АКТЪ

въ

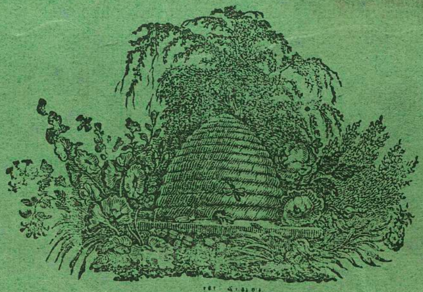
ИМПЕРАТОРСКОМЪ

ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

8 сентября 1858 года.

ХАРЬКОВЪ.
ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1858.



АКТЪ

въ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ

ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

1984

ГОДИЧНЫЙ

ТОРЖЕСТВЕННЫЙ АКТЪ

ВЪ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ

ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ,

8 сентября 1858 года.

ХАРЬКОВЪ.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1858.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета, 5 Августа 1858 года.

Секретарь Совѣта *Ф. Рогожинъ.*

СОДЕРЖАНІЕ.

РѢЧЬ.

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

ЛИНЕЙНЫХЪ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

СЪ КАКИМЪ УГОДНО ЧИСЛОМЪ

ИЗМѢНЯЕМЫХЪ ВЕЛИЧИНЪ.

РѢЧЬ,

написанная, для произнесенія въ торжественномъ собраніи
Императорскаго Харьковскаго Университета,
8 сентября 1858 года,

исправляющимъ должность э. о. профессора

Е. И. Бейеромъ.

ХАРЬКОВЪ.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

—

1858.

Милостивые Государи!

Слово истины, въ какомъ бы родѣ оно ни было, должно быть всегда умѣстно. Поэтому, въ настоящій торжественный для университета день, я нисколько не стѣсняюсь явиться предъ вами, Мм. Гг., съ словомъ истины математической.

Вопросъ, разсматриваемый мною, составляетъ одну изъ важнѣйшихъ и, можетъ быть, наиболѣе трудныхъ теорій интегральнаго исчисленія. Между тѣмъ, сколько мнѣ извѣстно, нѣтъ ни одного сочиненія, въ которомъ излагалась бы эта часть высшаго анализа съ достаточными подробностями и въ оконченномъ видѣ. Въ слѣдствіе того, въ настоящемъ разсужденіи я рѣшился собрать труды ученыхъ, разработывавшихъ этотъ предметъ, развить до надлежащей полноты мысли, высказанныя ими часто вскользь и безъ доказательства; объяснить связь между разъединенными, по видимому, изслѣдованіями геометровъ, наконецъ — пополнить пробѣлы собственными умозрѣніями.

Если трудъ мой выполненъ удовлетворительно, то, конечно, онъ найдетъ себѣ мѣсто въ наукѣ и принесетъ пользу изучающимъ ее.

ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ.

По словамъ Лакруа (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral; 2me édition, T. 2, p. 691.) уже Ньютонъ, въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, занимался интегрированіемъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, заключающихъ болѣе двухъ перемѣнныхъ количествъ. Однако начало теоретическаго разсматриванія этого класса уравненій необходимо отнести къ тому времени, въ которое геометры ознакомились съ свойствами частныхъ производныхъ.

Первое понятіе объ этихъ производныхъ мы встрѣчаемъ въ двухъ разсужденіяхъ Эйлера: «De infinitis curvis ejusdem generis», относящихся къ 1734 и 1735 годамъ (Comment. Academiae Petrop. T. VIII). Вскорѣ послѣ того, и именно въ концѣ 1738 года, постановлены были Фонтенемъ условія, подъ которыми линейныя дифференціальныя выраженія между двумя, тремя и большимъ числомъ измѣняемыхъ можно разсматривать или полными дифференціалами какихъ-нибудь конечныхъ функцій, или такими формулами, которыя въ состояніи приводиться къ виду точныхъ дифференціаловъ посредствомъ нѣкоторыхъ множителей. См. «Mémoires donnés à l'Académie des sciences, non imprimés dans leur temps», 1764.

Съ тѣхъ поръ Фонтень, Эйлеръ и многіе другіе геометры стали считать возможными тѣ только линейныя уравненія между тремя и большимъ числомъ перемѣнныхъ величинъ, въ которыхъ коэффиціенты при дифференціалахъ измѣняемыхъ количествъ удовлетворяли прежде упомянутымъ условіямъ, получившимъ названіе условій интегральности; а всѣ остальныя уравненія, не выполняющія сказанныхъ требованій, начали называть нелѣпыми. Къ послѣдней категоріи причислили также вообще уравненія перваго порядка, которыя или совсѣмъ не разбивались на линейные дифференціальные множители, или допускали множителей, не удовлетворяющихъ условіямъ интегральности.

Самъ Фонтень исключительно занимался интеграціею однородныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка и нашелъ весьма замѣчательное отношеніе, извѣстное въ дифференціальномъ исчисленіи подъ именемъ теоремы однородныхъ функцій. Впрочемъ, пріемы его въ настоящее время вышли изъ употребленія.

Полною теоріею интегрированія возможныхъ, въ сказанномъ смыслѣ, линейныхъ дифференціальныхъ уравненій между тремя измѣняемыми мы обязаны Эйлеру, который помѣстилъ ее въ своихъ «Institutiones calculi integralis», T. III, pars I, sect. I, cap. I, 1770.

Существенный шагъ въ теоріи дифференціальныхъ уравненій сдѣланъ Монжемъ. Мемуары парижской академіи за 1784 годъ содержатъ два большія разсужденія, принадлежащія этому геометру. Въ одномъ изъ нихъ обратилъ Монжъ свое вниманіе на такія дифференціальныя уравненія перваго порядка, для которыхъ условія интегральности не выполняются, и старался объяснить, что уравненія эти способны къ настоящей интеграціи, но что интегралы ихъ изображаются не однимъ, а большимъ числомъ отношеній.

Развивши эту мысль прежде всего на дифференціальныхъ уравненіяхъ между тремя перемѣнными, онъ доказалъ, что каждое такое уравненіе можетъ быть проинтегрировано помощію двухъ отношеній съ одною произвольною функціею. Слѣдовательно, относительно линейныхъ уравненій съ тремя перемѣнными, Монжъ высказалъ все, что только извѣстно о нихъ теперь; но его теорія уравненій перваго порядка не линейныхъ, говоря строго, ограничивается случаями, которые подходятъ подъ три теоремы, разсматриваемыя имъ на страницахъ 515 — 526.

Перейдя потомъ къ уравненіямъ между четырьмя и большимъ числомъ измѣняемыхъ, интеграцію ихъ основалъ Монжъ на слѣдующемъ весьма общемъ предложеніи: каждое линейное дифференціальное уравненіе между числомъ n измѣняемыхъ, не удовлетворяющее условіямъ интегральности, допускаетъ $n-1$ интегральныхъ отношеній съ одною произвольною функціею.

Эта теорема, очевидно, заключаетъ въ себѣ частнымъ образомъ ту, которая постановлена для линейныхъ уравненій между тремя перемѣнными, и, собственно говоря, составляетъ ключъ ко всѣмъ дальнѣйшимъ изслѣдованіямъ.

Замѣтивъ, что въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ число интегральныхъ отношеній можетъ быть меньше назначаемаго теоремою, Монжъ не вошелъ въ подробнѣйшее разсматриваніе этого дѣла; а между тѣмъ, мнѣ кажется, что одно это обстоятельство и служило исходною точкою для всѣхъ позднѣйшихъ розысканій.

