## B.

## ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

### I.

*Выраженіе величины угловъ числами, и понятіе о томъ, какимъ образомъ тригонометрическія линіи могутъ служить къ разрѣшенію треугольниковъ.*

§ 28. Прежде нежели приступимъ къ главной задачѣ прямолинейной Тригонометріи, т. е. *къ разрѣшенію прямолинейныхъ треугольниковъ*, считаемъ необходимымъ объяснить вкратцѣ, какимъ образомъ величина угловъ выражается числами. Послѣ этого объясненія намъ легко будетъ понять, какимъ образомъ къ разрѣщенію треугольниковъ могутъ служить тригонометрическія линіи.

Въ слѣдствіе той аксіомы, что мѣра должна быть однородна съ измѣряемою величиною, углы должны измѣряться извѣстнымъ какимъ-ни-есть угломъ, принятымъ за единицу. Отношеніе каждаго даннаго угла къ этой единицѣ и есть число, выражающее величину его.

Но извѣстно изъ Геометріи, что если изъ вершинъ угловъ, какъ центровъ, произвольнымъ, но однимъ и тѣмъ-же радіусомъ описаны будутъ между боками ихъ дуги окружности, то эти дуги будутъ относиться между собою точно такъ-же, какъ и соотвѣтствующіе имъ углы. Поэтому если принять за единицу дугу, заключающуюся въ углѣ, взятомъ за единицу, и сравнить съ нею дуги той-же окружности, заключающіяся въ углахъ, коихъ величину хотимъ опредѣлить, то получимъ тѣ-же самыя числа, какія получились бы и отъ сравненія между собою самыхъ угловъ. Какъ выборъ угла, который долженъ служить мѣрою, зависитъ отъ произвола; такъ точно и выборъ дуги, т. е. части окружности, по отношенію къ которой должна опредѣляться величина дугъ той-же окружности, также произволенъ. Имѣя въ виду приложеніе къ угламъ тригонометрическихъ линій, математики согласились принимать за единицу дугу, равную радіусу окружности, къ которой принадлежатъ разсматриваемыя дуги. — Такимъ образомъ величина угловъ выражается отношеніями дугъ къ радіусу, коимъ онѣ описаны.

Не должно думать, чтобы этотъ радіусъ долженъ былъ имѣть постоянно одну какую-либо опредѣленную длину; длина его можетъ быть какая угодно, потому что дуги всякой окружности, описанныя изъ вершинъ угловъ, и заключающіяся между ихъ боками, пропорціональны угламъ.

Чтобы при этомъ не показалось сомнительнымъ, получится ли для даннаго угла одно и тоже число, какую бы изъ описанныхъ въ немъ различными радіусами дугъ мы ни взяли, достаточно припомнить, что всѣ эти дуги, составляя одинакія части окружностей, относятся между собою такъ, какъ ихъ радіусы, и слѣдовательно отношеніе каждой изъ нихъ къ своему радіусу должно доставлять одно и то-же число.

Возмемъ какой-ни-есть уголъ BAC (чер. 10.) и изъ вершины его радіусами AM и $AM_1$ опишемъ дуги MN и $M_1N_1$; будемъ имѣть:

$$M_1N_1 : MN = AM_1 : AM,$$

откуда

$$\frac{M_1N_1}{AM_1} = \frac{MN}{AM}.$$

Предположивъ, что радіусъ AM равенъ той мѣрѣ, въ которой выражены дуги $M_1N_1$ и MN, равно какъ и радіусъ $AM_1$, получимъ:

$$\frac{M_1N_1}{AM_1} = MN,$$

что показываетъ, что отношеніе дуги, заключающейся въ какомъ-ни-есть углѣ, къ радіусу, коимъ она описана, равно численной величинѣ дуги, описанной въ томъ-же углѣ радіусомъ, равнымъ едидицѣ. Такимъ образомъ выраженіе числами величины угловъ сводится на выраженіе длины заключающихся въ нихъ дугъ окружности, которой радіусъ равенъ единицѣ. Такъ прямой уголъ, заключающій въ себѣ четверть окружности, выражается числомъ $\frac{\pi}{2}$, половина прямаго — $\frac{\pi}{4}$ и т. д.

Такъ какъ длина дуги, описанной радіусомъ равнымъ единицѣ, совершенно опредѣляется, когда извѣстно, какое число градусовъ, минутъ и секундъ она въ себѣ заключаетъ, то по этому и величину угловъ обыкновенно обозначаютъ тѣми-же частями окружности. Такъ на пр. говорятъ: уголъ въ 90, т. е. прямой уголъ, уголъ въ 30° — треть прямаго и т. д. Какимъ образомъ по данному числу градусовъ, минутъ и секундъ, заключающихся въ дугѣ, находить длину ея, и обратно по данной длинѣ дуги, опредѣлять число заключающихся въ ней градусовъ, минутъ и секудъ, — подробно объяснено было въ § 26.

§ 29. Послѣ всего сказаннаго легко видѣть, какимъ образомъ тригонометрическія линіи могутъ служить къ разрѣшенію треугольниковъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ углы, относительно выраженія ихъ числами, суть тоже, что дуги окружности, описанной радіусомъ, равнымъ единицѣ, и какъ помощію тригонометрическихъ таблицъ легко находить какъ величину тригонометрическихъ линій, соотвѣтствующихъ даннымъ дугамъ, такъ и на оборотъ, величину дугъ, имѣющихъ данныя тригонометрическія линіи; то очевидно, что сіи послѣднія и могутъ быть введены въ вычисленіе при разрѣшеніи треугольниковъ вмѣсто угловъ. Для сокращенія рѣчи тригонометрическія линіи дугъ окружности, выражающихъ величину угловъ, называютъ тригонометрическими линіями угловъ, подобно тому, какъ самыя дуги называются углами. Такимъ образомъ задача прямолинейной тригонометріи сводится на отысканіе отношеній между сторонами прямолинейнаго треугольника и тригонометрическими линіями его угловъ.

---

## II.

*Теоремы, на которыхъ основывается разрѣшеніе прямолинейныхъ треугольниковъ.*

§ 30. Стороны каждаго прямолинейнаго треугольника находятся въ весьма простыхъ отношеніяхъ съ тригонометрическими линіями угловъ его, что и даетъ возможность рѣшать всѣ задачи прямолинейной тригонометріи съ легкостію, какой только желать можно. Слѣдующія пять теоремъ представляютъ тѣ изъ этихъ отношеній, кои наиболѣе удобны къ разрѣшенію треугольниковъ.

§ 31. *Теорема I. Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ каждый катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противулежащаго ему остраго угла, или на косинусъ угла прилежащаго.*

*Доказательство.* Пусть будетъ данъ треугольникъ ABC (чер. 11.), въ которомъ уголъ ABC есть прямой. Для краткости будемъ означать углы BAC, ABC и ACB чрезъ A, B и C, а противулежащія имъ стороны BC, AC, AB чрезъ a, b, c, предполагая при томъ, что углы выражены въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, а стороны въ извѣстной линейной мѣрѣ [1]. Если теперь изъ вершины одного изъ острыхъ угловъ, на пр. A, радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ b, опишемъ дугу CM, то, очевидно, катетъ a будетъ синусомъ этой дуги, а катетъ c—косинусомъ, такъ что

$$a = \sin CM,\quad c = \cos CM.$$

Но изъ сказаннаго въ § 23 заключаемъ, что

$$\sin CM = b \sin A,\quad \cos CM = b \cos A;$$

по сему и будетъ:

$$(1)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} a = b \sin A \\ c = b \cos A \end{cases}$$

Кромѣ того, такъ какъ $A + C = 90^\circ$, откуда $A = 90^\circ - C$ и $\sin A = \cos C$, $\cos A = \sin C$, то изъ предъидущихъ равенствъ получимъ:

$$(2)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} a = b \cos C \\ c = b \sin C \end{cases}$$

Равенства (1) и (2) и выражаютъ теорему, которую мы хотѣли доказать.

---

[1] Это обозначеніе мы удержимъ и тогда, когда данный треугольникъ не будетъ прямоугольный.

