§ VI.

ИНТЕГРИРОВАНІЕ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ ПРИ ДОПУЩЕНІИ НѢКОТОРЫХЪ ТОЛЬКО УСЛОВІЙ ИНТЕГРАЛЬНОСТИ.

1. Въ Мемуарѣ 1784 года Монжъ говоритъ: Цѣль уравненій, извѣстныхъ подъ именемъ условій интегральности, состоитъ не въ томъ, какъ думали до сихъ поръ, чтобъ указывать на тѣ дифференціальныя уравненія, интегралы которыхъ возможны, но чтобъ опредѣлить число совокупныхъ уравненій, изъ коихъ должны быть составлены интегралы, которые всегда дѣйствительны. Для уравненія между тремя перемѣнными приведеннаго къ виду

$$\partial x = P_1\,\partial x_1 + P_2\,\partial x_2$$

условіе, о которомъ идетъ рѣчь, есть

$$\frac{dP_1}{dx_2} = \frac{dP_2}{dx_1}\,.$$

Для уравненія между четырьмя перемѣнными вида

$$\partial x = P_1\,\partial x_1 + P_2\,\partial x_2 + P_3\,\partial x_3,$$

должны быть два условія

$$\frac{d^2 P_1}{dx_2\, dx_3} = \frac{d^2 P_2}{dx_1\, dx_3} = \frac{d^2 P_3}{dx_1\, dx_2}.$$

Для уравненія между пятью перемѣнными

$$\partial x = P_1\, \partial x + P_2\, \partial x_2 + P_3\, \partial x_3 + P_4\, \partial x_4,$$

три условія

$$\frac{d^3 P_1}{dx_2\, dx_3\, dx_4} = \frac{d^3 P_2}{dx_1\, dx_3\, dx_4} = \frac{d^3 P_3}{dx_1\, dx_2\, dx_4} = \frac{d^3 P_4}{dx_1\, dx_2\, dx_3};$$

и т. д. Вообще для уравненія между $m+1$ перемѣнныхъ

$$\partial x = P_1\, \partial x_1 + P_2\, \partial x_2 + \ldots + P_m\, \partial x_m$$

должны существовать $m-1$ условій

$$\frac{d^{m-1} P_1}{dx_2\, dx_3 \ldots dx_m} = \frac{d^{m-1} P_2}{dx_1\, dx_3 \ldots dx_m} = \ldots = \frac{d^{m-1} P_m}{dx_1\, dx_2 \ldots dx_{m-1}}.$$

2. Уравненія между тремя перемѣнными, удовлетворяющія выше-приведенному условію, допускаютъ по одному интегральному отношенію, пополненному одною постоянною произвольною; но всѣ уравненія, не выполняющія этого условія, и число которыхъ безконечно, требуютъ для интеграла системы двухъ совокупныхъ уравненій. Равнымъ образомъ интегралъ уравненія между четырьмя перемѣнными, удовлетворяющаго двумъ вышепостановленнымъ условіямъ, изображается однимъ уравненіемъ, пополненнымъ одною постоянною произвольною; интегралъ уравненія, подчиненнаго одному только условію, составляется системою двухъ совокупныхъ уравненій; а интегралъ уравненія, ничѣмъ необъусловленнаго, состоитъ изъ системы трехъ совокупныхъ уравненій; и т. д.

3. Развивая эти мысли болѣе, слѣдуя Монжу, должно будетъ сказать, что уравненіе между $m+1$ перемѣнныхъ, допускающее $m-1$ извѣстныхъ условій, требуетъ одного интеграла съ одною постоянною произвольною; интегралъ уравненія, выполняющаго $m-2$ условія, представляется системою двухъ уравненій; вообще интегралъ уравненія, удовлетворяющаго $m-j$ условіямъ, изображается системою j совокупныхъ равенствъ.

4. Кажется, что самая форма, къ которой привелъ Монжъ условія интегральности, дала ему возможность сдѣлать этотъ шагъ впередъ на пути этихъ изслѣдованій.

5. Доказательство теоремы Монжа очень просто. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ уравненіе

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots + X_{m-j+1}\,\partial x_{m-j+2} + \ldots + X_m\,\partial x_m = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее только $m-j$ условій, напр. слѣдующихъ:

$$\frac{d^{m-1}P_1}{dx_2\,dx_3\ldots dx_m} = \frac{d^{m-1}P_2}{dx_1\,dx_3\ldots dx_m} = \ldots = \frac{d^{m-1}P_{m-j+1}}{dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-j}\,dx_{m-j+2}\ldots dx_m},$$

въ такомъ случаѣ, на основаніи сказаннаго въ n° 19 § I, предыдущія равенства можно будетъ написать такъ:

$$\frac{d^{m-j}P_1}{dx_2\,dx_3\ldots dx_{m-j+1}} = \frac{d^{m-j}P_2}{dx_1\,dx_3\ldots dx_{m-j+1}} = \ldots = \frac{d^{m-j}P_{m-j+1}}{dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-j}}.$$

Эти-же послѣднія служатъ выраженіемъ того, что въ уравненіи (1) только первые $m - j + 2$ члена могутъ быть приведены къ виду полнаго дифференціала. Такъ какъ дифференціальная формула, заключающая $m - j + 2$ члена, требуетъ $\frac{(m - j + 1)(m - j)}{2}$ условій интегральности, то, стало быть, изъ числа $\frac{m(m-1)}{2}$ условій Фонтеня и Эйлера число равенствъ, изображащееся разностію $\frac{m.m-1}{2} - \frac{(m-j+1)(m-j)}{2} = \frac{(2m-j)(j-1)}{2}$, не имѣетъ мѣста. Такими будутъ всѣ равенства, въ которыя входятъ P, начиная съ P_{m-j+2} до P_m.

6. Замѣчаніе это дозволяетъ намъ тотчасъ открыть интегралы уравненія (1). Предположимъ $x_{m-j+2} \ldots x_m$ количествами постоянными, или $\partial x_{m-j+2}, \ldots \partial x_m$ нулями, будемъ имѣть

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_{m-j+1}\,\partial x_{m-j+1} = 0. \quad (2)$$

Интегралъ этого равенства найдется по способамъ, изложеннымъ въ § I. Изобразивъ этотъ интегралъ чрезъ

$$U = c, \quad (3)$$

количество c будетъ произвольною функціею отъ $x_{m-j+2}, \ldots\ldots x_m$.

