$y = \frac{v}{H} + \frac{H'}{2H^2}.$$

Съ другой стороны, подстановка

$$\frac{1}{y} = \frac{u}{G} + \frac{G'}{2G^2}$$

приводитъ то же уравненіе къ такому

$$\frac{du}{dx} + u^2 = \frac{1}{4G^2}(4HG^3 + 3G'^2 - 2GG'').$$

Въ томъ случаѣ, когда $u = v$, вопросъ объ отысканіи y въ функціи x можно считать поконченнымъ, ибо онъ сведется на разрѣшеніе квадратнаго уравненія

$$y^2 - \frac{1}{2H}\left(\frac{H'}{H} - \frac{G'}{G}\right)y = \frac{G}{H}.$$

Но высказанное предположеніе имѣетъ мѣсто лишь при существованіи такого соотношенія между H и G:

$$2HG(H''G - G''H) = 3(H'^2G^2 - G'^2H^2).$$

Такъ какъ

$$\begin{cases} H''G - G''H = (H'G - G'H)' \\ H'^2G^2 - G'^2H^2 = (HG)'(H'G - G'H), \end{cases}$$

то предыдущее соотношеніе даетъ

$$\frac{(H'G - G'H)'}{H'G - G'H} = \frac{3}{2}\,\frac{(HG)'}{HG}$$

откуда

$$\left(\frac{H}{G}\right)' = 2h \, . \, H\left(\frac{H}{G}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Интегрируя это и разрѣшая результатъ относительно G, находимъ

$$G = H(g + h\int H dx)^{-2},$$

гдѣ g и h постоянныя величины. Изъ сказаннаго обнаружилось, что уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Hy^2 = H(g + h\int H dx)^{-2}$$

всегда интегрируется и что частный его интегралъ выражается формулой:

$$y = \frac{h \pm \sqrt{h^2+4}}{2}(g + h\int H dx)^{-1}.$$

Полный интегралъ того-же уравненія на основаніи теоремы Эйлера выразится, слѣдовательно, отношеніемъ

$$y = \frac{h \pm \sqrt{h^2+4}}{2}(g + h\int H dx)^{-1} +$$

$$+ \frac{1}{H} l'g \left\{ c + (g + h\int H dx)^{\frac{\mp\sqrt{h^2+4}}{h}} \right\}$$

гдѣ $l'g = \dfrac{d}{dx} lg$, а c постоянная произвольная.

Теперь нами вполнѣ подготовлена почва для отысканія признаковъ интегрируемости уравненія (2). Переходимъ къ самому отысканію.

§ II. Предположимъ, что коэффиціенты k-го уравненія данной выше системы удовлетворяютъ найденному признаку интегрируемости и посмотримъ, какая въ этомъ случаѣ существуетъ зависимость между P и Q, коэффиціентами исходнаго уравненія. Согласно съ предположеніемъ имѣемъ

$$Q_k = P_k(g + h\int P_k dx)^{-2} \tag{5}$$

что по замѣнѣ Q_k его значеніемъ изъ (4) даетъ:

$$P_k(g + h\int P_k dx)^{-2} = \alpha_{k-1} P_{k-1}(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^{-2}.$$

Предполагая, что h отлично отъ нуля, мы получаемъ право на интегрированіе обѣихъ частей этого равенства. Опуская постоянную произвольную, вводимую этимъ интегрированіемъ, и затѣмъ дифференцируя результатъ интеграціи, найдемъ

$$P_k = \alpha_{k-1} P_{k-1}.$$

Наконецъ внося сюда вмѣсто P_k его значеніе изъ (4) имѣемъ:

$$Q_{k-1} = \alpha^2_{k-1} P_{k-1}(\beta_{k-1} + \int P_{k-1} dx)^{-2}.$$

Отсюда мы видимъ, что если для k-го, то и для всѣхъ другихъ уравненій системы подмѣченный нами признакъ интегрируемости имѣетъ мѣсто. Это значитъ, что, разрѣшая уравненіе (5), относительно Q мы должны получить

$$Q = P(a + b\int P dx)^{-2}.$$

Результатъ этотъ не представляетъ однако ничего новаго. Поэтому дальнѣйшій анализъ мы поведемъ въ томъ предположеніи, при которомъ упомянутый результатъ не имѣетъ мѣста, т. е. въ предположеніи $h = 0$. Равенство (5) въ этомъ случаѣ обратится въ такое

$$Q_k = cP_k,$$

гдѣ c нѣкоторая постоянная; а по замѣнѣ P_k и Q_k ихъ значеніями въ такое

$$Q_{k-1} = cP_{k-1}(\beta_{k-1} + \int P_{k-1}\,dx)^{-4}.$$

Здѣсь для избѣжанія новыхъ символовъ мы замѣнили $\frac{\alpha^2{}_{k-1}}{c}$ черезъ c. Съ тою же цѣлью подобныя замѣны будемъ дѣлать и впослѣдствіи. Если въ предыдущее равенство на мѣсто Q_{k-1} поставимъ его выраженіе черезъ P_{k-2} и проинтегрируемъ слѣдствіе, то, опуская постоянную произвольную, получимъ

$$\beta_{k-2} + \int P_{k-2}\,dx = c(\beta_{k-1} + \int P_{k-1}\,dx)^3.$$

Разрѣшая это относительно $\int P_{k-1}\,dx$ и дифференцируя результатъ находимъ

$$P_{k-1} = cP_{k-2}(\beta_{k-2} + \int P_{k-2}dx)^{-\frac{2}{3}}.$$

Наконецъ замѣна P_{k-1} его значеніемъ даетъ

$$Q_{k-2} = cP_{k-2}(\beta_{k-2} + \int P_{k-2}\,dx)^{-\frac{8}{3}}.$$

Помощью тѣхъ же операцій, какія были произведены нами при переходѣ отъ равенства для Q_{k-1} къ равенству для Q_{k-2} мы отъ этого послѣдняго перейдемъ къ такому

$$Q_{k-3} = cP_{k-3}(\beta_{k-3} + \int P_{k-3}\,dx)^{-\frac{12}{5}}.$$

Сказаннаго вполнѣ достаточно для того, чтобы сдѣлать догадку, не будетъ ли соотношеніе

$$Q_{k-i} = cP_{k-i}(\beta_{k-i} + \int P_{k-i}dx)^{\frac{-4i}{2i-1}}$$

выражать ту именно зависимость между Q_{k-i} и P_{k-i}, которая должна явиться результатомъ допущенія $Q_k = cP_k$? Чтобы оправдать догадку мы должны доказать, что предположенное соотношеніе имѣетъ мѣсто для числа $i+1$, разъ оно имѣетъ его для числа i. Сдѣлать это легко. Замѣняя Q_{k-i} его выраженіемъ черезъ P_{k-i-1} и интегрируя результатъ по опущеніи постоянной произвольной, найдемъ

$$\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1}dx = c(\beta_{k-i} + \int P_{k-i}dx)^{\frac{2i+1}{2i-1}}.$$

Разрѣшая это относительно P_{k-i} получаемъ

$$P_{k-i} = cP_{k-i-1}(\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1}dx)^{\frac{-2}{2i+1}}.$$

Наконецъ внося сюда вмѣсто P_{k-i} его значеніе изъ (4) будемъ имѣть

$$Q_{k-i-1} = cP_{k-i-1}(\beta_{k-i-1} + \int P_{k-i-1}dx)^{\frac{-4(i+1)}{2(i+1)-1}},$$

Этотъ результатъ и доказываетъ, что равенство для Q_{k-i} имѣетъ мѣсто при всякомъ i. Полагая въ немъ $i=k$ и замѣчая, что $P_0 = P$ а $Q_0 = Q$, мы окончательно рѣшаемъ нашу задачу. Именно мы получаемъ, что если

$$Q = P(a + b\int Pdx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

то уравненіе (2) послѣ k преобразованій приведется къ интегрируемому въ квадратурахъ. Замѣтивъ, что уравненіе (2) можно представить въ видѣ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z}\right)+Q\left(\frac{1}{z}\right)^2=P$$

заключаемъ, что оно интегрируется посредствомъ неопредѣленныхъ квадратуръ еще въ томъ случаѣ, когда

$$P=Q(a_1+b_1\int Q dx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k цѣлое положительное число. Разрѣшеніе этого равенства относительно $\int Q dx$ и дифференцированіе результата даетъ

$$\left(\frac{Q}{P}\right)' \cdot \left(\frac{Q}{P}\right)^{-\frac{6k+1}{4k}}=bP.$$

Отсюда находимъ вторую группу признаковъ интегрируемости занимающаго насъ уравненія

$$Q=P(a+b\int P dx)^{\frac{-4k}{2k+1}}.$$

Легко видѣть, что эта вторая группа можетъ быть получена изъ первой замѣною k на $-k$. Поэтому классъ уравненій интегрирующихся по способу послѣдовательныхъ преобразованій, который можно назвать способомъ непрерывныхъ дробей, напишется такъ

$$\frac{dz}{dx}+Pz^2=P(a+b\int P dx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k положительное или отрицательное цѣлое число. Если угодно можно даже полагать $k=\pm\infty$, потому что это положеніе даетъ намъ уравненіе

$$\frac{dz}{dx} + Pz^2 = P(a + b\int Pdx)^{-2}$$

интегрируемое въ квадратурахъ.

И такъ мы пришли къ тому самому обобщенію уравненія Рикатти, которое было получено А. В. Лѣтниковымъ[1]. Нашъ анализъ, основанный на опущеніи постоянныхъ произвольныхъ, при разрѣшеніи относительно Q уравненія (5) указываетъ на возможность болѣе полнаго обобщенія. Къ сожалѣнію, трудности, лежащія на этомъ пути въ формѣ квадратуръ, и сопряженная съ ними сложность вычисленій убиваютъ въ самомъ зародышѣ попытку составить хотя приблизительное понятіе объ общемъ характерѣ тѣхъ уравненій, которыя могутъ быть проинтегрированы по способу непрерывныхъ дробей.

§ III. Приступая къ изслѣдованію уравненія (2) мы, разумѣется, не могли предвидѣть того результата, который долженъ былъ получиться. Теперь же, когда онъ извѣстенъ, мы можемъ констатировать случаи интегрируемости уравненія

$$\frac{dz}{dx} + Pz^2 = P(a + b\int Pdx)^m$$

другимъ, болѣе простымъ путемъ.

Прежде всего подстановка

$$z = \alpha(a + b\int Pdx)^\beta,$$

гдѣ α и β постоянныя подлежащія опредѣленію, откроетъ намъ случай $m = -2$. Для опредѣленія другихъ случаевъ полагаемъ

$$z = b(a + b\int Pdx)^{-1} + (a + b\int Pdx)^{-2}. \frac{1}{z_1}$$

[1] Математическій сборникъ. Т. I, стр. 323—350.

тогда предыдущее уравненіе обратится въ такое

$$\frac{dz_1}{dx} + P_1 z_1^{\,2} = Q_1$$

гдѣ

$$P_1 = P(a + b\int P dx)^{m+2}$$

$$Q_1 = P(a + b\int P dx)^{-2}.$$

Выразимъ отсюда Q_1 посредствомъ P_1. Для этого предварительно пишемъ

$$a + b\int P dx = \{\alpha + (m+3)\int P_1 dx\}^{\frac{1}{m+3}}$$

$$P = \frac{P_1}{b}\{\alpha + (m+3)\int P_1 dx\}^{-\frac{m+2}{m+3}}$$

имѣя это легко уже получить

$$Q_1 = P_1(a_1 + b_1\int P_1 dx)^{-\frac{m+4}{m+3}}$$

гдѣ a_1 и b_1 новыя постоянныя. Уравненіе для z_1 послѣ этого будетъ

$$\frac{dz_1}{dx} + P_1 z_1^{\,2} = P_1(a_1 + b_1\int P_1 dx)^{-\frac{m+4}{m+3}}.$$

Полагая теперь

$$z = \frac{1}{z_2}$$

подобно предыдущему найдемъ

$$\frac{dz_2}{dx} + P_2 z_2{}^2 = P_2 (a_2 + b_2 \int P_2 dx)^{\frac{-m}{m+1}},$$

гдѣ

$$P_2 = P(a + b\int Pdx)^m,$$

а a_2 и b_2 постоянныя величины. Сопоставляя уравненія для z, z_1 и z_2 и замѣчая, что первое изъ нихъ интегрируется при $m=0$, мы легко найдемъ и всѣ другіе случаи его интегрируемости, указанные выше.

Анализъ этого параграфа можно еще вести по способу измѣненія независимаго перемѣннаго. Чтобы не повторяться, мы укажемъ лишь какъ по этому способу уравненіе

$$\frac{dz}{dx} + P(a + b\int Pdx)^n . z^2 = P(a + b\int Pdx)^m$$

приводится къ Рикаттіевскому. Допустимъ, что z не непосредственно выражено въ x, а помощью нѣкоторой функціи его ξ, т. е. допустимъ, что

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}$$

тогда наше уравненіе дастъ

$$\frac{dz}{d\xi} + P(a + b\int Pdx)^n \frac{dx}{d\xi} z^2 = P(a + b\int Pdx)^m \frac{dx}{d\xi}.$$

Отсюда разумѣя подъ Π функцію одного ξ и полагая

$$P(a + b\int Pdx)^n dx = \Pi d\xi$$

получимъ

$$\frac{dz}{d\xi} + \Pi z^2 = \Pi(\alpha + \beta\int \Pi d\xi)^{\frac{m-n}{n+1}},$$

что и нужно было показать.

Если сдѣлаемъ здѣсь $\alpha = 0$, $\Pi = 1$, $n = 0$, $\beta^m = c$, то придемъ къ обыкновенному виду уравненія Рикатти

$$\frac{dz}{d\xi} + z^2 = c\xi^m,$$

на которое такимъ образомъ всегда можетъ быть сведено обобщенное нами.