§ 32. *Теорема II. Во всякомъ прямоугольномъ треугольникѣ каждый катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла, противулежащаго первому катету, или на котангенсъ угла, прилежащаго тому-же катету.*

*Доказательство.* Если равенства (1) предъидущаго параграфа раздѣлимъ одно на другое, то получимъ:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tang} A; \quad \frac{c}{a} = \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A,$$

откуда и выходитъ:

(3)........ $a = c.\ \operatorname{tang} A,\ c = a.\ \cot A.$

Сдѣлавъ тоже самое съ равенствами (2), получимъ:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\cos C} = \operatorname{tang} C; \quad \frac{a}{c} = \frac{\cos C}{\sin C} = \cot C,$$

откуда

(4)........ $c = a \operatorname{tang} C,\ a = c \cot C.$

Такимъ образомъ предложенная теорема вполнѣ доказана.

§ 33. *Теорема III. Во всякомъ треугольникѣ синусы угловъ содержатся между собою какъ противулежащія имъ стороны.*

*Доказательство.* Если въ треугольникѣ ABC (черт. 12) изъ вершины какого-ни-есть угла, напр. C, опустимъ на противулежащую ему сторону c перпендикуляръ CD, то получимъ два прямоугольные треугольника ADC и BDC, въ которыхъ, по теоремѣ I, будетъ:

$$CD = b \sin A \text{ и } CE = a \sin B,$$

откуда и выводимъ:

(5)........ $b \sin A = a \sin B$

или (6)........ $\sin A : \sin B = a : b,$

что и требовалось доказать.

Если бы одинъ изъ угловъ A и B, которые въ предъидущемъ построеніи приняты за острые, напр. уголъ B, былъ тупой, то перпендикуляръ CD (черт. 13) упалъ бы внѣ треугольника ABC на продолженіи стороны AB, и два прямоугольные треугольника ADC и BDC, по теоремѣ I, доставили бы:

$$CD = b \sin A \text{ и } CD = a \sin CBD.$$

Но уголъ CBD, будучи дополненіемъ угла B до двухъ прямыхъ, имѣетъ одинаковый съ нимъ синусъ; по сему будетъ:

$$CD = a \sin B$$

и слѣд.

$$b \sin A = a \sin B$$

или

$$\sin A : \sin B = a : b$$

—пропорція одинакая съ пропорціею (6). Отсюда заключаемъ, что теорема III имѣетъ мѣсто, каковы бы ни-были разсматриваемые углы.

§ 34. *Теорема IV. Сумма двухъ сторонъ треугольника относится къ ихъ разности такъ, какъ тангенсъ отъ полусуммы угловъ, противуположныхъ симъ сторонамъ, къ тангенсу ихъ полуразности.*

*Доказательство.* Доказанная нами въ предъидущемъ параграфѣ пропорція (6) доставляетъ:

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B.$$

Но по § 22 имѣемъ:

$$\sin A + \sin B : \sin A - \sin B = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B);$$

по сему будетъ:

$$(7) \ldots\ a + b : a - b = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A+B) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(A-B),$$

что и надлежало доказать.

§ 35. *Теорема V. Во всякомъ треугольникѣ квадратъ каждой стороны равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ безъ удвоеннаго произведенія изъ тѣхъ-же сторонъ и косинуса угла, который онѣ составляютъ.*

*Доказательство.* Въ треугольникѣ ABC (чер. 12), по теоремѣ I, имѣемъ:

$$AD = AC \cos A,\ BD = BC \cos B,$$

откуда

$$AD + BD = AB = AC \cos A + BC \cos B.$$

Въ случаѣ треугольника, представленнаго на чертежѣ 13, имѣемъ:

$$AD = AC \cos A,\ BD = BC \cos CBD = -BC \cos B,$$

откуда

$$AD - BD = AB = AC \cos A + BC \cos B.$$

И такъ, каковы-бы ни-были углы A и B, всегда будетъ:

$$c = b \cos A + a \cos B,$$

а слѣдовательно также

$$b = a \cos C + c \cos A$$
$$a = c \cos B + b \cos C.$$

Если первое изъ этихъ равенствъ умножимъ на c, второе на b и третье на a, то получимъ:

$$c^2 = bc \cos A + ac \cos B$$
$$b^2 = ab \cos C + bc \cos A$$
$$a^2 = ac \cos B + ab \cos C,$$

откуда, складывая по два равенства вмѣстѣ и изъ суммы вычитая третье, находимъ:

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$$
$$a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C,$$

а отсюда наконецъ получимъ:

$$(8) \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{array} \right.$$

—формулы, кои и нужно было вывести для доказательства предложенной теоремы.

---

### III.

*Разрѣшеніе треугольниковъ.*

§ 36. При разрѣшеніи прямолинейныхъ треугольниковъ могутъ встрѣтиться, относительно данныхъ частей, слѣдующіе три случая:

1. Дана сторона и два угла.
2. Даны двѣ стороны и уголъ a) заключающійся между ними, b) противуположный одной изъ нихъ.
3. Даны три стороны.

§ 37. 1-й *Случай.* Когда дана сторона и какіе-ни-есть два угла, то и третій уголъ можно считать извѣстнымъ, потому что онъ равенъ 180° безъ суммы двухъ данныхъ угловъ.

Положимъ теперь, что дана сторона a; для опредѣленія двухъ другихъ сторонъ, по теоремѣ III, имѣемъ пропорціи:

$$b : a = \sin B : \sin A,\ \ c : a = \sin C : \sin A,$$

изъ коихъ получаемъ:

$$(9)\ldots\ldots\ b = \frac{a \sin B}{\sin A},\ \ c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

*Примѣръ.* Пусть $a = 324$ фут., уголъ $B = 56°\,18'$, и уголъ $C = 51°\,47$, и слѣд. уголъ $A = 180° - (B + C) = 71°\,55'$. Взявъ логариѳмы равенствъ (9), будемъ имѣть:

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$$
$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A,$$

и какъ

$$\log 324 = 2{,}5105450$$
$$\log \sin 56°\,18' = 9{,}9200994$$
$$\log \sin 51°\,47' = 9{,}8952440$$
$$\log \sin 71°\,55' = 9{,}9780005,$$

то подставивъ эти величины въ предъидущія равенства, получимъ:

$$\log b = 2,4526438$$
$$\log c = 2,4277884,$$

и слѣдовательно

$$b = 283,539, \quad c = 267,786.$$

§ 38. 2-й *Случай*. Задача—по двумъ сторонамъ и заключающемуся между ними углу найти прочія части треугольника, всего легче рѣшается слѣдующимъ образомъ:

Положимъ, что данъ уголъ $A$ и стороны $b$ и $c$. Такъ какъ $A+B+C=180^\circ$, и слѣд. $B+C=180^\circ-A$, то сумма искомыхъ угловъ извѣстна. Если бы при этомъ извѣстна была и разность ихъ, то легко было бы найти и величину каждаго изъ нихъ; ибо

$$B = \tfrac{1}{2}(B+C) + \tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$C = \tfrac{1}{2}(B+C) - \tfrac{1}{2}(B-C).$$

Но по теоремѣ IV имѣемъ:

$$b+c : b-c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B+C) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B-C),$$

откуда

$$(10 \ldots\ldots \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B+C),$$

и слѣдовательно разность $B-C$ опредѣлится. Такимъ образомъ всѣ углы треугольника и двѣ стороны будутъ извѣстны. Третья сторона можетъ быть вычислена по одному изъ равенствъ:

$$(11) \ldots\ldots \; a = \frac{b \sin A}{\sin B}, \quad a = \frac{c \sin A}{\sin C},$$

получаемыхъ на основаніи теоремы III.