7. Значитъ, дифференцируя послѣднюю формулу по измѣняемости первыхъ только $m - j + 2$ перемѣнныхъ, будемъ имѣть

$$M\,(X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_{m-j+1}\,\partial x_{m-j+1}) = \frac{\partial U}{\partial x}\,\partial x$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial x_1}\,\partial x_1 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_{m-j+1}}\,\partial x_{m-j+1};$$

а измѣняя всѣ величины разомъ, произвольною функціею с можно будетъ расположить такъ, что получимъ

$$M\,(X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots + X_{m-j+1}\,\partial x_{m-j+1} + X_{m-j+2}\,\partial x_{m-j+}$$
$$+ \ldots + X_m\,\partial x_m) = \frac{\partial U}{\partial x_1}\,\partial x + \frac{\partial U}{\partial x_1}\,\partial x + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial x_{m-j+1}}\,\partial x_{m-j+1} + \left\{\frac{\partial U}{\partial x_{m-j+2}} - \frac{\partial c}{\partial x_{m-j+2}}\right\}\partial x_{m-j+2}$$
$$+ \ldots + \left\{\frac{\partial U}{\partial x_m} - \frac{\partial c}{\partial x_m}\right\}\partial x_m;$$

откуда:

$$\frac{\partial c}{\partial x_{m-j+2}} = \frac{\partial U}{\partial x_{m-j+2}} - Mx_{m-j+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial c}{\partial x_m} = \frac{\partial U}{\partial x_m} - Mx_m.$$

Но если

$$U = \varphi\,(x_{m-j+2}, \ldots x_m),$$

то

$$\varphi'\,(x_{m-j+2} = \frac{\partial U}{\partial x_{m-j+2}} - Mx_{m-j+2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$
$$\varphi'\,(x_m) = \frac{\partial U}{\partial x_m} - Mx_m.$$

8. Вотъ эта система j равенствъ, заключающихъ произвольную функцію φ отъ $j-1$ количествъ, и представляетъ намъ совокупность интегральныхъ отношеній уравненія (1).

9. Случай, въ которомъ ни одно изъ условій интегральности не удовлетворяется, очевидно заключается уже въ этомъ. Для этого стоитъ только сдѣлать $m-j=0$; тогда формулы (4) будутъ состоять изъ m равенствъ

съ одною произвольною функціею отъ $m - 1$ перемѣнныхъ количествъ, при чемъ функція U должна будетъ опредѣляться равенствомъ

$$M(X\partial x + X_1 \partial x_1) = \partial U.$$

А такимъ образомъ опять имѣемъ теорему Монжа, разсмотрѣнную во всей подробности въ § II.

10. Не трудно видѣть, что замѣчаніе Паоли, о которомъ говорено было въ § II, можетъ быть прикладываемо и къ настоящему случаю, коль-скоро число перемѣнныхъ, не входящихъ подъ знакъ φ, т. е. $m - j + 2$ будетъ менѣе j. Тогда число интегральныхъ отношеній сведется на $j - 1$.

11. Интегрированіе уравненія (1), подчиненнаго только $m - j$ условіямъ, весьма удобно совершается по способу Якоби, изложенному въ n° n° 27, 28, ... § IV. Собственно говоря, этимъ только путемъ мы можемъ открыть число уравненій необходимыхъ и достаточныхъ для рѣшенія вопроса, которымъ теперь занимаемся.

12. Общая теорема, имѣющая здѣсь мѣсто, есть: если линейное дифференціальное уравненіе между $m + 1$ перемѣнныхъ подчинено $m - j$ условіямъ интегральности, то для интеграціи его необходимо и достаточно $\frac{j+1}{2}$ отношній съ такимъ-же числомъ постоянныхъ произвольныхъ, въ случаѣ j нечетнаго; и $\frac{j+2}{2}$ отношеній въ предположеніи j четнымъ.

13. Считая уже излишнимъ много распространяться объ этомъ предметѣ, мы пояснимъ наше предложеніе на слѣдующемъ примѣрѣ.

Пусть будетъ уравненіе

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 + X_4\,\partial x_4 = 0. \quad (5)$$

Для него, по Монжу, число всѣхъ условій интегральности должно быть равно тремъ; но положимъ, что сохраняется одно только условіе, показывающее, напр., что трехчленъ:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 \quad (6)$$

можетъ быть приведенъ къ виду полнаго дифференціала. Назвавъ интегрирующаго множителя чрезъ M, а искомую функцію черезъ u, будемъ имѣть:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 = U\,\partial u, \quad (7)$$

гдѣ

$$U = \frac{1}{M}, \quad (8)$$

и слѣдовательно

$$u = c, \quad (9)$$

можно считать однимъ изъ опредѣляемыхъ интеграловъ.

Выразивъ изъ отношенія (9) x въ функціи u, x_1, x_2, получимъ:

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\partial u + \frac{\partial x}{\partial x_1}\,\partial x_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\,\partial x_2$$

и слѣдовательно

$$X\frac{\partial x}{\partial u}\,\partial u + \left\{X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1\right\}\partial x_1 + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_2} + X_2\right)\partial x_2 = U\,\partial u;$$

откуда

$$X\frac{\partial x}{\partial u} = U,$$

$$X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1 = 0, \quad (10)$$

$$X\frac{\partial x}{\partial x_2} + X_2 = 0.$$

14. Первое изъ этихъ равенствъ очевидно вѣрно, по тому что приводитъ къ выраженію

$$M = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{X},$$

т. е. къ интегрирующему множителю дифференціальнаго двучлена

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1;$$

что совершенно согласно съ изложеннымъ въ n° n° 9, 10, 11, § I.

Что касается до остальныхъ двухъ формулъ (10), то онѣ суть слѣдствія того требованія, чтобъ равенство

$$\left\{ X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1 \right\} \partial x_1 + \left\{ X\frac{\partial x}{\partial x_2} + X_2 \right\} \partial x_2 = 0$$

могло имѣть мѣсто при какихъ угодно ∂x_1, ∂x_2.

15. Переходя теперь къ данному уравненію чрезъ разсматриваніе x_3, x_4 измѣняемыми, прежде всего посредствомъ равенства (9) изображаемъ x чрезъ u, x_1, x_2, x_3, x_4; и получаемъ:

$$\partial x = \frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \frac{\partial x}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\partial x_2 + \frac{\partial x}{\partial x_3}\partial x_3 + \frac{\partial x}{\partial x_4}\partial x_4;$$

а послѣ того находимъ:

$$X\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \left\{ X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1 \right\} \partial x_1 + \left\{ X\frac{\partial x}{\partial x_2} + X_2 \right\} \partial x_2 + \left\{ X\frac{\partial x}{\partial x_3} + X_3 \right\} \partial x_3 + \left\{ X\frac{\partial x}{\partial x_4} + X_4 \right\} \partial x_4 = 0.$$

Уравненіе это, по силѣ (10), принимаетъ видъ:

$$U\,\partial u + U^{(1)}\,\partial x_3 + U^{(2)}\,\partial x_4 = 0, \quad (11)$$

гдѣ U, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ суть функціи u, x_1, x_2, x_3, x_4.

16. Послѣдняя формула, по Монжу, допускаетъ два интегральныхъ отношенія

$$v_1 = c_1, \quad v_2 = c_2, \quad (12)$$

изъ которыхъ одно выбрано по произволу, а второе опредѣлено чрезъ разрѣшеніе уравненія въ частныхъ производныхъ. Слѣдовательно, по теоріи Якоби, уравненія, необходимыя и достаточныя для интеграціи уравненія (5), будутъ только:

$$u = c, \quad v_2 = c_2. \quad (13).$$

17. Числомъ ихъ два, что совершенно согласно съ теоремою.