§ IV. Если въ соотношеніе

$$Q = P(a + b\int Pdx)^{\frac{-4k}{2k-1}},$$

гдѣ k цѣлое число, поставимъ на-мѣсто P и Q ихъ значенія изъ (2), то будетъ

$$-qe^{\int rdx} = pe^{-\int rdx}(a + b\int pe^{-\int rdx}.\ dx)^{\frac{-4k}{2k-1}}$$

или

$$pe^{-\int rdx}(a + b\int pe^{-\int rdx}.\ dx)^{\frac{-2k}{2k-1}} = (-pq)^{1/2}.$$

Интегрируя это и разрѣшая результатъ относительно r, получимъ

$$r = \frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha + \int (pq)^{1/2} dx} + \frac{p'}{2p} - \frac{q'}{2q}$$

гдѣ α постоянная величина. Мы находимъ такимъ образомъ классъ уравненій (1), интегрирующихся по способу непрерывныхъ дробей,

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha+\int(pq)^{1/2}dx}+\frac{p'}{2p}-\frac{q'}{2q}\right)y+py^2+q=0. \qquad (6)$$

Если не по существу, то по крайней мѣрѣ по внѣшнему виду мы должны за этимъ уравненіемъ, какъ содержащимъ двѣ произвольныя функціи p и q, признать большую общность, чѣмъ за разсмотрѣннымъ выше. Дѣйствительно, послѣднее можетъ быть изъ него получено при частномъ допущеніи, выражаемомъ соотношеніемъ

$$\frac{2k(pq)^{1/2}}{\alpha+\int(pq)^{1/2}dx}+\frac{p'}{2p}-\frac{q'}{2q}=0,$$

интегралъ котораго таковъ:

$$q=p(a+b\int pdx)^{\frac{-4k}{2k-1}}.$$

Въ уравненіи Рикатти число k можно было принимать равнымъ безконечности; въ уравненіи (6) этого по-видимому сдѣлать нельзя. Но если мы допустимъ, что постоянная α имѣетъ видъ $\frac{2k}{a}$, то эта кажущаяся невозможность изчезнетъ и мы, при $k=\infty$, найдемъ всегда интегрируемое уравненіе

$$\frac{dy}{dx}+\left\{a(pq)^{1/2}+\frac{p'}{2p}-\frac{q'}{2q}\right\}y+py^2+q=0,$$

всегда интегрируемое, ибо положивъ

$$y=\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}e^{-a\int(pq)^{1/2}dx}z$$

увидимъ, что въ уравненіи для z удовлетворяется основной признакъ интегрируемости. Поэтому будемъ имѣть:

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}\left(\frac{q}{p}\right)^{1/2}$$

Если въ уравненіи (6) сдѣлаемъ

$$p = 1,\ y = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx},$$

то получимъ классъ линейныхъ уравненій втораго порядка

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{2k\,q^{1/2}}{\alpha + \int q^{1/2}\,dx} - \frac{q'}{2q}\right)\frac{du}{dx} + qu = 0, \qquad (7)$$

интегрирующихся посредствомъ неопредѣленныхъ квадратуръ. Отсюда при $k = \infty$ найдемъ уравненіе Пецваля

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(aq^{1/2} - \frac{q'}{2q}\right)\frac{du}{dx} + qu = 0,$$

интегралъ котораго на основаніи сказаннаго выше можно считать извѣстнымъ.

Намъ кажется не лишеннымъ интереса слѣдующій символистическій способъ интеграціи этого уравненія. Называя чрезъ α_1 и α_2 корни уравненія

$$\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0$$

мы можемъ привести уравненіе Пецваля, по раздѣленіи обѣихъ его частей на q и по отвлеченіи субъекта u отъ символа $\frac{d}{dx}$, къ слѣдующему виду:

$$\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_1\right)\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)u=0.$$

Полагая теперь

$$\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_2\right)u=v,$$

получимъ

$$\left(q^{-1/2}\frac{d}{dx}-\alpha_1\right)v=0.$$

Интегралъ послѣдняго уравненія таковъ

$$v=ce^{\alpha_1\int q^{1/2}dx};$$

поэтому интегралъ уравненія Пецваля будетъ

$$u=c_1e^{\alpha_1\int q^{1/2}dx}+c_2e^{\alpha_2\int q^{1/2}}x.$$

Для случая $\alpha_1=\alpha_2=\pm 1$ нашъ способъ дастъ

$$u=(c_1+c_2\int q^{1/2}dx)\,e^{\pm\int q^{1/2}dx},$$

гдѣ верхній знакъ отвѣчаетъ допущенію $a=-2$, а нижній допущенію $a=2$.

Обращаясь снова къ уравненію (7), укажемъ на тѣ простѣйшія формы, какія оно можетъ принять. Съ этою цѣлью допуская, что u выражено въ x помощью нѣкоторой функціи его ξ, найдемъ

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{d\xi^2}\cdot\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2+\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d^2\xi}{dx^2},$$

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left(\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{2kq^{1/2}}{\alpha+\int q^{1/2}dx}\frac{d\xi}{dx}-\frac{q'}{2q}\frac{d\xi}{dx}\right)\frac{du}{d\xi}+qu=0.$$

Разумѣя теперь подъ Q функцію одного ξ, сдѣлаемъ положеніе

$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2=\frac{q}{Q}$$

и напишемъ его слѣдствія

$$\alpha+\int q^{1/2}dx=a+\int Q^{1/2}d\xi$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}=\frac{q'}{2q^{1/2}}\cdot\frac{1}{Q^{1/2}}-\frac{q}{2Q^2}\cdot\frac{dQ}{d\xi}$$

На основаніи этихъ соотношеній предыдущее уравненіе дастъ

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\left(\frac{2kQ^{1/2}}{a+\int Q^{1/2}d\xi}-\frac{Q'}{2Q}\right)\frac{du}{d\xi}+Qu=0,$$

гдѣ $Q'=\frac{dQ}{d\xi}$. Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ одно изъ положеній

$$Q=1,\ \frac{2kQ^{1/2}}{a+\int Q^{1/2}d\xi}=\frac{Q'}{2Q},$$

то получимъ соотвѣтственно

$$\frac{d^2u}{d\xi}+\frac{2k}{a+\xi}\cdot\frac{du}{d\xi}+u=0$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+(b+c\xi)^{\frac{-4k}{2k-1}}u=0.$$

Уравненіе (7) всегда, слѣдовательно, можно свести на то или другое изъ послѣднихъ.

§ V. Результаты, къ которымъ мы пришли выше, можно вывести и изъ разсмотрѣнія линейнаго уравненія втораго порядка

$$u''+Pu'+Qu=0,$$

въ которомъ $u'=\frac{du}{dx}$, $u''=\frac{d^2u}{dx^2}$, а P и Q функціи одного x. Въ самомъ дѣлѣ, если подставимъ

$$u=ve^{-\int Q\frac{u_1}{u'_1}dx}$$

и если въ результатѣ этой подстановки

$$Q\{u''_1-(P+l'gQv^2)u'_1+Qu_1\}vu_1+(v''+Pv')u'^2_1=0$$

выберемъ v такъ, чтобы

$$v''+Pv'=0,$$

то придемъ къ уравненію

$$u_1''+P_1u_1'+Qu_1=0,$$

въ которомъ

$$P_1=-P-l'gQ\left(\alpha_1+\int e^{-\int Pdx}dx\right)^2,$$

а α_1 постоянная величина. Равнымъ образомъ полагая

$$u_1 = \left(\alpha_2 + \int e^{-\int P dx} dx\right) e^{-\int Q \frac{u_2}{u'_2} dx}$$

получимъ

$$u''_2 + P_2 u'_2 + Q u_2 = 0\,,$$

гдѣ

$$P_2 = -P_1 - l' g Q \left(\alpha_2 + \int e^{-\int P_1 dx} dx\right)^2.$$

Наконецъ послѣ k преобразованій будемъ имѣть

$$u''_k + P_k u'_k + Q u_k = 0\,,$$

причемъ

$$P_k = -P_{k-1} - l' g Q \left(\alpha_k + \int e^{-\int P_{k-1} dx} dx\right)^2.$$

Замѣтимъ тутъ же, что послѣднее соотношеніе по разрѣшеніи его относительно P_{k-1} можно представить въ видѣ совмѣстныхъ равенствъ

$$\left.\begin{aligned} P_{k-1} &= l' g \frac{(\int N_k dx)^2}{N_k} \\ N_k &= Q e^{\int P_k dx} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Обращаясь теперь къ уравненію для u_k, дѣлаемъ въ немъ подстановки

$$u_k = v e^{-1/_2 \int P_k dx}$$

$$u_k = e^{\int \frac{Q dx}{\frac{w}{w'} + {}^1/_2\left(P_k + \frac{Q'}{Q}\right)}}$$

Ясно, что результаты этихъ подстановокъ

$$v'' + {}^1/_4\,(4Q - 2P'_k - P_k^2)v = 0$$

$$w'' + {}^1/_4 \left\{ 4Q + 2P'_k - P_k^2 + 2\left(\frac{Q'}{Q}\right)' - \right.$$

$$\left. - 2P_k\left(\frac{Q'}{Q}\right) - \left(\frac{Q'}{Q}\right)^2 \right\} w = 0$$

совпадутъ и что u_k опредѣлится изъ уравненія

$$u'^2_k + aQ^{1/2}u'_k u_k + Qu_k^2 = 0,$$

если между P_k и Q будетъ существовать зависимость, выражаемая отношеніемъ

$$P'_k - \frac{Q'}{2Q}P_k = \left(\frac{Q'}{2Q}\right)^2 - \left(\frac{Q'}{2Q}\right)'$$

или отношеніемъ

$$P_k = aQ^{1/2} - \frac{Q'}{2Q} = aQ^{1/2} + lg'Q^{-1/2},$$

гдѣ a постоянная величина. Допустимъ же, что зависимость эта существуетъ, и посмотримъ, какую она установитъ связь между количествами P и Q.

Для рѣшенія задачи обращаемся къ формуламъ (8). Если постоянную, вводимую интегрированіемъ функціи N_k, посчитаемъ за нуль, то онѣ дадутъ

$$N_k = Q^{1/2}e^{a\int Q^{1/2}dx}$$

$$P_{k-1} = aQ^{1/2} + lg'Q^{-1/2} = P_k.$$

Отсюда приходимъ къ слѣдствію

$$P = aQ^{1/2} + lg'Q^{-1/2},$$

не представляющему ничего новаго. При выводѣ этого слѣдствія, конечно, предположено, что a отлично отъ нуля. Если же a нуль, картина измѣнится; именно, мы получимъ

$$N_k = Q^{1/2}$$

$$P_{k-1} = lg'\frac{(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^2}{Q^{1/2}}.$$

Вычисляя на основаніи послѣдней формулы количества N_{k-1} и P_{k-2}, будемъ имѣть

$$N_{k-1} = Q^{1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^2$$

$$P_{k-2} = lg'Q^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^4.$$

Здѣсь постоянная интеграла $\int N_{k-1}dx$ принята нами за нуль; тоже будемъ наблюдать и ниже. Дальнѣйшее вычисленіе затрудненій не представляетъ. Такъ, для количествъ N_{k-2} и P_{k-3} найдемъ

$$N_{k-2} = Q^{1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^4$$

$$P_{k-3} = l'gQ^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^6.$$

Понятно теперь, что для какого угодно числа i меньшаго k будемъ имѣть

$$P_{k-i} = lg'Q^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2})^{2i}.$$

Заключеніе это вытекаетъ изъ того, что непосредственное слѣдствіе предыдущаго равенства

$$P_{k-i-1} = lg'Q^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^{2(i+1)}$$

можетъ быть получено изъ него простою замѣной i на $i+1$. Если въ равенствѣ для P_{k-i} положимъ $i=k$, то найдемъ

$$P = l'gQ^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^{2k}.$$

Это и есть искомая группа признаковъ интегрируемости уравненія для u. А такъ-какъ уравненіе это подстановкой

$$u = e^{-\int Q\frac{v}{v'}dx}$$

приводится къ виду

$$v'' - \left(P + \frac{Q'}{Q}\right)v' + Qv = 0,$$

то для него существуетъ и другая группа, выражаемая отношеніемъ

$$-P - \frac{Q'}{Q} = l'gQ^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2})^{2k}$$

или отношеніемъ

$$P = l'gQ^{-1/2}(\alpha + \int Q^{1/2}dx)^{-2k}.$$

Понятно, что если подъ k разумѣть какое угодно цѣлое число, то обѣ эти группы можно выразить одною формулой

$$P = \frac{2kQ^{1/2}}{\alpha + \int Q^{1/2}\,dx} - \frac{Q'}{2Q},$$

которая и составитъ такимъ образомъ окончательное и уже извѣстное намъ рѣшеніе вопроса объ интегрируемомъ классѣ линейныхъ уравненій втораго порядка.

§ VI. Хотя въ предыдущихъ параграфахъ указаны средства для вычисленія интеграловъ тѣхъ уравненій, которыхъ интегрируемость нами констатирована, однако лучше интегралы эти вычислять по другому способу, изложеніемъ котораго мы теперь займемся. Мы уже видѣли, что каждое изъ разсмотрѣнныхъ нами уравненій можетъ быть приведено къ виду

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha\eta^2 = \beta\xi^\delta.$$

Если же положимъ здѣсь

$$\eta = ay,\ \ \xi = bx^c$$

и выберемъ постоянныя a, b и c такъ, чтобы

$$a\alpha cb = 1,\ 4c\beta b^{\delta+1} = a,\ c(\delta + 2) + 2 = 0,$$

то будемъ имѣть

$$\frac{dy}{dx} + x^{-\frac{\delta+4}{\delta+2}} . y^2 = {}^1/_4\, x^{-\frac{3\delta+4}{\delta+2}}$$

Отсюда посредствомъ подстановки

$$y = -\frac{\delta+4}{2\delta+4}\, x^{\frac{2}{\delta+2}} + x^{\frac{\delta+4}{\delta+2}} . v$$

получимъ

$$\frac{dv}{dx}+v^2+nx^{-2}-{}^1/_4\,x^{-4}=0,$$

гдѣ

$$n=\frac{\delta(\delta+4)}{4(\delta+2)^2}.$$

Наконецъ если сдѣлаемъ

$$v=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{u'}{u},$$

то найдемъ

$$x^2u''+(2x+1)u'+nu=0. \qquad (9)$$

Приведенное къ такому виду уравненіе Рикатти легко интегрируется помощью послѣдовательнаго дифференцированія въ тѣхъ случаяхъ, на которые мы указали выше. Въ самомъ дѣлѣ результатъ k дифференцированій уравненія (9) будетъ

$$x^2u^{k+2}+\{2(k+1)x+1\}u^{k+1}+\{n+k(k+1)\}u^k=0.$$

Но если мы допустимъ, что

$$n+k(k+1)=0,$$

т. е. что

$$\delta=\frac{-4k}{2k+1} \text{ или } \delta=\frac{-4(k+1)}{2(k+1)-1}$$

ибо таковы корни уравненія

$$\delta(\delta+4)+4k(k+1)(\delta+2)^2=0,$$

то найдемъ

$$u^{k+2}+\left\{\frac{2(k+1)}{x}+\frac{1}{x^2}\right\}u^{k+1}=0.$$

Интегрируя это относительно u^{k+1} и означая постоянную произвольную черезъ c, будемъ имѣть

$$u^{k+1} = cx^{-2(k+1)} . e^{\frac{1}{x}} .$$

Отсюда посредствомъ $k+1$ интегрированій получимъ

$$u = c\int x^{-2(k+1)} . e^{\frac{1}{x}} dx^{k+1} + c' \sum_{i=0}^{k} A_i x^i ,$$

гдѣ A_i постоянная подлежащая опредѣленію, а c' какая угодно. Для опредѣленія A_i ставимъ въ уравненіе

$$x^2 u'' + (2x+1) u' - k(k+1) u = 0 \qquad (10)$$

на мѣсто u сумму

$$\sum_{i=0}^{k} A_i \, x^i$$

и уравниваемъ нулю коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x. Результатомъ этой операціи будетъ равенство:

$$A_{i+1} = \frac{k(k+1) - i(i+1)}{i+1} A_i$$

изъ котораго легко найдемъ

$$A_i = \frac{1}{i!} k(k+1) \{ k(k+1) - 2 \} \ldots \{ k(k+1) - (i-1) i \}$$

гдѣ въ силу произвольности c' положено $A_0 = 1$. Такимъ образомъ данное выше для u выраженіе есть полный интегралъ уравненія (10) въ предположеніи, что A_i имѣетъ указанное сейчасъ значеніе.