Такимъ образомъ италіянскій геометръ Паоли показалъ (Memorie della societa Italiana, T. VI), что во всѣхъ случаяхъ $n-1$ интегральныхъ отношеній Монжа могутъ быть приведены къ числу $n-2$ уравненій.

Но самое значительное развитіе получили мысли Монжа въ трудахъ Пфаффа, напечатанныхъ въ мемуарахъ берлинской академіи за 1814 — 15 годы. Тамъ, соображеніями особеннаго рода, Пфаффъ, во 1) строго доказалъ, что каждое линейное дифференціальное уравненіе съ числомъ $2p$ измѣняемыхъ, не подчиненное условіямъ интегральности, можетъ быть проинтегрировано посредствомъ p отношеній съ такимъ-же числомъ постоянныхъ произвольныхъ; и во 2) указалъ на возможность отъ рѣшенія съ постоянными произвольными переходить къ другому рѣшенію съ одною произвольною функціею отъ $p-1$ величинъ.

Работы Якоби весьма способствовали успѣхамъ теоріи Пфаффа, въ честь котораго и самый вопросъ объ интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій между четнымъ числомъ измѣняемыхъ назвалъ Якоби задачею Пфаффа — Problema Pfaffianum.

Въ 1827 году, во 2 томѣ Журнала Крелля, представилъ Якоби способъ Пфаффа въ новомъ свѣтѣ и второе изъ выставленныхъ мною его предложенiй обобщилъ слѣдующимъ образомъ: каждое линейное дифференцiальное уравненiе между числомъ $2p$ перемѣнныхъ можетъ быть интегрируемо посредствомъ p отношенiй съ числомъ q произвольныхъ функцiй, гдѣ q не болѣе p.

Такъ какъ въ способѣ Пфаффа розысканiе полной системы интегральныхъ отношенiй зависитъ отъ интеграцiи нѣсколькихъ системъ дифференцiальныхъ уравненiй перваго порядка, причемъ ни одной изъ послѣдующихъ системъ нельзя, по видимому, и построить, не проинтегрировавъ напередъ всѣ предъидущiя, то въ 1837 году, въ 17 томѣ Журнала Крелля, стр. 156 и слѣдующiя, Якоби обогатилъ методъ Пфаффа слѣдующимъ замѣчательнымъ предложенiемъ: какъ преобразованныя уравненiя, такъ и всѣ системы дифференцiальныхъ отношенiй въ задачѣ Пфаффа могутъ быть написаны безъ всякой интеграцiи. А въ томъ случаѣ, который имѣетъ мѣсто при уравненiяхъ въ частныхъ производныхъ перваго порядка, для рѣшенiя задачи достаточно проинтегрировать одну только первую систему дифференцiальныхъ уравненiй.

Впрочемъ замѣтить нужно, что еще въ 1819 г. объяснялъ Коши эту послѣднюю мысль на частныхъ случаяхъ (Bulletin de la société philomatique); а въ послѣдствiи въ своихъ «Exercices d'analyse et de physique mathématiques», T. II, p. 238, доказалъ ее весьма изящно и вообще.

Если теорія Пфаффа позволяетъ намъ отъ интеграловъ различныхъ системъ дифференціальныхъ уравненій переходить къ полной системѣ интеграловъ линейнаго дифференціальнаго уравненія съ четнымъ числомъ измѣняемыхъ; то въ XVII же томѣ Журнала Крелля Якоби доказалъ предложеніе, нѣкоторымъ образомъ обратное; а именно, что отъ интеграловъ, соотвѣтствующихъ задачѣ Пфаффа, всегда можно перейти къ интеграламъ первой системы дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

На этомъ предложеніи, нѣсколько лѣтъ спустя, Якоби думалъ основать новый способъ интегрированія уравненій съ четнымъ числомъ перемѣнныхъ количествъ, или, по-крайней-мѣрѣ, еще болѣе упростить способъ Пфаффа. См. «Mathematische Werke», Band 1, Seite 157.

Вообще въ изслѣдованіяхъ Якоби заключается много новыхъ идей, которыя или служатъ къ упрощенію теоріи Пфаффа, или открываютъ новыя стороны для разсматриванія того-же самаго предмета. Такъ въ XVII томѣ Крелля, на стран. 161 — 162, высказалъ Якоби въ немногихъ словахъ новый способъ для интегрированія уравненій Пфаффа; а въ «Theoria novi multiplicatoris», помѣщенной первоначально въ 27, 29 и 30 томахъ Журнала Крелля, и потомъ въ «Mathematische Werke», Band 1, указалъ Якоби еще на новый путь къ рѣшенію той-же самой задачи, связавъ ее съ преобразованіемъ линейнаго дифференціала, заключающаго нечетное число $2p-1$ перемѣнныхъ количествъ, въ полный дифференціалъ посредствомъ $p-1$ конечныхъ интегральныхъ отношеній.

Въ томъ-же разсужденіи опредѣлилъ онъ сверхъ того условія, при которыхъ линейное дифференціальное уравненіе съ какимъ угодно числомъ перемѣнныхъ интегрируется помощію даннаго числа отношеній; и нашелъ, что для интеграціи уравненія съ числомъ r измѣняемыхъ, посредствомъ системы s уравненій, коэффиціенты должны удовлетворять

$$\frac{(r-2s)\,(r-2s+1)}{2}$$

условныхъ равенствъ. Наконецъ отсюда, въ видѣ частнаго случая, вывелъ слѣдующую истину: линейное дифференціальное уравненіе, внѣ всякихъ условій, интегрируется системою

$$\frac{r}{2} \text{ или } \frac{r+1}{2}$$

отношеній, смотря потому — будетъ ли r четнымъ или нечетнымъ.

Правда, что предложеніе это въ такой точно формѣ извѣстно было еще въ 1814 году Пфаффу и французскому геометру Бине; но, не имѣя подъ руками оригинальнаго мемуара Пфаффа, я не знаю, изъ какихъ соображеній оно было выведено берлинскимъ геометромъ. Достовѣрно здѣсь по-крайней-мѣрѣ то, что интеграція линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ нечетнымъ числомъ перемѣнныхъ не была произведена Пфаффомъ. Что касается разсужденія Бине, то, по свидѣтельству Лакруа (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2me édition), T. III, p. 712; вскорѣ послѣ представленія парижской академіи въ 1814 году, оно было возвращено, по желанію самого автора, для усовершенствованій. Поэтому для меня также остается неизвѣстнымъ, что̀ сдѣлано было парижскимъ математикомъ въ пользу уравненій съ нечетнымъ числомъ измѣняемыхъ.

Въ сочиненіяхъ геометровъ, слѣдовавшихъ за Пфаффомъ, мы находимъ у одного только Якоби нѣкоторые признаки, заставляющіе насъ думать, что онъ знакомъ былъ съ интегрированіемъ послѣдняго класса уравненій.

Такъ, напримѣръ, въ Theoria novi multiplicatoris (Mathematische Werke, Band I, Seite 144), коснувшись новаго образа разсматриванія задачи Пфаффа, Якоби далъ одну систему дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, необходимую для приведенія линейнаго дифференціала съ нечетнымъ числомъ перемѣнныхъ къ виду полнаго дифференціала; хотя и не вывелъ изъ нея никакихъ слѣдствій, даже не сдѣлалъ ни одного намека на то, какимъ образомъ система эта можетъ служить къ рѣшенію постановленнаго вопроса.