*Примѣръ*. Пусть $A = 48^\circ 36'$, $b = 427$ фут., $c = 354$ фут. Будетъ: $B+C = 131^\circ 24'$, и слѣд. $\tfrac{1}{2}(B+C) = 65^\circ 42'$, $b-c = 73$, $b+c = 781$. Взявъ логариѳмы равенства (10), будемъ имѣть:

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B-C) = \log(b-c) + \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B+C) - \log(b+c)$$

и какъ

$$\log 73 = 1{,}8633229$$
$$\log \operatorname{tang} 65^\circ\ 42' = 0{,}3453256$$
$$\log 781 = 2{,}8926510,$$

то по подстановленіи этихъ чиселъ въ предъидущемъ равенствѣ, получимъ:

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(B - C) = 9{,}3159975,$$

откуда

$$\tfrac{1}{2}(B - C) = 11^\circ\ 56'\ 50'',$$

и слѣдовательно:

$$B = 77^\circ\ 38'\ 50''$$
$$C = 53^\circ\ 45'\ 10''.$$

Взявши теперь логариѳмы одного изъ равенствъ (11), напр. перваго, получимъ:

$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B,$$

откуда, подставляя вмѣсто $\log b$, $\log \sin A$ и $\log \sin B$ числа, доставляемыя таблицами логариѳмовъ, получимъ:

$$\log a = 2{,}5157262\ \text{, и слѣд. } a = 327{,}88$$

Положимъ теперь, что даны стороны $a$ и $b$ и уголъ $A$, противуположный сторонѣ $a$; въ этомъ случаѣ рѣшеніе задачи заключается въ слѣдующихъ формулахъ:

$$(12)\ldots\ \sin B = \frac{b \sin A}{a},\ C = 180^\circ - (A + B),\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B}.$$

Ясно, что рѣшеніе зависитъ отъ опредѣленія угла B. Но первая изъ приведенныхъ формулъ даетъ величину синуса этого угла, и какъ одинъ и тотъ-же синусъ соотвѣтствуетъ двумъ угламъ, изъ коихъ одинъ меньше, а другой больше 90°, то мы получимъ такимъ образомъ двѣ различныя величины для угла B. Въ слѣдствіе этого, уголъ C, равно какъ и сторона c будутъ имѣть также по двѣ различныя величины. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ обѣ величины удовлетворяютъ задачѣ, въ другихъ же только одна изъ нихъ; разберемъ эти случаи.

1. Если $b=a$, то должно быть также и $B=A$, и слѣд. каждый изъ этихъ угловъ по необходимости есть острый. По сему въ этомъ случаѣ задача имѣетъ только одно рѣшеніе.

2. Если $a>b$, то также и $A>B$, и слѣд. уголъ $B$ опять по необходимости есть острый, и задача имѣетъ слѣдовательно одно только рѣшеніе.

3. Если же $a<b$, то и $A<B$, и слѣд. уголъ $B$ можетъ быть какъ острый, такъ и тупой. По сему въ этомъ случаѣ каждая изъ величинъ, получаемыхъ для $B$, $C$ и $c$ можетъ удовлетворять задачѣ, которая по этому имѣетъ два рѣшенія.

*Примѣръ.* Пусть $a=2597{,}845$ фут., $b=3084{,}327$, $A=56^{\circ}\,12'\,47''$. Первая изъ формулъ (12) доставляетъ

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a,$$

и какъ

$$\log 3084{,}327=3{,}4891604$$
$$\log\sin 56^{\circ}12'47''=9{,}9196592$$
$$\log 2597{,}845=3{,}4146132,$$

то будетъ:

$$B=80^{\circ}\,39'\,43'',\text{ или } B=99^{\circ}\,20'\,17''.$$

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ $a<b$, то обѣ найденныя для угла $B$ величины могутъ быть приняты, и задача допускаетъ по этому два рѣшенія.

Взявъ первую величину для $B$, получимъ:

$$C=43^{\circ}\,7'\,30''$$
$$c=2136{,}\,737.$$

При второй же величинѣ найдется:

$$C=24^{\circ}\,26'\,56''$$
$$c=1293{,}689.$$

§ 39. 3-й *случай.* По даннымъ тремъ сторонамъ треугольника углы его опредѣляются на основаніи теоремы V. Ибо равенства (8) доставляютъ:

$$(13)\ldots\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Когда стороны a, b, c выражены небольшими числами, то опредѣленіе по этимъ формуламъ угловъ A, B, C не представляетъ никакого затрудненія. Ибо тогда легко каждое изъ выраженій $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ привести къ виду $\frac{m}{n}$, гдѣ m и n будутъ извѣстныя числа, и пріискавъ послѣ того логариѳмы сихъ выраженій, найти такимъ образомъ логариѳмы для cos A, cos B и cos C, и посредствомъ таблицъ отыскать самые углы A, B, C. Но когда a, b, c будутъ большія числа, тогда пріисканіе логариѳмовъ для помянутыхъ выраженій, необходимо требующее, чтобы всѣ указанныя знаками ариѳметическія дѣйствія были совершены на самомъ дѣлѣ, сопряжено съ большими затрудненіями, и формулы (13), въ настоящемъ ихъ видѣ, оказываются поэтому неудобными для опредѣленія угловъ A, B, C. Но изъ нихъ же легко извлечь другія формулы, не представляющія подобнаго неудобства.

Прибавивъ къ обѣимъ частямъ каждаго изъ равенствъ (13) по единицѣ, получимъ:

$$1+\cos A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)\ (b+c-a)}{2bc}$$

$$1+\cos B=\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}=\frac{(a+b+c)\ (a+c-b)}{2ac.}$$

$$1+\cos C=\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b+c)\ (a+b-c).}{2ab}$$

Если теперь положимъ для краткости

$$a+b+c=2s,$$

то изъ предъидущихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{s\ (s-a)}{bc},\ \frac{1+\cos B}{2}=\frac{s\ (s-b)}{ac},\ \frac{1+\cos C}{2}=\frac{s\ (s-c)}{ab}.$$

Но по § 26 имѣемъ:

$$\frac{1+\cos A}{2}=\cos^2 {}^1\!/_2 A,\ \frac{1+\cos B}{2}=\cos^2 {}^1\!/_2 B,\ \frac{1+\cos C}{2}=\cos^2 {}^1\!/_2 C;$$

посему будетъ:

$$(14)\ldots \cos {}^1\!/_2 A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \cos {}^1\!/_2 B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},\ \cos {}^1\!/_2 C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

гдѣ всѣ корни взяты съ знакомъ $+$, потому что каждый изъ угловъ $^1\!/_2$ A, $^1\!/_2$ B, $^1\!/_2$ C меньше прямаго, и слѣд. имѣетъ косинусъ положительный. Эти формулы и могутъ быть съ выгодою употребляемы для опредѣленія угловъ A, B, C, потому что прiисканiе логариѳмовъ выраженiй $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ и пр. не требуетъ никакихъ предварительныхъ дѣйствiй надъ числами a, b, c, кромѣ сложенія и вычитанія, которыя совершаются безъ особенныхъ затрудненiй.

Если бы мы обѣ части каждаго изъ равенствъ (13) вычли изъ единицы, то получили-бы:

$$1-\cos A=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}=\frac{2(s-c)(s-b)}{bc}$$

$$1-\cos B=\frac{b^2-(a-c)^2}{2ac}=\frac{(b+a-c)(b+c-a)}{2ac}=\frac{2(s-c)(s-a)}{ac}$$

$$1-\cos C=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}=\frac{(c+a-b)(c+b-a)}{2ab}=\frac{2(s-b)(s-a)}{ab},$$

и какъ

$$\frac{1-\cos A}{2}=\sin^2 {}^1\!/_2 A,\ \frac{1-\cos B}{2}=\sin^2 {}^1\!/_2 B,\ \frac{1-\cos C}{2}=\sin^2 {}^1\!/_2 C,$$

то имѣли-бы:

$$(15)\ldots \operatorname{Sin} {}^1\!/_2 A=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}},\ \sin {}^1\!/_2 B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}},$$

$$\sin {}^1\!/_2 C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

— формулы столько-же удобныя для вычисленія посредствомъ логариѳмовъ, какъ и формулы (14).