Полный интегралъ уравненія (10) можно найдти еще посредствомъ послѣдовательнаго интегрированія. Въ самомъ дѣлѣ, если проинтегрируемъ упомянутое уравненіе $k+1$ разъ и назовемъ постоянную вводимую i-мъ интегрированіемъ черезъ $c'B_{k-i+1}$, то будетъ

$$x^2\int u dx^{k-1} - (2kx-1)\int u dx^k = c'\sum_{i=0}^{k} B_i x^i$$

отсюда для интегралла $\int u dx^k$ получимъ

$$\int u dx^k = x^{2k} e^{\frac{1}{x}}\left(c + c'\sum_{i=0}^{k} B_i \int x^{i-2k-2} e^{-\frac{1}{x}} dx\right)$$

Дифференцируя это k разъ, найдемъ

$$u = c\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}}\right) + c'\sum_{i=0}^{k} B_i \frac{d^k}{dx^k}\left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}}\int x^{i-2k-2} e^{-\frac{1}{x}} dx\right).$$

Останавливаясь на второмъ членѣ правой части этого равенства, замѣчаемъ, что, относительно x, онъ есть цѣлая раціональная функція степени k; поэтому предыдущее равенство можно написать въ видѣ

$$u = c\frac{d^k}{dx^k}\left(x^{2k} e^{\frac{1}{x}}\right) + c'\sum_{i=0}^{k} A_i x^i$$

и принимать за полный интегралъ уравненія (10) въ предположеніи, что A_i имѣетъ данное ему выше значеніе.

Идея изложеннаго нами способа интегрированія уравненія Рикатти принадлежитъ Ліувиллю.

§ VII. Мы видѣли сейчасъ, что существуютъ случаи, въ которыхъ уравненіе (9), а слѣдовательно и уравненіе Рикатти интегрируется алгебраическими функціями независимаго. Является вопросъ, нѣтъ ли другихъ подобныхъ же случаевъ? Этотъ вопросъ по отношенію къ тому и другому изъ упомянутыхъ уравненій разрѣшаетъ анализъ Ліувилля[1]. Мы же, имѣя въ виду простоту вычисленій, разрѣшимъ его лишь по отношенію къ уравненію (9).

Это уравненіе сопровождается раціональными относительно x коэффиціентами; поэтому допустивъ, что оно интегрируется нѣкоторой ирраціональностью x, мы обязаны трактовать его интегралами всѣ корни того неразлагаемаго алгебраическаго уравненія, которымъ упомянутая ирраціональность опредѣляется. Но если такъ, то любыхъ два корня u_i и u_j этого уравненія должны удовлетворять условію

$$u_j u_i' - u_i u'_j = ax^{-2} e^{\frac{1}{x}},$$

гдѣ a нѣкоторая постоянная. Понятно, что если a не нуль, то предыдущее равенство нелѣпо, ибо лѣвая его часть есть алгебраическая, а правая—трансцендентная функція x. Поэтому неизбѣжно

$$\frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_j}{u_j}.$$

Предполагая теперь, что число корней уравненія, опредѣляющаго алгебраическіе интегралы уравненія (9), есть m и называя ихъ черезъ $u_1 u_2 \ldots . u_m$ получимъ:

$$\frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_1}{u_1}, \quad \frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_2}{u_2}, \ldots \frac{u'_i}{u_i} = \frac{u'_m}{u_m}$$

Сложивъ эти равенства и проинтегрировалъ результатъ, найдемъ

$$u^m{}_i = cu_1 u_2 \ldots . u_m = R,$$

[1] Журналъ Ліувилля. Т. 6. стр. 1—12.

гдѣ R раціональная функція x. Убѣдившись такимъ образомъ, что алгебраическіе интегралы уравненія (9) должны быть вида $R^{\frac{1}{m}}$, ставимъ въ это уравненіе $R^{\frac{1}{m}}$ на мѣсто u. Результатъ подстановки будетъ

$$x^2RR'' + (2x+1)RR' + n.mR^2 - \frac{m-1}{m}x^2R'^2 = 0. \quad (11)$$

Докажемъ теперь, что $m = 1$. Съ этою цѣлью вообразимъ, что въ раціональной функціи R цѣлая часть отдѣлена отъ дробной и послѣдняя приведена къ виду

$$\sum \frac{A}{(x-\alpha)^i},$$

гдѣ A, α и i параметральныя постоянныя. Если по внесеніи такого значенія R въ уравненіе (11), мы остановимъ свое вниманіе на той изъ дробей, которая отвѣчаетъ наибольшему i при данномъ α, то увидимъ, что дробь

$$\frac{i(m+i)A^2x^2}{m(x-\alpha)^{2i+2}}$$

до тѣхъ поръ не найдетъ себѣ подобной и, слѣдовательно, не уничтожится, пока α отлично отъ нуля. Отсюда заключаемъ, что

$$R = \sum_{i=-p}^{i=k} A_i x^i,$$

гдѣ k высшая положительная степень x, а p высшая отрицательная. Внеся это значеніе R въ уравненіе (11) и уравнявъ нулю коэффиціентъ, сопровождающій высшую отрицательную степень x, получимъ

$$pA^2_{-p} = 0$$

Такъ какъ требованіе, выражаемое этимъ равенствомъ, не можетъ быть выполнено на-счетъ p до тѣхъ поръ, пока p отлично отъ нуля, то всѣ A съ отрицательными указателями суть нули. По этому

$$R=\sum_{i=0}^{k} A_i x^i.$$

Убѣдившись такимъ образомъ, что R есть цѣлая раціональная фукція x, мы можемъ, разложивъ эту функцію на линейныхъ множителей, привести ее къ виду

$$R=q_1 q_2^2 q_3^3 \ldots . q_r^r,$$

гдѣ q_i означаетъ произведеніе всѣхъ множителей i-й кратности. Что касается производныхъ R, то онѣ будутъ

$$R'=q_2 q_3^2 \ldots . q_r^{r-1} . \omega$$

$$R''=q_3 q_4^2 \ldots . q_r^{r-2} . \Theta,$$

гдѣ ω и Θ, будучи первыми между собою, таковы же и по отношенію къ каждому изъ нумерованныхъ q. На основаніи написанныхъ соотношеній уравненіе (11) приведется къ виду:

$$x^2 q_1 \Theta + (2x+1) q_1 q_2 \ldots . q_r \omega + n . m . q_1^2 q_2^2 \ldots . q_r^2 =$$

$$=\frac{m-1}{m} x^2 \omega^2.$$

При анализѣ этого равенства представляются два случая: когда произведеніе $q_2\ q_3 \ldots . q_r$ равно единицѣ и когда оно отлично отъ единицы. Въ первомъ случаѣ имѣемъ:

$$\{ x^2 \Theta + (2x+1)\omega + n . m . q_1 \} q_1 = \frac{m-1}{m} x^2 \omega^2.$$

Такъ какъ лѣвая часть этого равенства дѣлится на q_1, то и правая должна дѣлиться; а потому въ разсматриваемомъ случаѣ $m=1$. Что касается втораго случая, то онъ даетъ:

$$q_1\Theta = \frac{m-1}{m}\omega^2$$

$$(2x+1)\omega + n\,.\,m\,.\,q_1 q_2 \,.\,.\,.\,.\, q_r = 0.$$

Замѣнивъ Θ и ω ихъ значеніями черезъ R, получимъ:

$$RR'' = \frac{m-1}{m}R'^2$$

$$(2x+1)R' + n\,.\,mR = 0.$$

Интегрируя это и переходя отъ R къ u, находимъ

$$u = ax + b$$

$$u = c(2x+1)^{-\frac{n}{2}}$$

гдѣ a, b и c постоянныя величины. Такъ какъ эти равенства должны существовать совмѣстно, то имѣемъ:

$$n = -2\,,\ a = 2c\,,\ b = c.$$

Изъ сказаннаго обнаружилось, что интегралы уравненія (9) не могутъ быть алгебраическими, не будучи раціональными вида

$$u = \sum_{i=0}^{k} A_i x^i.$$

Отсюда на основаніи предыдущаго параграфа прямо заключаемъ, что случаями, тамъ указанными, сполна исчерпывается способность упомянутаго уравненія интегрироваться алгебраическими функціями независимаго.

гдѣ $m = 1$. Что касается втораго случая, то онъ даетъ:

$$q_1\Theta = \frac{m-1}{m}\omega$$

$$(2x+1)\omega + n\,.\,m\,.\,q_1 q_2 \ldots q_r = 0.$$

Замѣнивъ Θ и ω ихъ значеніями черезъ R, получимъ:

$$RR'' = \frac{m-1}{m}R'^2$$

$$(2x+1)R' + n\,.\,mR = 0.$$

Интегрируя это и переходя отъ R къ u, находимъ

$$u = ax + b$$

$$u = c(2x+1)^{-\frac{n}{2}}$$

гдѣ a, b и c постоянныя величины. Такъ какъ эти равенства должны существовать совмѣстно, то имѣемъ:

$$n = -2,\ a = 2c,\ b = c.$$

Изъ сказаннаго обнаружилось, что интегралы уравненія (9) не могутъ быть алгебраическими, не будучи раціональными вида

$$w = \sum_{i=0}^{\lambda} A_i x^i.$$

Отсюда на основаніи предыдущаго параграфа прямо заключаемъ, что случаями, тамъ указанными, сполна исчерпывается способность упомянутаго уравненія интегрироваться алгебраическими функціями независимаго.

—

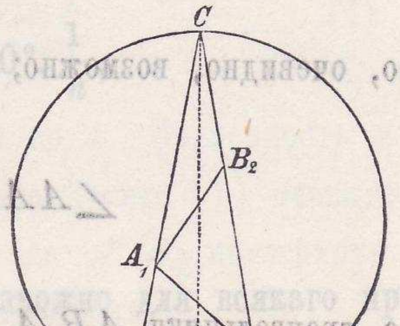
РАСПРОСТРАНЕНІЕ СПОСОБА АБУЛЪ-ДЖУДА

ДЛЯ ОПРЕДѢЛЕНІЯ СТОРОНЪ ПРАВИЛЬНЫХЪ ВПИСАННЫХЪ МНОГОУГОЛЬНИКОВЪ.

А. П. Грузинцева.

Въ прекрасной книгѣ проф. Ващенка-Захарченка, изданной имъ въ прошломъ году подъ заглавіемъ: «Исторія математики», изложенъ на стр. 552 способъ арабскаго геометра XI столѣтія Абулъ-Джуда для вычисленія стороны правильнаго вписаннаго 9-угольника; этотъ способъ, какъ оказалось, можно обобщить, распространивъ его и на случай всякаго правильнаго вписаннаго многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ. Этотъ обобщенный способъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Пусть AB сторона правильнаго вписаннаго n-угольника; построимъ на ней равнобедренный треугольникъ съ вершиной въ C на окружности. Тогда уголъ при C будетъ



$$\angle C = \frac{180^0}{n};$$

уголъ при B будетъ:

$$\angle ABC = \angle CAB = 90^0 \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Проведемъ изъ A прямую AB_1 такъ, чтобы

$$\angle B_1AB = \frac{180^0}{n},$$

тогда

$$\angle AB_1B = 90^0 \frac{n-1}{n},$$

т. е. $\angle AB_1B = \angle ABC,$

слѣдовательно треугольникъ ABB_1 будетъ равнобедренный и

$$AB_1 = AB = a_n,$$

если положимъ, что

$$AB = a_n.$$

Послѣ того найдемъ, что

$$\angle CAB_1 = 90^0 . \frac{n-3}{n}.$$

Проведемъ теперь прямую B_1A_1 такъ, чтобы

$$\angle AB_1A_1 = 180^0 . \frac{3}{n},$$

что, очевидно, возможно; тогда

$$\angle AA_1B_1 = 90^0 . \frac{n-3}{n},$$

т. е. треугольникъ AB_1A_1 тоже равнобедренный и слѣдовательно

$$A_1B_1 = AB_1 = a_n.$$

За-тѣмъ проведемъ изъ A_1 прямую A_1B_2 такъ, чтобы

$$\angle B_1A_1B_2 = 180^\circ.\frac{5}{n},$$

и найдемъ, что

$$\angle A_1B_1C = \angle A_1B_2B_1 = 90^\circ.\frac{n-5}{n};$$

слѣдовательно

$$A_1B_2 = A_1B_1 = a_n.$$

Продолжая подобныя построенія, найдемъ, что углы при вершинахъ равнобедренныхъ треугольниковъ будутъ соотвѣтственно:

$$180^\circ.\frac{1}{n},\ 180^\circ.\frac{3}{n},\ 180^\circ.\frac{5}{n},\ \ldots \text{ и для } i\text{-наго угла } 180^\circ\frac{2i-1}{n};$$

углы при основаніяхъ:

$$90^\circ.\frac{n-1}{n},\ 90^\circ.\frac{n-3}{n},\ 90^\circ.\frac{n-5}{n},\ldots 90^\circ.\frac{n-2i+1}{n}.$$

Допуская, что i-ный треугольникъ будетъ имѣть угломъ при основаніи уголъ C, должны имѣть:

$$90^\circ.\frac{n-2i+1}{n} = 180^\circ.\frac{1}{n},$$

т. е.

$$n = 2i + 1.$$

И такъ, приведенное построеніе возможно для всякаго правильнаго многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ. Что касается вычисленія стороны a_n, то можно употребить слѣдующій пріемъ. Опуская изъ точекъ A, A_1, B_1, ... перпендикуляры AD, B_1E, A_1D_1, ... и замѣчая, что всѣ получаемые четыреугольники таковы, что около нихъ можно описать окружности, имѣемъ по свойству сѣкущихъ, проведенныхъ изъ точки C, i уравненій между $i+1$ отрѣзками, получаемыми на сторонахъ AC и BC; за-тѣмъ имѣемъ еще два уравненія, выражающія, что сумма отрѣзковъ съ одной стороны равна AC, а съ другой $AC - a_n$, итого $i+2$ уравненій; кромѣ того изъ подобія треугольниковъ ABC и ABB_1 имѣемъ соотношеніе между AC и a_n. Слѣдовательно, всего будетъ $i+3$ уравненій съ $i+3$ неизвѣстными; значитъ — найдемъ a_n.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ УРАВНЕНІЯ

$$\frac{d^n y}{dz^n} + \frac{\alpha}{z}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \beta y = 0.$$

В. П. Алексѣевскаго.

1. Замѣтимъ, что достаточно разсмотрѣть уравненіе указаннаго вида, въ которомъ $\beta = 1$, такъ какъ данное уравненіе посредствомъ замѣны независимаго перемѣннаго по формулѣ:

$$z = \frac{x}{\sqrt[n]{\beta}}$$

приводится къ слѣдующему:

$$y^{(n)} + \frac{\alpha}{x} y^{(n-1)} + y = 0 \qquad (1)$$

гдѣ $y^{(n)}$ означаетъ производную отъ y по x. Зависимость между интегралами даннаго уравненія и послѣдняго (1) очевидна.