Въ розысканіяхъ Монжа, Пфаффа и Якоби общая точка соприкосновенія явнымъ образомъ заключается въ томъ, что всѣ они интегрированіе линейныхъ уравненій между тремя и большимъ числомъ перемѣнныхъ сближаютъ съ интеграціею уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка, и весьма рѣзко развиваютъ ту мысль, что оба класса уравненій представляютъ двѣ задачи такого свойства, что рѣшеніе одной всегда зависитъ отъ рѣшенія другой.

Изъ сдѣланнаго мною бѣгло историческаго обзора тотчасъ открывается: 1) что вопросъ объ интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ какимъ угодно числомъ измѣняемыхъ приводится, въ настоящее время, главнымъ образомъ, къ интегрированію уравненій Пфаффа, т. е. уравненій съ четнымъ числомъ перемѣнныхъ; и къ рѣшенію уравненій съ нечетнымъ числомъ аргументовъ.

2) Что теорія уравненій съ четнымъ числомъ измѣняемыхъ можетъ считаться оконченною, хотя и допускаетъ развитіе нѣкоторыхъ методовъ Якоби, но что интеграція уравненій о нечетномъ числѣ перемѣнныхъ ожидаетъ еще выполненія.

Не зная ни одного сочиненія, въ которомъ предметъ этотъ разсматривался бы во всемъ его объемѣ, я предлагаю слѣдующее довольно полное разсужденіе, въ которомъ теорему Монжа связываю съ изслѣдованіями Пфаффа и Якоби; развиваю мысли Якоби, высказанныя имъ въ 17 томѣ Журнала Крелля и въ «Mathematische Werke» Band 1; наконецъ, даю способъ для интегрированія уравненій, заключающихъ нечетное число измѣняемыхъ.

Для удобства въ изложеніи, я раздѣляю мое сочиненіе на шесть параграфовъ:

Въ § I я разсуждаю объ условіяхъ интегральности и объ интегрированіи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при существованіи этихъ условій.

§ II посвященъ развитію теоремы Монжа со всѣми ея слѣдствіями.

§ III заключаетъ теорію Пфаффа съ нѣкоторыми дополненіями Якоби.

§ IV содержитъ изложеніе новыхъ способовъ Якоби для рѣшенія задачи Пфаффа.

Въ § V предлагается интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій между нечетнымъ числомъ перемѣнныхъ количествъ.

Въ § VI разсматривается интегрированіе такихъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, въ которыхъ коэффиціенты удовлетворяютъ только части условій интегральности.

Въ концѣ разсужденія я дѣлаю прибавленіе, въ которомъ интегрирую одинъ довольно общій классъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между двумя измѣняемыми величинами.

ТЕОРІЯ.

§ I.

ОБЪ УСЛОВІЯХЪ ИНТЕГРАЛЬНОСТИ И РОЗЫСКАНІИ ПОЛНАГО ИНТЕГРАЛА ПРИ ДОПУЩЕНІИ ВСѢХЪ ЭТИХЪ УСЛОВІЙ.

1. Имѣя дифференціальное уравненіе вида:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots\ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \quad (1)$$

прежде всего можно спрашивать: въ какихъ случаяхъ одну изъ перемѣнныхъ позволительно трактовать нѣкоторою функціею остальныхъ измѣняемыхъ?

Допустивъ возможность подобнаго разсматриванія и представивъ уравненіе (1) подъ формою:

$$\partial x = P_1\,\partial x_1 + P_2\,\partial x_2 + P_3\,\partial x_3 + \ldots\ldots\ldots + P_m\,\partial x_m\,, \quad (2)$$

гдѣ $$P_j = -\frac{X_j}{X}, \quad (3)$$

мы вправѣ постановить слѣдующее отношеніе:

$$\partial x = p_1\,\partial x_1 + p_2\,\partial x_2 + p_3\,\partial x_3 + \ldots\ldots\ldots + p_m\,\partial x_m\,, \quad (4)$$

въ которомъ $$p_j = \frac{\partial x}{\partial x_j}. \quad (5)$$

Предположивъ еще, что въ P_1, P_2, ... вставлено вмѣсто x его выраженіе въ x_1 x_2 ......, сравненіе (2) и (4) приведетъ къ равенствамъ

$$p_1 = P_1 \;\; p_2 = P_2, \;\; p_3 = P_3, \ldots\ldots\ldots \; p_m = P_m \,, \qquad (6)$$

изъ которыхъ, въ силу (5), по извѣстнымъ правиламъ дифференціальнаго исчисленія, выведемъ рядъ тожественныхъ отношеній между частными производными перваго порядка, взятыми отъ коэффиціентовъ уравненія (2):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dP_1}{dx_2} = \dfrac{dP_2}{dx_1}, \dfrac{dP_1}{dx_3} = \dfrac{dP_3}{dx_1}, \ldots\ldots\ldots \dfrac{dP_1}{dx_m} = \dfrac{dP_m}{dx_1}; \\ \dfrac{dP_2}{dx_3} = \dfrac{dP_3}{dx_2}, \ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots \dfrac{dP_2}{dx_m} = \dfrac{dP_m}{dx_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dP_{m-1}}{dx_m} = \dfrac{dP_m}{dx_{m-1}}. \end{array}\right\} (7)$$

Чтобы развить какъ должно эти отношенія, необходимо замѣтить слѣдующее: всѣ P зависятъ не только отъ нумерованныхъ $x^{овъ}$, но и отъ x безъ нумера, т. е. отъ его значенія въ x_1, x_2, ...; поэтому при дифференцированіи должно обращать вниманіе какъ на измѣняемость перемѣнныхъ, независимыхъ самихъ по себѣ, такъ и на измѣняемость x, зависящаго отъ нихъ. Подобнаго рода дифференцированіе мы съ намѣреніемъ и изобразили черезъ d, въ отличіе отъ дифференцированія, представляемаго знакомъ ∂ и относящагося къ измѣненію перемѣнныхъ независимыхъ самихъ по себѣ.

И такъ, совершивъ самымъ дѣломъ требуемое дифференцированіе, при помощи (5) и (6), найдемъ:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial P_1}{\partial x_2}-\frac{\partial P_2}{\partial x_1}+\frac{\partial P_1}{\partial x}P_2-\frac{\partial P_2}{\partial x}P_1=0,\\
\frac{\partial P_1}{\partial x_3}-\frac{\partial P_3}{\partial x_1}+\frac{\partial P_1}{\partial x}P_3-\frac{\partial P_3}{\partial x}P_1=0,\\
\frac{\partial P_1}{\partial x_4}-\frac{\partial P_4}{\partial x_1}+\frac{\partial P_1}{\partial x}P_4-\frac{\partial P_4}{\partial x}P_1=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial P_1}{\partial x_m}-\frac{\partial P_m}{\partial x_1}+\frac{\partial P_1}{\partial x}P_m-\frac{\partial P_m}{\partial x}P_1=0;\\
\frac{\partial P_2}{\partial x_3}-\frac{\partial P_3}{\partial x_2}+\frac{\partial P_2}{\partial x}P_3-\frac{\partial P_3}{\partial x}P_2=0,\\
\frac{\partial P_2}{\partial x_4}-\frac{\partial P_4}{\partial x_2}+\frac{\partial P_2}{\partial x}P_4-\frac{\partial P_4}{\partial x}P_2=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial P_2}{\partial x_m}-\frac{\partial P_m}{\partial x_2}+\frac{\partial P_2}{\partial x}P_m-\frac{\partial P_m}{\partial x}P_2=0;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial P_{m-1}}{\partial x_m}-\frac{\partial P_m}{\partial x_{m-1}}+\frac{\partial P_{m-1}}{\partial x}P_m-\frac{\partial P_m}{\partial x}P_{m-1}=0.
\end{array}\right\}(8)$$