Чрезъ соединенiе формулъ (14) съ (15) получаются новыя формулы, также удобныя для логариѳмическаго вычисленія; эти формулы суть:

$$(16)\ldots\left\{\begin{array}{l}\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ \sin B=\frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\ \sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.\end{array}\right.$$

Онѣ непосредственно выходятъ изъ равенствъ:
$\sin A=2\sin {}^1/_2 A\cos {}^1/_2 A$, $\sin B=2\sin {}^1/_2 B\cos {}^1/_2 B$, $\sin C=2\sin {}^1/_2 C\cos {}^1/_2 C$,
когда въ нихъ вмѣсто синусовъ и косинусовъ угловъ $^1/_2 A$, $^1/_2 B$, $^1/_2 C$ подставлены будутъ ихъ выраженія, доставляемыя равенствами (14) и (15).

Хотя употребленіе сихъ послѣднихъ формулъ съ перваго взгляда и представляется неудобнымъ, потому что по опредѣленіи величины синусовъ угловъ A, B, C, нужно особенно разыскивать, острые-ли эти углы, или тупые; но это разысканіе не представляетъ затрудненія. Ибо два изъ угловъ A, B, C, противуположные меньшимъ сторонамъ, необходимо всегда острые, а что касается до третьяго, то легко видѣть изъ равенства $A+B+C=180°$, острый-ли онъ, или тупой.

*Примѣръ.* Пусть $a=29{,}037$ фут. $b=18{,}743$, $c=13{,}782$; будетъ: $s=30{,}781$, $s-a=1{,}744$, $\log s=1{,}4882827$, $\log(s-a)=0{,}2415465$, $\log b=1{,}2728319$, $\log c=1{,}1393122$.

Подставляя эти величины въ равенствѣ:

$$\log\cos {}^1/_2 A={}^1/_2\,\{\log s+\log(s-a)-\log b-\log c\},$$

получимъ:

$$\log\cos {}^1/_2 A=9{,}6588426,$$

откуда

$$^1/_2 A=62°\ 52'\ 44''$$

и слѣд.

$$A=125°\ 45'\ 28''.$$

Такимъ же образомъ изъ формулы $\cos {}^1/_2 B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$ найдется

$$B=31°\ 35'\ 16''.$$

Третій уголъ C опредѣлится легче всего изъ равенства

$$A+B+C=180^\circ,$$

которое, по подстановленіи вмѣсто A и B найденныхъ величинъ, доставитъ:

$$C=22^\circ\ 39'\ 16''.$$

§ 40. Прямоугольные треугольники, посредствомъ теоремъ I и II, разрѣшаются гораздо проще. Всѣ задачи касательно сихъ треугольниковъ относятся къ первому и второму изъ разсмотрѣнныхъ нами трехъ случаевъ, именно къ первому случаю принадлежатъ такія, въ коихъ предполагаются данными: a) гипотенуза и одинъ изъ острыхъ угловъ, и b) катетъ и одинъ изъ острыхъ угловъ; ко второму—такія, въ коихъ даны бываютъ: a) гипотенуза и одинъ изъ катетовъ, и b) оба катета. Другихъ задачъ встрѣтиться не можетъ.

Когда дана гипотенуза b (чер. 11) и одинъ изъ острыхъ угловъ, напр. A, тогда другой острый уголъ C найдется изъ формулы

(17)... $C=90^\circ-B$,

а катеты опредѣлятся по формуламъ (1), т. е.

(18)... $a=b\sin A,\ c=b\cos A.$

Такъ напр. если $b=33,253$ фут., $A=37^\circ 28'\ 1''$, то будетъ $C=52^\circ\ 31'\ 59'$, $\log a=\log b+\log\sin A=1,3059512$, $\log c=\log b+\log\cos A=1,4214896$, и слѣд. $a=20,228$, $c=26,393$.

Если данъ катетъ a и острый уголъ C, то уголъ A найдется, какъ и выше, изъ равенства

(19)... $A+C=90^\circ$,

а катетъ c получится изъ формулы

(20)... $c=a\ \mathrm{tang}\ C$, или $c=a\cot A$

и гипотенуза b изъ формулы

(21)... $b=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a}{\cos C}.$

Такъ если $a=25$ фут. $C=47°32'$, то будетъ $A=42°28'$, $\log c=\log a+\log \tang C=1,3594852$, $\log b=\log a-\log \sin A =1,5300777$, и слѣдовательно $c=22,881$ ф. $a=33,89$ ф.

При данной гипотенузѣ $b$ и одному изъ катетовъ, напр. $a$, острые углы $A$ и $C$ найдутся по формуламъ

(22)... $\sin A=\frac{a}{b}$; (23)... $C=90°-B$.

а катетъ $c$ по формулѣ

(24)... $c=b \cos A$.

или по Пиѳагоровой теоремѣ:

(25)... $c=\sqrt{(b-a)(b+a)}$.

Пусть напр. $a=135$ ф., $b=85$ фут. будетъ:

$$\log \sin B=\log a-\log b=-0,2009149,$$

и слѣд.

$$\log \sin B=9,7990851,$$

откуда

$$B=39° 1' 22'', \text{ и поэтому } C=50° 58' 38''.$$

$$\log c=\log b+\log \cos A=2,0206966,$$

и слѣдовательно

$$C=104,88 \text{ фут.}$$

Наконецъ если оба катета $a$ и $c$ даны, то углы $A$ и $C$ найдутся по формуламъ:

(26)... $\text{ting} A=\frac{a}{c}$; (27)... $C=90°-A$,

гипотенуза же $b$ по формулѣ

(28)... $b=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$

Такъ, если $a=15$ фут. $c=12$ ф., то будетъ:

$$\log \tang A=\log a-\log c=0,0969101,$$

и слѣдовательно

$$A=51° 20' 24'' \text{ и } C=38° 39' 36''.$$

$$\log b=\log a-\log \sin A=1,2835144,$$

и посему

$$b=19,2 \text{ фут.}$$

---

## IV.

### *Измѣреніе линій и угловъ на поверхности земли.*

§ 41. Въ практическихъ задачахъ *данными* считаются такія части треугольниковъ, кои непосредственно могутъ быть смѣряны, и какъ измѣреніе угловъ легче, нежели сторонъ, то обыкновенно измѣряется одна только сторона, которая и называется *базисомъ*.

§ 42. Въ большихъ геодезическихъ операціяхъ базисы измѣряются металлическими жезлами, нарочно для того приготовленными; въ обыкновенной же практикѣ землемѣрія употребляются для этой цѣли веревки и цѣпи, преимущественно же послѣдні́я.

*Мѣрная цѣпь* дѣлается изъ желѣзной проволоки, толщиною въ гусиное перо. Она имѣетъ 10 саженъ длины и состоитъ изъ 70 колѣнъ, соединяющихся одно съ другимъ кольцами такъ, что разстояніе между центрами двухъ послѣдовательныхъ колецъ равно одному англійскому футу. Кольца дѣлаются изъ желѣза, а тѣ, кои означаютъ сажени,—изъ мѣди. Къ обѣимъ оконечностямъ цѣпи придѣлываются кольца бо́льшаго діаметра, и чтобы разстояніе центра каждаго изъ сихъ колецъ до центра смежнаго съ нимъ кольца было одинаково съ разстояніями между центрами всѣхъ другихъ колецъ, крайнія колѣна цѣпи дѣлаются короче прочихъ. Настоящая длина цѣпи есть разстояніе между центрами крайнихъ колецъ.

Измѣреніе цѣпью производится слѣдующимъ образомъ: во первыхъ линію, которую должно смѣрять, *провѣшиваютъ*, т. е. ставятъ по ея направленію рядъ кольевъ, называемыхъ *вѣхами*, длиною отъ 1 до 2 саженей и болѣе, съ нижняго конца заостренныхъ, а на верхнемъ имѣющихъ лоскутъ холста въ видѣ флага, или пучекъ соломы и т. п. Послѣ того два человѣка надѣваютъ крайнія кольца цѣпи на колья, называемые *цѣпными,* и одинъ изъ нихъ втыкаетъ свой колъ въ ту точку, отъ которой начинается измѣреніе, а другой вытягиваетъ цѣпь по направленію, указываемому вѣхами, и воткнувъ одинъ изъ имѣющихся у него 10 колышковъ (длиною около фута) въ то мѣсто, которое было занято центромъ крайняго кольца, тащитъ цѣпь впередъ. Сзади идущій, дойдя до воткнутаго колышка, вынимаетъ его и ставитъ на то мѣсто свой цѣпной колъ. Такимъ образомъ дѣйствіе продолжается далѣе. Число собранныхъ сзади идущимъ колышковъ показываетъ, сколько на измѣряемой линіи легло цѣпей.