Умножая обѣ части уравненія (1) на $x^\alpha dx$, интегрируя и отбрасывая произвольное постоянное, получаемъ:

$$x^\alpha y^{(n-1)} + \int x^\alpha y dx = 0.$$

Полагая $\int x^\alpha y dx = x^{\alpha+1} y_1$ (2)

находимъ $y^{(n-1)} + x y_1 = 0.$ (3)

Дифференцируя равенство (2) и сокращая на x^{α}, получимъ:

$$y = xy'_1 + (\alpha+1)y_1. \tag{4}$$

Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную съ указателемъ $(n-1)$, получимъ:

$$y^{(n-1)} = xy_1^{(n)} + (\alpha+n)\,y_1^{(n-1)}.$$

Исключая изъ послѣдняго равенства и равенства (3) $y^{(n-1)}$ и полагая

$$\alpha + n = \alpha_1,$$

находимъ:

$$y_1^{(n)} + \frac{\alpha_1}{x}\,y_1^{(n-1)} + y_1 = 0.$$

Повторяя ту-же операцію k разъ, очевидно, получимъ слѣдующее уравненіе

$$y_k^{(n)} + \frac{\alpha_k}{x}\,y_k^{(n-1)} + y_k = 0, \tag{5}$$

гдѣ

$$\alpha_k = \alpha + nk. \tag{6}$$

2. На основаніи предыдущихъ формулъ не трудно выразить зависимость между интегралами уравненій (1) и (5) въ различныхъ видахъ:

a) По формулѣ (2) имѣемъ:

$$y = x^{-\alpha} D x^{\alpha+1} y_1$$

$$y_1 = x^{-(\alpha+n)} . D x^{\alpha+n+1} y_2$$

$$y_2 = x^{-(\alpha+2n)} . D x^{\alpha+2n+1} y_3$$

. . . .

$$y_{k-1} = x^{-(\alpha+(k-1)n)} . D x^{\alpha+(k-1)n+1} y_k.$$

Умножая послѣдовательно эти равенства на

$$1,\ x^{\alpha+1},\ x^{\alpha+n+1},\ \ldots\ldots,\ x^{\alpha+(k-2)n+1}$$

и исключая $y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_{k-1}$, получимъ:

$$y = x^{-\alpha}.D.x^{-(n-1)}.D.x^{-(n-1)}\ldots D.x^{-(n-1)}.x^{\alpha+nk}y_k,$$

гдѣ операція $D.x^{-(n-1)}$ повторяется k разъ. Принявъ во вниманіе равенство (6), послѣднюю формулу можно написать въ такомъ видѣ:

$$x^{\alpha}y = \left[D.x^{-(n-1)}\right]^{(k)}(x^{\alpha k}y_k). \qquad (7)$$

b) По формулѣ (3) имѣемъ:

$$y = (-1).D^{-(n-1)}xy_1,$$

$$y_1 = (-1).D^{-(n-1)}xy_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{k-1} = (-1).D^{-(n-1)}xy_k,$$

отсюда находимъ:

$$y = (-1)^k\left[D^{-(n-1)}.x\right]^{(k)}.y_k. \qquad (8)$$

c) Далѣе мы увидимъ, что $y,\ y_1,\ \ldots$ обладаютъ свойствами, выражаемыми равенствами:

$$D^p.D^q y = D^q.D^p y = D^{p+q}y,$$

гдѣ p и q указатели производныхъ, количества постоянныя.

Поэтому формулу (4) можно написать въ видѣ

$$y = D^{\alpha+1}.x.D^{-\alpha}y_1.$$

Слѣдовательно:

$$y_1 = D^{\alpha+n+1}.x.D^{-(\alpha+n)}y_2$$

$$y_2 = D^{\alpha+2n+1}.x.D^{-(\alpha+2n)}y_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{k-1} = D^{\alpha+(k-1)n+1}.x.D^{-(\alpha+(k-1)n)}y_k.$$

Взявъ отъ втораго изъ этихъ равенствъ производную съ указателемъ $-\alpha$, отъ 3-го съ указателемъ $-(\alpha+n)$, ... , отъ послѣдняго — съ указателемъ $-(\alpha+(k-2)n)$, получимъ:

$$y = D^{\alpha+1}.x.D^{n+1}.x.D^{n+1}.x \ldots D^{n+1}.x.D^{-(\alpha+(k-1)n)}y_k,$$

гдѣ операція $D^{n+1}.x$ повторяется $(k-1)$ разъ. Взявъ отъ обѣихъ частей этого равенства производную съ указателемъ $-(\alpha-n)$ и принявъ во вниманіе (6), предыдущее соотношеніе напишется такимъ образомъ:

$$D^{-(\alpha-n)}y = \left[D^{n+1}.x\right]^{(k)}.D^{-(\alpha_k-n)}y_k. \qquad (9)$$

d) Наконецъ зависимость между интегралами y и y_k можно представить еще въ новомъ видѣ, выясняющемъ характеръ операцій, связывающихъ функціи y и y_k.

Умножимъ обѣ части равенства (7) на $n^{-k}.x^{-(n-1)}$, тогда оно обратится въ слѣдующее:

$$n^{-k}.x^{\alpha-(n-1)}y = n^{-k}.x^{-(n-1)}.\left[D.x^{-(n-1)}\right]^{(k)}x^{\alpha_k}y_k$$

или

$$n^{-k}x^{\alpha-(n-1)}y = \left[\frac{1}{n}x^{-(n-1)}.D\right]^{(k)}.x^{\alpha_k-(n-1)}y_k.$$

Замѣтимъ, если u есть функція x, а x функція новаго независимаго перемѣннаго z, то, полагая

$$\frac{dz}{dx} = z',$$

имѣемъ:

$$D_z u = \frac{1}{z'} D_x u$$

$$D_z^2 u = \frac{1}{z'} D_x \frac{1}{z'} D_x u = \left[\frac{1}{z'} D_x\right]^{(2)} . u$$

и вообще

$$D_z^{(k)} u = \left[\frac{1}{z'} D_x\right]^{(k)} . u.$$

Сравнивая эту формулу съ предыдущею, видимъ, что

$$z' = nx^{n-1},$$

откуда

$$z = x^n, \qquad u = x^{\alpha_k-(n-1)} . y_k,$$

и можно написать

$$x^{\alpha-(n-1)} . y = n^k . D_z^{(k)} \left(x^{\alpha_k-(n-1)} y_k \right)_{z=x^n}. \qquad (10)$$

e) При помощи предыдущихъ формулъ весьма легко выразить y_k, чрезъ y. При помощи (7) имѣемъ:

$$x^{\alpha_k} y_k = \left[x^{n-1} . D^{-1}\right]^{(k)} x^{\alpha} y \qquad (7')$$

изъ (8) $$y_k = (-1)^k . \left[\frac{1}{x} D^{n-1}\right]^{(k)} y \qquad (8')$$

изъ (9) $$D^{-(\alpha_k-n)} y_k = \left[\frac{1}{x} D^{-(n+1)}\right]^{(k)} D^{-(\alpha-n)} y \qquad (9')$$

изъ (10) $x^{\alpha_k-(n-1)}y_k = n^{-k}.D_z^{(-k)}\left[x^{\alpha-(n-1)}.y\right]_{z=x^n}$. (10′)

3. Разсмотримъ теперь, въ какихъ случаяхъ уравненіе (1) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ. Очевидно, если въ уравненіе (5) $\alpha_k = 0$, то интегралъ его будетъ:

$$y_k = \sum_{i=1}^{i=n} C_i e^{r_i x}, \tag{11}$$

гдѣ C_i одно изъ произвольныхъ постоянныхъ, а r_i одинъ изъ корней уравненія:

$$r^n + 1 = 0.$$

Изъ предыдущаго ясно, что уравненіе (1), въ которомъ

$$\alpha = -nk,$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ (или квадратуръ) и интегралъ его найдется при помощи одной изъ формулъ (7), (8), (9) или (10), въ которыхъ только y_k надо замѣнить его выраженіемъ (11).

Точно также, если въ уравненіи (1) положимъ $\alpha = 0$, то въ уравненіи (5)

$$\alpha_k = + nk,$$

и, такъ какъ при этихъ условіяхъ интегралъ уравненія (1) выразится формулой (11), то, подставивъ это выраженіе въ формулы (7′), (8′), (9′) или (10′) на мѣсто y, имѣемъ интегралъ уравненія (5).

Просматривая ходъ нашихъ сужденій и обративъ вниманіе на выраженіе интеграла уравненія (1) [формулы (7) и (8) (7′)

и (8')] легко видѣть, что указанный выше пріемъ интегрированія не зависитъ вовсе отъ значенія постояннаго n. Не трудно замѣтить, что въ интегралѣ уравненія (1) подлежатъ дифференцированію функціи только такого вида

$$ax^m e^{rx},$$

гдѣ a и m нѣкоторыя постоянныя; а отсюда видно, во первыхъ, что всѣ дифференцированія должны производиться въ предѣлахъ $\pm\infty$ и x ($+\infty$, когда дѣйствительная часть $r<0$, $-\infty$, когда д. ч. $r>0$); во вторыхъ, что равенства

$$D^p D^q y = D^q D^p y = D^{p+q} y$$

имѣютъ мѣсто, при какихъ угодно значеніяхъ постоянныхъ p и q*.

И такъ, уравненіе (1) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если $\alpha = \pm nk$, гдѣ n какое угодно постоянное, k — цѣлое число. Такъ, напримѣръ, интегрируя по предыдущему способу уравненіе

$$D^{3/2} y - \frac{3}{x} D^{1/2} y - y = 0$$

по формулѣ (7) получимъ

$$y = \sum_{i=1}^{i=3} C_i \left(1 - \frac{3}{2} r_i x + r_i^2 x^2\right) e^{r_i x}$$

гдѣ r_i корни уравненія

$$r^{3/2} - 1 = 0.$$

---

* См. статью *Лѣтникова* «Теорія дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ». Математ. Сборникъ, Т. III, 1868. стр. 28—30 и стр. 57—58.

4. Разсмотримъ случай, когда n—отрицательное число. Уравненіе (1) по замѣнѣ въ немъ n чрезъ $(-n)$ и обозначеніи $y^{(-n)}$ чрезъ $D^{-n}y$, приметъ слѣдующій видъ:

$$D^{-n}y + \frac{\alpha}{x} D^{-(n+1)}y + y = 0. \qquad (12)$$

Легко видѣть, что приложеніе предыдущаго пріема даетъ неполный интегралъ этого уравненія; при n — цѣломъ, находимъ только n частныхъ интеграловъ, такъ какъ, въ предположеніи $\alpha = 0$, или $\alpha_k = 0$, оно обращается въ уравненіе n-го порядка. Послѣдній $(n+1)$-й интегралъ найдется извѣстнымъ пріемомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, такъ какъ знаніе n частныхъ интеграловъ уравненія даетъ возможность разысканіе послѣдняго интеграла свести къ интегрированію линейнаго уравненія 1-го порядка.

Чтобы яснѣе представить, каково уравненіе (12), положимъ

$$D^{-(n+1)}y = \omega,$$

тогда оно обратится въ слѣдующее

$$\omega^{n+1} + \omega' + \frac{\alpha}{x}\omega = 0. \qquad (13)$$

Случаи интегрируемости и сами интегралы послѣдняго уравненія могутъ быть найдены и не преобразуя его въ уравненіе (12) пріемомъ, вполнѣ аналогичнымъ предыдущему; не останавливаясь на этомъ, покажемъ, что интегрированіе уравненія (12) (съ отрицательнымъ указателемъ) можетъ быть сведено къ интегрированію уравненія того-же вида, въ которомъ указатель высшей произвольной есть число положительное.

Дѣйствительно, умноживъ уравненіе (12) на x и дифференцируя съ указателемъ $(-\alpha)$, находимъ:

$$xD^{-(\alpha+n)}y + xD^{-\alpha}y - \alpha D^{-(\alpha+1)}y = 0.$$

Полагая здѣсь

$$D^{-(\alpha+n)}y = u,$$

получимъ

$$u^{(n)} - \frac{\alpha}{x}u^{(n-1)} + u = 0,$$

въ этомъ уравненіи n есть число положительное. Отсюда видимъ, что зависимости между интегралами уравненій (12), (13) и послѣдняго будутъ:

$$y = D^{(\alpha+n)}u, \quad \omega = D^{(\alpha-1)}u.$$

Для большей ясности означимъ интегралъ уравненія (12) y чрезъ $\varphi(-n, \alpha, x)$, а интегралъ послѣдняго уравненія u чрезъ $\varphi(n, -\alpha, x)$, тогда выведенное нами свойство представится въ видѣ:

$$\varphi(-n, \alpha, x) = D^{\alpha+n}\varphi(n, -\alpha, x). \quad (14)$$

Очевидно, что этимъ зависимостямъ не удовлетворяютъ тѣ частные интегралы уравненія (12) и (13), которые находятся посредствомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

Для поясненія сказаннаго выше приведемъ примѣръ. Пусть требуется проинтегрировать уравненіе:

$$\omega''' + \omega' + \frac{2}{x}\omega = 0.$$

Интеграцію этого уравненія можно свести на интеграцію уравненія

$$u'' - \frac{2}{x}u' + u = 0,$$

частные интегралы котораго на основанiи формулы (7) послѣ извѣстныхъ преобразованiй будутъ:

$$u_1 = \int x \sin x . dx, \qquad u_2 = \int x \cos x . dx.$$

Слѣдовательно:

$$\omega_1 = x \sin x, \qquad \omega_2 = x \cos x.$$

Приложенiе способа измѣненiя произвольныхъ постоянныхъ даетъ четыре уравненiя*:

$$\omega_1 C_1' + \omega_2 C_2' = 0$$

$$\omega_1' C_1' + \omega_2' C_2' = z$$

$$\omega_1'' C_1' + \omega_2'' C_2' = z_1$$

$$z' + z_1 = 0,$$

откуда

$$C_1 = c_1 + c_3 \int \frac{\cos x}{x^3} dx \qquad C_2 = c_2 - c_3 \int \frac{\sin x}{x^3} dx,$$

вслѣдствiе чего полный интегралъ даннаго уравненiя будетъ

$$\omega = x \sin x \left(c_1 + c_8 \int \frac{\cos x}{x^3} dx \right) + x \cos x \left(c_2 - c_3 \int \frac{\sin x}{x^3} dx \right).$$

Однако, вслѣдствiе сложности выраженiй частныхъ интеграловъ уравненiя (13), вычисленiе его полнаго интеграла, въ особенности при значительномъ числѣ k, становится затруднительнымъ по своей сложности; поэтому дальше мы укажемъ болѣе простое рѣшенiе этого вопроса.

---

* Располагая выкладки такъ, какъ указано на стр. 528—531 «Cours de calcul différentiel et intégral, par *Serret*. T. second, 1868.

5. Уравненія (1) и (13) могутъ быть разсматриваемы какъ частные виды уравненія

$$xy^{(n+1)} + py^{(n)} + xy' + qy = 0, \tag{15}$$

гдѣ p и q суть постоянныя. При $n = 1$ это уравненіе обращается въ хорошо извѣстное, изслѣдованное Бейлеромъ и др.[1] и также г. Лѣтниковымъ[2].

a) Интегралъ этого уравненія (15) находится весьма легко, если $p = q$; именно, умноживъ обѣ части его на $x^{p-1}dx$, интегрируя и называя произвольное постоянное чрезъ c_0, получимъ уравненіе

$$y^{(n)} + y = c_0 x^{-p}, \tag{16}$$

дальнѣйшая интеграція котораго не представляетъ никакихъ затрудненій.

b) Если $p \lesseqgtr q$, то, прилагая тѣ-же преобразованія, какими мы пользовались въ § 1, т. е. посредствомъ k подстановокъ вида

$$\int x^{p-1} y_i dx = x^p y_{i+1}\,^*$$

вопросъ объ интегрированіи уравненія (15) сводится къ интегрированію уравненія:

$$xy_k^{(n+1)} + p_k y_k^{(n)} + xy_k' + q_k y_k = 0, \tag{17}$$

гдѣ

$$p_k = p + nk, \qquad q_k = q.$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе (15) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ (или квадратуръ), если $p - q = \pm nk$ (k — цѣлое).