Дѣйствительно, въ настоящемъ случаѣ $m - i = 1$; наше $m = 4$; поэтому $i = 3$. Но i нечетное, слѣдовательно число интегральныхъ отношеній, требуемыхъ теоремою, будетъ $\frac{i+1}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$; что и есть на самомъ дѣлѣ; а потому и прочее.

18. Изложеннаго въ n° n° 13, 14, ... 17 совершенно достаточно, чтобы понять какимъ образомъ способъ Якоби (n° n° 26, 27, ... § IV) дозволяетъ заключать о справедливости предложенія въ n° 12 и вообще. Однако мы присоединимъ другое болѣе простое доказательство этой теоремы, которое поведетъ насъ къ новымъ соображеніямъ.

Допустивъ опять, что для дифференціальнаго уравненія (2) всѣ условія интегральности имѣютъ мѣсто, назовемъ по прежнему

$$v = c \quad (14)$$

его интеграломъ; получимъ:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + \ldots\ldots + X_{m-j+1}\,\partial x_{m-j+1} = V\,\partial v. \quad (15)$$

Выразивъ изъ (14) перемѣнную x черезъ v, x_1, x_2, ... x_{m-j+1}, уравненіе (15) перейдетъ въ:

$$X\frac{\partial x}{\partial v}\partial v+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_1}+X_1\right)\partial x_1+\ldots\ldots$$

$$+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{m-j+1}}+X_{m-j+1}\right)\partial x_{m-j+1}=V\partial v$$

и разобьется на слѣдующія равенства:

$$X\frac{\partial x}{\partial v}=V,$$

$$X\frac{\partial x}{\partial x_1}+X_1=0, \quad (16)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X\frac{\partial x}{\partial x_{m-j+1}}+X_{m-j+1}=0,$$

которыя будутъ тожествами, если, начиная со втораго, подставимъ въ нихъ вмѣсто v его значеніе.

19. Трактуя теперь и x_{m-j+2}, ... x_m измѣняемыми, уравненіе (1) при посредствѣ (14) и (16) приметъ видъ:

$$X\frac{\partial x}{\partial v}\partial v+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_{m-j+2}}+X_{m-j+2}\right)\partial x_{m-j+2}+\ldots\ldots$$

$$+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_m}+X_m\right)\partial x_m=0,$$

или проще:

$$V\,\partial v+V_{m-j+2}\,\partial x_{m-j+2}+\ldots\ldots+V_m\,\partial x_m=0. \quad (17)$$

20. Предположивъ здѣсь $\partial v=0$, что всегда позволительно, намъ должно будетъ интегрировать уравненіе:

$$V_{m-j+2}\,\partial x_{m-j+2}+\ldots\ldots+V_m\,\partial x_m=0, \quad (18)$$

въ которомъ число членовъ равно

$$m+1-(m-j+2)=j-1.$$

Если $j-1$ четное, то (18) допуститъ $\frac{j-1}{2}$ а если $j-1$ нечетное, то $\frac{j}{2}$ интегральныхъ отношеній. Слѣдовательно, по присоединеніи къ нимъ въ обоихъ случаяхъ и (14), окажется, что всѣхъ интеграловъ для уравненія (1) будетъ:

$$\frac{j-1}{2}+1=\frac{j+1}{2} \text{ при } j \text{ нечетномъ,}$$

$$\frac{j}{2}+1=\frac{j+2}{2} \text{ при } j \text{ четномъ; слѣд. и т. д.}$$

21. Оборотъ, употребленный нами для доказательства теоремы n° 12, заключаетъ въ себѣ зародышъ новаго способа интегрировать какія угодно линейныя дифференціальныя уравненія.

22. Пусть данное дифференціальное уравненіе не удовлетворяющее условіямъ интегральности будетъ:

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1+X_2\,\partial x_2+\ldots\ldots+X_m\,\partial x_m=0. \quad (19)$$

Допустивъ $\partial x_2=0, \ldots\ldots \partial x_m=0$, уравненіе это перейдетъ въ:

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1=0, \quad (20)$$

которое приведется къ виду:

$$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1=U\,\partial u \quad (21)$$

и слѣдовательно

$$u=\text{пост.} \quad (22)$$

будетъ интеграломъ (20).

Опредѣливъ изъ (22) x въ функціи u, x_1, по внесеніи его значенія въ (21), получимъ:

$$X\frac{\partial x}{\partial u}\,\partial u+\left(X\frac{\partial x}{\partial x_1}+X_1\right)\partial x_1=U\,\partial u,$$

откуда, какъ извѣстно, найдемъ:

$$X\frac{\partial x}{\partial u} = U, \qquad (23)$$

$$X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1 = 0.$$

23. Начавъ разсматривать $x_2, x_3, \ldots\ldots x_m$ измѣняемыми наравнѣ съ x и x_1, и внеся въ (19) величину x^{ca} выведенную изъ (22) въ функціи $u, x_1, x_2, \ldots\ldots x_m$, при пособіи (23) будемъ имѣть:

$$X\frac{\partial x}{\partial u}\partial u + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_2} + X_2\right)\partial x_2 + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_3} + X_3\right)\partial x_3 + \ldots\ldots + \left(X\frac{\partial x}{\partial x_m} + X_m\right)\partial x_m = 0,$$

или,

$$U\,\partial u + U_2\,\partial x_2 + U_3\,\partial x_3 + \ldots\ldots + U_m\,\partial x_m = 0, \qquad (24)$$

гдѣ однимъ членомъ менѣе сравнительно съ (19).

24. Найдя новое средство уменьшать единицею число перемѣнныхъ въ уравненіи (19), для дальнѣйшаго уменьшенія можемъ воспользоваться мыслію Пфаффа, то есть одинъ изъ дифференціаловъ перемѣнныхъ приравнять нулю. Такъ какъ предположеніе $\partial u = 0$ нисколько не противорѣчитъ предшествующимъ выкладкамъ, то, очевидно, формулу (22) можно принять за одинъ изъ искомыхъ интеграловъ, а опредѣленіе другихъ интегральныхъ отношеній свести на рѣшеніе уравненія

$$U_2\,\partial x_2 + U_3\,\partial x_3 + U_4\,\partial x_4 + \ldots\ldots + U_m\,\partial x_m = 0, \qquad (25)$$

въ которомъ уже двумя членами менѣе противъ (19).