Формулы эти суть тѣ самыя, которыя въ первый разъ построены были Фонтенемъ, и число ихъ, очевидно, изображается суммою членовъ ряда

$$1+2+3+\dots\dots\dots+m-1=\frac{m.\,m-1}{2}.$$

2. Припомнивъ знакоположеніе (3), предъидущія уравненія можно будетъ написать въ другомъ видѣ, къ какому привелъ Эйлеръ, въ подобномъ случаѣ, отношеніе между коэффиціентами линейнаго дифференціальнаго уравненія, заключающаго три перемѣнныя количества, а именно:

$$\left.\begin{array}{l}
X\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)+X_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)+X_2\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)=0,\\
X\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3}-\frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right)+X_1\left(\frac{\partial X_3}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_3}\right)+X_3\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)=0,\\
X\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_4}-\frac{\partial X_4}{\partial x_1}\right)+X_1\left(\frac{\partial X_4}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_4}\right)+X_4\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
X\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_m}-\frac{\partial X_m}{\partial x_1}\right)+X_1\left(\frac{\partial X_m}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_m}\right)+X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)=0,\\
X\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3}-\frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right)+X_2\left(\frac{\partial X_3}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_3}\right)+X_3\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)=0,\\
X\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_4}-\frac{\partial X_4}{\partial x_2}\right)+X_2\left(\frac{\partial X_4}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_4}\right)+X_4\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
X\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_m}-\frac{\partial X_m}{\partial x_2}\right)+X_2\left(\frac{\partial X_m}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_m}\right)+X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)=0;\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
X\left(\frac{\partial X_{m-1}}{\partial x_m}-\frac{\partial X_m}{\partial x_{m-1}}\right)+X_{m-1}\left(\frac{\partial X_m}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_m}\right)+X_m\left(\frac{\partial X}{\partial x_{m-1}}-\frac{\partial X_{m-1}}{\partial x}\right)=0.
\end{array}\right\}(9)$$

3. Уравненія эти можно вывести по-мимо (8), но тѣ и другія совершенно равносильны. Какъ отъ (8) мы переходимъ къ (9), такъ и на-оборотъ отъ (9) въ состояніи перейти къ (8). Въ послѣднемъ случаѣ стоитъ только равенства (9) раздѣлить на X^2, всѣ члены написать въ другомъ порядкѣ, какой требуется формою

уравненій (8) и послѣ того къ каждому результату прибавить по нѣкоторому выраженію, тожественному съ нулемъ, форма котораго въ каждомъ случаѣ открывается самою сущностью дѣла. Напримѣръ, взявши первое изъ уравненій (9), по раздѣленіи его на X^2, результатъ можно будетъ написать такъ:

$$\frac{X\frac{\partial X_1}{\partial x_2}-X_1\frac{\partial X}{\partial x_2}}{X^2}-\frac{X\frac{\partial X_2}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial X}{\partial x_1}}{X^2}-\frac{X_2\frac{\partial X_1}{\partial x}}{X^2}+\frac{X_1\frac{\partial X_2}{\partial x}}{X^2}=0.$$

Послѣ того, помноживъ и раздѣливъ каждый изъ двухъ послѣднихъ членовъ на X и прибавивъ тожество:

$$\frac{X_2 X_1\frac{\partial X}{\partial x}}{X^3}-\frac{X_1 X_2\frac{\partial X}{\partial x}}{X^3},$$

будемъ имѣть:

$$\frac{X\frac{\partial X_1}{\partial x_2}-X_1\frac{\partial X}{\partial x_2}}{X^2}-\frac{X\frac{\partial X_2}{\partial x_1}-X_2\frac{\partial X}{\partial x_1}}{X^2}$$

$$-\frac{X\frac{\partial X_1}{\partial x}-X_1\frac{\partial X}{\partial x}}{X^2}\cdot\frac{X_2}{X}+\frac{X\frac{\partial X_2}{\partial x}-X_2\frac{\partial X}{\partial x}}{X^2}\cdot\frac{X_1}{X}$$

или:

$$\frac{\partial\left(\frac{X_1}{X}\right)}{\partial x_2}-\frac{\partial\left(\frac{X_2}{X}\right)}{\partial x_1}-\frac{\partial\left(\frac{X_1}{X}\right)}{\partial x}\cdot\frac{X_2}{X}+\frac{\partial\left(\frac{X_2}{X}\right)}{\partial x}\cdot\frac{X_1}{X}=0.$$

Наконецъ, введя въ обѣ части множителя, равнаго (—1), какъ-разъ получимъ первое изъ уравненій (8). Сказанное, относительно перваго изъ равенствъ (9), легко прикладывается къ каждому изъ остальныхъ уравненій той-же системы; а потому и проч. Такимъ образомъ отношенія (8) и (9) можно употреблять безразлично. Геометры предпочитаютъ вводить въ вычисленія формулы Эйлера.

4. Системы (8) и (9) носятъ названіе условій интегральности, потому что вопросъ — въ какихъ случаяхъ одну изъ перемѣнныхъ въ уравненіи (1) можно разсматривать функціею остальныхъ — очевидно совпадаетъ съ слѣдующимъ: при какихъ обстоятельствахъ данное уравненіе (1) допускаетъ одинъ интегралъ.

5. Изъ самаго хода сужденій, который привелъ насъ къ формуламъ (8), открывается, что если разсматривать одну изъ перемѣнныхъ, напр. x, функціею остальныхъ измѣняемыхъ, то коэффиціенты уравненія (1) должны быть подчинены условіямъ (8); слѣдовательно, если бы уравненія (8), или по-крайней-мѣрѣ одно изъ нихъ, не имѣло мѣста, то и сказанное разсматриваніе было бы не умѣстно. Утвердивъ такимъ умозаключеніемъ необходимость отношеній (8) для рѣшенія заданнаго намъ себѣ вопроса, достаточность ихъ раскроется изъ слѣдующихъ соображеній:

6. Если условія интегральности приведены къ формѣ (9) и выраженія въ скобкахъ тамъ поставленныя суть нули, то это есть вѣрный признакъ того, что лѣвая часть уравненія

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_m\,\partial x_m = 0 \quad (10)$$

есть полный дифференціалъ. Но если выраженія (9) дѣлаются тожествами иначе, то не трудно показать, что лѣвая часть уравненія (10) можетъ быть приведена къ виду полнаго дифференціала посредствомъ нѣкотораго множителя.

7. Чтобы оправдать это положеніе, мы докажемъ 1) что если въ уравненіе (10), коэффиціенты котораго подчинены условіямъ (9), введемъ производителемъ какую-нибудь функцію M, совершенно произвольно выбранную, то между коэффиціентами формулы:

$$MX\,\partial x + MX_1\,\partial x_1 + MX_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + MX_m\,\partial x_m = 0 \quad (11)$$

опять будутъ имѣть мѣсто условія (9).