---

[1] См. *Schlömilch*, «Compendium der höhere Analysis, B. 2. 1874. стр. 525—540.

[2] Математическій сборникъ. Т. VII ст. 177—192.

* Подстановка имѣетъ мѣсто и при $p = 0$.

c) Къ тому-же заключенію приводитъ насъ рядъ подстановокъ въ уравненіе (15) вида

$$\int x^{q-1} y_i^{(n)} = x^q y_{i+1}^{(n)} *,$$

такъ какъ k-е уравненіе будетъ:

$$x y_{(k)}^{(n+1)} + p_{(k)} y_{(k)}^{(n)} + x y_{(k)}' + q_{(k)} y_{(k)} = 0 \quad (18)$$

гдѣ

$$p_{(k)} = p, \qquad q_{(k)} = q - nk.$$

Если $n = 1$, то кромѣ указаннаго случая интегрируемости $p - q = \pm k$ существуетъ еще другой случай. Дѣйствительно, при $n = 1$ уравненія (15) и (18) принимаютъ слѣдующій видъ:

$$xy'' + (p + x)y' + qy = 0$$

$$xy''_{(k)} + (p + x)y'_{(k)} + q_{(k)} y_{(k)} = 0,$$

гдѣ

$$q_{(k)} = q - k.$$

Въ предположеніи или $q = 0$, или $q_{(k)} = 0$, оба эти уравненія становятся интегрируемыми; слѣдовательно, можно сказать, что уравненіе (15) при $n = 1$ интегрируется въ двухъ случаяхъ:

$$1)\ p - q = \pm k, \qquad 2)\ q = \pm k.$$

6. Уравненіе (15) при $p = 0$ обращается въ уравненіе (13), но преобразованіе b) предыдущаго параграфа примѣнимо безъ всякихъ измѣненій, поэтому полный интегралъ уравненія (13) найдется при помощи полнаго же интеграла уравненія вида (16), и не трудно видѣть, что такимъ путемъ полный интегралъ уравненія (13) вычисляется значительно скорѣе, чѣмъ по способу, указанному въ **§ 4.**

* Подстановка примѣнима и въ случаѣ $q = 0$.

Для сличенія обратимся къ примѣру, разсмотрѣнному въ § 4:

$$\omega''' + \omega' + \frac{2}{x}\omega = 0.$$

Преобразованіе b) § 4 приводитъ къ уравненію

$$x\omega_1''' + 2\omega_1'' + x\omega_1' + 2\omega_1 = 0,$$

при чемъ $$\omega = x\omega_1'.$$

Умножая предпослѣднее уравненіе на x, интегрируя и называя произвольное постоянное чрезъ c_0, находимъ:

$$\omega_1'' + \omega_1 = \frac{c_0}{x^2}.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$\omega_1 = \sin x\left(c_1 + c_0\int\frac{\cos x}{x^2}dx\right) + \cos x\left(c_2 - c_0\int\frac{\sin x}{x^2}dx\right),$$

откуда

$$\omega = x\cos x\left(c_1 + c_0\int\frac{\cos x}{x^2}dx\right) - x\sin x\left(c_2 - c_0\int\frac{\sin x}{x^2}dx\right).$$

7. Изъ разсмотрѣнія формулы (18) слѣдуетъ, что интегрированіе уравненія (15) можетъ быть сведено къ интегрированію уравненія вида (1), если $q = \pm nk$, но не трудно показать, что и при какихъ угодно значеніяхъ p и q вопросъ объ интегрированіи уравненія (15) можно поставить въ зависимость отъ интегрированія уравненія вида (1).

Дѣйствительно, взявъ отъ обѣихъ частей уравненія (15) производную съ указателемъ $(-q)$, получимъ:

$$xD^{(n-q+1)}y + (p-q)\,D^{(n-q)}y + xD^{(-q+1)}y = 0,$$

которое при допущеніи

$$D^{(-q+1)} y = u, \qquad p - q = \alpha$$

и принимаетъ видъ уравненія (1), т. е.

$$u^{(n)} + \frac{\alpha}{x} u^{(n-1)} + u = 0.$$

При помощи n интеграловъ послѣдняго легко получить всѣ $(n+1)$ частныхъ интеграловъ уравненія (15); изъ нихъ n опредѣляется по формулѣ

$$y = D^{(q-1)} u, \tag{19}$$

послѣдній же по способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ.

8. Убѣдившись, что уравненіе (1), которое можно написать въ такомъ видѣ

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} + xy = 0, \tag{20}$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ при k цѣломъ положительномъ или отрицательномъ, перейдемъ къ разсмотрѣнію, какъ интегрируется это уравненіе, если k будетъ какое угодно постоянное, т. е. къ общему случаю, при чемъ n, указатель порядка уравненія, будемъ считать цѣлымъ и положительнымъ.

Положимъ

$$y = x^{nk+n-1} \cdot u \tag{20'}$$

и подставимъ это въ уравненіе (20). Подстановку эту удобнѣе сдѣлать слѣдующимъ образомъ. Не трудно видѣть, что

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} = D_x^{\,n-1}\Big(xy' - (nk+n-1)\,y\Big).$$

Выраженіе въ скобкахъ умножимъ и раздѣлимъ на $x^{-(nk+n)}$, тогда получимъ:

$$xy^{(n)} - nky^{(n-1)} = D^{n-1}\left[x^{(nk+n)}\left(x^{-(nk+n-1)} \cdot y' - \right.\right.$$

$$\left.\left. -(nk+n-1)x^{-(nk+n)} \cdot y\right)\right] = D^{n-1}\left[x^{nk+n}\left(x^{-(nk+n-1)} \cdot y\right)'\right]$$

Сдѣлавъ теперь указанную подстановку, уравненію (20) дадимъ слѣдующій видъ:

$$x^{-(nk+n)} D^{n-1}\left(x^{nk+n} u'\right) + u = 0, \qquad (21)$$

или по совершеніи дифференцированія:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} \cdot x^{-i} u^{(n-i)} + u = 0, \qquad (21')$$

здѣсь i — параметръ, цѣлое и положительное число,

$$(n-1)_i = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-i)}{i!}$$

$$(nk+n)^{(i)} = (nk+n)(nk+n-1)\ldots.(nk+n-i+1),$$

$u^{(n-i)}$ производная $(n-i)$-го (цѣлаго) порядка отъ u по x.

Въ уравненіи (21′) измѣняемъ независимое перемѣнное, полагая

$$x = z^{\frac{1}{n}}.$$

Извѣстно, что

$$D_x^{\,m} u = \sum_{p=1}^{p=m} A_p^{(m)} z^{-\frac{m}{n}+p} \cdot u_z^{(p)},$$

гдѣ p — параметръ, цѣлое положительное число, $u_z^{(p)}$ производная p-го порядка отъ u по z, $A_p^{(m)}$ извѣстные коэффициенты, выраженія которыхъ намъ не понадобятся и относительно которыхъ необходимо только замѣтить, что $A_p^{(m)} = 0$, если $p < 1$, или $p > m$.

По замѣнѣ независимаго перемѣннаго уравненіе (21)′ обратится въ

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} \sum_{p=1}^{p=n-i} A_p^{(n-i)} z^{p-1} u_z^{(p)} + u = 0.$$

Развертывая эти суммы, отобравъ коэффиціенты при одинакихъ указателяхъ p и называя вновь параметры чрезъ p и i, получимъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n} z^{p-1} u^{(p)} \sum_{i=0}^{i=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} A_p^{(n-i)} + u = 0.$$

Но на основаніи указаннаго свойства коэффиціентовъ $A_p^{(n-i)}$:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} A_p^{(n-i)} = \sum_{i=0}^{i=n-p} (n-1)_i (nk+n)^{(i)} A_p^{(n-i)}.$$

Называя этотъ коэффиціентъ чрезъ B_p, дадимъ нашему уравненію видъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n} B_p z^{p-1} u_z^{(p)} + u = 0. \tag{22}$$

Взявъ отъ послѣдняго уравненія производную съ указателемъ $(-k)$ по z, имѣемъ:

$$\sum_{p=1}^{p=n} B_p D^{-k} z^{p-1} u^{(p)} + D^{-k} u = 0,$$

или произведя дифференцированіе по общей теоремѣ Ліувилля

$$\sum_{p=1}^{p=n} B_p \sum_{r=0}^{r=p-1} (-k)_r (p-1)^{(r)} z^{p-1-r} D^{-k-r} u^{(p)} + D^{-k} u = 0.$$

Развертывая суммы, суммируя сначала по вертикальнымъ линіямъ, а потомъ по горизонтальнымъ, и означая параметры чрезъ q и ϱ, послѣднее выраженіе можно представить въ видѣ:

$$\sum_{q=1}^{q=n} z^{q-1} D^q D^{-k} u \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-q} (-k)_\varrho (q+\varrho-1)^{(\varrho)} B_{q+\varrho} + D^{-k} u = 0.$$

Положимъ для краткости

$$\sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-q} (-k)_\varrho (q+\varrho-1)^{(\varrho)} B_{q+\varrho} = C_q$$

$$D_z{}^{-k} u = V, \tag{23}$$

тогда послѣднее уравненіе обратится въ такое

$$\sum_{q=1}^{q=n} C_q z^{q-1} V^{(q)} + V = 0. \tag{24}$$

На основаніи формулъ (20)′ и (23) зависимость между интегралами уравненій (20) и (24) будетъ:

$$y = x^{nk+n-1} D_z{}^{(k)} V. \tag{24′}$$

Поэтому, припомнивъ формулу (10), заключаемъ, что, если k есть ц ѣ л о е ч и с л о, то, сдѣлавъ въ уравненіи (24) снова замѣну независимаго перемѣннаго при помощи соотношенія

$$z = x^n$$

и положивъ $$V = x^{-(n-1)} y_k,$$

уравненіе (24) обратимъ въ такое

$$y_k^{(n)} + y_k = 0, \tag{25}$$

гдѣ $y_k^{(n)}$ означаетъ n-ую производную y_k по x. Во избѣжаніе новыхъ выкладокъ, можно поступить иначе. Именно, взявъ уравненіе (25), положимъ въ немъ

$$y_k = x^{(n-1)} V$$

и за тѣмъ сдѣлаемъ указанную замѣну независимаго перемѣннаго, тогда полученное уравненіе должно быть тождественно съ (24). Но такъ какъ уравненіе (25) получается изъ (20), полагая въ немъ $k=0$, то, очевидно, что искомое нами уравненіе будетъ тождественно съ уравненіемъ (22), если въ немъ положить $k=0$.

Сдѣлавъ это и замѣняя u чрезъ V и p чрезъ q, будемъ имѣть

$$\sum_{q=1}^{q=n} z^{q-1} V^{(q)} \sum_{i=0}^{i=n-q} (n-1)_i n^{(i)} A_q^{(n-i)} + V = 0. \tag{26}$$

И такъ, это уравненіе при k цѣломъ непремѣнно тождественно съ уравненіемъ (24).

Коль скоро такъ, то непремѣнно коэффиціенты при одинакихъ членахъ $z^{q-1} V^{(q)}$ въ обоихъ уравненіяхъ (24) и (26) должны быть тождественны, т. е.

$$C_q = \sum_{i=0}^{i=n-q} (n-1)_i n^{(i)} A_q^{(n-i)}. \tag{27}$$

Но при помощи соотношеній, приведенныхъ выше, C_q можно выразить чрезъ коэффиціенты A еще слѣдующимъ образомъ:

$$C_q = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=n-q} (-k)_\varrho (q+\varrho-1)^{(\varrho)} \sum_{i=0}^{i=q-\varrho} (n-1)_i A_{q+\varrho}^{(n-i)}. \tag{28}$$

Достаточно одного взгляда на эту формулу, чтобы замѣтить, что C_q есть цѣлая раціональная функція k вида:

$$C_q = E_q^{(0)} + E_q^{(1)}.k + E_q^{(2)}.k^3 + E_q^{(3)}.k^3 + \ldots. \quad (28')$$

Но, такъ какъ въ выраженіе для C_q k вовсе не входитъ, то заключаемъ, что тождественность выраженій (27) и (28) или (28′) возможна при единственномъ условіи (когда k не нуль), если коэффиціенты при различныхъ степеняхъ k тождественно равны нулю, т. е. необходимо:

$$E_q^{(1)} = E_q^{(2)} = E_q^{(3)} = \ldots\ldots = 0$$

и

$$C_q = E_q^{(0)}.$$

Въ томъ же самомъ можно убѣдиться непосредственно, если подставить въ формулу (28) извѣстныя значенія коэффиціентовъ A; но по сложности этихъ выраженій такой путь слишкомъ утомителенъ.

Однако, при выводѣ уравненія (24), мы не дѣлали никакихъ ограниченій относительно k и, понятно, что составъ коэффиціентовъ C_q (28) остается тотъ-же, будетъ-ли k цѣлое или какое-угодно постоянное, и разъ мы убѣдились, что въ (28′) коэффиціенты E_q тождественно равны нулю, исключая $E_q^{(0)}$, то заключаемъ, что и при какомъ угодно значеніи k, коэффиціенты C_q вовсе не зависятъ отъ k и выраженія (27) и (28) равны между собой; значитъ, и уравненіе (24) при *всякомъ* k тождественно съ уравненіемъ (26). А это послѣднее есть не что иное, какъ преобразованное уравненіе (25), интегралъ котораго извѣстенъ, именно:

$$y_k = \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i x}.$$

Слѣдовательно, интегралъ ур. (26) или что то-же (24) есть

$$V = z^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}$$

гдѣ c_i одно изъ произвольныхъ постоянныхъ; а отсюда изъ (24′) и видно, что интегралъ уравненія (20) при всякомъ значеніи k будетъ:

$$y = x^{nk+n-1} D_z{}^{(k)}\left(z^{-\frac{n-1}{n}} \sum_{i=0}^{i=n} c_i e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}\right);$$

или, принявъ прежнее обозначеніе, т. е. полагая $\alpha = -nk$, будемъ имѣть, что интегралъ уравненія (20), или что то-же (1), при какомъ угодно α равенъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x^{-(\alpha-n+1)} D_z^{-\frac{\alpha}{n}}\left(z^{-\frac{n-1}{n}} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}\right)_{z=\pm\infty}^{z=x^n}. \quad (29)$$

Эту формулу можно упростить, а именно, замѣтивъ, что

$$z^{-\frac{n-1}{n}} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{r_i} \frac{d}{dz} e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}$$

и отнеся множители $\frac{n}{r_i}$ къ произвольнымъ постояннымъ, получимъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} c_i x^{-\alpha+n-1} D^{-\frac{\alpha}{n}+1}\left(e^{r_i z^{\frac{1}{n}}}\right)_{z=\pm\infty}^{z=x^n}. \quad (29')$$

9. Выраженіе это при помощи извѣстныхъ формулъ дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ представляется въ видѣ опредѣленнаго интеграла[1]. Намъ достаточно найдти его только для случая $\alpha > n$, такъ какъ, если въ уравненіи (1) $\alpha < n$, то посредствомъ преобразованія, указаннаго въ § 1, всегда возможно выразить интегралъ этого уравненія чрезъ интегралъ

---

[1] См. статью г. *Лѣтникова* въ Матем. сборникѣ, Т. III, стр. 28—30, формулы (A) и (A′).

