Тетрадь I.я

Аналитическая геометрія.

И. Гашузевскій.

Аналитическая Геометрія.

Геометрія имѣетъ предметомъ измѣреніе протяженій и изслѣдованіе ихъ свойствъ. Протяженіями, какъ извѣстно, называются части пространства, занимаемыя тѣлами. Извѣстно также, что въ геометріи кромѣ протяженій, имѣющихъ три измѣренія и называемыхъ объемами, разсматриваются еще поверхности, которыя ограничиваютъ объемы и представляютъ намъ протяженія, имѣющія два измѣренія, — линіи, ограничивающія поверхности и представляющія протяженія, имѣющія одно измѣреніе, — наконецъ, точки, служащія границами линій и не имѣющія вовсе измѣреній. Точки не суть протяженія; но онѣ разсматриваются въ геометріи, такъ какъ играютъ роль при изслѣдованіи свойствъ протяженій.

Раціональная геометрія распадается въ настоящее время на 2 вѣтви: на такъ называемую чистую или синтетическую и на аналитическую. Обѣ эти отрасли науки имѣютъ одинъ и тотъ же предметъ; разница между ними заключается въ средствахъ, которыми онѣ пользуются для достиженія своихъ цѣлей: въ то время какъ чистая геометрія изучаетъ свойства протяженій при помощи черченія и графическихъ построеній, аналитическая геометрія употребляетъ исключительно и—

выкладки, во всѣхъ своихъ пріемахъ доказательства она опирается на пріемы алгебраическаго и трансцендентнаго анализа.

Весьма естественно, что непосредственныя изслѣдованія свойствъ протяженій прежде всего сдѣлалось достояніемъ людей. Чистая геометрія получила свое начало гораздо раньше аналитической. Которому изъ древнихъ народовъ обязаны мы первыми основаніями этой науки со достовѣрностью рѣшить трудно. Самые древніе памятники Индійской и Египетской литературы и памятники зодчества и искусствъ, сохранившіеся въ этихъ странахъ, доказываютъ, что основы геометріи съ незапамятныхъ временъ были извѣстны этимъ народамъ. Но извѣстные намъ документы не даютъ еще возможности прослѣдить исторію этой науки въ древней Азіи и Африкѣ. Мы указываемъ то, что за 600 лѣтъ до Р. Х. знаменитый греческій философъ Фалесъ (одинъ изъ 7 мудрецовъ) положилъ основаніе іонической школы философіи, въ которой геометрія заняла одно изъ почетнѣйшихъ мѣстъ между науками. Начиная съ этой эпохи, чистая геометрія быстро возрастала и развивалась въ Греціи. У грековъ зародились почти всѣ вар

новые научные приёмы, которыми и мы поль-
зуемся въ настоящее время. Греки создали и за-
кончили такъ называемую элементарную геоме-
трiю. Полное изложенiе этой основной части науки
мы находимъ въ дошедшемъ до насъ сочиненiи алек-
сандрiйскаго ученаго Эвклида, получившемъ названiе
"Элементовъ Эвклида". Въ Англiи въ настоящее
время книга эта принята во многихъ школахъ
какъ руководство. Нужно впрочемъ замѣтить, что
не одною элементарною геометрiею обязаны мы
древнимъ грекамъ: въ трудахъ Эвклида, Архимеда,
Аполлонiя, Паппа, Дiофанта и многихъ другихъ геометровъ
того времени есть много вопросовъ, уже вполнѣ высту-
пающихъ изъ рамки элементарныхъ курсовъ.
Смѣло можно сказать, что греки завѣщали
своимъ преемникамъ науку значительно разви-
тую и что со времени ихъ существованiя собственно
чистая геометрiя подвинулась сравнительно не-
много. Имена Эвклида, Архимеда, Аполлонiя
и теперь еще означаютъ самые важные этапы
въ исторiи развитiя чистой геометрiи.
Совсѣмъ иное происхожденiе аналитической
геометрiи: эта наука исключительно при-

надлежитъ новѣйшимъ народамъ. Основаніе ей положено въ XVII-мъ столѣтіи знаменитымъ французскимъ философомъ и геометромъ Декартомъ (или Картезіусъ). Правда, и до Декарта ученые пользовались вычисленіемъ при рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, но пріемы ихъ не составляли отдѣльной науки, они служили только пособіемъ при рѣшеніи многихъ вопросовъ въ чистой геометріи. Декартъ первый далъ пріемъ, пользуясь которымъ самыя протяженія выражать уравненіями и непосредственное изслѣдованіе свойствъ этихъ протяженій сводить на аналитическое изслѣдованіе ихъ уравненій. Съ этого времени Математическій анализъ сталъ являться значительнымъ орудіемъ при рѣшеніи ~~[illegible]~~ всевозможныхъ геометрическихъ вопросовъ. Выгода, которую принесло открытіе Декарта заключалась главнымъ образомъ въ общности пріемовъ изслѣдованія ~~[illegible]~~ всѣхъ геометрич. вопросовъ. Въ то время какъ чистой геометріи приходилось начинать обыкновенно изслѣдованія съ частныхъ случаевъ и только изъ ряда частныхъ фактовъ выводить болѣе или менѣе общее заключеніе, — аналитическая геометрія сразу обнимаетъ каждый вопросъ во всей его общности, рѣшаетъ его часто въ нѣсколько почерковъ пера и выводитъ дои весьма удобно распространить на всѣ частные случаи.

Открытіе аналитической геометріи по всей справедливости можно назвать самымъ важнымъ событіемъ въ исторіи математическихъ наукъ въ средніе и новые вѣка. Открытіе это дало возможность создать многія вѣтви прикладныхъ математическихъ наукъ, дало средства этимъ отраслямъ прикладной математики быстро разростись и образовать самостоятельные отдѣлы; оно приготовило путь по великимъ последующимъ открытіямъ въ области анализа; каковы напр. открытіе дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.

Намъ приходилось нерѣдко употреблять термины: анализъ, аналитическій; термины эти придется употреблять и впредь и ему нужно будетъ придавать часто то одно значеніе, ~~часто~~ то другое; поэтому мы и остановимся на разъясненіи въ какомъ смыслѣ употребляются въ наукѣ слово „Анализъ" и происходящее отъ него эпитетъ „аналитическій". Слово „анализъ" введено въ науку еще древними греческими учеными и противопоставляется ему слово „синтезъ". Обоими словами; анализъ и синтезъ, то означаютъ два пріема сужденій. Синтезъ заключается по моему мнѣнію въ томъ, что когда отъ истины извѣстной, доказанной уже, рядомъ последовательныхъ выводовъ и заключеній приходимъ къ новой, неизвѣстной истинѣ. Анализъ, напротивъ, состоитъ въ томъ, что для доказательства даннаго предложенія выходимъ изъ этого предложенія и рядомъ выводовъ и заключеній достигаемъ предложенія уже доказаннаго, извѣстнаго. Разумѣется, для того, чтобы подобнымъ путемъ можно было убѣдиться въ справедливости даннаго предположенія, нужно чтобы и наоборотъ: извѣстное предположеніе, къ которому мы наконецъ приходимъ влекло за собою и существованіе даннаго, т. е. что изъ извѣстнаго предложенія, къ которому мы приходимъ наконецъ, мы могли бы выйти къ данному.

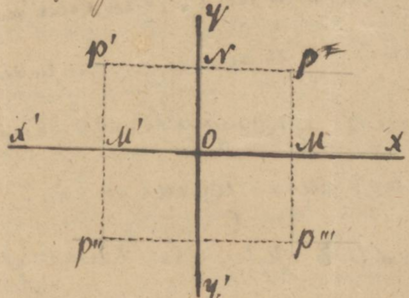
Потомъ стали давать другія опредѣленія; напр., что „анализъ" означаетъ переходъ отъ неизвѣстнаго къ извѣстному, „синтезъ"-же отъ ~~не~~извѣстнаго къ неизвѣстному. До сихъ поръ въ наукахъ не-математическихъ слова синтезъ и анализъ употребляются почти въ послѣднемъ смыслѣ. Говорятъ, именно, теперь, что синтезъ есть переходъ отъ частнаго къ общему, анализъ наоборотъ — отъ общаго къ частному. Въ этомъ смыслѣ и въ чистой геометріи мы находимъ термины: пріемъ аналитическій, пріемъ синтетическій.

Между тѣмъ въ математикѣ слово анализъ, какъ извѣстно, употребляется еще въ иномъ смыслѣ; этимъ словомъ мы характеризуемъ цѣлый отдѣлъ чистой математики: арифметику, теорію чиселъ, алгебраическій и трансцендентный анализъ. Въ этомъ же смыслѣ употребляется сло-вомъ въ названіи „аналитическая геометрія“.

Что же побудило геометровъ придать слову анализъ это новое значеніе? Объяснить это ~~Лекція 2ая~~ исторически очень легко. Алгебра, служа пособіемъ при рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, значительно облегчала тотъ путь сужденій, который древніе характеризовали названіемъ анализъ; подражая, привыкши пользоваться ~~этой~~ ею при аналитическихъ доказательствахъ въ геометріи, ученые мало по малу привыкли называть всѣ пріемы доказательствъ алгебраически-аналитическими и сама алгебра получила названіе анализа.