25. Съ этимъ послѣднимъ мы можемъ поступить по прежнему, т. е. сдѣлать $\partial x_4 = 0, \ldots \partial x_m = 0$ и получить:

$$U_2\,\partial x_2 + U_3\,\partial x_3 = 0. \qquad (26)$$

Приведя это равенство къ виду:

$$U_2\,\partial x_2 + U_3\,\partial x_3 = V\,\partial v, \qquad (27)$$

формула

$$v = \text{пост.} \qquad (28)$$

будетъ интеграломъ (25)

Вычисливъ отсюда x_2 въ зависимости отъ v, x_3, найдемъ:

$$U_2 \frac{\partial x_2}{\partial v}\,\partial v + \left(U_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3} + U_3\right)\partial x_3 = V\,\partial v,$$

или:

$$U_2 \frac{\partial x_2}{\partial v} = V$$

$$U_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_3} + U_3 = 0. \qquad (29)$$

26. При помощи этихъ отношеній, когда будемъ разсматривать $x_4, \ldots\ldots x_n$ перемѣнными и значеніе для ∂x_2, выведенное въ этихъ предположеніяхъ изъ (28), подставимъ въ (25), будемъ имѣть:

$$V\,\partial v + V_4\,\partial x_4 + V_5\,\partial x_5 + \ldots\ldots + V_m\,\partial x_m = 0, \qquad (30)$$

гдѣ

$$V_j = U_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_j} + U_j. \qquad (31)$$

27. Въ этомъ новомъ уравненіи число перемѣнныхъ единицею меньше сравнительно съ (25). Слѣдовательно, сдѣлавши въ немъ $\partial v = 0$, во-первыхъ, мы не впадемъ

ни въ какое противорѣчіе съ предъидущимъ, во-вторыхъ, формулу (28) примемъ за второй изъ искомыхъ интеграловъ, и въ третьихъ, перейдемъ къ уравненію:

$$V_4\,\partial x_4 + V_5\,\partial x_5 + V_6\,\partial x_6 + \ldots\ldots + V_m\,\partial x_m = 0 \quad (32)$$

съ числомъ измѣняемыхъ четырьмя единицами меньшимъ противъ (19).

28. Продолженіе этого ряда дѣйствій приведетъ насъ или къ уравненію между двумя измѣняемыми количествами, или къ уравненію съ тремя перемѣнными. Первый случай будетъ имѣть мѣсто при $m+1$ четномъ, а второй при $m+1$ нечетномъ. Поэтому при четности $m+1$ все дѣло ограничится интеграціею числа $\frac{m+1}{2}$ отдѣльныхъ уравненій перваго порядка между двумя измѣняемыми, а въ случаѣ нечетности $m+1$ нужно будетъ интегрировать $\frac{m-2}{2}$ отдѣльныхъ уравненій между двумя перемѣнными и одно уравненіе съ тремя измѣняемыми; что̀ совершится по собственному способу Монжа, или вообще по способамъ §§ II и V.

29. При такомъ положеніи дѣла, рѣшеніе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ какимъ угодно числомъ измѣняемыхъ, очевидно, не представитъ другихъ затрудненій кромѣ тѣхъ, которыя встрѣчаются въ интеграціи дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между двумя перемѣнными количествами. Поэтому намъ кажется, что новый способъ, съ одинакимъ удобствомъ прикладываемый и къ уравненіямъ подчиненнымъ части условій интегральности и къ уравненіямъ не выполняющимъ ни одного условія, сводя вопросъ о линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ на такую простоту ка-

кой только желать можно, составляетъ послѣднее слово въ разсматриваемой нами теоріи.

30. Не мѣшаетъ прибавить, что построеніе каждаго изъ послѣдовательныхъ уравненій (20), (26), . . . , интегралы которыхъ должны дать полную систему интегральныхъ отношеній для уравненія (19), также требуетъ только знанія полныхъ рѣшеній всѣхъ предшествующихъ равенствъ.

31. Сущность каждаго способа яснѣе раскрывается изъ сравненія его съ другими методами. Обозрѣвая различные пріемы, изложенные въ §§ II, III, IV и V, усматриваемъ, что ближе всего способъ Якоби (n^on^o 26, 27, ... § IV) подходитъ къ настоящему методу. Скажемъ еще болѣе, что этотъ послѣдній есть только упрощеніе перваго. Связь обоихъ способовъ обнаружится скорѣе, если только методъ n^on^o 22, 23.... мы представимъ нѣсколько въ другомъ видѣ.

32. Имѣя уравненіе

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + \ldots\ldots + X_m\,\partial x_m = 0, \qquad (33)$$

сдѣлаемъ въ немъ $\partial x_2 = 0, \ldots\ldots \partial x_m = 0$; получимъ:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 = 0, \qquad (34)$$

и

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 = U\,\partial u; \qquad (35)$$

откуда

$$u = \text{пост.} \qquad (36)$$

будетъ интеграломъ (34). Функція u, какъ извѣстно, обладаетъ свойствомъ доставлять слѣдующія два тожества:

$$X\frac{\partial x}{\partial u} = U,$$

$$X\frac{\partial x}{\partial x_1} + X_1 = 0. \qquad (37)$$

33. Если теперь, согласно съ упомянутымъ способомъ Якоби (nº nº 26, 27, ... § IV), принять x_2 x_3 измѣняемыми вмѣстѣ съ x и x_1, то должно будетъ разсматривать уравненіе:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 = 0, \qquad (38)$$

которое при помощи (36) и (37) перейдетъ въ:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 = U\,\partial u + U^{(1)}\,\partial x_2 + U^{(2)}\,\partial x_3. \qquad (39)$$

34. Для интеграціи уравненія

$$U\,\partial u + U^{(1)}\,\partial x_2 + U^{(2)}\,\partial x_3 = 0 \qquad (40)$$

мы брали въ § IV одно произвольное отношеніе $v_1 = c_1$, а въ другомъ $v_2 = c_2$, функцію v_2 опредѣляли чрезъ нѣкоторое уравненіе въ частныхъ производныхъ; но если вмѣсто перваго равенства возьмемъ (36), то въ (40) вправѣ будемъ сдѣлать $\partial u = 0$, отъ чего (40) приметъ форму

$$U^{(1)}\,\partial x_2 + U^{(2)}\,\partial x_2 = 0, \qquad (41)$$

которая есть ничто иное какъ (26) въ nº 25 этого §.

35. Назвавши черезъ

$$v = \text{пост.} \qquad (42)$$

интегралъ формулы (41), мы приведемъ ее сначала къ виду:

$$U^{(1)}\,\partial x_2 + U^{(2)}\,\partial x_2 = V\,\partial v, \qquad (43)$$

а потомъ получимъ тожества:

$$U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial v} = V,$$

$$U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial x_3} + U^{(2)} = 0. \qquad (44)$$

36. Допустивъ вмѣстѣ съ x, x_1, x_2, x_3 еще x_4 и x_5 перемѣнными, намъ нужно будетъ интегрировать уравненіе:

$$X\,\partial x + X_1\,\partial x_1 + X_2\,\partial x_2 + X_3\,\partial x_3 + X_4\,\partial x_4 + X_5\,\partial x_5 = 0. \qquad (45)$$

Это послѣднее посредствомъ отношеній (36) и (37) прежде всего приведется къ виду:

$$U\,\partial u + U^{(1)}\,\partial x_2 + U^{(2)}\,\partial x_3 + U^{(3)}\,\partial x_4 + U^{(4)}\,\partial x_5 = 0, \qquad (46)$$

а потомъ, когда при помощи (44) и (42), гдѣ v можно разсматривать какъ функцію отъ u, x_2, x_3, ... мы вычислимъ x_2 черезъ u, v, x_3, x_4, x_5 и найденное значеніе вставимъ въ (46), получимъ:

$$\left(U + U^{(1)}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\partial u + U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial v}\,\partial v + \left(U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial x_3} + U^{(2)}\right)\partial x_3 +$$

$$+\left(U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial x_4} + U^{(3)}\right)\partial x_4 + \left(U^{(1)}\frac{\partial x_2}{\partial x_5} + U^{(4)}\right)\partial x_5 = 0,$$