§ 43. Углы могутъ быть измѣряемы различными инструментами. Самый простой изъ нихъ есть *астролябія.* Она состоитъ изъ мѣднаго круга M (чер. 14), отъ 6 до 12 дюймовъ въ діаметрѣ, раздѣленнаго на градусы и называемаго *лимбомъ.* Около центра сего круга движется *алидада,* т. е. линейка, длиною нѣсколько меньше его діаметра. На концахъ ея утверждены въ положеніи, перпендикулярномъ къ плоскости лимба, двѣ продолговатыя мѣдныя-же пластинки A и $A_1$, изъ коихъ каждая имѣетъ четырехугольное отверстіе, въ коемъ натянутъ конскій волосъ, и узкій прорѣзъ, какъ показано на чертежѣ 15. Эти пластинки называются *діоптрами.* Въ одномъ изъ нихъ узкій прорѣзъ дѣлается надъ отверстіемъ съ волосомъ, и въ другомъ обратно. Такъ какъ алидада можетъ быть оборачиваема около центра, то по этому прикрѣпленные къ ней діоптры и называются *подвижными,* для отличія отъ двухъ другихъ діоптровъ B и $B_1$, именуемыхъ *неподвижными*, кои прикрѣплены къ краямъ лимба по направленію діаметра, проходящаго чрезъ 0° и 180° градуснаго дѣленія. На одномъ концѣ алидады, по направленію плоскости, проходящей чрезъ подвижные діоптры, дѣлается черта, называемая *показателемъ.* Къ срединѣ алидады придѣлывается *буссоль* или *компасъ*, т. е. низкая цилиндрическая коробка, закрываемая плотно крышкою со стекломъ, и имѣющая внутри посеребренное кольцо, раздѣленное на градусы. Въ центрѣ сего кольца утверждается отвѣсно шпиль, на коемъ обращается магнитная стрѣлка. На днѣ буссоли проводятся два діаметра, взаимно перпендикулярные, и при томъ такъ, что одинъ изъ нихъ находится въ направленіи плоскости, продящей чрезъ подвижные діоптры. На оконечностяхъ сего діаметра вырѣзываются буквы N и S, а на концахъ другаго буквы W и O. Эти буквы означаютъ Nord, Süd, West и Ost. Дѣленіе посеребреннаго кольца на градусы дѣлается такъ, что при обоихъ концахъ діаметра NS ставятся нули, изъ коихъ отъ каждаго градусная надпись идетъ въ обѣ стороны до 90°.

Астролябія устанавливается на штативѣ, состоящемъ по большей части изъ треножника, на верхнюю часть коего она надѣвается такъ, что можетъ быть устанавливаема въ различныхъ положеніяхъ. Буссоль придѣлывается къ ней для того, чтобы знать, какое направленіе относительно странъ свѣта имѣютъ линіи, по которымъ направляются неподвижные и подвижные діоптры.

Такъ какъ лимбъ раздѣленъ только на градусы, то чтобы имѣть возможность опредѣлять величину угла съ точностію до нѣсколькихъ минутъ, на концѣ алидады, вмѣсто помянутой выше черты или *показателя*, вырѣзывается особеннаго рода масштабъ, называемый *верньеромъ* или *ноніусомъ* (по имени его изобрѣтателей Вернье и Нуннеца). Устройство ноніуса вообще состоитъ въ слѣдующемъ:

Положимъ, что по линейкѣ AB (черт. 16), раздѣленной только на извѣстныя части, напр. на дюймы, хотимъ опредѣлить длину съ точностію до $^1/_{10}$ ой части дюйма. Для этого беремъ другую линейку ab, прикрѣпляемъ ее къ первой такъ, чтобы можно было передвигать ее по длинѣ сей послѣдней, и взявъ на ней часть m n, равную 9$^{ти}$ дюймамъ, дѣлимъ эту часть на 10$^{ть}$ равныхъ частей. Ясно, что эти части будутъ меньше частей, на кои раздѣлена линейка AB, и если означимъ чрезъ l длину сихъ послѣднихъ, а чрезъ l' длину первыхъ, то будетъ: $l : l' = 1/_9 : 1/_{10}$, откуда $l' = 9/_{10}\, l$, и слѣдовательно $l - l' = 1/_{10}\, l$. И такъ разность между дѣленіями линеекъ AB и ab равна $1/_{10}$$^{ой}$ долѣ дѣленія l линейки AB, т. е. $1/_{10}$$^{ой}$ доли дюйма. Посему, если начало дѣленій m линейки ab совпадаетъ съ чертою 9 линейки AB, то черта, означенная цыфрою 1 на линейкѣ ab, будетъ отстоять отъ черты 10 линейки AB на $1/_{10}$$^{ю}$ часть дюйма; черта 2 линейки ab отъ черты 11 линейки AB — на $2/_{10}$$^{ыя}$ части дюйма и т. д. Если-бы наоборотъ какая-либо изъ среднихъ черточекъ линейки ab напр. черта 5 совпала съ чертою 14 линейки AB, то черта 4 линейки ab отстояла бы отъ черты 13 линейки AB вправо на $1/_{10}$$^{ю}$ часть дюйма, черта 3 отъ черты 12 на $2/_{10}$$^{ыя}$ части дюйма; черта 2 отъ черты 11 на $3/_{10}$$^{ыя}$ части; черта 1 отъ черты 10 на $4/_{10}$$^{ыя}$ части, и наконецъ начало дѣленій m отъ черты 9 на $5/_{10}$$^{хъ}$ частей дюйма.

Подвижная линейка ab и называется *верньеромъ* или *ноніусомъ*. Изъ предъидущаго легко видѣть, какимъ образомъ посредствомъ сего прибора можно по линейкѣ AB, раздѣленной только на дюймы, опредѣлять длину съ точностію до $1/_{10}$$^{ой}$ части дюйма. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что измѣряемая длина оканчивается на линейкѣ AB между чертами 9 и 10, такъ что равняется 9$^{ти}$ дюймамъ съ нѣкоторою дробью. Чтобы найти эту дробь, передвигаемъ ноніусъ такъ, чтобы начало его дѣленій m совпало съ концомъ измѣряемой длины, и смотримъ, какая изъ его черточекъ совпадаетъ съ чертою линейки AB. Если напр. черта 7 ноніуса будетъ совпадать съ чертою 16$^{ой}$ линейки AB, то начало m будетъ удалено отъ черты 9 линейки AB на $^7/_{10}$ час. дюйма, и слѣдовательно измѣряемая длина будетъ равна $9^7/_{10}$ дюймамъ. Начало m означается нулемъ и называется *показателемъ*.

Въ астролябіи ноніусъ состоитъ изъ дуги, одноцентрной съ дугою лимба AB (чер. 17). Такъ какъ въ большей части практическихъ случаевъ считается достаточнымъ опредѣлять величину угловъ съ точностію до 5 минутъ, то по этому дугу ноніуса дѣлаютъ равною $11^{ти}$ градусамъ, и дѣлятъ ее на 12 частей, такъ что разность между дѣленіями лимба и ноніуса, составляя $\frac{1}{11.12}$ цѣлой длины сего послѣдняго, т. е. $11^{ти}$ градусовъ, равняется $\frac{11}{11.12} = {}^1/_{12}$ доли градуса, т. е. $5^{ти}$ минутамъ. *Показателемъ* служитъ не крайняя, какъ вообще дѣлается въ ноніусахъ, но средняя черта, которая должна совпадать съ нулемъ градусной надписи лимба въ то время, когда подвижные діоптры будутъ приведены въ плоскость неподвижныхъ. Для удобнѣйшаго отсчитыванія измѣряемаго угла противъ черты ноніуса, считая отъ нуля, т. е. отъ показателя, въ ту сторону, въ которую идутъ дѣленія на лимбѣ, означается числомъ 15; третья черта въ противуположную сторону, числомъ 45; обѣ же крайнія числомъ 30. Одного взгляда на чертежъ 18 достаточно, чтобы понять, какимъ образомъ отсчитываются показанія ноніуса. Изъ этого чертежа видно, что взятый уголъ $= 78° 21'$.