Перейдемъ теперь къ изложенію собственно аналитической геометріи; при чемъ начнемъ съ изложенія ~~самаго~~ метода, предложеннаго Декартомъ для изображенія протяженій посредствомъ аналитическихъ формулъ. Для этого необходимо показать какимъ образомъ можно опредѣлить положеніе точки въ плоскости и въ пространствѣ.

Опредѣленіе положенія точки въ плоскости.



Пусть даны въ плоскости двѣ прямыя xx' и yy', пересѣкающіяся между собою въ точкѣ O. Пусть въ той-же плоскости дана намъ точка P. Требуется дать аналитическія условія, которыя опредѣлили бы положеніе этой точки относительно данныхъ двухъ линій xx' и yy'. Ясно, что если изъ точки P проведемъ линію PN параллельно прямой xx' и линію PM, параллельно прямой yy', то въ такомъ случаѣ образуется параллелограммъ $PNMO$, въ которомъ $OM = NP$ и $ON = MP$. Если теперь измѣримъ длину OM и назовемъ ее черезъ a, а также длину ON и назовемъ ее черезъ b, то длины a и b вполнѣ опредѣлятъ положеніе точки P внутри угла yox. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ одно условіе $OM = a$. Оно показываетъ

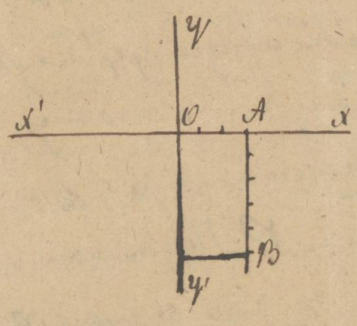
что точка P должна находиться на линіи парал-
лельной xx' въ растояніи отъ yy' равномъ $\underline{a}$;
а второе условіе показываетъ, что въ тоже
время точка P должна находиться на линіи,
проведенной параллельно yy' въ растояніи отъ
xx', равномъ $\underline{b}$. Слѣдовательно точка будетъ на-
ходиться въ пересѣченіи этихъ линій (a и b) и ясно,
что оба условія характеризуютъ только одну
точку, такъ что для всякой другой точки, ле-
жащей внутри угла yox или одно изъ условій
или оба вмѣстѣ будутъ отличны.

Но для полнаго опредѣленія точки P еще недо-
статочно однихъ этихъ условій: можно, напри-
мѣръ, на линіи xx' отложить растояніе $\underline{a}$
влѣво отъ точки O, получимъ до точки M;
изъ M' проведемъ линію параллельную yy' и изъ
N — параллельную xx'; тогда получимъ точку
пересѣченія P', для которой величины $\underline{a}$ и $\underline{b}$ бу-
дутъ тѣ-же, какъ и для точки P. Подобное
построеніе показываетъ намъ, что существу-
ютъ еще двѣ точки P'' и P''', которыхъ растоя-
ніе отъ xx' и yy' такіе какъ и для P. Слѣдо-

вательно находятся 4 такія точки, для которыхъ удовлетворяются одни и тѣже условія. Спрашивается: какъ же различать эти 4 точки между собою? Декартъ предложилъ для этого условія знаковъ. Точку O онъ называетъ **началомъ координатъ**, линіи xx' и yy' — **осями координатъ**; всякое разстояніе, считаемое вправо отъ yy', принимаетъ положительнымъ, а влѣво — отрицательнымъ; отсчитываемыя вверхъ отъ xx' — положительными, а внизъ — отрицательными; отрѣзки OM на xx' обозначать малыми x, а на yy' — малыми y и называть ихъ **координатами**. Принявъ обозначенія Декарта получимъ для точекъ P, P', P'', P''':

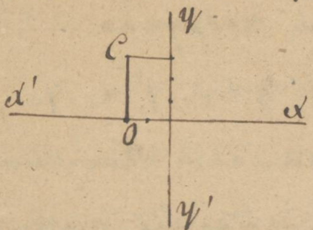
$$\text{Для } P\begin{cases} x = +a \\ y = +b \end{cases}\Bigg|,\quad \text{для } P'\begin{cases} x = -a \\ y = +b \end{cases}\Bigg|,\quad \text{для } P''\begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}\Bigg|\quad \text{для } P'''\begin{cases} x = +a \\ y = -b \end{cases}$$

Эти равенства могутъ намъ служить для опредѣленія положенія точки въ плоскости. Напр. пусть дано для искомой нѣкоторой точки X координаты $x = 3$ и $y = -5$.



Для этого на линіи xx' откладываемъ вправо отъ точки O ~~вправо~~ три равныя части до точки A, изъ A проводимъ линію параллельную OY' и откладываемъ на ней 5 равныхъ только-что частей. И тогда B будетъ искомое положеніе точки X въ плоскости.

Если бы имели условіе $x = -2$, $y = 3$, то построеніе



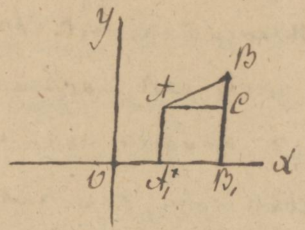
показываетъ, что искомое положеніе точки должно находиться въ C. Следовательно, если даны разъ координаты, то мы можемъ найти положеніе точки въ плоскости. Самыя равенства, опредѣляющія положеніе точки ($x = a$, $y = b$, и т. д.) называются уравненіями точки.

Пріемъ, нами изложенный, называется <u>методомъ координатъ</u>; онъ предложенъ, какъ уже сказали, Декартомъ.

Точка O называется точкою начала координатъ, отрѣзки x и y называются <u>координатами</u> данной точки; x – <u>абсциссою</u> (на оси xx'), а y – <u>ординатою</u> (на оси yy'). Зная координаты точки, знаемъ положеніе ея въ плоскости. Если намъ даны координаты двухъ или большаго числа точекъ, то мы будемъ знать относительное положеніе точекъ между собою. Отсюда является возможность рѣшать нѣкоторыя задачи.

При рѣшеніи этихъ задачъ, а равно и въ послѣдствіи, мы будемъ употреблять такъ называемыя прямоугольныя координаты, т. е. оси, пересекающіяся подъ прямымъ угломъ.

Зад. 1. Пусть даны прямоугольныя оси координатъ



$A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, гдѣ x_1, y_1, x_2, y_2 численныя величины. Требуется опредѣлить разстояніе точекъ A и B. Сдѣлавши построеніе, какъ на чертежѣ, изъ прямоугольнаго ΔABC получимъ

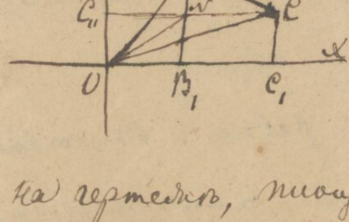
I $AB^2 = AC^2 + BC^2$; но $AC = A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1$; а $BC = BB_1 - AA_1 = y_2 - y_1$; подставивъ эти выраженія въ равенство (I), получимъ:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \text{ или}$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

выраженіе, зависящее отъ координатъ концовъ, если даны въ числахъ, выражаетъ искомую величину числомъ, причемъ радикалъ будетъ имѣть +, если мы будемъ брать безразлично.

Задача 2. Пусть дана прямоугольная система координатъ. Возьмемъ ΔOBC, имѣющій вершину въ точкѣ



O. Пусть $B(x_1, y_1)$ и $C(x_2 y_2)$ координаты точекъ B и C. Требуется площадь ΔOBC выразить въ координатахъ B и C. Сдѣлавши построеніе какъ на чертежѣ, площадь даннаго треугольника обозначимъ черезъ Δ. площ. $\Delta BNC = \Delta_1$, площ. $\Delta ONC = \Delta_2$, площ. $\Delta ONB = \Delta_3$.

Получимъ:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$ а слѣдов. и

$$2\Delta = 2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3.$$ Далѣе, такъ какъ

$2\Delta_1 = BN \times NC_1 = (y_1 - y_2)(x_2 - x_1)$, $2\Delta_2 = NC \times CC_1 = (x_2 - x_1)y_2$,

$2\Delta_3 = BN \times BB_2 = (y_1 - y_2)x_1$, получимъ

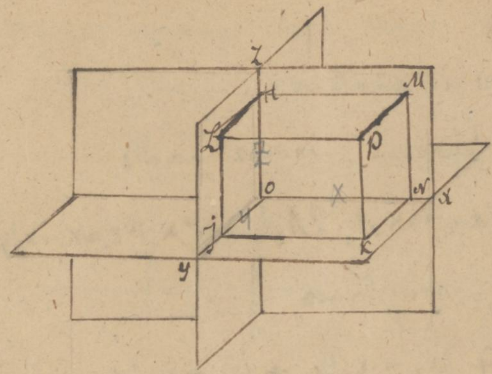
$$2\Delta = (y_1 - y_2)(x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)y_2 + (y_1 - y_2)x_1,$$ или

$$2\Delta = y_1x_2 - y_2x_2 - y_1x_1 + y_2x_1 + x_2y_2 - x_1y_2 + y_1x_1 - y_2x_1,$$

откуда $2\Delta = y_1x_2 - y_2x_1$.

Вотъ выраженіе удвоенной площади нашего треугольника посредствомъ координатъ, изъ котораго найдемъ вмѣстѣ чему равняется искомая величина.