или

$$U^{(0)}\,\partial u + V\,\partial v + V^{(1)}\,\partial x_4 + V^{(2)}\,\partial x_5 = 0. \qquad (47)$$

37. Чтобы проинтегрировать это уравненіе, поступимъ слѣдующимъ образомъ: вмѣсто того чтобы назначать по произволу два отношенія $w_1 = c_3$, $w_2 = c'_3$ и въ третьемъ $w_3 = c_4$ опредѣлять функцію w_3 изъ нѣкотораго уравненія въ частныхъ производныхъ, какъ мы то дѣлали въ § IV, мы можемъ взять для первыхъ двухъ отношеній (36) и (42); за-тѣмъ допустить $\partial u = 0$, $\partial v = 0$ и имѣть дѣло съ уравненіемъ

$$V^{(1)}\,\partial x_4 + V^{(2)}\,\partial x_5 = 0, \qquad (48)$$

въ которомъ $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ тожественны съ V_4 и V_5 формулы (32) этого §. Слѣдовательно и проч.

38. Во всемъ предыдущемъ, по данному числу условій опредѣлялись интегральныя отношенія и число ихъ, но Якоби вздумалъ рѣшать обратную задачу: по данному числу интегральныхъ отношеній находить число условій, которымъ должны быть подчинены коэффиціенты даннаго линейнаго дифференціальнаго уравненія.

39. Взявши вопросъ о линейныхъ уравненіяхъ такъ сказать съ конца, онъ обнялъ своими изслѣдованіями всю теорію этихъ уравненій вновь, и пришелъ, во-первыхъ, къ тѣмъ результатамъ, которыми мы начали наше разсужденіе, а во-вторыхъ, къ общему предложенію относительно числа интеграловъ, необходимыхъ и достаточныхъ для каждаго линейнаго дифференціальнаго уравненія какъ съ четнымъ, такъ и нечетнымъ числомъ перемѣнныхъ величинъ. Изысканія эти составляютъ § 21 теоріи новаго множителя. Мы удерживаемся излагать ихъ, чтобъ не впасть въ одну только переписку и также чтобы не входить въ повторенія одного и того-же.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

1. Ясно, что успѣшное приложеніе всѣхъ способовъ, изложенныхъ нами для интегрированія линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ какимъ угодно числомъ измѣняемыхъ, будетъ зависѣть отъ тѣхъ успѣховъ, которые сдѣлаетъ теорія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка между двумя перемѣнными количествами.

2. Много выгодъ будетъ уже и тогда, когда увеличится число классовъ интегрируемыхъ дифференціальныхъ уравненій. Поэтому, я считаю не лишнимъ показать, какимъ образомъ можно розыскивать интегралъ слѣдующаго уравненія:

$$M(x, y)\,\partial x + N(x, y)\,\partial y = 0, \qquad (1)$$

гдѣ:

$$M(x, y) = ay^2 + byx + cx^2 + ey + fx + g,$$

$$N(x, y) = a'y^2 + b'yx + c'x^2 + e'y + f'x + g'.$$

3. Формула эта, встрѣчающаяся, такъ сказать, на первомъ шагу въ теоріи дифференціальныхъ уравненій, долгое время противилась усиліямъ геометровъ. Частные ея случаи разрѣшаемы были Эйлеромъ, Якоби и, конечно, многими другими. Въ 10 томѣ Журнала Ліувиля, Лебегъ сдѣлалъ указанія на тѣ условія, которымъ должны быть подчинены коэффиціенты въ выше постановленномъ уравненіи для того, чтобы интегралъ его изображался формулою:

$$(\alpha+\beta x+y\gamma)^{\delta}\ (\alpha'+\beta' x+\gamma' y)^{\delta'}\ (\alpha''+\beta'' x+\gamma'' y)^{\delta''}=\text{const.}$$

Но вопросъ во всемъ его объемѣ оставался, сколько мнѣ извѣстно, нерѣшеннымъ и до сихъ поръ. Лѣтъ десять тому назадъ, прочитавши въ IV томѣ бюллетеня Петербургской Академіи Наукъ замѣчательную статью Дерптскаго Профессора Миндинга, въ которой онъ интегрируетъ извѣстное уравненіе Якоби посредствомъ одного весьма изящнаго пріема, требующаго знанія нѣсколькихъ частныхъ рѣшеній, я скоро замѣтилъ, что пріемъ этотъ съ большимъ удобствомъ прикладывается и къ общему нашему уравненію.

4. Вотъ въ чемъ состоитъ самый пріемъ:

Если M и N суть два цѣлые многочлена въ y, коэффиціенты которыхъ суть какія угодно функціи x, а

$$M\,\partial x+N\,\partial y=0 \qquad (2)$$

данное уравненіе, то, имѣя извѣстное число (μ) частныхъ интеграловъ этого уравненія, напр. y_1, y_2, ... y_μ, и составивъ произведеніе

$$\psi\ (y)=(y-y_1)\ (y-y_2)\ldots\ldots(y-y_\mu), \quad (3)$$

посредствомъ разложенія на частныя дроби будемъ имѣть:

$$\frac{M}{\psi(y)} = G + \frac{M_1}{\psi'(y_1)(y-y_1)} + \ldots\ldots + \frac{M_\mu}{\psi'(y_\mu)(y-y_\mu)},$$

$$\frac{N}{\psi(y)} = H + \frac{N_1}{\psi'(y_1)(y-y_1)} + \ldots\ldots + \frac{N_\mu}{\psi'(y_\mu)(y-y_\mu)}, \quad (4)$$

гдѣ M_j и N_j суть результаты подстановленія y_j вмѣсто y въ M и N. Замѣтивъ, что $M_1\, \partial x = -N_1\, \partial y_1$, и т. д., тотчасъ получимъ:

$$\frac{M\,\partial x + N\,\partial y}{\psi(y)} = G\,\partial x + H\,\partial y + \frac{N_1\,\partial(y-y_1)}{\psi'(y_1)(y-y_1)} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{N_\mu\,\partial(y-y_\mu)}{\psi'(y_\mu)(y-y_\mu)} = 0. \quad (5)$$

5. Для приложенія этой формулы преобразованія къ нашему случаю, въ которомъ M и N суть квадратныя функціи въ x и y, прежде всего нужно открыть нѣсколько частныхъ интеграловъ уравненія.

6. Розысканіе этихъ интеграловъ мы представимъ въ видѣ слѣдующаго предложенія:

Формула

$$y-\gamma = \beta\,(x-\alpha \quad (6)$$

всегда въ состояніи удовлетворить данному уравненію, если только α, γ, β будутъ значеніями x, y и $\frac{\partial y}{\partial x}$, повѣряющими равенства

$$M\,(x,\,y) + N\,(x,\,y)\,\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d\left(M\,(x,\,y) + N\,(x,\,y)\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{dx} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d^2\left(M\ (x,\ y) + N\ (x,\ y)\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{dx^2} = 0,$$

составленныя въ предположенiи $\frac{\partial y}{\partial x}$ количествомъ постояннымъ.