8. Коль скоро условія интегральности приведены къ формѣ (8), то стоитъ только уравненіе (11) написать такъ:

$$\partial x = -\left(\frac{MX_1}{MX}\partial x_1 + \frac{MX_2}{MX}\partial x_2 + \ldots\ldots + \frac{MX_m}{MX}\partial x_m\right),$$

чтобъ заключить, что новые P должны удержать прежнее значеніе и слѣдовательно удовлетворять равенствамъ (8). А если сказанныя условія представлены подъ формою (9), то и тутъ сейчасъ откроется, что результаты подстановленія MX, MX_1, MX_2, ….. MX_m вмѣсто X, X_1, X_2, ….. X_m опять будутъ тожественно нулями. Съ этой цѣлію достаточно разсмотрѣть одно котороенибудь изъ уравненій (9). Взявши, напримѣръ, первое изъ нихъ, и сдѣлавши сказанное подстановленіе, будемъ имѣть: во 1-хъ,

$$MX\left(\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_1}\right) + MX_1\left(\frac{\partial(MX_2)}{\partial x} - \frac{\partial(MX)}{\partial x_2}\right)$$

$$+ MX_2\left(\frac{\partial(MX)}{\partial x_1} - \frac{\partial(MX_1)}{\partial x}\right);$$

$$\text{во 2-хъ, } M\left(MX\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)+X\left(X_1\frac{\partial M}{\partial x_2}-X_2\frac{\partial M}{\partial x_1}\right)\right)+$$

$$M\left(MX_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)+X_1\left(X_2\frac{\partial M}{\partial x}-X\frac{\partial M}{\partial x_2}\right)\right)+$$

$$M\left(MX_2\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)+X_1\left(X\frac{\partial M}{\partial x_1}-X_1\frac{\partial M}{\partial x}\right)\right)$$

$$\text{и въ 3-хъ, } M^2\left(X\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right)+X_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial x_2}\right)\right.$$
$$\left.+X_2\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)\right)=0;$$

что и требовалось доказать; а потому и проч.

9. 2) Въ видѣ слѣдствія этихъ сужденій постановимъ такое предложеніе: если въ уравненіи (10) предстоящіе подчинены условіямъ (9), то множитель M, дѣлающій дифференціальный двучленъ

$$M\,(X\,\partial x+X_1\,\partial x_1)$$

полнымъ дифференціаломъ, сдѣлаетъ также формулу

$$M\,(X\,\partial x+X_1\,\partial x_1+X_2\,\partial x_2+\ldots\ldots+X_m\,\partial x_m)$$

точнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи.

10. Дѣйствительно, предположивъ въ (11) $x_2 \ldots\ldots x_m$ величинами постоянными, и слѣдовательно $\partial x_2, \ldots\ldots \partial x_m$ нулями, будемъ имѣть:

$$M\,(X\,\partial x+X_1\,\partial x_1)=0. \quad (12)$$

Если теперь

$$M\,(X\,\partial x+X_1\,\partial x_1)=\partial u, \quad (13)$$

то $$u = c \quad (14)$$
будетъ полнымъ интеграломъ уравненія (12), причемъ c должно разсматривать нѣкоторою произвольною функціею отъ $x_2, \ldots\ldots x_m$.

11. Утверждаемъ, что количество c всегда можно опредѣлить такъ, что полный дифференціалъ функціи $u - c$, взятый по измѣняемости всѣхъ входящихъ въ нее xовъ, совпадетъ съ лѣвою частью уравненія (11), въ которомъ вмѣсто M предполагается уже поставленнымъ его значеніе, удовлетворяющее уравненію (13).

Чтобы выраженіе $d\,(u - c) = 0$, или въ силу (13),

$$0 = \partial u + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial c}{\partial x_2}\right)\partial x_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial c}{\partial x_3}\right)\partial x_3 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} - \frac{\partial c}{\partial x_m}\right)\partial x_m$$

совершенно согласовалось съ уравненіемъ (11), должны имѣть:

$$\begin{array}{lll}
MX_2 = \dfrac{\partial u}{\partial x_2} - \dfrac{\partial c}{\partial x_2}, & \text{или} & \dfrac{\partial c}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_2} - MX_2, \\
MX_3 = \dfrac{\partial u}{\partial x_3} - \dfrac{\partial c}{\partial x_3}, & \text{»} & \dfrac{\partial c}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u}{\partial x_3} - MX_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (15) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
MX_m = \dfrac{\partial u}{\partial x_m} - \dfrac{\partial c}{\partial x_m}, & \text{»} & \dfrac{\partial c}{\partial x_m} = \dfrac{\partial u}{x_m} - MX_m.
\end{array}$$

Помноживъ равенства (15) соотвѣтственно на $\partial x_2, \partial x_3, \ldots\ldots \partial x_m$, и составивъ сумму слѣдствій, найдемъ:

$$dc = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - MX_2\right)\partial x_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - MX_3\right)\partial x_3 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} - MX_m\right)\partial x_m. \quad (16)$$

Если теперь объясним, что коэффиціенты при ∂x_2, ∂x_3, ... ∂x_m не содержатъ x_1, а слѣдовательно и x, и что вся правая часть формулы (16) есть полный дифференціалъ, то оправдаемъ наше утвержденіе и докажемъ самую теорему. Съ этою цѣлію разсмотримъ коэффиціентъ при ∂x_2 и покажемъ, что результатъ полнаго дифференцированія этого коэффиціента по x_1 есть нуль, т. е.

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-MX_2\right)=0. \quad (17)$$

Написавши

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-MX_2\right)=\partial\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}-MX_2}{\partial x_1}\right)$$

$$+\partial\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial x_2}-MX_2}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

въ силу формулы (12) получимъ:

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-MX_2\right)=\frac{1}{X}\left(X\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-MX_2\right)}{\partial x_1}\right.$$

$$\left.-X_1\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-MX_2\right)}{\partial x}\right)=\frac{1}{X_1}\left(X\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)-\frac{\partial(MX_2)}{\partial x_1}\right)\right.$$

$$\left.-X_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial(MX_2)}{\partial x}\right)\right)=\frac{1}{X}\left(X\left(\frac{\partial MX_1}{\partial x_2}-\frac{\partial MX_2}{\partial x_1}\right)\right.$$

$$\left.+X_1\left(\frac{\partial MX_2}{\partial x}-\frac{\partial MX}{\partial x_2}\right)+X_2\left(\frac{\partial MX}{\partial x_1}-\frac{\partial MX_1}{\partial x}\right)\right),$$

что въ силу перваго изъ уравненій (9) есть нуль, а потому и проч.

Такими точно сужденіями, при пособіи формулъ (12) и (9) окажется, что

$$\frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3} - MX_3\right) = 0, \ldots\ldots \frac{d}{dx_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_m} - MX_m\right) = 0.$$

Убѣдившись такимъ образомъ, что въ (16) коэффиціенты при ∂x_2, ∂x_3, ... ∂x_m не заключаютъ x_1, тотчасъ удостовѣряемся, что правая часть выраженія (16) есть полный дифференціалъ. Въ самомъ дѣлѣ, если съ одной стороны извѣстно, что c должно быть функціею отъ x_2, x_3, ... x_m, а съ другой, что полный его дифференціалъ изображается формулою (16), въ которой коэффиціенты при ∂x_2, ∂x_3, ... ∂x_m суть величины, зависящія также только отъ ∂x_2, ∂x_3, ... ∂x_m, то уравненіе (16) дѣйствительно тожественно, т. е. правая его часть есть полный дифференціалъ.