Теперь рѣшимъ *какимъ образомъ опредѣляется аналитически положеніе точки въ пространствѣ.* Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ можетъ быть сдѣлано по отношенію къ положенію другихъ извѣстныхъ точекъ или данныхъ линій или данныхъ плоскостей. Безграничность пространства дѣлаетъ невозможнымъ опредѣленіе абсолютнаго положенія точки. Геометры всего чаще опредѣляютъ положеніе точки въ пространствѣ по отношенію къ тремъ въ одной точкѣ пересѣкающимся плоскостямъ, получающимъ названіе *плоскостей координатъ.*



линіи OZ, OX, OY носятъ названіе осей координатъ; O — начало координатъ; углы XOY, XOZ, YOZ, которые составляютъ ~~координатами~~ осями между собою, называются углами координатъ и соотвѣтственно обозначаются черезъ $(\widehat{XY})$, $(\widehat{XZ})$, $(\widehat{YZ})$.

Всякая точка P, лежащая внутри трехграннаго угла, ~~опредѣлится~~, составляемаго плоскостями координатъ, опредѣлится, если изъ этой точки проведемъ три параллельныхъ плоскостей къ плоскостямъ координатъ и найдемъ длину отрѣзковъ, образующихся въ этомъ случаѣ на осяхъ координатъ. Ясно, что если даны будутъ $PK = c$ (HO), $PL = a$ (JK), $PM = b$ (JO), положеніе точки P въ пространствѣ будетъ опредѣлено; но понятно также, что это опредѣленіе будетъ не вполнѣ точно, потому что въ каждомъ изъ нашихъ 8 угловъ можно найти ~~соотвѣтствующую~~ точку, удовлетворяющую тѣмъ же самымъ условіямъ. Для устраненія этой неопредѣленности, геометры приняли слѣдующія условія: направленія вправо отъ плоскости ZY принимать за положительныя, въ противную сторону — за отрицательныя; по сю сторону отъ XZ — положительныя, по ту — отрицательныя; вверхъ отъ XY — положительныя, внизъ — отрицательныя.

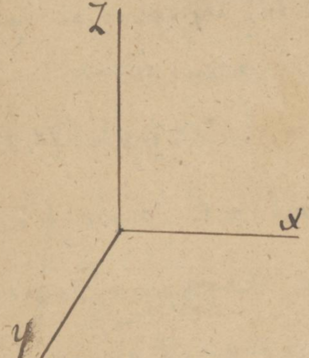
Условившись такимъ образомъ, получимъ:

для P $\begin{cases} x = +a \\ y = +b \\ z = +c \end{cases}$ для P' $\begin{cases} x = -a \\ y = +b \\ z = +c \end{cases}$ для P'' $\begin{cases} x = -a \\ y = +b \\ z = -c \end{cases}$

для P''' $\begin{cases} x = +a \\ y = +b \\ z = -c \end{cases}$

Для точекъ, лежащихъ по ту сторону плоскости zx (по ту сторону доски), получимъ другую смѣну знаковъ: b во всѣхъ 4хъ случаяхъ будетъ отрицательнымъ.

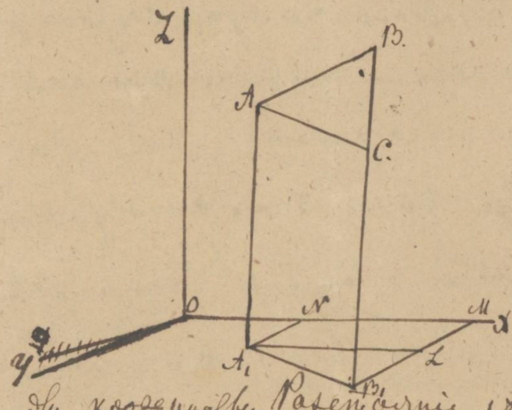
Подобное предыдущему графическое изображеніе плоскостей координатъ слишкомъ сложно, чтобы пользоваться имъ при рѣшеніи каждаго вопроса; поэтому означаютъ обыкновенно только три оси координатъ x, y, z такимъ образомъ:



При этомъ чаще всего употребляются плоскости координатъ, другъ къ другу перпендикулярныя; поэтому оси въ сѣченіи образуютъ прямые углы и называются въ такомъ случаѣ прямоугольными осями координатъ. Употребленіе ихъ очень упрощаетъ формулы; поэтому въ нашихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ почти исключительно пользоваться ими.

Имѣя три равенства, опредѣляющія положеніе точки относительно осей координатъ, мы знаемъ положеніе этой точки въ пространствѣ. Поэтому выведенныя нами равенства могутъ служить для рѣшенія всѣхъ вопросовъ, относящихся до положенія точекъ въ пространствѣ. Для примѣра рѣшимъ слѣдующую задачу:

Зная координаты двухъ точекъ въ пространствѣ, опредѣлить разстояніе этихъ точекъ между собою.



Возьмемъ прямоугольныя оси координатъ x, y, z. Пусть даны двѣ точки A и B, координаты которыхъ намъ извѣстны; Пусть: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2\, y_2\, z_2)$ эти координаты. Разстояніе AB пусть $= \rho$. Чтобы рѣшить предлагаемую задачу, построимъ координаты нашихъ точекъ на самомъ дѣлѣ. Изъ точки A опустимъ $\perp$ на плоскость (xy) осей и потомъ давши намъ на чертежѣ: будемъ имѣть: $ON = x_1$, $NA_1 = y_1$, $AA_1 = z_1$, $OM = x_2$, $MB_1 = y_2$, $BB_1 = z_2$. Соединивъ A_1 и B_1, изъ точки A прове

детъ прямую AC, параллельную A_1B_1; следов. она буд-
перпендикулярна къ BB_1. Поэтому имѣемъ прямоугольн.
треугольникъ ABC, гдѣ уголъ C прямой; изъ него имѣемъ:

$$\text{I.} \quad \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

Но $AC = A_1B_1$. Проведемъ изъ A_1 прямую A_1L до пересѣч.
съ B_1M. Получимъ прямоугол. треуг., изъ котораго имѣемъ:

$$\text{II.} \quad \overline{A_1B_1}^2 = \overline{A_1L}^2 + \overline{LB_1}^2.$$

Подставивъ это равенство вмѣсто $\overline{AC}^2$ въ (I), получимъ:

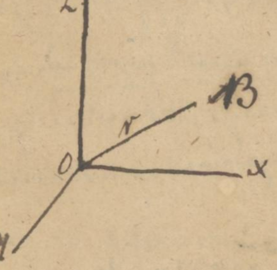
$$l^2 = \overline{A_1L}^2 + \overline{LB_1}^2 + \overline{BC}^2, \text{ или}$$

$$\text{III.} \quad l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Если только требуется опредѣлить длину искомой линіи, то въ выраженіи

$$\text{IV.} \quad l = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

слѣдуетъ взять +. Это общая формула рѣшенія такого рода вопроса; она удовлетворяется при всѣхъ значеніяхъ x_1, y_1 и z_1, а слѣдоват. и въ



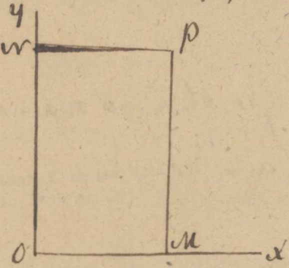
предположеніи x_1, y_1, z_1 отдѣльно каждое $= 0$. И тогда

$$r = \pm\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \text{ или}$$

$$r^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

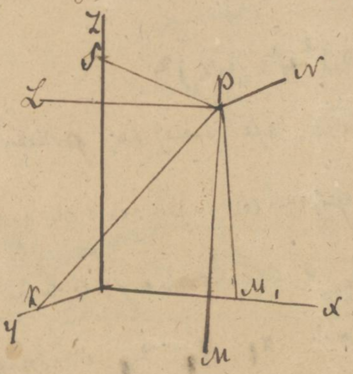
О проэкціяхъ.

Если въ плоскости имеемъ точку P, отнесенную къ системѣ координатъ x, y; проведемъ изъ этой точки



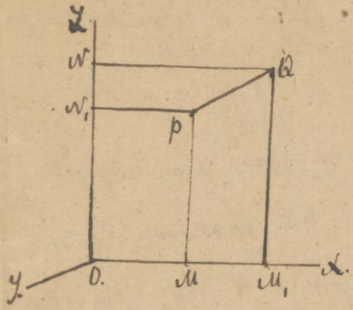
перпендикуляры на оси x-овъ и y-овъ. Въ такомъ случаѣ точка M, въ которую падаетъ перпендикуляръ на ось x-овъ, называется проэкціею точки P на ось x-овъ; также точно точка N называется проэкціей P на ось y-овъ. И если yo и xo другъ къ другу перпендикулярны, проэкціи носятъ названіе ортогональныхъ.

Если мы имеемъ прямоугольную систему координатъ въ пространствѣ и въ ней точку



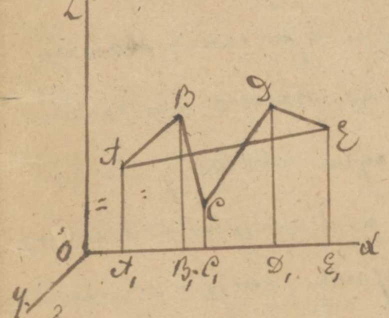
P, изъ которой проведемъ перпендикуляры къ плоскостямъ координатъ, кои на пер., получимъ точки M, L, N, которыя ~~назыв.~~ будутъ ортогональными проэкціями точки P на плоскости (x y)-овъ, (y z)-овъ и (x z)-овъ. Если мы опустимъ перпендикуляры изъ точки P на оси координатъ, получимъ точки M_1, S, K, которыя называются ортогональными проэкціями на осяхъ x, y, z.