другаго уравненія того-же вида, въ которомъ уже соотвѣтственное $\alpha > n$. Искомое выраженіе будетъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \xi^{\frac{\alpha}{n}-2} e^{r_i x (1 \pm \xi)^{\frac{1}{n}}} . d\xi, \qquad (30)$$

гдѣ $\alpha > n$, ξ — вспомо ательное перемѣнное, знаки $\pm$ берутся, смотря по тому $r_i \lessgtr 0$, C_i — произвольное постоянное, отличное отъ предыдущаго.

Зная же интегралъ уравненія (1), при помощи формулъ (14) и (19) находимъ интегралы уравненій (12) и (15).

10. Извѣстно, что при $n = 2$, интегралъ уравненія (1) находится въ весьма простой зависимости съ трансцендентными функціями Бесселя. Именно, если въ уравненіи (1) положимъ $\alpha = 2i + 1$ и назовемъ интегралъ этого уравненія чрезъ y_i, а функцію Бесселя означимъ чрезъ $J_i(x)$, то

$$y_i = x^{-i} J_i(x). \qquad (a)$$

Предыдущій анализъ обнаруживаетъ, что и при какомъ угодно n функціи, связанныя съ интеграломъ уравненія (1) посредствомъ зависимости (a), обладаютъ свойствами, аналогичными со свойствами функцій Бесселя. Основныя изъ нихъ легко выводятся изъ равенствъ (7), (8), (9) и (10). Полагая въ уравненіи (1)

$$\alpha = ni + (n-1)$$

и принявъ во вниманіе равенства (a), изъ формулы (7) имѣемъ:

$$J_{i-1}(x) = DJ_i(x) + \frac{(n-1)i}{x} J_i(x) \qquad (b)$$

изъ (8): $$D^{(n-1)}\Big(x^{-i}J_i(x)\Big) + x^{-i}J_{i-1}(x) = 0 \qquad (c)$$

изъ (9): $$D^{-ni}\left(x^{-(i-1)}J_{i-1}(x)\right)=xD^{-ni+1}\left(x^{-i}J_i(x)\right).\quad \text{(d)}$$

изъ (10): $$D^{(k)}\left(z^{\frac{n-1}{n}(i+k)}J_{i+k}(\sqrt[n]{z})\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{n}\right)^k z^{\frac{(n-1)}{n}i}J_i(\sqrt[n]{z}).\quad \text{(e)}$$

При $n=2$ эти зависимости выражаютъ извѣстныя свойства функцій Бесселя[1].

11. Пріемъ, изложенный въ § 1, можетъ быть примѣненъ къ разысканію случаевъ интегрируемости въ конечной формѣ многихъ другихъ уравненій. Изъ нихъ мы укажемъ слѣдующее:

$$y^{(n)}+\frac{\alpha}{x}y^{(n-1)}+\beta x^{\mu}.y=0,\qquad \text{(a)}$$

гдѣ α, β и μ — постоянныя. Въ самомъ дѣлѣ, умноживъ обѣ части этого уравненія на x^{α}, интегрируя и отбрасывая произвольное постоянное, получимъ:

$$x^{\alpha}y^{(n-1)}+\beta\int x^{\alpha+\mu}ydx=0.$$

Полагая $$\int x^{\alpha+\mu}ydx=x^{\alpha+\mu+1}y_1,$$

исключая изъ послѣднихъ двухъ уравненій y, и за-тѣмъ, повторивъ тотъ-же рядъ операцій k разъ, мы придемъ къ такому уравненію:

$$y_k^{(n)}+\frac{\alpha+k(\mu+n)}{x}y_k^{(n-1)}+\beta x^{\mu}y_k=0.\qquad (\text{a}_k)$$

---

[1] См. *J. Todhunter*, «An elementary treatise on Laplace's functions, Lamé's functions and Bessel's functions». 1875. § 386 и § 391.

Если извѣстенъ интегралъ одного изъ уравненій (a) или (a_k), то не трудно будетъ найдти интегралъ другаго.

Примѣръ 1. Извѣстно, что уравненіе

$$y^{(n)} + \beta x^{-2n} y = 0,$$

интегрируется въ конечной формѣ (въ этомъ легко убѣдиться, положивъ $x = -\frac{1}{z}$). Зная же это, изъ разсмотрѣнія уравненій (a) и (a_k) слѣдуетъ, что и уравненіе

$$y^{(n)} \pm \frac{nk}{x} y^{(n-1)} + \beta x^{-2n} y = 0, \qquad \text{(b)}$$

интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если k цѣлое.

Въ этомъ же можно убѣдиться, если въ уравненіи (1) сдѣлать замѣну независимаго перемѣннаго по формулѣ $x = -\frac{1}{z}$.

Примѣръ 2. Найдемъ случаи интегрируемости уравненія:

$$y''' + \frac{3(i+1)}{x} y'' + \beta x^{\mu} y = 0. \qquad \text{(c)}$$

Положивъ
$$x = z^{-\frac{1}{3i+1}},$$

получимъ

$$y''' + \frac{3(2i+1)}{3i+1} \frac{1}{z} y'' + \beta_1 z^{\mu_1} y = 0, \qquad \text{(c')}$$

гдѣ производныя отъ y взяты по z и

$$\mu_1 = -\frac{\mu + 3(3i+2)}{3i+1}, \quad \beta_1 = -\frac{\beta}{(3i+1)^3}.$$

Отъ уравненія (c') при помощи m операцій, указанныхъ въ началѣ этого параграфа, переходимъ къ такому уравненію

$$y_m''' + \frac{\lambda}{z} y_m'' + \beta_1 z^{\mu_1} y_m = 0\,, \qquad (c'_m)$$

гдѣ
$$\lambda = \frac{3(2i+1) - m(\mu+3)}{3i+1}.$$

Замѣтивъ, что уравненіе (c) интегрируется конечнымъ числомъ членовъ, если i — цѣлое, а $\mu=0$ или $\mu=-6$, находимъ два уравненія вида (c'_m) тоже интегрируемыя, которыя, какъ не трудно видѣть, заключаются въ одномъ слѣдующемъ:

$$y''' + \frac{3k}{3i+1}\frac{1}{z}y'' + \beta_1 z^{-3\pm\frac{3}{3i+1}}.y = 0\,, \qquad (d)$$

гдѣ k и i — какія угодно положительныя или отрицательныя цѣлыя числа[1].

---

[1] Уравненіе (d) есть частный случай уже разсмотрѣннаго нами уравненія: $x^2y''' + Axy'' + By' + Cx^{\mu}y = 0$. См. Сообщенія мат. общ. за 1883 годъ. Вып. II, стр. 115—126. При $k=0$ ур. (d) тождественно съ изученнымъ г. Флоровымъ. См. тамъ-же стр. 129—133.

О ЗНАЧЕНІИ,

КАКОЕ МОЖНО ПРИДАТЬ ВЪ ДИНАМИКѢ ВТОРОЙ ВАРІАЦІИ ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ ГАМИЛЬТОНА И НАИМЕНЬШАГО ДѢЙСТВІЯ.

П. М. Новикова.

Пусть дана система n матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собою p условіями; выразимъ $3n$ координатъ точекъ системы черезъ $3n-p=m$ количествъ, такъ чтобы связи были тождественно удовлетворены; тогда эти m количествъ, которыя мы обозначимъ черезъ $q_1, q_2, \ldots q_m$, будутъ представлять собою независимыя координаты системы, называемыя координатными параметрами или обобщенными координатами. Если система подвержена дѣйствію силъ, имѣющихъ потенціалъ, то, какъ извѣстно, дифференціальныя уравненія движенія системы приводятъ къ нулю первую варіацію интеграла

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt\,, \tag{1}$$

гдѣ T — живая сила системы, U — потенціалъ силъ и интеграція берется между двумя моментами времени, въ которые положенія системы даны.

Обратно, условіе, что 1-я варіація интеграла (1) равна нулю

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = 0, \qquad (2)$$

приводитъ къ дифференціальнымъ уравненіямъ движенія, которыя, принимая для краткости

$$T+U=P,$$

въ вышеупомянутыхъ обобщенныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_1'}-\frac{\partial P}{\partial q_1}=0,\ \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_2'}-\frac{\partial P}{\partial q_2}=0,\ \ldots.$$

$$\ldots.\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_m}-\frac{\partial P}{\partial q_m}=0, \qquad (3)$$

гдѣ $q'_1, q'_2 \ldots q'_m$, какъ вообще, обозначаютъ производныя координатъ.

Мы здѣсь постараемся показать, что и вторая варіація интеграла (1) имѣетъ важное значеніе въ динамикѣ, именно по отношенію къ такъ называемой устойчивости движенія.

Если скорости или координаты движущейся системы матеріальныхъ точекъ будутъ въ какое нибудь мгновеніе безконечно-мало измѣнены, то точки системы станутъ описывать другія траэкторіи, различныя отъ тѣхъ, которыя бы онѣ описали, если бы не было произведено этихъ безконечно-малыхъ измѣненій координатъ и скоростей. Совокупность измѣненныхъ траэкторій можетъ быть названа возмущеннымъ путемъ системы, совокупность же неизмѣнныхъ траэкторій точекъ системы назовемъ невозмущеннымъ путемъ. Если послѣ возмущенія положенія системы на возмущенномъ пути будутъ безконечно-мало разниться отъ положеній, которыя бы система имѣла въ то же время на невозмущенномъ пути, то движеніе системы на невозмущенномъ пути называется устойчивымъ; если же положенія точекъ на возмущенномъ пути системы съ теченіемъ времени будутъ удаляться все больше и больше до конечнаго или безконечно-большаго разстоянія отъ одновременныхъ положеній на невозмущенномъ пути, то движеніе системы называется неустойчивымъ[1].

Такъ какъ въ возмущенномъ пути координаты системы будутъ разниться отъ координатъ невозмущеннаго, то, обозначая ихъ черезъ $q_1 + \delta q_1$, $q_2 + \delta q_2 \ldots\ldots q_n + \delta q_n$ и вставляя въ уравненія (3) вмѣсто $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$, получимъ уравненія движенія на возмущенномъ пути. Развернувъ правыя части такимъ образомъ полученныхъ уравненій по степенямъ $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$ и изъ производныхъ, отбросивъ члены, содержащіе степени этихъ количествъ выше первой степени, такъ какъ мы, имѣя въ виду опредѣлить условія устойчивости, предполагаемъ, что эти количества сохраняютъ во время движенія безконечно-малыя значенія; вычитая наконецъ изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій почленно уравненія (3), получимъ уравненія линейныя по отношенію къ δq_1, $\delta q_2, \ldots \delta q_n$, изъ которыхъ могутъ быть опредѣлены какъ эти величины, такъ и условія, при которыхъ они сохраняютъ безконечно-малыя значенія. Полученныя въ концѣ линейныя по отношенію къ $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$ дифференціальныя уравненія, оче-

[1] Существуютъ еще другія опредѣленія устойчивости, разнящіяся отъ вышеприведеннаго. Такъ, устойчивымъ называется такое движеніе, въ которомъ возмущенный путь всегда остается безконечно близкимъ къ невозмущенному, хотя бы при этомъ одновременныя положенія системы на невозмущенномъ и возмущенномъ путяхъ и расходились въ теченіи времени на конечное или безконечное разстояніе. Такую устойчивость можно назвать устойчивостью по отношенію къ пространству. Частный случай ея представляетъ консервативная устойчивость, разсматриваемая въ «Natural Philosophy» Томсона и Тэта. Въ моемъ сообщеніи на съѣздѣ естеств. и врач. въ Одессѣ я, имѣя въ виду показать связь между свойствами движенія и свойствами интеграла наименьшаго дѣйствія, назвалъ устойчивымъ такое движеніе, въ которомъ невозмущенный путь имѣетъ общія положенія съ возмущеннымъ. Подробный разборъ различныхъ видовъ устойчивости будетъ представленъ въ имѣющей скоро появиться моей работѣ объ этомъ предметѣ.

видно, представляютъ собою не что иное какъ первыя варіаціи уравненій (3) по координатамъ и могутъ быть изображены такимъ образомъ:

$$\delta\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_1'}-\frac{\partial P}{\partial q_1}\right)=0,\ \delta\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q_2'}-\frac{\partial P}{\partial q_2}\right)=0,\ldots$$

$$\ldots\delta\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_n}-\frac{\partial P}{\partial q_n}\right)=0. \qquad (4)$$

Варьируя на самомъ дѣлѣ, мы получимъ дифференціальныя линейныя уравненія, изъ которыхъ опредѣлятся условія устойчивости и безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго. Эти уравненія можно, въ виду ихъ свойствъ, назвать дифференціальными уравненіями устойчивости движенія.

Принимая во вниманіе, что первая варіація опредѣленнаго интеграла (1) можетъ быть представлена въ видѣ

$$\delta\int P\,dt=\int\left\{\left(\frac{\partial P}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_1}\right)\delta q_1+\left(\frac{\partial P}{\partial q_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_2}\right)\delta q_2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{\partial P}{\partial q_n}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_n}\right)\delta q_n\right\}dt,$$

можемъ, какъ извѣстно, вторую варіацію выразить такъ:

$$\delta^2\int P dt=\int\left\{\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_1}\right)\delta q_1+\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_2}\right)\delta q_2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_n}-\frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_n}\right)\delta q_n\right\}dt, \qquad (5)$$

гдѣ, какъ и въ предыдущемъ, интеграція берется между начальнымъ и конечнымъ моментомъ и положенія системы для этихъ моментовъ считаются данными; знаки же предѣловъ опущены для краткости.

Изъ сопоставленія выраженія (5) съ уравненіями устойчивости (4) мы можемъ вывести слѣдующую теорему. Безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго, если они удовлетворяютъ предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую варіацію Гамильтонова интеграла къ нулю. Можно эту теорему представить въ нѣсколько другой формѣ. Вторая варіація опредѣленнаго интеграла $\int_{t_0}^{t_1} Pdt$, какъ извѣстно, можетъ быть приведена къ формѣ

$$\delta^2\int Pdt = \int\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial q_1'^2}\omega_1^{\ 2} + 2\frac{\partial^2 P}{\partial q_1'\partial q_2'}\omega_1\omega_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2'^2}\omega_2^{\ 2} + 2\frac{\partial^2 P}{\partial q_1'\partial q_3'}\omega_1\omega_3 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial q_2'\partial q_3'}\omega_2\omega_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3'^2}\omega_3^{\ 2} + \ldots\right\}dt, \quad (6)$$

гдѣ $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ извѣстныя линейныя функціи варіацій координатъ и ихъ первыхъ производныхъ.