Въ слѣдствіе того имѣемъ вѣрное равенство:

$$M\,(X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_m\,\partial x_m) = d\,(u - c),$$

гдѣ множитель M и функція u удовлетворяютъ отношенію (13), а c опредѣляется изъ формулы (16) посредствомъ квадратуръ.

Форма послѣдняго выраженія служитъ ручательствомъ, что теорема наша доказана.

12. Весьма понятно, что въ то-же самое время мы подтвердили и общее наше положеніе (n° 6) и доказали достаточность условій (9), а слѣдовательно и (8) для того, чтобы въ уравненіи (1) или (10) перемѣнную x можно было разсматривать нѣкоторою функціею остальныхъ измѣняемыхъ, или, что все равно, чтобы

уравненіе (1) допускало одно интегральное отношеніе съ одною постоянною произвольною.

13. Послѣднія наши предложенія, очевидно, доставляютъ и способъ розыскивать этотъ интегралъ.

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣливъ *u* и *c* сказаннымъ образомъ, т. е. изъ формулъ (13) и (16), уравненіе

$$u - c = 0 \qquad (18)$$

будетъ полнымъ интеграломъ дифференціальнаго уравненія (10) или (1).

Этотъ способъ есть ни что иное, какъ обобщенный методъ Эйлера для интеграціи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій между тремя измѣняемыми величинами, въ предположеніи условій интегральности.

14. Если мы самымъ дѣломъ опредѣлимъ функціи *u* и *c* и сообщимъ интегралу ту форму, въ которой Коши охотнѣе всего изображаетъ первоначальныя функціи точныхъ линейныхъ дифференціаловъ, то дадимъ себѣ возможность прійдти къ новымъ весьма важнымъ заключеніямъ.

Для этого обратимъ наше вниманіе, во первыхъ, на то, что если въ (18) функція *u* должна удовлетворять равенству

$$\partial u = M\ (X\,\partial x + X_1\,\partial x_1),$$

то, какъ извѣстно,

$$u = \int_0^x MX\,\partial x + \int_0^{x_1} M^0 X^0{}_1\,\partial x_1;$$

во вторыхъ, если количество *c* подчинено условію

$$dc = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - MX_2\right)\partial x_2 + \ldots\ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_m} - MX_m\right)\partial x_m,$$

то, по замѣщеніи $\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_m}$ ихъ значеніями:

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \int_0^x \frac{\partial (MX)}{\partial x_2} \cdot \partial x + \int_0^{x_1} \frac{\partial (M^0 X^0{}_1)}{\partial x_2} \cdot \partial x_1$$

$$= \int_0^x \frac{\partial (MX_2)}{\partial x} \cdot \partial x + \int_0^{x_1} \frac{\partial (M^0 X^0{}_2)}{\partial x_1} \cdot \partial x_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \int_0^x \frac{\partial (MX)}{\partial x_3} \cdot \partial x + \int_0^{x_1} \frac{\partial (M^0 X^0{}_1)}{\partial x_3} \cdot \partial x_1$$

$$= \int_0^x \frac{\partial (MX_3)}{\partial x} \cdot \partial x + \int_0^{x_1} \frac{\partial (M^0 X^0{}_3)}{\partial x_1} \cdot \partial x_1,$$

. . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} = \int_0^x \frac{\partial (MX)}{\partial x_m} \cdot \partial x + \int_0^{x_1} \frac{\partial (M^0 X^0{}_1)}{\partial x_m} \cdot \partial x_1$$

$$= \int_0^x \frac{\partial (MX_m)}{\partial x} \cdot \partial x + \int_0^{x_1} \frac{\partial (M^0 X^0{}_m)}{\partial x_1} \cdot \partial x_1,$$

будемъ имѣть:

$$dc = -(M^{00} X_2^{00}\, \partial x_2 + M^{00} X_3^{00}\, \partial x_3 + \ldots + M^{00} X_m^{00}\, \partial x_m)$$

и слѣдовательно

$$c = -\left(\int_0^{x_2} M^{00} X_2^{00}\, \partial x_2 + \int_0^{x_3} M^{000} X_3^{000}\, \partial x_3 + \ldots\right.$$

$$+ \int_0^{x_m} M^{m\cdot o} X_m^{m\cdot o} \, \partial x_m \Big) + \text{пост.}$$

Отсюда (18) перейдетъ въ

$$\int_0^x MX \, \partial x + \int_0^{x_1} M^o X_1^o \, \partial x_1 + \int_0^{x_2} M^{oo} X_2^{oo} \, \partial x_2 + \ldots\ldots$$

$$+ \int_0^{x_m} M^{m\cdot o} X_m^{mo} \, \partial x_m = \text{пост.} \quad (19)$$

Это и есть искомая формула, въ которой

$M^o X_1^o$ есть значеніе функціи MX_1 для $x = 0$,

$M^{oo} X_2^{oo}$ — — — MX_2 для $x = x_1 = 0$,

$M^{ooo} X_3^{ooo}$ — — — MX_3 для $x = x_1 = x_2 = 0$,

. . . .

$M^{m\cdot o} X_m^{m\cdot o}$ — — — MX_m для $x = x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_{m-1} = 0$.

15. Вникая глубже въ формулу (19), мы открываемъ удивительно-замѣчательное свойство составляющихъ ея членовъ, которое выразимъ въ формѣ предложенія:

1) Сумма членовъ $\int_0^x MX \, \partial x + \int_0^{x_1} M^o X_1^o \, \partial x_1$, приравненная величинѣ произвольной, есть полный интегралъ двучленнаго уравненія $X \, \partial x + X_1 \, \partial x_1 = 0$, въ предположеніи всѣхъ количествъ, начиная съ x_2 и до x_m постоянными.

2) Послѣдовательные члены:

$$\int_0^{x_2} M^{oo} X_2^{oo} \, \partial x_2, \quad \int_0^{x_3} M^{ooo} X_3^{ooo} \, \partial x_3, \quad \ldots\ldots \quad \int_0^{x_m} M^{m\cdot o} X_m^{m\cdot o} \, \partial x_m$$

суть ни что иное, какъ лѣвыя части интегральныхъ отношеній, соотвѣтствующихъ отдѣльнымъ двучленнымъ уравненіямъ:

$$X_1^0\,\partial x_1 + X_2^0\,\partial x_2 = 0,\ X_2^{00}\,\partial x_2 + X_3^{00}\,\partial x_3 = 0,\ \ldots\ldots$$

$$X_{m-1}^{m-1\cdot 0}\,\partial x_{m-1} + X_m^{m\cdot 0}\,\partial x_m = 0,$$

взятыя соотвѣтственно въ предположеніяхъ:

$$x = x_1 = 0;\ x = x_1 = x_2 = 0;\ \ldots\ldots\ x = x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_{m-1} = 0.$$

16. Первая половина теоремы не требуетъ, очевидно, никакихъ поясненій, что же касается второй, то возьмемъ, напримѣръ, уравненіе

$$X_1^0\,\partial x_1 + X_2^0\,\partial x_2 = 0,$$

въ которомъ допущены: $x = 0$, а всѣ нумерованные xсы, начиная съ x_3 какими угодно постоянными величинами.

Интегралъ этого уравненія изображается чрезъ

$$\int_0^{x_1} M^0 X_1^0\,\partial x_1 + \int_0^{x_2} M^{00} X_2^{00}\,\partial x_2 = c_1.$$

Сдѣлавши теперь $x_1 = 0$, лѣвая часть равенства перейдетъ въ

$$\int_0^{x_2} M^{00} X_2^{00}\,\partial x_2;$$

а это есть третій членъ въ формулѣ (19).