7. Чтобы доказать теорему, мы разсуждаемъ такъ:

Вмѣстѣ съ даннымъ дифференцiальнымъ уравненiемъ должны существовать и всѣ другiя, получаемыя изъ него дифференцированiемъ. Это значитъ: какая функцiя x, будучи подставлена вмѣсто y^{ка} въ уравненiе

$$M\ (x,\ y) + N\ (x,\ y)\,\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

сдѣлаетъ обѣ части тожественно равными нулю, та-же функцiя удовлетворитъ и слѣдующимъ уравненiямъ:

$$\frac{d\left(M\ (x,\ y) + N\ (x,\ y)\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2\left(M\ (x,\ y) + N\ (x,\ y)\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{dx^2} = 0;\ \text{и т. д.}$$

8. Равнымъ образомъ, если y, выводимый изъ формулы

$$y - \gamma = \beta\ (x - \alpha),$$

удовлетворитъ первому уравненiю, то онъ удовлетворитъ и всѣмъ слѣдующимъ. Но какъ въ этомъ предположенiи $\frac{\partial y}{\partial x} = \beta$, величинѣ постоянной, то, разумѣется, при составленiи втораго и третьяго уравненiй, намъ должно разсматривать $\frac{\partial y}{\partial x}$ величиною постоянною. Очевидно также, что нѣтъ надобности составлять уравненiя

$$\frac{d^3\left(M\,(x,\,y)+N\,(x,\,y)\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{dx^3}=0$$

и слѣдующихъ, потому что они дѣлаются теперь тожествами вида: $0=0$.

9. Далѣе, если $y=\gamma+\beta\ (x-\alpha)$ удовлетворяетъ вышеприведеннымъ уравненіямъ, то это дѣлается независимо отъ величины x^{ca}; а потому равенства должны имѣть мѣсто и тогда, когда $x=\alpha$. Въ такомъ случаѣ имѣемъ тотчасъ $y=\gamma$; и слѣдовательно α, γ, β должны повѣрять равенства:

$$M+N\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\left(\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\left(2\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3=0,$$

или, все равно, дѣлать тожествами выраженія

$$M\,(\alpha,\,\gamma)+N\,(\alpha,\,\gamma)\,\beta=0,$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_{(\alpha,\,\gamma)}+\left(\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}\right)_{(\alpha,\,\gamma)}\cdot\beta+\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)_{(\alpha,\,\gamma)}\cdot\beta^2=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)_{(\alpha,\,\gamma)}+\left\{2\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\right\}_{(\alpha,\,\gamma)}\cdot\beta+\left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y}\right)_{(\alpha,\,\gamma)}\cdot\beta^2+\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right)_{(\alpha,\,\gamma)}\cdot\beta^3=0.$$

10. И такъ, если формула $y-\gamma=\beta\ (x-\alpha)$ удовлетворяетъ уравненію $M\,(x,\,y)+N\,(x,\,y)\ \frac{\partial y}{\partial x}=0$, то α, γ, β должны опредѣляться изъ уравненій (9).

11. Послѣ этого утверждаемъ и на-оборотъ: если α, γ, β удовлетворятъ уравненіямъ (9), то формула $y - \gamma = \beta\,(x - \alpha)$ повѣритъ равенство $M\,(x, y) + N\,(x, y)\,\frac{\partial y}{\partial x} = 0$.

12. Для удобнѣйшаго доказательства этой мысли, сдѣлаемъ

$$M\,(x,\ y) + N\,(x,\ y)\,\frac{\partial y}{\partial x} = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right), \quad (10)$$

и подставимъ сюда вмѣсто y и $\frac{\partial y}{\partial x}$ ихъ значенія изъ формулы $y - \gamma = \beta\,(x - \alpha)$, а $\alpha + x - \alpha$ вмѣсто x; получимъ

$$f\,(\alpha + (x - \alpha),\ \gamma + \beta\,(x - \alpha),\ \beta) = f\,(\alpha,\ \gamma,\ \beta)$$

$$+ (x - \alpha)\,\Big\{ f'\,(\alpha) + f'\,(\gamma)\,\beta \Big\} + \frac{(x-\alpha)^2}{2}\,\Big\{ f''\,(\alpha)$$

$$+ 2\,f''(\alpha,\gamma)\,\beta + f''\,(\gamma)\,\beta^2 \Big\}. \quad (11)$$

Теперь:

$$f\,(\alpha,\ \gamma,\ \beta) = M\,(\alpha,\ \gamma) + N\,(\alpha,\ \gamma)\,\beta,$$

$$f'\,(\alpha) = \frac{\partial M\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \alpha} + \frac{\partial N\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \alpha}\,\beta,$$

$$f'\,(\gamma) = \frac{\partial M\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \gamma} + \frac{\partial N\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \gamma}\,\beta,$$

$$f''\,(\alpha) = \frac{\partial^2 M\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 N\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \alpha^2}\,\beta,$$

$$f''\,(\alpha,\ \gamma) = \frac{\partial^2 M\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \alpha\,\partial \gamma} + \frac{\partial^2 N\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \alpha\,\partial \gamma}\,\beta,$$

$$f''\,(\gamma) = \frac{\partial^2 M\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \gamma^2} + \frac{\partial^2 N\,(\alpha,\ \gamma)}{\partial \gamma^2}\,\beta.$$

Слѣдовательно:

$$f\left(\alpha+(x-\alpha),\ \gamma+\beta(x-\alpha),\ \beta\right)=M(\alpha,\gamma)+N(\alpha,\gamma)\beta$$

$$+(x-\alpha)\left\{\frac{\partial M(\alpha,\gamma)}{\partial\alpha}+\left(\frac{\partial M(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma}+\frac{\partial N(\alpha,\gamma)}{\partial\alpha}\right)\beta+\right.$$

$$\left.\frac{\partial N(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma}\beta^2\right\}+\frac{(x-\alpha)^2}{2}\left\{\frac{\partial^2 M(\alpha,\gamma)}{\partial a^2}+\left(2\frac{\partial^2 M(\alpha,\gamma)}{\partial\alpha\,\partial\gamma}+\right.\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 N(\alpha,\gamma)}{\partial\alpha^2}\right)\beta+\left(\frac{\partial^2 M(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma^2}+2\frac{\partial^2 N(\alpha,\gamma)}{\partial\alpha\,\partial\gamma}\right)\beta^2+$$

$$\left.\frac{\partial^2 N(\alpha,\gamma)}{\partial\gamma^2}\beta^3\right\}\qquad(12)$$

Но коэффиціенты при степеняхъ $(x-\alpha)$ суть ни что иное, какъ лѣвыя части уравненій (3); слѣдовательно и прочее.

13. Предложенія n° n° 10 и 11 доказываютъ теорему n° 6.