Слѣдовательно вообще ортогональной проэкціей точки на линію или на плоскость называется точка, въ которую падаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ данной точки на линію или на плоскость.



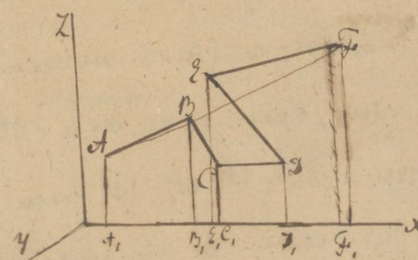
Если будемъ имѣть въ пространствѣ прямую, соединяющую двѣ точки P и Q, то ортог. проэкціи этихъ точекъ, какъ извѣстно, будутъ на оси x-овъ M и M_1, на оси z-овъ N_1, N. Если мы проэктируемъ всѣ точки прямой PQ на какую либо линію ox, получимъ на послѣдней прямую линію. Подобнымъ же образомъ можно проэктировать прямую и въ плоскости. Ясно также, что совокупность ортог. проэкцій всѣхъ точекъ поверхности на данную плоскость образуетъ ортогон. проэкцію этой поверхности на плоскость.

Замѣтивъ это, можно доказать такое предложеніе: <u>Сумма проэкцій всѣхъ частей простой ломаной линіи въ пространствѣ, на одну изъ осей координатъ, равняется проэкціи прямой, стягивающей крайнія точки ломаной, на туже прямую.</u>



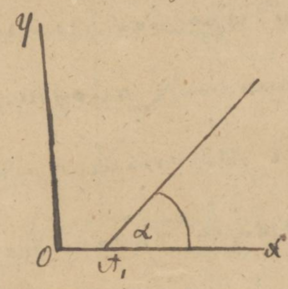
Справедливость этого предложенія обнаруживается само собой, если станемъ на самомъ дѣлѣ проэктировать всѣ части нашей ломаной. Опустимъ изъ точекъ A, B, C... перпендикуляры на ось x-овъ. Сумма всѣхъ проэкцій выразится такъ:

$A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 = A_1E_1$. Это равенство и доказываетъ высказанное нами предложеніе.

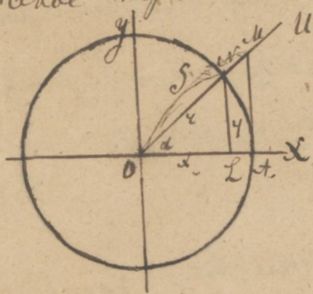


Если же ломаная линія представится въ такомъ видѣ, какъ на чертежѣ, то, при условіи, линіи, идущія справа на лѣво, принимаемъ за отрицательныя, получимъ проекцію данной ломаной на оси x-овъ или y-овъ, которая будетъ равна разности проэкцій линій, идущихъ на право и линій, идущихъ на лѣво.

Мы еще разъ вернемся къ теоріи координатъ при опредѣленіи длины проекцій; но такъ какъ въ эти предположенія войдетъ выраженіе угловъ въ тригонометрическихъ линіяхъ, то и займемся теперь выводомъ общихъ тригонометрическихъ формулъ.



Помнимъ, что для опредѣленія положенія прямой, необходимо знать уголъ и направленіе въ какую сторону она отложена. Слѣдовательно, намъ необходимо измѣрить углы, составляемые линіей съ той или другой координатой. Углы обыкновенно выражаются въ градусахъ; но на практикѣ находятъ болѣе удобнымъ выражать углы тригонометрическими линіями. Разсмотримъ, что же такое тригонометрическія линіи?



Если-бы дана была прямая
каждой точки на ней, N.
OU, координата N и уголъ α,
то мы можемъ опредѣлить
положеніе этой прямой въ
плоскости.

Представимъ себѣ прямоугольную систему координатъ; проведемъ произвольную прямую OU, возьмемъ на этой прямой точку N, радіусомъ ON опишемъ окружность; построимъ координаты точки N: для чего изъ точки N опустимъ перпендикуляръ на OX, — получимъ ординату NL и абсциссу OL.

Легко видѣть, что для построенія линіи OU достаточно знать отношенія трехъ количествъ, r, x, y, между собой; потому что если дано, напримѣръ, намъ отношеніе только y къ x, то, взявъ произвольно x, опредѣлимъ y. Положимъ $\frac{y}{x} = 5$; полагая или зная $x = 2$, получимъ величину y.

Отношеній между упомянутыми линіями существуетъ всего шесть:

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x},\ \frac{r}{y},\ \frac{r}{x},\ \frac{x}{y}.$$

Первое отношеніе называется синусомъ угла α; поэтому можно написать: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$. Названіе Sinus сохранилось

отъ латинскаго semi inscripta, потому что sin представляетъ половину хорды, соотвѣтствующей углу 2α.
Второе отношеніе назыв. cosinus'омъ; слѣд.

$$\cos\alpha = \ldots = \frac{x}{r}$$

Названіе cosinus произошло изъ co и sinus, т. е. какъ бы sinus дополненія угла до 90°.
Третье отношеніе — tang:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Слово tangens, или касательная, усвоено отношенію $\frac{y}{x}$, и почему это такъ, объяснить нетрудно. Если изъ точки A возставить $\perp$ къ линіи OX до пересѣченія съ OM и обозначимъ его черезъ t, — получимъ линію t, которую прежде и называли $\operatorname{tang}\alpha = \frac{t}{r}$; но послѣднее отношеніе равно $\frac{y}{x}$, такъ какъ $\Delta\Delta$ ONL и OMA подобны; вслѣдствіе чего и можемъ написать

$$t : r = y : x, \quad \text{или} \quad \frac{t}{r} = \frac{y}{x}.$$

Четвертое отношеніе ~~назыв.~~ $\frac{r}{x}$ или $\frac{1}{x}$ назыв. секансомъ (sec) на томъ основаніи, что если мы возвысимъ линію OM неопредѣленно, то она будетъ просто отсѣкущею; если же возвысимъ на ней длину S до пересѣченія съ перпендик., возставленнымъ изъ A, то отнош. $\frac{S}{r}$ и называютъ собственно sec, но такъ какъ оно равно $\frac{r}{x}$ ($\Delta\Delta$ OMN и ONL подобны), то названіе отношенію и къ послѣднему.

5ое отношеніе, $\frac{r}{y}$, назыв. cosec α, потому что это ~~отноше~~ отношеніе выражаетъ sec угла дополнит. до 90°.

6ое отношеніе, $\frac{x}{y}$, назыв. cot α; ибо это есть ничто иное какъ tg дополненія до 90°.

Эти отношенія получили названіе тригонометрическихъ линій, потому что въ древнія времена они исключительно служили пособіемъ при рѣшеніи треугольниковъ. Въ настоящее время этимъ количествамъ даютъ болѣе общее опредѣленіе, какъ отношеній между координатами и разстояніемъ данной точки отъ начала. Названіе „тригонометрическія линіи" утратило свое значеніе и употребляется въ настоящее время только по старой памяти.

Изъ шести указанныхъ нами отношеній, sin, cos, tang называются главными; они дѣйствительно употребляются чаще трехъ послѣднихъ. Вообще высказанныя только что 6 равенствъ служатъ самымъ точнымъ опредѣленіемъ этихъ линій. Изъ разсмотрѣнія этихъ равенствъ выводятся всѣ свойства тригонометрическихъ линій. Къ этимъ 6ти равенствамъ необходимо прибавить еще 7ое: опредѣлитъ отношеніе x, y, r между собою; что можно сделать из √OML.

Имеем

$$x^2+y^2=r^2.$$

Рассмотрим далее наши равенства. Первое. Легко видеть, что sin α с изменением угла изменяется от +1 до −1. Когда угол $\alpha = 0$, ордината $y = 0$, следов. числитель дроби $\frac{y}{r}$ будет 0; когда α увелич. до 90°, $y = r = 1$; когда $\alpha = 180$, $y = 0$, когда $\alpha = 270°$, $y = -r = -1$ и т.д.
Когда увеличивается α косинус напротив убывает в пределах +1 и −1. Это видно из чертежа.
Tang в 1-й четверти остается положительным и изменяется от 0 до +∞. Если возьмем во 2-й четв., то sin α положит., cosin изменяется от 0 до −1; tang перескакивает от +∞ до −∞, таким обр. происход. разрыв функции.

Лекция.

Мы имели:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \tan\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y},\ \sec\alpha = \frac{r}{x},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y},$$

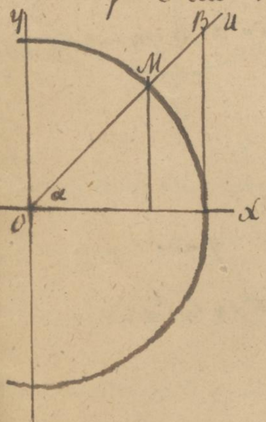
и кроме того

$$y^2+x^2=r^2,$$ откуда, разделив обе части равенства на r^2,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

равенство, справедливое для всех значений α. Если радиус равен 1, то sin α будет равен самой ординате, cos α = абсциссе, а tang α = линии AM.