Равнымъ образомъ интегралъ уравненія

$$X_2^{00}\,\partial x_2 + X_3^{00}\,\partial x_3 = 0,$$

гдѣ $x = x_1 = 0$, представляется подъ формою:

$$\int_0^{x_2} M^{00} X_2^{00}\, \partial x_2 + \int_0^{x_3} M^{000} X_3^{000}\, \partial x_3 = c_2.$$

Положивши въ немъ $x_2 = 0$, лѣвая часть обратится въ

$$\int_0^{x_1} M^{000} X_3^{000}\, \partial x_3,$$

то есть въ четвертый членъ уравненія (19); и т. д. Значитъ, теорема доказана.

17. Изъ нея мы можемъ вывести новый способъ интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, удовлетворяющихъ условіямъ интегральности, на который указалъ Якоби въ своихъ «Mathematische Werke» Band 1, стр. 150.

Этотъ способъ будетъ состоять въ слѣдующемъ:

Чтобы найдти интегралъ уравненія

$$X\, \partial x + X_1\, \partial x_1 + X_2\, \partial x_2 + X_3\, \partial x_3 + \ldots\ldots X_m\, \partial x_m = 0,$$

достаточно составить рядъ двучленныхъ равенствъ

$$\begin{aligned}
X\ \partial x &+ X_1\ \partial x_1 = 0,\\
X_1^0\, \partial x_1 &+ X_2^0\, \partial x_2 = 0,\\
X_2^{00} \partial x_2 &+ X_3^{00}\, \partial x_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_{m-1}^{(m-1\cdot 0)}\, \partial x_{m-1} &+ X_m^{(m-1\cdot 0)}\, \partial x_m = 0,
\end{aligned}$$

изъ которыхъ первое взято въ предположеніи x и x_1 перемѣнными; второе, въ предположеніи x_1 и x_2 измѣняемыми, а $x = 0$; третье, подъ условіемъ x_2 и x_3 перемѣнныхъ, а $x = x_1 = 0$ и т. д. Послѣднее, при допущеніяхъ x_{m-1} и x_m измѣняемыми, а $x = x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_{m-2} = 0$; найти функціи

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_{m-1},$$

удовлетворяющія этимъ уравненіямъ и сдѣлать

$$x_1 = 0 \quad \text{въ}\ u_1,$$
$$x_2 = 0 \quad \text{въ}\ u_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{m-1} = 0 \quad \text{въ}\ u_{m-1};$$

тогда сумма результатовъ

$$u + u_1^0 + u_2^0 + \ldots\ldots + u_{m-1}^0$$

приравненная постоянной произвольной изобразитъ полный интегралъ даннаго уравненія.

18. Чтобы не оставлять ничего безъ вниманія и не возвращаться въ послѣдствіи къ тому-же самому предмету, упомянемъ еще о нѣкоторыхъ преобразованіяхъ.

Условія Фонтеня, при которыхъ перемѣнная x въ уравненіи (1) можетъ быть принимаема за нѣкоторую функцію нумерованныхъ $x^{овъ}$, могутъ быть представлены въ новой формѣ, употребленной въ первый разъ Монжемъ.

Для этого достаточно обратиться къ формуламъ (7) и каждую продифференцировать $m-2$ раза въ разсужденіи тѣхъ нумерованныхъ $x^{въ}$, относительно которыхъ дифференцированія не совершалось въ той формулѣ. Тогда $\frac{m.m-1}{2}$ условій (7), между частными производными перваго порядка, сведутся на $m-1$ условій между частными производными $(m-1)$ порядка; и получимъ:

$$\frac{d^{m-1}P_1}{dx_2\,dx_3\ldots dx_m}=\frac{d^{m-1}P_2}{dx_1\,dx_3\ldots dx_m}=\frac{d^{m-1}P_3}{dx_1\,dx_2\,dx_4\ldots\ldots dx_m}$$

$$=\ldots\ldots=\frac{d^{m-1}P_m}{dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-1}}. \quad (20)$$

При этомъ опять нужно имѣть въ виду, что по каждому нумерованному x дифференцировать должно по стольку, по скольку онъ измѣняется самъ по себѣ и по скольку измѣняется x безъ нумера зависящій отъ него, и что, кромѣ того, послѣ каждаго дифференцированія частныя производныя x^{ca} необходимо замѣнять ихъ значеніями (6).

19. Если нѣтъ никакого сомнѣнія въ томъ, что существованіе равенствъ (7) влечетъ за собою формулы (20), то легко также видѣть, что если-бы хоть одно изъ этихъ послѣднихъ отношеній не имѣло мѣста, то нельзя было бы допустить присутствія всѣхъ равенствъ (7).

Напримѣръ, устранивъ изъ уравненій (20) слѣдующее:

$$\frac{d^{m-1}P_1}{dx_2\,dx_3\ldots\ldots dx_m}=\frac{d^{m-1}P_m}{dx_1\,dx_2\ldots\ldots dx_{m-1}},$$

какъ невозможное, очевидно мы должны будемъ признать недѣйствительными всѣ крайнія равенства справа, въ горизонтальныхъ рядахъ формулъ (7).

При всемъ томъ, разсуждая строго, система (20) можетъ заключать большій объемъ, нежели какой требуется формулами (7). Дѣйствительно, если уравненія (20) разсматривать независимо отъ (7), то мы не въ состояніи отъ первыхъ всегда съ необходимостью переходить къ послѣднимъ. Для возможности такого перехода требовалось бы доказать, что имѣя, напримѣръ, равенство

$$\frac{d^{m-1} P_1}{dx_2\, dx_3 \ldots\ldots dx_m} = \frac{d^{m-1} P_2}{dx_1\, dx_3 \ldots\ldots dx_m},$$

одновременно съ нимъ должны существовать и всѣ слѣдующія:

$$\frac{d^{m-2} P_1}{dx_2\, dx_3 \ldots\ldots dx_{m-1}} = \frac{d^{m-2} P_2}{dx_1\, dx_3 \ldots\ldots dx_{m-1}},$$

$$\frac{d^{m-3} P_1}{dx_2\, dx_3 \ldots\ldots dx_{m-2}} = \frac{d^{m-3} P_2}{dx_1\, dx_3 \ldots\ldots dx_{m-2}}, \text{ и т. д.}$$

$$\frac{d^2 P_1}{dx_2\ dx_3} = \frac{d^2 P_2}{dx_1\ dx_3},\quad \frac{d\ P_1}{dx_2} = \frac{d\ P_2}{dx_1}.$$

Однако мы не можемъ сдѣлать этого вообще, не зная напередъ, что (7) имѣютъ уже мѣсто. Слѣдовательно, самобытность уравненій (20) нисколько не обусловливаетъ присутствія равенствъ (7); послѣднія могутъ быть, но могутъ и не быть. Это значитъ, если формулы (20) и можно принимать за необходимыя для разрѣшенія вопроса, насъ занимающаго, то тѣмъ не менѣе не возможно считать ихъ достаточными. Поэтому, для цѣли, которая имѣется въ виду, употребленіе уравненій (20) можетъ быть допускаемо только тогда, когда предварительно извѣстно будетъ, что (7) дѣйствительны. Это всегда мы и будемъ предполагать въ послѣдствіи.