Принимая во вниманіе, что $P = T + U$, гдѣ U не содержитъ производныхъ координатъ, имѣемъ

$$\delta^2\int Pdt = \int\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial q_1'^2}\omega_1^{\ 2} + 2\frac{\partial^2 T}{\partial q_1'\partial q_2'}\omega_1\omega_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 T}{\partial q_2'^2}\omega_2 + 2\frac{\partial^2 T}{\partial q_1'\partial q_3'}\omega_1\omega_3 + \ldots\right\}dt.$$

Здѣсь подъ знакомъ интеграла находится не что иное какъ значеніе T, которое оно получитъ, когда мы замѣнимъ $q'_1, q'_2, \ldots q'_n$ черезъ $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$; но T, какъ живая сила системы матеріальныхъ точекъ, при всѣхъ значеніяхъ производныхъ координатъ $q_1, q_2 \ldots q_n$, не можетъ сдѣлаться отрицательною величиной и наименьшее ея значеніе будетъ нуль; поэтому нулевое значеніе второй варіаціи Гамильтонова интеграла будетъ наименьшимъ значеніемъ этой варіаціи. Отсюда предыдущая теорема можетъ быть высказана такъ: Безконечно малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго, удовлетворяющія предѣльнымъ условіямъ, приводятъ вторую варіацію Гамильтонова интеграла къ минимуму (I).

Съ другой стороны, беря вторую варіацію Гамильтонова интеграла въ простѣйшей формѣ, которая не подверглась еще никакимъ преобразованіямъ, имѣемъ:

$$\delta^2 \int P dt = \int \Big\{ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1^{\,2}} \delta q_1^{\,2} + 2\frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2^{\,2}} \delta q_2^{\,2} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_3} \delta q_1 \delta q_3 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_3} \delta q_2 \delta q_3 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_3^{\,2}} \delta q_3^{\,2} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_1} \delta q_1 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_2} \delta q_1 \delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_n} \delta q_2 \delta q'_n +$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_1} \delta q_2 \delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_2} \delta q_2 \delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_n} \delta q_2 \delta q'_n +$$

$$\ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'^{\,2}_1} \delta q'^{\,2}_1 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_2} \delta q'_1 \delta q'_2 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'^{\,2}_2} \delta q'^{\,2}_2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_3} \delta q'_1 \delta q'_3 + \ldots \Big\} dt. \qquad (7)$$

Опредѣлимъ условія, при которыхъ вторая варіація интеграла $\int P dt$, представленная въ формѣ (7), получаетъ значеніе минимумъ по отношенію къ произвольнымъ варіаціямъ координатъ; иначе говоря, предполагая въ (7) всѣ вторыя производныя P выраженными во времени съ помощью рѣшеній дифференціальныхъ уравненій движенія (3), опредѣлимъ—при какихъ функціональныхъ значеніяхъ $\delta q_1, \delta q_2 \ldots \delta q_n$, разсматриваемыхъ какъ произвольныя функціи t, $\delta^2 \int P dt$, получитъ наименьшее значеніе. Поступая по общимъ правиламъ варіаціоннаго исчисленія, получимъ n дифференціальныхъ уравненій, которыя можно представить въ слѣдующей типической формѣ:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q_i}\delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q_i}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q_i}\delta q_n +$$

$$+ \frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q_i}\delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q_i}\delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q_i}\delta q'_n -$$

$$-\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial q_1 \partial q'_i}\delta q_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q_2 \partial q'_i}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q_n \partial q'_i}\delta q_n +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 P}{\partial q'_1 \partial q'_i}\delta q'_1 + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_2 \partial q'_i}\delta q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial q'_n \partial q'_i}\delta q'_n\right\} = 0, \quad (8)$$

полагая здѣсь $i = 1, 2, \ldots n$, получимъ всѣ n дифференціальныхъ уравненій задачи варіаціоннаго исчисленія въ ея приложеніи къ данному случаю. Уравненія (8) можно представить, очевидно, въ весьма сжатомъ видѣ, именно

$$\delta\left(\frac{\partial P}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial q'_i}\right) = 0 \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \ldots n;$$

но эти послѣднія суть не что иное, какъ уравненія устойчивости движенія. Такимъ образомъ мы пришли къ теоремѣ: **Условія, которыя должны быть выполнены для того, чтобы вторая варіація Гамильтонова интеграла получила значеніе minimum, представляютъ собою уравненія устойчивости, т. е. уравненія, изъ которыхъ опредѣляются безконечно-малыя отклоненія возмущеннаго пути отъ невозмущеннаго (II).**

Такъ какъ наименьшее значеніе второй варіаціи есть нуль, то эту теорему можно перефразировать подобно предыдущей, замѣнивъ только слова «значеніе minimum» словами «нулевое значеніе».

Эти двѣ теоремы (I) и (II) вмѣстѣ представляютъ новый второстепенный принципъ динамики, который можно назвать принципомъ второй варіаціи Гамильтонова интеграла. Принципъ второй варіаціи имѣетъ то же значеніе для устойчивости движенія, какое принципъ самого Гамильтонова интеграла имѣетъ для самого движенія. Аналогія между этими двумя принципами до-того велика, что выраженіе принципа Гамильтона переходитъ въ выраженіе принципа второй варіаціи; стоитъ только въ первомъ подставить вмѣсто интеграла его вторую варіацію и вмѣсто координатъ ихъ варіаціи. Тѣ-же самыя разсужденія и выводы, очевидно, приложимы и къ интегралу наименьшаго дѣйствія, который для большей наглядности можно представлять себѣ въ формѣ данной Якоби, т. е. исключить изъ интеграла время посредствомъ уравненія сохраненія энергіи. Но такъ какъ начало наименьшаго дѣйствія требуетъ сохраненія постоянной полной энергіи, то возмущенія движенія должны неизмѣнять живой силы системы; такія возмущенія называются консервативными; если кромѣ возмущеній будутъ еще и смѣщенія, то совокупность смѣщеній и возмущеній не должна мѣнять полной энергіи системы. Сверхъ того, такъ какъ, представивъ интегралъ наименьшаго дѣйствія въ формѣ Якоби, мы исключаемъ время, то изслѣдуемая устойчивость будетъ относиться только къ пространству. Обѣ предыдущія теоремы сохраняютъ свою форму за исключеніемъ замѣны Гамильтонова интеграла интеграломъ наименьшаго дѣйствія.

О РАЗЛОЖЕНИИ ВЪ РЯДЪ МАКЛОРЕНА НѢКОТОРЫХЪ ФУНКЦІЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

И. Пташицкаго.

Эрмитъ въ своемъ «Cours d'analyse de l'école polytechnique» на 64-й стр. указываетъ на нѣсколько разложеній функцій отъ двухъ перемѣнныхъ въ рядъ Маклорена. Указанныя Эрмитомъ разложенія тѣмъ интересны, что въ нихъ коэффиціенты приведены къ очень простому виду, между тѣмъ какъ привести ихъ къ этому виду довольно трудно, если для полученія коэффиціентовъ пользоваться общимъ пріемомъ, т. е. если вычислять ихъ съ помощью производныхъ.

Въ настоящей замѣткѣ я указываю на два весьма элементарныхъ пріема, которые позволяютъ, пользуясь разложеніями функцій отъ одной перемѣнной, получить разложенія Эрмита.

Съ помощью тѣхъ же пріемовъ, какъ легко видѣть, можно найти разложенія многихъ другихъ функцій отъ двухъ и болѣе перемѣнныхъ, причемъ коэффиціенты въ этихъ разложеніяхъ будутъ выражены въ простомъ видѣ, между тѣмъ какъ приведеніе ихъ къ такому виду иногда очень затруднительно, если для ихъ вычисленія пользоваться общимъ пріемомъ.

I.

Пусть

$$f_1(x,u),\ f_2(y,u),\ f_3(z,u),\ldots, \qquad (1)$$

разсматриваемыя какъ функціи отъ перемѣнныхъ

$$x,\ y,\ z,\ldots,$$

разлагаются въ рядъ Маклорена, такъ что

$$f_1(x,u)=\sum\varphi_1^{(m)}(u).x^m,\ f_2(y,u)=\sum\varphi_2^{(n)}(u).y^n,$$

$$f_3(z,u)=\sum\varphi_3^{(p)}(u).z^p,\ \ldots;$$

тогда $\Phi(x,y,z,\ldots)$, функція отъ перемѣнныхъ $x,y,z,\ldots$, опредѣляемая равенствомъ

$$\Phi(x,y,z,\ldots)=\int_a^b f_1(x,u).f_2(y,u).f_3(z,u)\ldots du, \qquad (2)$$

будетъ разлагаться въ рядъ Маклорена, а именно:

$$\Phi(x,y,z,\ldots)=\sum A_{(m,n,p\ldots)}\,x^m y^n z^p\ldots, \qquad (3)$$

гдѣ

$$A_{(m,n,p\ldots)}=\int_a^b \varphi_1^{(m)}(u).\varphi_2^{(n)}(u).\varphi_3^{(p)}(u)\ldots du. \qquad (4)$$

Если теперь выбирать функціи (1) такъ, чтобы интегралъ (2) выражался въ конечномъ видѣ и чтобы интегралы (4) выражались особенно просто, то мы будемъ получать сейчасъ же разложенія (3) въ рядъ Маклорена нѣкоторыхъ функцій отъ многихъ перемѣнныхъ и въ этихъ разложеніяхъ коэффиціенты будутъ выражаться особенно просто.

Примѣры. 1) Пусть

$$f_1(x,u)=\frac{1}{1-xu}=\sum x^m u^m,$$

$$f_2(y,u)=\frac{1}{1-y(1-u)}=\sum y^n(1-u)^n;$$

$$a=0,\quad b=1;$$

такъ что интегралы (2), (4) соотвѣтственно равны

$$\int_0^1 \frac{1}{1-xu}\cdot\frac{1}{1-y(1-u)}\,du\,,\quad \int_0^1 u^m(1-u)^n du\,.$$

Такъ-какъ значенія ихъ соотвѣтственно приводятся къ

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y}\,,\quad \frac{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(m+n+1)}\,,$$

то равенство (3) даетъ

$$\frac{\log(1-x)(1-y)}{xy-x-y}=\sum\frac{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots(m+n+1)}x^m y^n.$$

Это третій рядъ Эрмита.

2) Пусть

$$f_1(x,u)=\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1-xu}=\sum u^{m-\frac{1}{2}}x^m,$$

$$f_2(y,u)=\frac{(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1-y(1-u)}=\sum(1-u)^{n-\frac{1}{2}}y^n,$$

$$a=0,\quad b=1;$$

такъ что интегралы (2), (4) соотвѣтственно равны

$$\int_0^1 \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{1-xu} \cdot \frac{(1-u)^{-\frac{1}{2}}}{1-y(1-u)}\, du\,, \quad \int_0^1 u^{m-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-\frac{1}{2}}\, du\,.$$

Значеніе перваго изъ нихъ выражается въ конечномъ видѣ; значеніе втораго, какъ извѣстно, представляется очень просто. Подставляя эти значенія въ равенство (3), находимъ

$$\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}+(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sum \frac{1.3.5\ldots(2m-1).1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2(m+n)} x^m y^n.$$

Это первый рядъ Эрмита.

II.

Пусть

$$\varphi_m(y) \qquad (1)$$

функціи отъ перемѣнной y, разлагающіяся въ рядъ Маклорена, такъ что

$$\varphi_m(y) = \sum A_n^{(m)} y^n;$$

тогда $\Phi(x,y)$, функція отъ перемѣнныхъ x, y, опредѣляемая равенствомъ

$$\Phi(x,y) = \sum \varphi_m(y) . x^m \quad (m \text{ цѣлое и полож.}), \quad (2)$$

будетъ разлагаться въ рядъ Маклорена, а именно:

$$\Phi(x,y) = \sum A_n^{(m)} x^m y^n =$$

$$= \sum (A_0^{(m)} + A_1^{(m)} y + A_2^{(m)} y^2 + \ldots.) x^m. \quad (3)$$

*

Если теперь выбирать функціи (1) такъ, чтобы коэффиціенты $A_n^{(m)}$ выражались особенно просто и чтобы сумма ряда (2) опредѣлялась легко, то мы будемъ получать сейчасъ же разложенія (3) нѣкоторыхъ функцій отъ перемѣнныхъ x, y, и въ этихъ разложеніяхъ коэффиціенты будутъ выражаться особенно просто.

Примѣры. 1) Пусть

$$\varphi_m(y) = \frac{1}{1.2.3\ldots m}\,\frac{d^m\{[f(c)]^m F(c)\}}{dc^m},$$

гдѣ

$$f(c) = c^2\,,\quad F(c) = \frac{1}{1-cy}\,,$$

такъ что

$$\varphi_m(y) = \sum \frac{(2m+n)(2m+n-1)\ldots(m+n+1)\,.\,c^{m+n}}{1.2.3\ldots m}\,y^n.$$

При нашемъ выборѣ $\varphi_m(y)$, сумма ряда (2), какъ извѣстно, будетъ

$$F(z)\,\frac{dz}{dc}\,,$$

гдѣ

$$z = c + xz^2\,;$$

т. е. она приводится къ

$$\frac{1+(1-4cx)^{-\frac{1}{2}}}{1-2cy+(1-4cx)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Слѣдовательно равенство (3) даетъ

$$\frac{1+(1-4cx)^{-\frac{1}{2}}}{1-2cy+(1-4cx)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\sum\frac{(2m+n)(2m+n-1)\ldots(m+n+1)\,.c^{m+n}}{1.2.3\ldots m}x^m y^n.$$

Этотъ рядъ обращается во второй рядъ Эрмита, если въ немъ положить $c=1$ и на мѣсто x, y соотвѣтственно подставить $\frac{x^2}{2^2}$, $\frac{y}{2}$.

2) Пусть

$$\varphi_m(y)=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{y^{m+1}dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

такъ что, какъ извѣстно,

$$\varphi_m(y)=\frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5\ldots(2m+1)}\Big(1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1.3}{2.4}y^4+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}y^{2m}\Big).$$

При нашемъ выборѣ $\varphi_m(y)$ сумма ряда (2) легко можетъ быть опредѣлена. Въ самомъ дѣлѣ, она не что иное какъ

$$\sum\frac{-x^m}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{y^{m+1}dy}{\sqrt{1-y^2}}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\sum x^m y^{2m+1}=\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\int\frac{ydy}{(1-xy^2)\sqrt{1-y^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1-y^2)}}\,.\,\text{arc cos}\sqrt{\frac{1-x}{1-xy^2}}.$$

Слѣдовательно равенство (3) даетъ

$$\frac{\arccos\sqrt{\dfrac{1-x}{1-xy^2}}}{\sqrt{x(1-x)(1-y^2)}}=$$

$$=\sum\frac{2.4\ldots.\,2m}{3.5\ldots.(2m+1)}\Big(1+\frac{1}{2}y^2+\frac{1.3}{2.4}y^4+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{2.4.6\ldots.\,2m}y^{2m}\Big)x^m.$$

Этотъ рядъ обращается въ четвертый рядъ Эрмита, если въ немъ подставить $\frac{y}{x}$ на мѣсто y^2.

3) Пусть

$$\varphi_m(y)=\frac{-1}{y\sqrt{1-y^2}}\int\frac{y^{2m+2}dy}{\sqrt{1-y^2}}+$$

$$+\frac{1}{y\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{1.3.5\ldots.(2m+1)}{2.4.6\ldots.(2m+2)}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Поступая въ этомъ примѣрѣ подобнымъ образомъ, какъ въ предыдущемъ, послѣ замѣны въ окончательномъ результатѣ y^2 на $\frac{y}{x}$, получимъ пятый рядъ Эрмита.