До сихъ поръ мы разсматривали тригонометрическiя линiи какъ средства опредѣлять направленiе линiи въ плоскости. Спрашивается: достаточно ли для этого знать одну линiю? Нѣтъ. Положимъ намъ извѣстенъ $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, или $r\sin\alpha = y$. Если r возьмемъ произвольно, то опредѣлимъ



ординату точки M, а другая координата неизвѣстна. Но ~~сам~~ тоже самое, если извѣстны r и $\sin\alpha$. Зная же знаки двухъ тригонометрическихъ линiй и величину одной изъ нихъ, можно будетъ опредѣлить положенiе нашей линiи. Такъ, зная величину $\sin\alpha$, можно будетъ опредѣлить и величину $\cos$, потому что $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$; отсюда $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Зная знакъ искомаго $\cos\alpha$ можно опредѣлить отсюда его точную величину. Если же, наоборотъ, данъ знакъ $\cos$, а $\sin$ нужно было опредѣлить, тогда

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\,;\ \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Если извѣстенъ $tg\,\alpha$, тогда въ равенствѣ $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$, раздѣливъ числителя и знаменателя на r, получаемъ

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Взявъ равенство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$ дѣлимъ его на $\cos^2\alpha$; получаемъ:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$ или $\cos^2\alpha(tg^2\alpha + 1) = 1$, откуда:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{tang^2\alpha+1},$$ или $$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{tang^2\alpha+1}},$$

Это выраженіе заключаетъ радикалъ въ знаменателѣ, передъ которымъ 2 знака; знакъ какой знакъ долженъ имѣть cos, опредѣлимъ его точную величину.

Если бы, зная $tg\,\alpha$, захотѣли опредѣлить $\sin\alpha$, то помноживъ обѣ части послѣдняго равенства на $\sin\alpha$ и дѣля на $\cos\alpha$, получимъ:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\pm\sqrt{tg^2\alpha+1}}.$$

Итакъ мы ~~получили~~ имѣемъ ~~слѣдующія~~ основныя формулы:

~~А, Основныя~~: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $tg = \frac{y}{x}$ и $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, получимъ слѣдующія:

$$\mathrm{I.}\begin{cases}\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\end{cases} \qquad \mathrm{II.}\begin{cases}\sin\alpha = \dfrac{tg\,\alpha}{\pm\sqrt{tg^2\alpha+1}}\\ \cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{tg^2+1}}\end{cases}$$

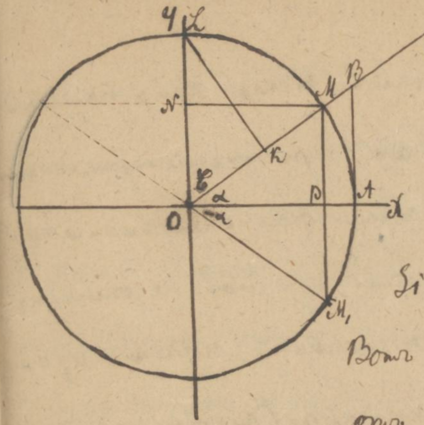
Далѣе, изъ формулы $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, зная $\sin\alpha$, получимъ

$$\mathrm{III.}\begin{cases}tg\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{(1-\sin^2\alpha)}}, \text{ а зная } \cos:\\ tg\,\alpha = \dfrac{\pm\sqrt{(1-\cos^2\alpha)}}{\cos\alpha}\end{cases}$$

Посмотримъ теперь какъ переходить отъ тригонометрич. линій однихъ угловъ къ тригонометр. линіямъ другихъ. Пусть кромѣ $\angle\alpha$ есть еще другой уголъ, равный ему, исходящій $\angle AOM_1$ (смотр. стр. 14.). Тогда:

$$\begin{cases}\sin(-\alpha) = \dfrac{y'}{r}\\ \sin\alpha = \dfrac{y}{r}\end{cases}; \quad \begin{cases}\cos(-\alpha) = \dfrac{x_1}{r}\\ \cos(\alpha) = \dfrac{x}{r}\end{cases}; \quad tg(-\alpha) = \frac{y_1}{x_1},\ tg(\alpha) = \frac{y}{x};$$

Такъ какъ прямоугольные треугольники MOP и M_1OP



имеют общий катет OP и острые углы α и −α равные, то они равны; а из равенства их следует, что

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ tg(-\alpha) = -tg\alpha \text{ и т.д.}$$

Вот формулы, показывающія переход от тригонометрических линій угла положительнаго к тем же линіям угла отрицательнаго.

Разсмотрим в каком отношеніи находятся тригонометрическія линіи углов, сумма которых равна 90°. Пусть α один угол, β — его дополненіе до 90°. Мы имеем:

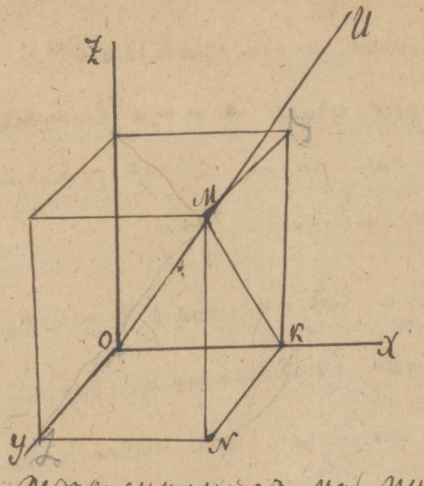
$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},$$ а если станем считать за начало дуги M, то

$$\sin\beta = \frac{LK}{r},\ \cos\beta = \frac{OK}{r}.$$

Но $LK = MN$, как половины хорд, стягивающих равныя дуги; следов.

$$\sin\beta = \frac{x}{r},\ \cos\beta = \frac{y}{r}.$$

Сравнивая последнія формулы с формулами $\sin$ и $\cos$ для угла α, мы видим, что правыя части их равны; следоват.: $\sin\alpha = \cos\beta$ и $\cos\alpha = \sin\beta$. Обращаясь к формуле: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получим: $\cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1$, т.е. <u>сумма квадратов косинусов дуг, составляющих вместе 90°, равна 1.</u>



Укажемъ теперь какъ пользоваться тригонометрическими линіями для опредѣленія направленія прямой не только въ плоскости, но и въ пространствѣ. Опустимъ изъ M перпендикуляръ на плоскость $(XY)^{ов}$ MN и проведемъ изъ N NK # къ оси $Y^{овъ}$; тогда линія MK будетъ ⊥ къ оси $X^{ов}$. Изъ прямоугольнаго Δ OMK имѣемъ:

$$\frac{x}{r} = \cos(\widehat{UX}).$$

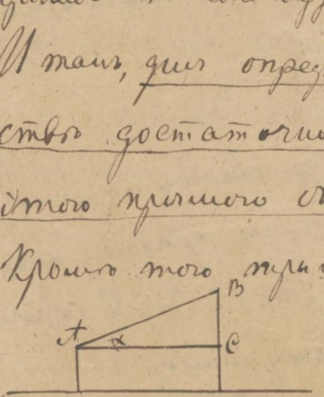
Дѣлая тоже и на другихъ плоскостяхъ, получаемъ:

$$\frac{y}{r} = \cos(\widehat{UY}) \text{ и } \frac{z}{r} = \cos(\widehat{UZ}).$$

Зная эти величины, мы можемъ опредѣлить направленіе линіи U, потому что тогда узнаемъ положеніе точки M; точка же O извѣстна; слѣдовательно и положеніе прямой также будетъ извѣстно.

Итакъ, для опредѣленія положенія прямой въ пространствѣ достаточно знать Cos угловъ, составляемыхъ этою прямою съ каждою изъ осей координатъ.

Кромѣ того тригонометрич. линіи очень удобно прилагаются къ выраженію длины проэкціи линіи. Пусть требуется опредѣлить



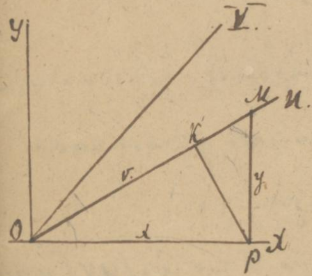
проекцію линіи AB. A_1 и B_1 будутъ проекціи точекъ A и B.

Уголъ α извѣстенъ, тогда $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$; откуда

$$AC = AB.\cos\alpha.$$

Итакъ, проекція линіи на прямой = длинѣ данной линіи, умноженной на Cos угла, составляемаго данной линіей съ линіей, на которую мы проектируемъ.

Пользуясь этой теоремой, мы можемъ найти длину проекціи всякой линіи.



Пусть теперь дана намъ прямоугольная система координатъ въ плоскости. Пусть углы $(\hat{U}x)$ и $(\hat{U}y)$ извѣстны и сумма ихъ = 90°; пусть дана другая прямая V, и извѣстны тоже углы $(\hat{V}x)$ и $(\hat{V}y)$. Требуется опредѣлить одну изъ тригонометрическихъ линій угла, составленнаго линіями VO и UO? Возьмемъ произвольную точку M. Такъ какъ проекція ломаной = проекціи прямой ~~линіи составляющей её~~ концы, то проекція ~~OMP = OP~~ = $x.\cos(\hat{U}x)$, ~~т.е.~~ : OPM = проекціи линіи r на самой себя. Далѣе, по извѣстному, пишемъ:

$$\text{пр. } x = x.\cos(Ux), \text{ а тоже:}$$

$$\text{пр. } y = y.\cos(Uy), \text{ такъ какъ } \angle OMP = (\hat{U}y)$$

Слѣдовательно:

$$r = x.\cos(Ux) + y\cos(Uy);$$ (тогд. по сокращ.: $\cos^2(Ux) + \cos^2(Uy) = 1$ подъ самой линіи)

но съ друг. стор. $x = r\cos(Ux)$, $y = r\cos(Uy)$.