14. Обращаясь къ формуламъ (9), мы замѣчаемъ, что первая изъ нихъ есть квадратная относительно α и γ, но линейная въ β; вторая линейная въ разсужденіи α и γ, но квадратная относительно β; третья — кубическая въ β.

15. Разрѣшивъ это послѣднее уравненіе, мы получимъ, говоря вообще, три значенія для β: β_1, β_2, β_3.

Вносимъ по очереди каждую изъ этихъ величинъ во второе и первое равенства, опредѣляемъ изъ втораго α въ функціи γ и найденное выраженіе подставляемъ въ первую изъ формулъ (4); тогда результатъ подстановленія, въ силу уничтоженія коэффиціента при γ^2, даетъ линейное уравненіе въ γ. То-же имѣетъ мѣсто и относительно уравненія въ α; по этому находимъ три системы значеній α, β, γ, и слѣдовательно три частныхъ интеграла: y_1, y_2, y_3, т. е.

$$\begin{aligned} y_1 &= \gamma_1 + \beta_2 (x - \alpha_1), \\ y_2 &= \gamma_2 + \beta_2 (x - \alpha_2), \quad (13) \\ y_3 &= \gamma_3 + \beta_3 (x - \alpha_3). \end{aligned}$$

16. Такъ какъ функція

$$\psi(y) = (y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) \quad (14)$$

вь настоящемъ случаѣ третьей степени относительно y,^{ка} а коэффиціенты въ данномъ уравненіи только квадратные многочлены, то въ общей формулѣ преобразованія (5),

$$G = o, \; H = o,$$

и получимъ:

$$\frac{M\,\partial x + N\,\partial y}{\psi(y)} = \frac{N_1 \partial(y - y_1)}{\psi'(y_1)(y - y_2)} + \frac{N_2 \partial(y - y_2)}{\psi'(y_2)(y - y_2)} + \frac{N_3 \partial(y - y_3)}{\psi'(y_3)(y - y_3)} = 0. \quad (15)$$

17. Докажемъ, что множители

$$\frac{N_1}{\psi'(y_1)}, \frac{N_2}{\psi'(y_2)}, \frac{N_3}{\psi'(y_3)},$$

стоящіе въ правой части этого равенства, не зависятъ отъ x. Формулы (14) и (13) даютъ:

$$\psi'(y_1) = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = (\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)\,x^2 + \ldots$$

Назвавши черезъ x' и x'' значенія $x^{са}$, при которыхъ y_1 переходитъ въ y_2 или въ y_3, найдемъ

$$\psi'(y_1) = (\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)(x - x')(x - x''). \quad (16)$$

Вносся теперь въ уравненіе (1) вмѣсто у каждое изъ его трехъ значеній, находимъ три равенства:

$$
\begin{aligned}
M(x, y_1) + N(x, y_1)\,\beta_1 &= 0,\\
M(x, y_2) + N(x, y_2)\,\beta_2 &= 0, \qquad (17)\\
M(x, y_3) + N(x, y_3)\,\beta_3 &= 0,
\end{aligned}
$$

изъ которыхъ первыя два для $x = x'$, а первое и третье для $x = x''$ доставляютъ:

$$N(x', y_1)\,(\beta_1 - \beta_2) = 0, \quad N(x'', y_1)\,(\beta_1 - \beta_3) = 0.$$

Но β_1, β_2, β_3 по положенію взаимно различны, слѣдовательно

$$N(x', y_1) = 0, \quad N(x'', y_1) = 0 \qquad (18).$$

Отсюда сейчасъ усматриваемъ, что функція $N(x, y)$ должна дѣлиться какъ на $x - x'$, такъ и на $x - x''$, т. е. на произведеніе $(x - x')\,(x - x'')$.

Съ другой стороны:

$$
\begin{aligned}
N(x, y_1) &= a' y_1^2 + b' y_1 x + c' x^2 + \ldots\ldots\\
&= (a'\beta^2 + b'\beta + c')\, x^2 + \text{ и т. д.}
\end{aligned}
$$

Слѣдовательно:

$$N(x, y_1) = (a'\beta^2 + b'\beta + c')\,(x - x')\,(x - x''). \qquad (19)$$

Поэтому

$$\frac{N_1}{\psi'(y_1)} = \frac{a'\beta^2_1 + b\,\beta_1 + c'}{(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \beta_3)} = q_1 \text{ величинѣ постоянной.}$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$
\begin{aligned}
\frac{N_2}{\psi'(y_2)} &= \frac{a'\beta^2_2 + b'\beta_2 + c'}{(\beta_2 - \beta_1)(\beta_2 - \beta_3)} = q_2,\\
\frac{N_3}{\psi'(y_3)} &= \frac{a'\beta^2_3 + b'\beta_3 + c'}{(\beta_3 - \beta_1)(\beta_3 - \beta_2)} = q_3. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

18. Въ слѣдствіе того уравненіе (15) приметъ видъ:

$$q_1 \frac{\partial (y-y_1)}{y-y_1} + q_2 \frac{\partial (y-y_2)}{y-y_2} + q_3 \frac{\partial (v-y_3)}{y-y_3} = 0, \quad (21)$$

а интегралъ его изобразится чрезъ

$$(y-y_1)^{q_1} (y-y_2)^{q_2} (y-y_3)^{q_3} = c, \quad (22)$$

гдѣ

$$q_1 + q_2 + q_3 = a'. \quad (23)$$

Послѣднюю формулу повѣрить весьма легко.

19. Такимъ образомъ, мы вводимъ въ интегральное исчисленіе еще одинъ классъ дифференціальныхъ формулъ удобно интегрируемыхъ.

ПРИМѢЧАНІЕ.

Въ n° 30 § II, на страницѣ 70, послѣ словъ: «тогда въ силу извѣстнаго отношенія» пропущено то самое равенство:

$$\Pi_0 \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_h} = \Pi . \Pi'_0 \left(\Pi' \left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_h} \right) \right),$$

на которое сдѣлана ссылка. Пропускъ этотъ указанъ въ таблицѣ погрѣшностей; здѣсь же мы намѣрены присоединить объясненіе приведеннаго выраженія.

Назвавъ черезъ k какое угодно изъ чиселъ 1, 2, ... m — 1, значеніе П, изъ (77), можно будетъ представить подъ формою

$$\Pi' \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c_1} \right) \frac{\partial \Pi_k}{\partial c_1} + \Pi' \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c_2} \right) \frac{\partial \Pi_k}{\partial c_2} + \ldots\ldots$$
$$+ \Pi' \left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c_{m-1}} \right) \frac{\partial \Pi_k}{\partial c_{m-1}},$$

которая, по свойству опредѣлителей, должна исчезнуть коль-скоро множители

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial c_1}, \frac{\partial \Pi_k}{\partial c_2}, \ldots \ldots \frac{\partial \Pi_k}{\partial c_{m-1}},$$

замѣнятся другими количествами, входящими въ составъ П, напримѣръ через

$$\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1}, \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2}, \ldots \ldots \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}}.$$

Поэтому

$$\Pi'\left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c_1}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c_2}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} + \ldots \ldots + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_k}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}}$$

тожественно будетъ съ нулемъ.