Измѣреніе угловъ астролябіею производится слѣдующимъ образомъ: поставя ее въ вершинѣ опредѣляемаго угла, приводятъ лимбъ въ плоскость сего угла, и наводятъ неподвижные діоптры на одинъ изъ тѣхъ предметовъ, между коими измѣряется уголъ. Укрѣпивъ потомъ лимбъ въ этомъ положеніи, поворачиваютъ алидаду, направляя подвижные діоптры на другой предметъ. Послѣ того отсчитываютъ величину угла по показаніямъ ноніуса.

§ 44. Въ случаяхъ, когда въ опредѣленіи угловъ требуется болѣе точности, вмѣсто астролябіи употребляется *теодолитъ*. Устройство этого рода инструментовъ весьма разнообразно. По большой части они состоятъ изъ двухъ круговъ, укрѣпленныхъ въ перпендикулярныхъ между собою плоскостяхъ. По дѣленіямъ одного изъ этихъ круговъ опредѣляются углы въ плоскостяхъ горизонтальныхъ, [1] отъ чего и самый кругъ называется *горизонтальнымъ*, а другой, именуемый *вертикальнымъ*, служитъ для опредѣленія угловъ въ вертикальныхъ плоскостяхъ. [2] Оба круга снабжены алидадами [3] съ ноніусами, только безъ діоптровъ, кои замѣняются зрительною трубою. Для сообщенія алидадамъ весьма медленнаго движенія служатъ такъ называемые *микрометрическіе винты*, посредствомъ коихъ можно наводить трубу на наблюдаемый предметъ съ величайшею точностію. Для приведенія круговъ въ надлежащее положеніе (горизонтальнаго круга въ горизонтальное, отъ чего вертикальный кругъ самъ собою принимаетъ вертикальное положеніе) служитъ *уровень* [4],

---

[1] *Горизонтальною плоскостью* называется всякая плоскость, перпендикулярная къ направленію свободно падающихъ тѣлъ. Это направленіе, называемое *вертикальною линіею*, опредѣляется *отвѣсомъ*, т. е. гибкою нитью, къ концу которой привѣшена гиря; отъ чего вертикальныя линіи и называются также *отвѣсными*. Углы, заключающіеся въ горизонтальныхъ плоскостяхъ, называются *горизонтальными*.

[2] Всякая плоскость, проведенная чрезъ отвѣсную или вертикальную линію, называется *вертикальною плоскостью*, и заключающіеся въ такой плоскости углы именуются *вертикальными*.

[3] Въ совершеннѣйшихъ теодолитахъ алидады замѣняются кругами, называемыми *алидадными*, кои движутся внутри лимбовъ, и имѣютъ по два или по четыре ноніуса.

[4] *Уровень* обыкновенно состоитъ изъ стеклянной трубки (чер. 19), наполненной виннымъ спиртомъ съ оставленіемъ небольшаго воздушнаго пузырька, и наглухо запаянной. Эта трубка имѣетъ небольшой изгибъ для того,

который утверждается въ положеніи, параллельномъ плоскости горизонтальнаго круга.

Измѣреніе угловъ теодолитомъ также просто, какъ и Астролябіею. Поставивъ инструментъ въ вершинѣ измѣряемаго угла, и приведя плоскости круговъ въ надлежащее положеніе, направляютъ трубу по линіямъ, между которыми измѣряется уголъ, и замѣчаютъ показанія носіусовъ. Разность этихъ показаній и даетъ величину измѣряемаго угла.

§ 45. Упомянемъ еще объ одномъ инструментѣ, посредствомъ котораго горизонтальные углы прямо чертятся на бумагѣ. Такой инструментъ представленъ на чертежѣ 20. Онъ называется *менсулою* или *планшетомъ*, и состоитъ изъ двухъ главныхъ частей: *квадратной доски* и *штатива*, на которомъ эта доска утверждается.

Менсульная доска, обыкновенно деревянная, бываетъ протяженіемъ отъ 14 до 28 дюймовъ; верхняя сторона ея должна представлять совершенно ровную плоскость. При употребленіи менсулы на эту сторону натягивается бумага.

Штативъ, также какъ и при астролябіи, состоитъ большею частію изъ треножника, коего верхняя часть снабжена особеннымъ приборомъ, дающимъ возможность помѣщать и укрѣплять доску въ различныхъ положеніяхъ.

---

чтобы пузырекъ занималъ самое высшее мѣсто, когда она положена будетъ на горизонтальную плоскость, къ верху изгибомъ. Снаружи она обдѣлывается мѣднымъ футляромъ, имѣющимъ сверху продолговатое отверстіе для того, чтобы воздушный пузырекъ могъ быть наблюдаемъ. Это отверстіе находится какъ-разъ противъ средины трубки, которая въ семъ мѣстѣ имѣетъ нѣсколько поперечныхъ черточекъ. Одинъ конецъ футляра опирается на подставку, придѣланную къ нему накрѣпко, а на другомъ находится винтъ, служащій для приведенія уровня въ такое состояніе, чтобы воздушный пузырекъ дѣйствительно занималъ самое высшее мѣсто или средину трубки, когда уровень находится на горизонтальной плоскости.

При менсулѣ должно имѣть:

a) Уровень для приведенія доски въ горизонтальное положеніе.

b) Алидаду съ діоптрами, сходную съ описанною нами при астролябіи, или *кипрегель*, состоящій изъ мѣдной линейки R (чер. 21), на которой утверждена отвѣсно колонна C, поддерживающая зрительную трубу L въ такомъ положеніи, что оптическая ось трубы можетъ двигаться только въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ край линейки R, или по крайней мѣрѣ параллельной этому краю; и наконецъ.—

c) Вилку съ отвѣсомъ, имѣющую показанную на черт. 22 форму. Она служитъ для того, чтобы на верхней сторонѣ менсульной доски съ точностію опредѣлять положеніе точекъ, находящихся на однѣхъ отвѣсныхъ линіяхъ съ данными точками на поверхности земли.

Черченіе угловъ менсулою производится слѣдующимъ образомъ: уставивъ доску въ горизонтальномъ положеніи надъ вершиною A угла BAC (чер. 20), который долженъ быть начерченъ, опредѣляемъ на немъ посредствомъ вилки точку a, находящуюся на одной отвѣсной линіи съ точкою A. Послѣ того, приставивъ край алидады, или линейки кипрегеля къ точкѣ a, направляемъ его попеременно по линіямъ AB и AC, и проводимъ четры ab и ac. Образуемый этими чертами уголъ bac и будетъ равенъ углу BAC.

---

## V.

### *Примѣры, дающіе понятіе о родѣ задачъ, коихъ рѣшеніе можетъ быть сведено на разрѣшеніе прямолинейныхъ треугольниковъ.*