20. Замѣщеніе формулъ (7) отношеніями (20) имѣетъ свои выгоды, какъ это мы увидимъ въ своемъ мѣстѣ. Здѣсь же, думаемъ, не лишнимъ замѣтить слѣдующее: Изъ сравненія между собою формулъ (20) и (7) не должно заключать, что между (7) только $m-1$ первыхъ

отношенiй, составляющихъ первый горизонтальный рядъ достаточны для того, чтобы имѣть уже право трактовать въ уравненiи (1) одну изъ перемѣнныхъ, какъ функцiю остальныхъ.

21. Чтобы разъяснить эту мысль, удобнѣе будетъ взять въ разсмотрѣнiе формулы Эйлера и написать ихъ сначала въ другомъ, болѣе простомъ видѣ. Для этого введемъ обозначенiе Лагранжа, опредѣляемое формулою

$$\left(\frac{\partial X_g}{\partial x_h} - \frac{\partial X_h}{\partial x_g}\right) = (g, h), \quad (21)$$

въ которой символъ (g, h) подчиненъ условiю:

$$(g, h) + (h, g) = 0. \quad (22)$$

Въ такомъ разѣ уравненiя (9) примутъ видъ:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1 . 2)\,X + (2 . 0)\,X_1 + (0 . 1)\,X_2 = 0, & \\
(1 . 3)\,X + (3 . 0)\,X_1 + (0 . 1)\,X_3 = 0, & \\
(1 . 4)\,X + (4 . 0)\,X_1 + (0 . 1)\,X_4 = 0, & (a_1) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(1 . m)\,X + (m . 0)\,X_1 + (0 . 1)\,X_m = 0; & \\
(2 . 3)\,X + (3 . 0)\,X_2 + (0 . 2)\,X_3 = 0, & \\
(2 . 4)\,X + (4 . 0)\,X_2 + (0 . 2)\,X_4 = 0, & (a_2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(2 . m)\,X + (m . 0)\,X_2 + (0 . 2)\,X_m = 0; & \\
(3 . 4)\,X + (4 . 0)\,X_3 + (0 . 3)\,X_4 = 0, & \\
(3 . 5)\,X + (5 . 0)\,X_3 + (0 . 3)\,X_5 = 0, & (a_3) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(3 . m)\,X + (m . 0)\,X_3 + (0 . 3)\,X_m = 0; & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(m-1 . m)\,X + (m . 0)\,X_{m-1} + (0 . m-1)\,X_m = 0. & (a_{m-1})
\end{array}\right\}(23)$$

22. Послѣ этого не трудно будетъ доказать слѣдующую истину: чтобы равенства (a_2), (a_3) . . . . . (a_{m-1}) системы (23) можно было считать слѣдствіями частной системы (a_1), то коэффиціенты въ уравненіи (1) должны быть подчинены еще такимъ условіямъ:

$$\left.\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l}
(3\,.\,0)\,(1\,.\,2) - (2\,.\,0)\,(1\,.\,3) + (1\,.\,0)\,(2\,.\,3) = 0, \\
(4\,.\,0)\,(1\,.\,2) - (2\,.\,0)\,(1\,.\,4) + (1\,.\,0)\,(2\,.\,4) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(m\,.\,0)\,(1\,.\,2) - (2\,.\,0)\,(1\,.\,m) + (1\,.\,0)\,(2\,.\,m) = 0;
\end{array}\right\} & (a_2^1) \\
\left.\begin{array}{l}
(4\,.\,0)\,(2\,.\,3) - (3\,.\,0)\,(2\,.\,4) + (2\,.\,0)\,(3\,.\,4) = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(m\,.\,0)\,(2\,.\,3) - (3\,.\,0)\,(2\,.\,m) + (2\,.\,0)\,(3\,.\,m) = 0;
\end{array}\right\} & (a_3^1) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & (a_{m-1}^1) \\
\begin{array}{l}
(m\,.\,0)\,(m{-}2\,.\,m{-}1) - (m{-}1\,.\,0)\,(m{-}2\,.\,m) \\
\qquad + (m{-}2\,.\,0)\,(m{-}1\,.\,m) = 0.
\end{array} &
\end{array}\right\}(24)$$

Справедливость этого предложенія раскрывается изъ слѣдующихъ соображеній: чтобы частная система $(23\ a_2)$ могла вытекать изъ частной системы $(23\ a_1)$ необходимо, чтобы чрезъ соединеніе перваго равенства въ $(23\ a_1)$ съ каждымъ изъ остальныхъ постепенно получались равенства $(23\ a_2)$. Равнымъ образомъ, дабы частная система $(23\ a_3)$ выходила изъ частной системы $(23\ a_1)$, нужно, чтобы $(23\ a_3)$ также получалась изъ $(23\ a_2)$, какъ $(23\ a_2)$ изъ $(23\ a_1)$ и т. д.

Теперь, въ системѣ (23) мы имѣемъ $m-1$ частныхъ системъ; обративъ наше вниманіе на двѣ какія-нибудь смежныя системы, напримѣръ на $j^{ую}$ и $(j+1)^{ую}$, и взявши изъ $(j+1)^{ой}$ системы, хоть уравненіе

$$(j+1 \,.\, k+2)\, X + (k+2 \,.\, 0)\, X_{j+1} + (0 \,.\, j+1)\, X_{k+2} = 0,$$

тотчасъ замѣчаемъ, что, для возможности разсматривать его слѣдствіемъ $j^{ой}$ системы, надобно, чтобы оно выходило чрезъ исключеніе X_j изъ двухъ слѣдующихъ равенствъ $j^{ой}$ системы:

$$(j \,.\, j+1)\, X + (j+1 \,.\, 0)\, X_j + (0 \,.\, j)\, X_{j+1} = 0,$$
$$(j \,.\, k+2)\, X + (k+2 \,.\, 0)\, X_j + (0 \,.\, j)\, X_{k+2} = 0.$$

А это обстоятельство требуетъ присутствія такого условнаго отношенія:

$$(k+2 \,.\, 0)\,(j \,.\, j+1) - (j+1 \,.\, 0)\,(j \,.\, k+2) + (j \,.\, 0)\,(j+1 \,.\, k+2) = 0,$$

въ силу (22).

Допустивъ здѣсь $j=1$ и проведя k чрезъ всѣ цѣлыя числа отъ 1 до $m-2$, мы получимъ равенства $(24\, a_2^1)$.

Для $j=2$ и для величинъ k отъ 2 до $m-2$, найдемъ равенства $(24\, a_3^1)$, и т. д. Слѣдовательно, теорема доказана сполна.

23. Такъ какъ при совокупномъ существованіи условій $(23\, a_1)$ и (24) уравненія (23) имѣютъ мѣсто, то, очевидно, обратное предложеніе также вѣрно, а именно:

Если съ уравненіями $(23\, a_1)$ одновременно могутъ быть постановлены условія (24), то въ системѣ (23), только первые $m-1$ равенствъ существенно различны между собою.

24. Впрочемъ, въ этомъ послѣднемъ случаѣ нѣтъ никакого выигрыша въ числѣ условныхъ отношеній, не-

обходимыхъ для того, чтобы въ уравненіи (1) одну изъ перемѣнныхъ можно было разсматривать функціею остальныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, замѣнивъ систему (23) равенствами (23 a_1) и (24), число условій, очевидно, остается прежнее.

25. Въ слѣдствіе всего этого, имѣя только систему уравненій (23), мы дѣйствительно убѣждаемся въ невозможности всегда приводить ее только къ первымъ $m-1$ отношеніямъ.