Сдѣлавши въ предпослѣдней суммѣ $k = j$, а въ послѣдней сообщивъ указателю k величины $1, 2, \ldots j-1, j+1, \ldots \ldots m-1$, получимъ всего $m-1$ такихъ формулъ:

$$0 = \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_1}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_2}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} + \ldots + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}},$$

$$0 = \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_1}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_2}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} + \ldots + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}},$$

. . . .

$$0 = \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{j-1}}{\partial c_1}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{j-1}}{\partial c_2}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} + \ldots \ldots + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{j-1}}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}},$$

$$\Pi = \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_1} + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_2} + \ldots + \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_{m-1}},$$

$$0 = \Pi'\left(\frac{\partial\Pi_{j+1}}{\partial c_1}\right)\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_1} + \Pi'\left(\frac{\partial\Pi_{j+1}}{\partial c_2}\right)\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_2} + \ldots\ldots$$
$$+ \Pi'\left(\frac{\partial\Pi_{j+1}}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_{m-1}},$$

. . . .

$$0 = \Pi'\left(\frac{\partial\Pi_{m-1}}{\partial c_1}\right)\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_1} + \Pi'\left(\frac{\partial\Pi_{m-1}}{\partial c_2}\right)\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_2} + \ldots\ldots$$
$$+ \Pi'\left(\frac{\partial\Pi_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\right)\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_{m-1}}.$$

Если черезъ Π_0 изобразимъ опредѣлитель, составленный изъ $(m-1)^2$ коэффиціентовъ при величинахъ

$$\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_1},\ \frac{\partial\Pi_j}{\partial c_2},\ \ldots\ldots \frac{\partial\Pi_j}{\partial c_{m-1}},$$

а черезъ c_h означимъ какое угодно изъ количествъ:

$$c_1,\ c_2,\ \ldots\ldots c_{m-1},$$

то, по разрѣшеніи системы, найдемъ:

$$\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_h} = \frac{\Pi \,.\, \Pi'_0\left(\Pi'\left(\frac{\partial\Pi_j}{\partial c_h}\right)\right)}{\Pi_0};$$

а потому и прочее.

ВАЖНѢЙШІЯ

Напечатано:

Стран. Строк.

14 6 сн. перемѣнныхъ, независимыхъ

22 11 св. $\partial\left(\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - MX_2}{\partial x_1}\right)$

— 12 — $+\ \partial\left(\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - MX_2}{\partial x}\right) \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x}$,

23 12 — $\partial x_2,\ \partial x_3, \ldots \partial x_m$,

27 5 — $X^{m-1 \cdot 0}_{m-1}\,\partial x_{m-1} + X^{m \cdot 0}_{m}\,\partial x_m = 0$,

50 19 — положивъ уравненіе

60 6 — $\varphi_j = c$,

ПОГРѢШНОСТИ.

Должно быть:

перемѣнныхъ независимыхъ

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - MX_2\right)}{\partial x_1}$$

$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - MX_2\right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_1},$$

$x_2, x_3, \ldots . x_m,$

$X_{m-1}^{m-1 \cdot 0}\,\partial x_{m-1} + X_m^{m-1 \cdot 0}\,\partial x_m = 0,$

положивъ, напримѣръ,

$\varphi_j = c_j,$

Напечатано:

Стран. Строк.

70 15 св. въ силу извѣстнаго отношенія

$$\begin{vmatrix} \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_1}{\partial c_1}\right), & \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_1}{\partial c_2}\right), & \ldots & \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_1}{\partial c_{m-1}}\right) \\ \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_2}{\partial c_1}\right), & \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_2}{\partial c_2}\right), & \ldots & \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_2}{\partial c_{m-1}}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_{m-1}}{\partial c_1}\right), & \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_{m-1}}{\partial c_2}\right), & \ldots & \Pi'\left(\dfrac{\partial\Pi_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\right) \end{vmatrix} = \Pi \quad (83)$$

82 8 — Такъ какъ теперь, въ силу первой изъ формулъ (20)

$$N = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx} = \frac{\Delta}{U}$$

то $$\log z = \int \frac{\Delta\, dx}{U},$$

а $$z = e^{\int \frac{\Delta\, dx}{U}}, \quad (23)$$

и слѣдовательно множитель, общій всѣмъ нумерованнымъ P, будетъ:

$$\frac{1}{z} = e^{-\int \frac{\Delta\, dx}{U}} \quad (24)$$

Должно быть:

въ силу извѣстнаго отношенія

$$\Pi_0 \frac{\partial \Pi_j}{\partial c_h} = \Pi . \Pi'_0 \left(\Pi' \left(\frac{\partial \Pi_j}{\partial c_h} \right) \right) \quad (83)$$

гдѣ

$$\left| \begin{array}{llll} \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_1}\right), & \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_2}\right), & \ldots . & \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial c_{m-1}}\right) \\ \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_1}\right), & \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_2}\right), & \ldots . & \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial c_{m-1}}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_1}\right), & \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_2}\right), & \ldots . & \Pi'\left(\frac{\partial \Pi_{m-1}}{\partial c_{m-1}}\right) \end{array} \right| = \Pi_0 \quad (83')$$

Такъ какъ теперь, въ силу первой изъ формулъ (20)

$$N = -\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\Delta}{U},$$

то $$\log z = -\int \frac{\Delta\, \partial x}{U},$$

а $$z = e^{-\int \frac{\Delta\, \partial x}{U}}, \quad (23)$$

и слѣдовательно множитель, общій всѣмъ нумерованнымъ P, будетъ:

$$\frac{1}{z} = e^{\int \frac{\Delta\, \partial x}{U}} \quad (24)$$

Напечатано:

Стран.	Строк.	
84	11 св.	$\frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{da} = 1$, то $\log z = a$, и $z = e^{a}$ (29)
85	10 —	e^{-a}
94	12 —	гдѣ $X_1, X_2, \ldots\ldots X_{2p-1}, R, R_1, \ldots\ldots$
96	10 сн.	$x^{00}{}_{2p-1} = g_2$
97	10 —	$x^{0}{}_{2p-1} = g_1$, $x^{0}{}_{2p-2} = g_2$, и т. д. (64)
98	2 —	$g_1, g_2, \ldots\ldots g_p$,
119	13 —	$X \partial x \partial x_1 + X_1 = 0$
150	4 —	$0 = (2p.0) + (2p.1) \frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \ldots.$

Должно быть:

$-\frac{1}{z}\frac{dz}{da}=1$, то $\log z=-a$, и $z=e^{-a}$ (29)

e^{a}

гдѣ $r_1, r_2, \ldots\ldots r_{2p-1}, R, R_1, \ldots\ldots$

$x^{00}{}_{2p-2}=g_2$

$x^{0}{}_{2p-1}=g_1, \; x^{00}{}_{2p-2}=g_2$, и т. д. (64)

$g_1, g_2, \ldots\ldots g_q,$

$X\,\partial x+X_1\,\partial x_1=0$

$0=(2p.1)+(2p.2)\frac{\partial x_2}{\partial x_1}+\ldots\ldots$

—