ЗАМѢТКА

ОБЪ ОБОБЩЕНІИ УРАВНЕНІЯ РИКАТТИ.

В. П. Алексѣевскаго.

Разысканіе условій, при которыхъ уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^2 + R = 0 \qquad (1)$$

можетъ быть проинтегрировано конечнымъ числомъ квадратуръ, привело профессора А. В. Лѣтникова къ извѣстному уравненію[1], изъ котораго при частныхъ допущеніяхъ получается уравненіе Рикатти, а также уравненіе Мальмстена, Кокля, и другія уравненія, представляющія обобщеніе уравненіе Рикатти[2].

Въ виду этого можно задаться такою задачей: зная, при какихъ условіяхъ уравненіе Рикатти интегрируется конечнымъ числомъ квадратуръ, найдти общее уравненіе вида (1), интеграція котораго возможна.

Слѣдующія разсужденія весьма просто разрѣшаютъ эту задачу и приводятъ къ уравненію профессора Лѣтникова.

Уравненіе Рикатти

---

[1] См. дальше ур. (5).

[2] См. статью А. В. Лѣтникова въ Математическомъ сборникѣ за 1866 годъ.

$$\frac{dy}{dz} + ay^2 = bz^m$$

интегрируется, если

$$m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$$

гдѣ i цѣлое положительное число. Сдѣлавъ въ немъ замѣну независимаго перемѣннаго, т. е. положивъ

$$z = \varphi(x), \qquad (2)$$

и означая производную отъ z по x чрезъ $\varphi'(x)$, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} + a\varphi'(x)y^2 = b\varphi'(x).\varphi(x)^{-\frac{4i}{2i \pm 1}}$$

Полагая здѣсь

$$y = uy_1 \qquad (3)$$

гдѣ u есть произвольная функція отъ x, а y_1 новое независимое перемѣнное, находимъ:

$$\frac{dy_1}{dx} + a\varphi'(x).uy_1^{\,2} + \frac{u'}{u}y_1 = b.\frac{\varphi'(x).\varphi(x)^{-\frac{4i}{2i \pm 1}}}{u} \qquad (4)$$

Это и есть искомое уравненіе вида (1). Если положить

$$\varphi'(x)u = X_1\ ,\ \frac{u'}{u} = X_2\ ,\ a = b = 1\ ,$$

откуда

$$u = e^{\int X_2 dx}\ ,\ \varphi(x) = c + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx\ ,$$

то уравненіе (4) принимаетъ видъ уравненія профессора Лѣтникова, именно:

$$\frac{dy_1}{dx} + X_1 y_1^2 + X_2 y_1 -$$

$$- \frac{X_1 e^{-2\int X_2 dx}}{\left(c + \int X_1 e^{-\int X_2 dx} dx\right)^{\frac{4i}{2i \pm 1}}} = 0. \qquad (5)$$

Если бы вмѣсто подстановки (3) мы положили

$$y = uy_1 + v,$$

то получили бы уравненіе вида (1), содержащее три произвольныя функціи u, v, $\varphi(x)$.

Изъ предыдущаго же ясно, что для интеграціи уравненія (4) или, что то-же, (5) достаточно ихъ обратить въ уравненіе Рикатти, что легко сдѣлать, пользуясь формулами (2) и (3).

ОПРЕДѢЛЕНІЕ

нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля.

А. А. Маркова.

Задача.

Опредѣлить коэффиціенты

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

цѣлой функціи отъ x

$$y = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

такъ, чтобы наибольшее численное значеніе отношенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}},$$

гдѣ $f(x)$ нѣкоторая данная цѣлая функція отъ x не выше какъ $2n$-ой степени

$$f(x) = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \ldots (1 + a_{2n} x)$$

и x получаетъ всѣ значенія между -1 и $+1$, было какъ можно меньше.

Примѣчаніе.

Вопросъ этотъ принадлежитъ къ числу тѣхъ, для рѣшенія которыхъ мы не имѣемъ никакихъ общихъ пріемовъ, кромѣ указанныхъ П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ «Sur les questions de Minima etc.».

Вмѣстѣ съ тѣмъ онъ представляетъ обобщеніе двухъ вопросовъ, рѣшенныхъ въ только что упомянутомъ мемуарѣ. На этомъ частномъ примѣрѣ я имѣю въ виду показать, что для всѣхъ разобранныхъ до сихъ поръ примѣровъ основныя разсужденія П. Л. Чебышева[1] могутъ быть замѣнены болѣе элементарными и наглядными.

По примѣру П. Л. Чебышева требованіе нашей задачи можно формулировать такъ: отношеніе $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$ должно наименѣе уклоняться отъ нуля.

Замѣтимъ еще, что одни изъ данныхъ чиселъ

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$$

могутъ быть вещественными, другія мнимыми.

Я предполагаю только, что произведеніе

$$(1 + a_1x)(1 + a_2x) \ldots\ldots (1 + a_{2n}x)$$

приводится къ вещественной функціи отъ x и не обращается въ нуль ни при какихъ значеніяхъ x между -1 и $+1$.

Выводъ дифференціальнаго уравненія.

По примѣру Е. И. Золотарева[2] приведемъ вопросъ нашъ къ интегрированію нѣкотораго дифференціальнаго уравненія.

Пусть будутъ

---

[1] Sur les questions de Minima etc. 1858. Théorème 1.

[2] Приложеніе эллиптическихъ функцій и пр. 1877.

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \ldots . \leqq \alpha_{m-1} \leqq \alpha_m$$

всѣ корни уравненія

$$y = 0,$$

лежащіе между -1 и $+1$, причемъ двукратные корни считаются дважды, трехкратные трижды и т. д.

Нетрудно убѣдиться, что m должно равняться n.

Въ противномъ случаѣ, полагая

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots . . (x-\alpha_m) = \omega(x)$$

и

наименьшее численное значеніе $\frac{y}{\omega(x)} = k, \left[-1 \leqq x \leqq +1\right]$,

можно составить функцію

$$\frac{y \mp k\omega(x)^*}{\sqrt{f(x)}},$$

удовлетворяющую всѣмъ условіямъ вопроса и при $-1 \leqq x \leqq +1$

менѣе уклоняющуюся отъ нуля, чѣмъ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Наибольшія отклоненія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

отъ нуля соотвѣтствуютъ

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, +1.$$

---

* Изъ двухъ знаковъ $\mp$ передъ $k\omega(x)$ надо взять $-$, если между $x = -1$ и $x = +1$ отношеніе $\frac{y}{\omega(x)}$ число положительное, и $+$ въ противномъ случаѣ.

Здѣсь

$$\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{n-1}$$

означаютъ корни уравненія

$$d\frac{\frac{y}{\sqrt{f(x)}}}{dx} = \frac{y'f(x) - \frac{1}{2}yf'(x)}{\{\sqrt{f(x)}\}^3} = 0,$$

и лежатъ соотвѣтственно между

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2, \ \alpha_2 \text{ и } \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_{n-1} \text{ и } \alpha_n.$$

Если въ одномъ изъ этихъ промежутковъ приходится нѣсколько корней уравненія

$$y'f(x) - \frac{1}{2}yf'(x) = 0,$$

то мы выбираемъ изъ этихъ корней одинъ и притомъ такой, какому соотвѣтствуетъ наибольшее численное значеніе $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$.

Всѣ полученныя такимъ образомъ наибольшія отклоненія нашей функціи отъ нуля должны быть равны между собой. Въ противномъ случаѣ можно составить другую функцію того же вида, менѣе отклоняющуюся отъ нуля.

Пусть напримѣръ наибольшее отклоненіе нашей функціи отъ нуля равно L' въ промежуткѣ отъ $x=\alpha_k$ до $x=\alpha_{k+1}$ и L въ промежуткѣ отъ $x=-1$ до $x=\alpha_k$ и отъ $x=\alpha_{k+1}$ до $x=1$, причемъ $L > L'$.

Составимъ функцію

$$\omega(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots\ldots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_{k+2})\ldots$$

$$\ldots\ldots(x-\alpha_n) = \frac{y}{(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1})},$$

которая сохраняетъ знакъ одинаковый съ y.

$$\text{при} -1 \leqq x < \alpha_k \text{ и при } \alpha_{k+1} < x \leqq +1.$$

Положимъ затѣмъ

наибольшее численное значеніе $\dfrac{\omega(x)}{\sqrt{f(x)}} = h; [-1 \leqq x \leqq +1]$.

Тогда не трудно видѣть, что функція

$$y = \frac{\dfrac{L-L'}{h}\,\omega(x)}{\sqrt{f(x)}}.$$

при $-1 \leqq x \leqq +1$ будетъ менѣе уклоняться отъ нуля, чѣмъ

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}.$$

Подобнымъ же образомъ убѣдимся, что при $x = +1$ и при $x = -1$ наша функція также должна равняться $\pm$ L.

Въ предыдущемъ разсужденіи придется замѣнить только

$$\omega(x) \text{ на } -(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})$$
$$\text{или } +(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n).$$

И такъ, выраженіе

$$\frac{y^2}{f(x)} - L^2 = \frac{y^2 - L^2 f(x)}{f(x)}$$

должно обращаться въ нуль при

$$x = -1,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ldots \beta_{n-1},\ +1$$

и производная его

$$\frac{d\dfrac{y^2}{f(x)}}{dx}=\frac{2yy'f(x)-y^2f'(x)}{[f(x)]^2}$$

при

$$x=\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ldots,\ \beta_{n-1}.$$

А потому

$$\frac{d[y^2-L^2f(x)]}{dx}=2yy'-L^2f'(x)$$

при

$$x=\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots\ldots,\ \beta_{n-1}$$

также обращается въ нуль.

Слѣдовательно

$$y^2-L^2f(x)=-(1-x^2)\,W^2$$

$$2y'f(x)-yf'(x)=2WV,$$

гдѣ V и W двѣ цѣлыя функціи отъ x.

Степень W равна $n-1$, а степень V не больше степени $f(x)$ и $2n-1$.

Положимъ:

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}}=z$$

и исключимъ изъ нашихъ двухъ уравненій W.

Такимъ образомъ получимъ слѣдующее дифференціальное уравненіе:

$$\frac{dz}{\sqrt{L^2-z^2}}=\frac{Vdx}{\sqrt{1-x^2}\,.\,f(x)}=\sum\frac{A_k\,dx}{\sqrt{1-x^2}\,.\,(1+a_kx)}\,.\quad (1)$$

Рѣшеніе.

Введемъ вспомогательныя числа φ_k, опредѣляемыя уравненіями:

$$\operatorname{Cos}\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\ \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+a_k x}}, \quad \operatorname{Sin}\varphi_k = \frac{\sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\ \sqrt{1-x},}{\sqrt{1+a_k x}},$$

причемъ для полной опредѣленности всѣ встрѣчающіеся у насъ квадратные корни будемъ извлекать такъ, чтобы вещественныя части выходили положительными, и сверхъ того при $x = -1$ положимъ $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$.

Тогда

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1+a_k}\ \sqrt{1-a_k}}{\sqrt{1-x^2}\,.\,(1+a_k x)}$$

и вещественная часть этого выраженія постоянно остается отрицательною (конечно $-1 < x < +1$).

При помощи введенныхъ нами величинъ φ_k общее рѣшеніе дифференціальнаго уравненія (1) можетъ быть выражено слѣдующею формулою:

$$z = L \operatorname{Cos}\left(C + \sum \frac{2A_k\varphi_k}{\sqrt{1+a_k}\ \sqrt{1-a_k}}\right).$$

Въ этой формулѣ постоянныя

$$L,\ C,\ A_1,\ A_2,\ .\ .\ .\ ,\ A_{2n}$$

остаются неопредѣленными.

Необходимыя значенія ихъ я просто *угадываю.*

А именно, искомая нами функція z опредѣляется такимъ равенствомъ:

$$z = L\,\mathrm{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}),$$

откуда

$$y = L\sqrt{f(x)}\,\mathrm{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}), \qquad (2)$$

или

$$y = \frac{L}{2}\left\{\prod_k\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{x-1}\right) + \right.$$

$$\left. + \prod_k\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}}\sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\sqrt{x-1}\right)\right\}. \qquad (3)$$

Здѣсь буквою $\prod_k$ мы хотимъ выразить произведеніе, распространенное на всѣ значенія k.

Нетрудно видѣть, что написанная нами функція y дѣйствительно цѣлая и притомъ n-ой степени.

Располагая эту функцію по степенямъ x, для коэффиціента при x^n получаемъ слѣдующее выраженіе

$$\frac{L}{2}\left\{\prod_k\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\right) + \prod_k\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\right)\right\}.$$

По условіямъ вопроса, коэффиціентъ этотъ долженъ приводиться къ единицѣ.

Слѣдовательно,

$$L = \frac{2}{\prod_k\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} + \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\right) + \prod_k\left(\sqrt{\frac{1+a_k}{2}} - \sqrt{\frac{1-a_k}{2}}\right)}. \qquad (4)$$

Остается доказать, что составленная такимъ образомъ функція $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ дѣйствительно наименѣе отклоняется отъ нуля въ предѣлахъ отъ $x = -1$ до $x = +1$.

Доказательство.

По мѣрѣ возрастанія x отъ -1 до $+1$ вещественныя части всѣхъ φ_k убываютъ отъ $\frac{\pi}{2}$ до нуля; вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно, сумма

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}$$

убываетъ отъ $n\pi$ до нуля.

А при такомъ убываніи суммы

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n}$$

косинусъ ея

$$\operatorname{Cos}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n})$$

переходитъ черезъ нуль ровно n разъ и каждый разъ мѣняетъ свой знакъ.

Тотъ-же косинусъ достигаетъ своего наибольшаго численнаго значенія, единицы, при

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{2n} = n\pi, (n-1)\pi, (n-2)\pi, \ldots 2\pi, \pi, 0.$$

Соотвѣтствующія значенія x пусть будутъ

$$-1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, +1.$$

Сравнимъ нашу функцію $z = \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ съ какою нибудь другою того-же вида $z = \frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}$.

Разность ихъ

$$\frac{y_1 - y}{\sqrt{f(x)}}$$

можетъ обращаться въ нуль только $n-1$ разъ, такъ-какъ $y_1 - y$ цѣлая функція отъ x не выше $(n\text{-}1)$-ой степени.

Поэтому знакъ этой разности не можетъ быть противуположенъ знаку $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$ при всѣхъ $n+1$ слѣдующихъ значеніяхъ x:

$$x = -1, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n-1}, +1.$$

А коль-скоро при

$$x = \beta_k$$

разность

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}} - \frac{y}{\sqrt{f(x)}}$$

имѣетъ одинаковый знакъ съ $\frac{y}{\sqrt{f(x)}}$, численное значеніе

$$\frac{y_1}{\sqrt{f(x)}}$$

больше соотвѣтственнаго численнаго значенія

$$\frac{y}{\sqrt{f(x)}},$$

т. е. болѣе L.

Итакъ, дѣйствительно, найденная нами функція z менѣе отклоняется отъ нуля, чѣмъ какая бы то ни было другая функція того-же вида.