Если бы мы стали проектировать на линію V, получили бы:

$$\text{пр. } x = x.\cos(\hat{V}x)$$

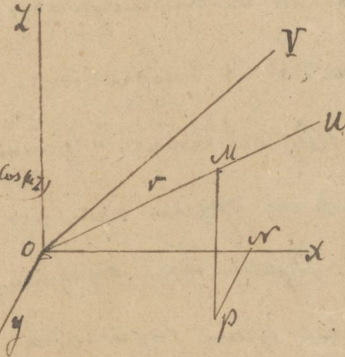
$$\text{пр. } y = y.\cos(\hat{V}y).$$

Но пр. OM = $v\cos(VU) = x\cos(Vx) + y(\cos(Vy))$, или, разделивъ обѣ части этого равенства на v, получаемъ:

$$\cos(UV) = \cos(Ux)\cos(Vx) + \cos(Uy)\cos(Vy):$$

почему говоримъ: Cos нашего угла = произведенію $\cos^{овъ}$ угловъ, составленныхъ данными линіями съ осью $x^{овъ}$ + произведенію $\cos^{овъ}$ угловъ, составленныхъ этими же линіями съ осью $y^{овъ}$.

Сказанное сейчасъ относится къ плоскости; посмотримъ, что будетъ въ пространствѣ?



Сдѣлавъ тѣ построенія, что на чертежѣ, на основаніи сейчасъ доказанной теоремы имѣемъ:

Пр. MO на линію $V = v\cos(UV)$ и далѣе

$$v\cos(UV) = x\cos(Vx) + y(Vy) + z\cos(Vz),$$

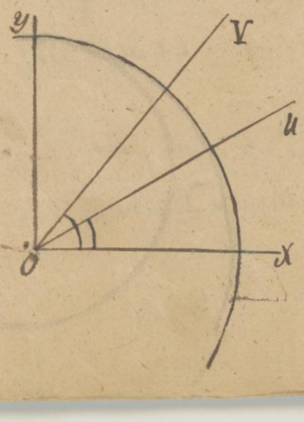
или, разделивъ на v:

$$\cos(UV) = \cos(Ux)\cos(Vx) + \cos(Uy)\cos(Vy) + \cos(Uz)\cos(Vz)$$

Слѣдовательно приходимъ къ подобному же выводу.*

* А также:
$v = x\cos(Ux) + y\cos(Uy) + z\cos(Uz)$
Но такъ какъ
$x = v\cos(Ux)$
$y = v\cos(Uy)$
$z = v\cos(Uz)$,
то
$\cos^2(Ux) + \cos^2(Uy) + \cos^2(Uz) = 1$.

Переходимъ теперь опять къ тригонометрическимъ линіямъ.



Пусть даны два угла: a и b ($Vx = a$, $Ux = b$). Требуется вывести выраженія тригонометрич. линій для суммы и разности угловъ a и b, зная тригонометрич. линіи этихъ послѣднихъ.

Замѣтимъ, что $\angle UV = a - b$, на основаніи доказаннаго пишемъ:

$$\mathrm{Cos}(UV) = \mathrm{Cos}(Ux)\,\mathrm{Cos}(Vx) + \mathrm{Cos}(Uy)\,\mathrm{Cos}(Vy),$$ или, подставъ равныя вмѣсто равныхъ,

$$\text{I} \ldots \mathrm{Cos}(a-b) = \mathrm{Cos}\,b \cdot \mathrm{Cos}\,a + \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b.$$

Отсюда можно вывести и Cos суммы данныхъ угловъ, допуская, что $-b = c$. Въ самомъ дѣлѣ, получимъ:

$$\mathrm{Cos}(a+c) = \mathrm{Cos}\,c\,\mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Sin}\,c\,\mathrm{Sin}\,a,$$ или, полагая $c=b$,

$$\text{II} \ldots \mathrm{Cos}(a+b) = \mathrm{Cos}\,b \cdot \mathrm{Cos}\,a - \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Sin}\,a.$$

Знаемъ также, что

$$\mathrm{Sin}^2 A = 1 - \mathrm{Cos}^2 A.$$

Полагая здѣсь $A = a+b$, получимъ:

$$\mathrm{Sin}^2(a+b) = 1 - \mathrm{Cos}^2(a+b) = 1 - (\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b - \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b)^2 =$$
$$\mathrm{Sin}^2 b + \mathrm{Cos}^2 b - \mathrm{Cos}^2 a\,\mathrm{Cos}^2 b - \mathrm{Sin}^2 a\,\mathrm{Sin}^2 b + 2\,\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b,$$ или
$$\mathrm{Sin}^2(a+b) = \mathrm{Sin}^2 b\,\mathrm{Cos}^2 a + \mathrm{Cos}^2 b\,\mathrm{Sin}^2 a + 2\,\mathrm{Cos}\,a\,\mathrm{Cos}\,b\,\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Sin}\,b,$$ или:
$$\mathrm{Sin}^2(a+b) = (\mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,a)^2,$$ или

$$\text{III} \; \mathrm{Sin}(a+b) = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,b + \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,a.$$

Вотъ формула для опредѣленія Sin суммы двухъ угловъ, когда Sin и Cos этихъ угловъ намъ извѣстны.

Если въ нашей формулѣ вмѣсто b подставимъ $-b$, или сами допустимъ $A = a-b$, получимъ:

$$\text{IV} \ldots \mathrm{Sin}(a-b) = \mathrm{Sin}\,a\,\mathrm{Cos}\,b - \mathrm{Sin}\,b\,\mathrm{Cos}\,a.$$

Вотъ формулa для опредѣленія Sin разности.

Если раздѣлимъ выраженіе Sin суммы на Cos суммы,

получимъ:

$$\text{V. } tg(a\pm b) = \frac{\sin a\cos b \pm \sin b\cos a}{\cos a\cos b \mp \sin a\sin b} \quad (1)$$

Раздѣливши числитель и знаменатель на $\cos a\cos b$, получимъ:

$$(2)\quad tg(a\pm b) = \frac{tga \pm tgb}{1 \mp tga\, tgb}.$$

Если допустимъ $a = b$, получимъ:

a) $\sin 2a = 2\sin a\cos a$,

b) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

Къ формулѣ (b) прибавивъ тождественно равное нулю выраженіе $\sin^2 a - \sin^2 a$, получимъ:

$$(\alpha) \ldots\ldots \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$$

Если вычтемъ и прибавимъ по $\cos^2 a$, будемъ имѣть:

$$(b)\quad \cos 2a = 2\cos^2 a - 1.$$

Опредѣлимъ Sin изъ (α):

$$\sin a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}.$$

Изъ (b) имѣемъ:

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$$

Обратимся къ формулѣ (V, 2) Считая $a = b$, получимъ:

$$tg2a = \frac{2tga}{1-tg^2a};$$

отсюда можно вывести чему равенъ tg половинной дуги; а именно:

$$tg2a - tg2a\,tg^2a - 2tga = 0, \text{ или:}$$

$tg\,2a\,tg^2a + 2tg\,a - tg\,2a = 0$, откуда:

$$tg\,a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4(tg^2 2a)}}{2tg\,2a},$$

или:

$$\text{VI} \ldots\; tg\,a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+tg^2 2a}}{tg\,2a}$$

Вотъ формула для опредѣленія tg половинной дуги, когда извѣстенъ tg ~~двойной~~ двойной.

Возьмемъ теперь формулы III и IV, сложимъ ихъ и вычтемъ; затѣмъ то же сдѣлаемъ съ формулами II и I. Получимъ:

$$\begin{cases} Sin(a+b) + Sin(a-b) = 2\,Sin\,a\,Cos\,b, \\ Sin(a+b) - Sin(a-b) = 2\,Sin\,b\,Cos\,a, \\ Cos(a+b) + Cos(a-b) = 2\,Cos\,a\,Cos\,b, \\ Cos(a-b) - Cos(a+b) = 2\,Sin\,a\,Sin\,b. \end{cases}$$

Допустивши: $a+b=p$, $a-b=q$, или: $a=\frac{p+q}{2}$, $b=\frac{p-q}{2}$ и подставивъ эти величины въ найденныя формулы, имѣемъ:

$$\text{VII} \begin{cases} Sin\,p + Sin\,q = 2\,Sin\,\frac{p+q}{2}\,Cos\,\frac{p-q}{2}, \\ Sin\,p - Sin\,q = 2\,Cos\,\frac{p+q}{2}\,Sin\,\frac{p-q}{2}, \\ Cos\,p + Cos\,q = 2\,Cos\,\frac{p+q}{2}\,Cos\,\frac{p-q}{2}, \\ Cos\,q - Cos\,p = 2\,Sin\,\frac{p+q}{2}\,Sin\,\frac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Отсюда:

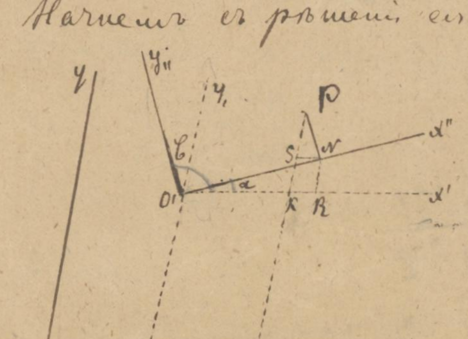
$$\frac{Sin\,p + Sin\,q}{Sin\,p - Sin\,q} = tg\,\frac{p+q}{2}\,Cotg\,\frac{p-q}{2} = \frac{tg\,\frac{p+q}{2}}{tg\,\frac{p-q}{2}}.$$

Вотъ всѣ важнѣйшія формулы прямолинейной тригонометріи, которыми приходится пользоваться при изслѣдовани всѣхъ вопросовъ, относящихся къ аналитической геометріи, астрономіи и практической механикѣ.