§ 46. *Примѣръ I.* Пусть требуется найти разстояніе между двумя предметами A и B (чер. 23), которое, по причинѣ находящагося между ними препятствія, не можетъ быть смѣряно. Для рѣшенія этой задачи предположимъ сперва, что можно подойти къ одному изъ предметовъ A и B, напр. къ A, и оттуда видѣть другой B. Въ этомъ случаѣ отъ предмета A вымѣриваемъ въ произвольномъ направленіи и произвольной длины базисъ AC, такъ впрочемъ, чтобы изъ конца его C можно было видѣть оба предмета A и B и чтобы разстоянія AB и BC составляли съ нимъ довольно правильный треугольникъ, и измѣряемъ углы BAC и ACB. Зная такимъ образомъ въ треугольникѣ ABC сторону AC и два угла, вычисляемъ по § 37 сторону AB, означающую искомое разстояніе. Такъ напр. если $AC = 125$ саж., уголъ $BAC = 82° 48'$, уголъ $ACB = 56° 36'$ и слѣдовательно уголъ $ABC = 40° 36'$, то изъ пропорціи

$$AB : AC = \sin ACB : \sin ABC$$

получимъ:

$$\log AB = \log AC + \log \sin ACB - \log \sin ABC = 2{,}205870,$$

откуда

$$AB = 160 \text{ саж.}$$

Если бы положеніе предметовъ A и B было таково, что отъ одного изъ нихъ нельзя видѣть другаго, или бы оба были неприступны, въ такомъ случаѣ вымѣриваемъ базисъ CD гдѣ-нибудь въ удобномъ положеніи, т. е. такъ, чтобы изъ обоихъ концовъ его можно было видѣть оба предмета, и чтобы треугольники ACD, BCD и ACB не были слишкомъ неправильны, и по объясненному выше способу опредѣляемъ разстояніе одного изъ концовъ его, напр. C, до обоихъ предметовъ. Зная такимъ образомъ линіи AC и CB и заключающійся между ними уголъ ACB, равный разности угловъ ACD и BCD, кои при опредѣленіи линій AC и CB должны быть смѣряны, находимъ по § 38 два остальные угла треугольника ACB и сторону AB. Положимъ напр., что найдено: $AC=120$ саж., $BC=180$ саж. и уголъ $ACB=42^\circ\ 24'$. Изъ пропорціи:

$$BC+AC : BC-AC = \tang \tfrac{1}{2}(BAC+ABC) : \tang \tfrac{1}{2}(BAC-ABC)$$

находимъ:

$$\log \tang \tfrac{1}{2}(BAC-ABC)=\log \tang \tfrac{1}{2}(BAC+ABC)$$
$$+\log(BC-AC)-\log(BC+AC)=9{,}7093488,$$

откуда

$$\tfrac{1}{2}(BAC-ABC)=27^\circ\ 7'$$

и слѣдовательно

$$BAC-ABC=54^\circ\ 14',$$

и какъ $BAC+ABC=180^\circ-42^\circ\ 24'=137^\circ\ 36'$, то

$$BAC=95^\circ\ 55' \text{ и } ABC=41^\circ\ 41'.$$

Послѣ сего изъ пропорціи

$$AB : AC = \sin ACB : \sin ABC$$

находимъ

$$\log AB=\log AC+\log \sin ACB-\log \sin ABC=2{,}0852057,$$

откуда и получаемъ

$$AB=121{,}17 \text{ саж.}$$

*Примѣчаніе.* Когда точки A, B, C, D не находятся на одной плоскости, тогда уголъ ACB не равенъ разности угловъ ACD и BCD, и долженъ быть опредѣленъ измѣреніемъ. За исключеніемъ этого обстоятельства рѣшеніе задачи остается тоже и въ семъ случаѣ.

§ 47. *Примѣръ II.* Точка A (чер. 24) находится на нѣкоторой высотѣ надъ горизонтальною плоскостію MN, проведенною чрезъ другую точку B; найти эту высоту, предполагая, что нельзя смѣрять ее непосредственно.

Самое простое рѣшеніе предложенной задачи имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда въ плоскости MN можно вымѣрять базисъ отъ самаго основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ точки A на эту плоскость и измѣряющаго искомую высоту. Въ самомъ дѣлѣ, пусть AC будетъ помянутый перпендикуляръ и BC вымѣряшный нами базисъ. Поставивъ угломѣрный инструментъ въ точкѣ B, измѣряемъ уголъ ADE, образуемый линіею AD съ горизонтальною линіею DE, равною и параллельною линіи BC, и вычисляемъ катетъ AE прямоугольнаго треугольника ADE по формулѣ 20 § 40. Придавъ къ нему линію $CE = BD$, означающую высоту угломѣрнаго инструмента (въ послѣдующемъ мы не будемъ вводить этой высоты ни въ чертежи, ни въ вычисленія, помня однакожъ, что при рѣшеніи задачъ на самомъ дѣлѣ она никогда недолжна быть опускаема изъ виду), и получаемъ искомую высоту AC. Такъ, если $DE = CE = 51$ саж., уголъ $ADE = 41° 31' 25''$ и $CE = 0{,}5$ саж.,

то будетъ

$$AE = 61 \tang 40° 31' 25'' = 54 \text{ саж.}$$

и слѣдовательно

$$AB = 54{,}5 \text{ саж.}$$

Если бы основаніе C перпендикуляра AC было неприступно и даже невидимо, какъ напр. въ томъ случаѣ, когда онъ означаетъ высоту горы надъ прилежащею къ ней долиною и т. п., тогда опредѣляемъ его слѣдующимъ образомъ: въ плоскости MN (чер. 25) вымѣриваемъ въ какомъ-нибудь положеніи базисъ BD, наблюдая только, чтобы изъ обоихъ концовъ его можно было видѣть точку A, и измѣряемъ какъ вертикальные углы ABC и ADC, такъ равно и горизонтальные CBD и CDB, что посредствомъ теодолита легко сдѣлать. Зная такимъ образомъ въ треугольникѣ CBD два угла и сторону BD, вычисляемъ по § 37 стороны BC и BD. Послѣ того, взявъ одинъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABC и ADC, напр. ABC, въ которомъ извѣстенъ катетъ BC и острый уголъ ABC, опредѣляемъ по § 40 другой катетъ AC, изображающій искомую высоту.

Пусть будетъ напр. $BD=350$ фут., уголъ $ABC=32°\,15'$, уголъ $ADC=28°\,42'$, уголъ $CBD=43°\,12'$ и уголъ $BDC=36°\,18'$. Изъ пропорціи

$$BC : BD = \sin BDC : \sin BCD,$$

которую можно замѣнить слѣдующею

$$BC : BD = \sin BDC : \sin (BDC + CBD),$$

потому что уголъ $BCD = 180° - (BDC + CBD)$ и слѣдоват. $\sin BCD = \sin (BDC + CBD)$,

получимъ:

$$\log BC = \log BD + \log \sin BDC - \log \sin (BDC + CBD)$$
$$= 2{,}3237333.$$

Потомъ равенство

$$AC = BC \operatorname{tang} ABC$$

доставитъ

$$\log AC = \log BC + \log \operatorname{tang} ABC = 2{,}1237303,$$

откуда и найдется

$$AB = 133 \text{ фут.}$$

Если-бы на конецъ вовсе нельзя было вымѣрять базисъ въ плоскости MN, въ такомъ случаѣ вымѣриваемъ наклонный къ ней базисъ BD (чер. 26), и измѣряемъ уголъ его наклоненія. Пусть E будетъ точка, въ которой линія, проведенная изъ конца D басиса BD перпендикулярно къ плоскости MN, встрѣчаетъ сію послѣднюю, и EBD смѣрянный нами уголъ наклоненія. Если кромѣ этого угла смѣряемъ еще вертикальный уголъ ABC и горизонтальные CBE и BEC, то искомая высота найдется слѣдующимъ образомъ:

Во-первыхъ изъ прямоугольнаго треугольника ABE имѣемъ:

$$BE = BD \cos DBE.$$

Потомъ треугольникъ BCE доставитъ:

$$BC : BE = \sin BEC : \sin BCE,$$

или, такъ какъ уголъ $BCE = 180° - (CBE + BEC)$, и слѣд. $\sin BCE = \sin (CBE + BEC)$,

$$BC : BE = \sin BEC : \sin (CBE + BEC),$$

откуда

$$BC = \frac{BE \sin BEC}{\sin (CBE + BEC)}.$$

Наконецъ изъ прямоугольнаго треугольника ABC находимъ:

$$AC = BC \tang ABC.$$

Такъ напр. если $BD = 250$ фут., уголъ $DBE = 18°40'$, уголъ $ABC = 30°23'$, уголъ $BEC = 37°15'$ и уголъ $CBE = 45°30'$, то будетъ:

$$\log BE = \log BD + \log \cos DBE = 2,3744718,$$
$$\log BC = \log BE + \log \sin BEC - \log \sin (CBE + BEC) = 2,1599244,$$
$$\log AC = \log BC + \log \tang ABC = 1,9280484$$

и слѣд.

$$AC = 84,7 \text{ фут.}$$

§ 48. *Примѣръ III.* Прямая линія CD (чер. 27) прерывается препятствіемъ, не позволяющимъ видѣть ея продолженіе за онымъ; требуется найти это продолженіе. Для сего избираемъ точку A такъ, чтобы можно было видѣть изъ ней какъ пункты C и D, такъ равно и то мѣсто, по которому должно проходить искомое продолженіе EF линіи CD, и смѣрявъ длину сей послѣдней, равно какъ и углы треугольника CAD, вычисляемъ сторону AC. Потомъ беремъ уголъ CAE, давая линіи AE направленіе, какое покажется удобнѣйшимъ. Предполагая линію CD продолженною до E, мы будемъ знать въ треугольникѣ CAE сторону AC и всѣ углы, и слѣд. найдемъ сторону AE. Отмѣрявъ на направленіи AE, указанномъ инструментомъ, длину, равную полученной чрезъ вычисленіе, найдемъ точку E, чрезъ которую должно проходить продолженіе линіи CD. Составивъ при точкѣ E уголъ AEF, равный дополненію до двухъ прямыхъ извѣстнаго угла AEC, получимъ искомое продолженіе EF.