Теперь приступимъ къ дальнѣйшему изученію геомет[...]

Мы знаемъ, что если извѣстны координаты точекъ, можно рѣшать различные вопросы, относящіеся къ положенію точекъ въ плоскости и въ пространствѣ. Можетъ случиться, что отъ положенія точки относительно одной системы координатъ требуется перейти къ положенію точки относительно другой системы; другими словами: <u>по даннымъ координатамъ одной системы осей, требуется опредѣлить координаты той-же точки относительно другой системы</u>.

Очевидно, рѣшеніе подобной задачи возможно только при одномъ условіи, — именно, чтобы положеніе 2-ой системы осей относительно первой было намъ дано. Разсмотримъ какимъ обр. рѣшить эту задачу въ последующемъ случаѣ. Начнемъ съ рѣшенія ея для точки въ плоскости.



Пусть имѣемъ какую бы то нибудь систему прямолинейныхъ координатъ, пересѣкающихся подъ угломъ Q. Пусть дана въ плоскости точка P, координаты которой относительно данныхъ осей извѣстны. Проведемъ линію PM $\#$ оси $y^{ов}$; тогда PM — есть y, OM есть наша x, т.е. абсцисса точки P относительно осей x, y. ~~Положимъ, что~~ требуется опредѣлить координаты точки P относительно другой системы осей, а именно $x''y''$, начало которыхъ въ O', ~~т.е. т.~~ т.е. требуется опредѣлить $PN = y''$ и $O'N = x''$. Для того, чтобы рѣшеніе предложенной задачи было возможно, нужно, ~~конечно, замѣтимъ~~, чтобы не только направленіе новыхъ осей относительно старыхъ было извѣстно, но чтобы положеніе O' относительно прежнихъ ~~осей~~ было дано. Изъ O' проведемъ $\#$ оси y $O'L$, т.е. $O'L$ есть ордината точки O' относительно оси $x^{ов}$: Означимъ $OL = a$, $O'L = b$. Изъ O' проведемъ $\#$ оси x и означимъ черезъ x', и оси y черезъ y'. Изъ чертежа видно, что

$$\begin{aligned} OM &= OL + O'K = a + O'K \\ PM &= O'L + KP = b + KP \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a + O'K \\ y = b + KP. \end{cases}$$

Теперь остается выразить линіи $O'K$ и PK относительно осей $x''y''$. $O'K$ есть абсцисса точки P относительно системы осей x', y'; следов. $O'K$ можно означить черезъ x'. PK есть ордината точки P относительно тѣхъ же осей, т.е. y'. Такъ что получаемъ:

$$x = a + x', \quad y = b + y'.$$

Эти формулы даютъ возможность опредѣлить x', y', когда извѣстны y, x, a и b. Но намъ нужно опредѣлить

x'', y''. Для этого изъ N проведемъ NS, параллельно x'ике x, и NR также. Будемъ имѣть:

$$x' = O'R - SN,\quad y' = PS + NR.$$

Изъ $\Delta\, O'NR$ имѣемъ:

$$O'R : O'N = \sin(y'x'') : \sin(y'x');$$

изъ того же Δ-ка:

$$NR : O'N = \sin(x''x') : \sin(y'x').$$

Изъ $\Delta\, SPN$ имѣемъ:

$$SN : PN = \sin(y'y'') : \sin(y'x'),$$

$$PS : PN = \sin(y''x') : \sin(y'x').$$

Изъ этихъ пропорцій получаемъ:

$$x' = x''\frac{\sin(y'x'')}{\sin(y'x')} - y''\frac{\sin(y'y'')}{\sin(y'x')},$$

$$y' = y''\frac{\sin(y''x')}{\sin(y'x')} + x''\frac{\sin(x''x')}{\sin(y'x')}.$$

Означимъ $\angle\, x''x'$ черезъ α, а уголъ $y''x'$ черезъ β и подставимъ въ найденныя выраженія; получимъ:

$$x' = x''\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - y''\frac{\sin(\beta-\theta)}{\sin\theta} = x''\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + y''\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}$$

$$y' = y''\frac{\sin\beta}{\sin\theta} + x''\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

~~(Если $\theta = 90°$, наши формулы обратятся въ старо-~~
~~нія.)~~

Вотъ формулы, служащія для перехода отъ осей коорд-натъ $x'y'$ къ $x''y''$. Подобно:

$$x = a + x''\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} + y''\frac{(\theta - \beta)}{\sin\theta},$$

$$y = b + y''\frac{\sin\beta}{\sin\theta} + x''\frac{\sin\alpha}{\sin\theta},$$

если x, y извѣстны, а также a и b и углы, можемъ наши опредѣлить $x''\ y''$ и наоборотъ. Формулы эти имѣютъ самый общій характеръ.

Если, въ частномъ случаѣ, $\theta = 90^\circ$, получимъ:

$$x = a + x''\sin(90^\circ - \alpha) + y''\sin(90^\circ - \beta),$$
$$y = b + x''\sin\alpha + y''\sin\beta$$
$$\cancel{y = b + x''\sin(\alpha) + y''\sin(\beta).}$$

Если и вторыя оси прямоугольны, т.е. если будемъ имѣть: $\beta = 90^\circ + \alpha$,

$$x = a + x''\cos\alpha - y''\sin\alpha;\quad y = b + x''\sin\alpha + y''\cos\alpha.$$

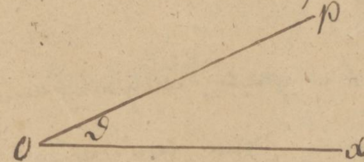
Наконецъ, если (~~частный случай~~) оси наши параллельны, т.е. $\alpha = 0$, имѣемъ:

$$x = a + x'',$$
$$y = b + y''.$$

О полярныхъ координатахъ.

Кромѣ прямоугольныхъ, Декартовыхъ, координатъ, употребляются еще такъ называемыя полярныя. Разсмотримъ, въ чемъ состоитъ методъ полярныхъ координатъ и постараемся построить формулы, которыя позволили бы переходить отъ прямоугольныхъ координатъ къ полярнымъ и наоборотъ.

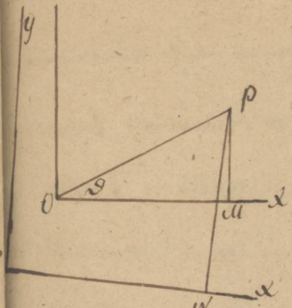
Пусть въ плоскости дана прямая x, на ней точка O. Въ такомъ случаѣ точка P, лежащая въ той-же



плоскости, будетъ опредѣлена, если извѣстна OP и уголъ θ, составленный прямою OP съ Ox. Разстояніе $OP = r$ назыв. радіусомъ векторомъ; уголъ θ, составленный радіусомъ векторомъ съ ox, назыв. аномаліей. Оба эти количества, радіусъ-векторъ и аномалія, опредѣляющія положеніе точки въ плоскости, именуются полярными координатами этой точки; линія Ox — осью полярныхъ координатъ, а точка O — полюсомъ. Легко видѣть, что для полнаго опредѣленія положенія точки P въ плоскости, необходимо знать не только величину полярныхъ координатъ, но и знаки. Обыкновенно длина r принимается за величину положительную, а уголъ θ считается отъ оси x справа налѣво до 360°. При надобныхъ дѣленіяхъ положеніе точки P легко опредѣляется.

Теперь, зная полярныя координаты, можемъ построить формулы, посредствомъ которыхъ можно переходить къ прямоугольнымъ координатамъ.

Пусть дана прямоугольная система координатъ и точка P. Опустивъ $\perp$ на ось x, получимъ, что



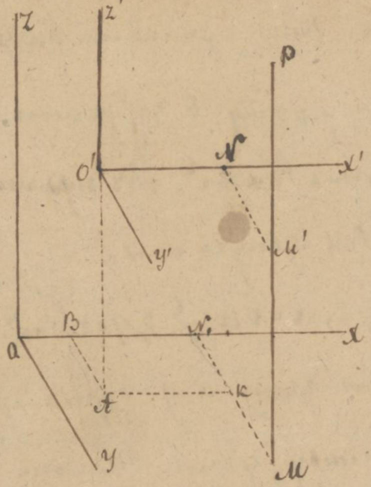
$PM = y$, $OM = x$. Если примемъ Ox за полярную координату, O за полюсъ, то $PO = r$, уголъ $POx = \theta$. Изъ прямоугольнаго ΔOPM получаемъ:

1) $r^2 = x^2 + y^2$, 2) $x = r\cos\theta$, 3) $y = r\sin\theta$.

Эти три формулы позволяютъ, зная x, y, опредѣлить $\cos$ и $\sin\theta$, а слѣдовательно и самый уголъ. Тѣ же формулы даютъ возможность опредѣлить и наоборотъ, зная полярныя координаты, прямоугольныя.

Въ разсмотрѣнномъ случаѣ Ox, ось прямоугольныхъ координатъ, совпадала съ осью полярныхъ; но можетъ случиться болѣе общій случай: именно, можетъ быть, что Ox не совпадаетъ съ осью полярныхъ координатъ. Въ такомъ случаѣ надо переходить отъ одной прямоугольной системы къ другой, а уже отъ этой послѣдней къ полярной. Въ силу вышесказаннаго замѣчанія мы можемъ разсматриваемый вопросъ считать рѣшеннымъ.

Рѣшимъ тотъ же вопросъ для координатъ въ пространствѣ. Изслѣдованіе наше въ настоящемъ случаѣ мы раздѣлимъ на двѣ части. Прежде всего разсмотримъ, <u>какимъ образомъ можно перейти отъ одной системы координатъ къ другой, подобной же системѣ, плоскость которой параллельна плоскости первой.</u>

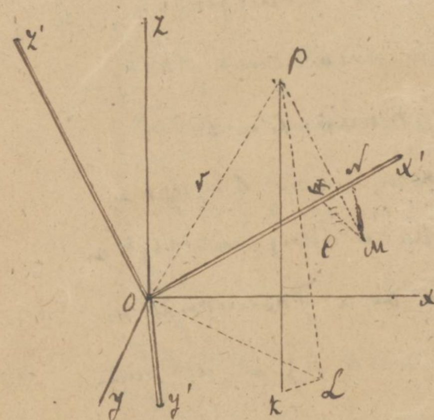


Опредѣлимъ координаты O' по отношенію къ осямъ x, y, z; обозначимъ величины этихъ координатъ черезъ a, b, c ($OB = a$, ... $AB = b$, $O'A = c$). Пусть дана точка P; по-стараемся опредѣлить координаты ея относительно другой системы осей. Опускаемъ $\perp$ изъ P, получаемъ: $ON = x$, $N_1M = y$, $MP = z$, $O'N = x'$, $NM' = y'$, $M'P = z'$. Изъ черт. видно, что

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

Вотъ формулы, служащія для перехода отъ одной системы прямоугольныхъ плоскостей къ другой, ей параллельной.

Посмотримъ, <u>какимъ образомъ переходить отъ одной системы къ другой, имѣющей съ первою общее начало, но различныя направленія.</u>



Пусть P данная точка. Проведемъ PO и построимъ координаты x, y, z нашей точки. Для этого изъ т. P проведемъ линію $\parallel z$ до пересѣченія ея съ плоскостью xy въ т. K; кромѣ того, на ту же плоскость проведемъ изъ P $\perp$ и назовемъ его черезъ ℓ. Такъ какъ PL перпендикулярна къ плоскости xy, то соедивши O съ L, получимъ уголъ OLP прямой, потому что PL будетъ постоянного проекцію v. Проекція r на C изобразится черезъ $r\cos(\widehat{Cr})$. Если K соединимъ съ L, то $KL \perp$ къ C, почему C можно рассматривать какъ проекцію координаты по длинѣ z на ту же C и потому: $c = z\cos(\widehat{zC})$. Слѣдов.

$$\alpha)\ v\cos(\widehat{vC}) = z\cos(\widehat{zC}).$$

Линія v стягиваетъ ломаную OKLP, слѣдов. проекція которой на линію C равна проекціи линіи, стягивающей концы на ту же линію. Т.е.:

$$x'\cos(\widehat{x'C}) + y'\cos(\widehat{y'C}) + z'\cos(\widehat{z'C}) = z\cos(\widehat{zC}).$$

Откуда:

$$z = \frac{x'\cos(\widehat{x'C}) + y'\cos(\widehat{y'C}) + z'\cos(\widehat{z'C})}{\cos(\widehat{zC})}.$$

Сдѣлавъ подобное построеніе относительно другихъ координатъ, по аналогіи будемъ имѣть:

$$y = \frac{x'\cos(\widehat{x'B}) + y'(\widehat{y'B}) + z'\cos(\widehat{z'B})}{\cos(\widehat{yB})},$$

гдѣ B перпендикуляръ изъ P на плоскость xz.^{овъ} Также:

$$x = \frac{x'\cos(\widehat{x'A}) + y'\cos(\widehat{y'A}) + z\cos(\widehat{z'A})}{\cos(\widehat{xA})},$$

гдѣ A перпендикуляръ изъ P на плоскость yz.^{овъ}

Вотъ общія формулы для преобразованія одной системы прямолинейныхъ координатъ въ другую. Если бы другая система координатъ имѣла другое начало, то

Ясно, что къ нашимъ формуламъ нужно было бы придавать соотвѣтственно количества a, b и c, выражающія координаты точки начала осей одной системы относительно другой.

Разсмотримъ нѣкоторые частные случаи, въ которыхъ формулы наши принимаютъ болѣе простой видъ. Формулы упрощаются, во 1-хъ, когда координаты имѣютъ общее начало; во 2-хъ, если система прямоугольная. Тогда x совпадаетъ съ A, y съ B и т.д.; и формулы изобразятся:

$$x = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x),$$

$$y = x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y),$$

$$z = x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z).$$

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ возможны еще и нѣкоторыя упрощенія. Такъ если допустимъ, что $\cos(xx') = \alpha$, $\cos(y'x) = \beta$, $\cos(z'x) = \gamma$, $\cos(x'y) = \alpha_1$, $\cos(y'y) = \beta_1$, $\cos(z'y) = \gamma_1$, $\cos(x'z) = \alpha_2$, $\cos(y'z) = \beta_2$, $\cos(z'z) = \gamma_2$. Тогда наши формулы, показывающія отношенія между углами, примутъ видъ:

$$x = x'\alpha + y'\beta + z'\gamma,$$

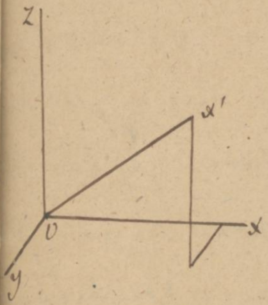
$$y = x'\alpha_1 + y'\beta_1 + z'\gamma_1,$$

$$z = x'\alpha_2 + y'\beta_2 + z'\gamma_2.$$

А также намъ видно изъ чертежа: *)

*) и на основаніи вывода, изложен. на стр. 16.

$$\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=1,$$
$$\beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2=1,$$
$$\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1.$$



Если бы случилось, что x', y', z' прямоугольны, еще можно было бы написать 9 отношений: ×

× на лев. стр. на пр. стр.

$$\alpha\beta+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=0$$
$$\alpha\gamma+\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2=0$$
$$\beta\gamma+\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2=0$$

Между углами $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ имеем следующие отношения (потому что x будет составлять с x', y', z' углы $= \alpha, \beta, \gamma$) и так как x', y', z' тоже прямоугольны:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \qquad \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,$$
$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1, \qquad \alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2=0,$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1, \qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0.$$

Так. образом, когда даны две системы прямоугольных координат, всего будем иметь 12 отношений между углами, составляемыми обеими системами координат между собою. Так как этих углов 9, то с первого взгляда кажется, что определение их из существующих отношений не представляет затруднений; но на деле выходит иначе, — три угла остаются неопределенными, а оставные опредѣляются помощію функцій ихъ. Причиною тому то, что изъ 12 отношеній только 6 существенно различны; другія же 6 суть непосредственныя слѣдствія; такъ что въ сущности имѣемъ 6 уравненій для опредѣленія 9 количествъ, — число уравненій недостаточное для рѣшенія такой задачи. Все что можемъ сдѣлать — это выбрать 3 угла и въ нихъ выразить остальные 6. Такой выборъ очевидно зависитъ отъ произвола. Монжъ первый занимался этого вопроса; онъ бралъ за независимые углы: α, β и γ'', и въ другихъ выразилъ остальные ~~для остальныхъ же получилъ радикальныя формулы~~. Но формулы, полученныя имъ были обременены радикалами: поэтому имъ предпочитаютъ обыкновенно формулы, найденныя Эйлеромъ чрезъ введеніе новыхъ трехъ произвольныхъ угловъ; но и эти послѣднія, хотя и употребляются въ Механикѣ и Астрономіи, но выводъ ихъ длиненъ и запутанъ почему мы и не станемъ ихъ приводить здѣсь.

Положеніе точки въ пространствѣ также можетъ быть опредѣлено при посредствѣ такъ называемыхъ полярныхъ координатъ, сходныхъ съ тѣми, которыми пользовались для опредѣленія положенія точки на плоскости. Но такъ какъ полярныя координаты въ пространствѣ почти никогда не употребляются въ приложеніяхъ, то мы и не станемъ останавливаться на нихъ. —

x) $\cos\alpha\, x_1 + \cos\beta\, y_1 + \cos\gamma\, z_1 - r = h$. Таквим обр. опредѣљена је дужина продужена перпендикулара.