## VI.

### *Краткое понятіе о нивеллированіи и съёмкѣ плановъ.*

§ 49. Земля, какъ извѣстно, имѣетъ правильную поверхность только тамъ, гдѣ она покрыта водою; поверхность суши болѣе или менѣе неправильна. Воображая поверхность моря распространенною по всей землѣ, мы получаемъ правильную сферическую поверхность, изъ которой части суши выдаются болѣе или менѣе замѣтнымъ образомъ.

Пусть O (чер. 28) будетъ центръ помянутой сферической поверхности, LM—часть ея, а P—выдающееся изъ нея мѣсто суши. Если изъ центра O проведемъ прямую линію OP, то часть PQ этой линіи, заключающаяся между точкою P и поверхностью LM, называется высотою мѣста P надъ поверхностью моря, или *абсолютною* его высотою. Разность абсолютныхъ высотъ PQ—TU двухъ мѣстъ P и T, показывающая, на сколько одно изъ нихъ лежитъ выше другаго, называется *относительною* ихъ высотою.

Поверхность моря, равно какъ и всякая другая ей параллельная, называется поверхностью *уровня*. Мѣста, коихъ абсолютныя высоты одинаковы, очевидно, лежатъ на одной и той-же поверхности уровня, отъ чего и называются *мѣстами одного уровня;* напротивъ того, тѣ мѣста, коихъ абсолютныя высоты различны, необходимо находятся на различныхъ поверхностяхъ уровня, и какъ разстоянія между сими поверхностями равны относительнымъ ихъ высотамъ, то по этому сіи послѣднія и называются также *разностями уровней.*

Дѣйствіе, посредствомъ котораго опредѣляется разность уровней, равно какъ и абсолютная высота мѣстъ земной поверхности, называется *нивеллированіемъ.* Оно совершается различными способами, отъ чего получаетъ и различныя наименованія. Такъ, когда высота мѣстъ выводится изъ наблюденія соотвѣтствующихъ тѣмъ мѣстамъ высотъ ртути въ барометрѣ, то нивеллированіе называется *барометрическимъ*; если-же она опредѣляется чрезъ непосредственное измѣреніе помощію особенныхъ инструментовъ, называемыхъ *нивеллирами,* то нивеллированіе получаетъ названіе *топографическаго;* наконецъ способъ находить ее при помощи тригонометрическихъ вычисленій извѣстенъ подъ именемъ *тригонометрическаго нивеллированія*. Первый изъ сихъ трехъ способовъ преимущественно употребляется для опредѣленія большихъ возвышенностей; при нахожденіи незначительныхъ разностей уровня онъ оказывается недовольно точнымъ и съ выгодою замѣняется способомъ топографическимъ. Такъ какъ оба эти способа не имѣютъ никакого отношенія къ прямолинейной Тригонометріи, то, не останавливаясь на ихъ объясненіи, мы переходимъ къ способу тригонометрическому.

§ 50. Пусть требуется опредѣлить абсолютную высоту мѣста P, т. е. линію PQ (чер. 28). Предложивъ, что изъ этого мѣста можно видѣть море, воображаемъ линію PR, проведенною изъ P къ тому мѣсту, гдѣ сводъ неба кажется погружающимся въ поверхность моря. Эта линія, очевидно, будетъ касательною къ дугѣ LM, происходящей отъ пересѣченія поверхности моря вертикальною плоскостью ROP, и съ радіусомъ OR будетъ составлять прямой уголъ. Если теперь смѣряемъ уголъ ZPR, то въ прямоугольномъ треугольникѣ ORP будетъ намъ извѣстенъ острый уголъ OPR, какъ дополненіе до двухъ прямыхъ угла ZPR, и кромѣ того катетъ OR, какъ радіусъ земли. Изъ этого треугольника по § 40 найдемъ:

$$OP = \frac{OR}{\sin OPR} = \frac{OR}{\cos POR} = OR \sec POR,$$

и слѣдовательно

$$PQ = OP - OR = OR\ (\sec POR - 1)$$
$$= OR \tang POR \tang {}^1\!/_2\, POR\ ^1.$$

Если-бы изъ мѣста P нельзя было видѣть море, въ такомъ случаѣ должно избрать одно или нѣсколько, смотря по надобности, промежуточныхъ мѣстъ, и опредѣлить относительныя ихъ высоты, равно какъ и абсолютную высоту того изъ нихъ, изъ котораго видно море. Изъ сравненія этихъ высотъ между собою легко найдется и искомая абсолютная высота мѣста P.

Относительная высота двухъ мѣстъ P и T (чер. 28) можетъ быть найдена слѣдующимъ образомъ: изъ точки O радіусомъ, равнымъ линіи OT, опишемъ дугу TV, пересѣкающую линію OP въ точкѣ V; искомая высота изобразится линіею PV. Чтобы найти эту линію, замѣтимъ, что въ большей части случаевъ, встрѣчающихся въ практикѣ, уголъ TOV, по причинѣ небольшаго разстоянія между мѣстами P и T, бываетъ весьма малъ, такъ что дуга TV не уклоняется замѣтнымъ образомъ отъ касательной линіи, проведенной чрезъ точку T, и линія PV почти перпендикулярна къ этой касательной. Принимая дугу TV совершенно сливающеюся съ помянутой касательной и линію PV къ ней перпендикулярною, опредѣляемъ длину сей линіи по одному изъ способовъ, подробно объясненныхъ нами въ § 47. Такимъ образомъ этотъ параграфъ представляетъ намъ приближенный способъ нивеллированія. Чѣмъ ближе находятся одно къ другому нивеллируемыя мѣста, тѣмъ этотъ способъ вѣр-

---

[1] Означивъ для краткости уголъ POR чрезъ $\alpha$, будемъ имѣть:

$$\sec\alpha - 1 = \frac{1}{\cos\alpha} - 1 = \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin^2 {}^1\!/_2\,\alpha}{\cos^2 {}^1\!/_2\,\alpha - \sin^2 {}^1\!/_2\,\alpha} = \frac{2\tang^2 {}^1\!/_2\,\alpha}{1-\tang^2 {}^1\!/_2\,\alpha}$$
$$= \frac{2\tang {}^1\!/_2\,\alpha}{1-\tang^2 {}^1\!/_2\,\alpha} \tang {}^1\!/_2\,\alpha = \tang\alpha \tang {}^1\!/_2\,\alpha.$$

нѣе, и напротивъ, чѣмъ дальше, тѣмъ доставляемые имъ результаты болѣе уклоняются отъ истины и требуютъ поправки. Эта поправка опредѣляется слѣдующимъ образомъ: если предположимъ, что касательная къ дугѣ TV, проведенная чрезъ точку T, встрѣчаетъ линію PV въ точкѣ W, то линія PW изобразитъ высоту, получаемую нами по способамъ § 47, а разность $PV - PW = WV$ — искомую поправку. Для опредѣленія этой разности изъ прямоугольнаго треугольника OTW, на основаніи Пиѳагоровой теоремы, имѣемъ:

$$OW^2 = OT^2 + TW^2, \text{ или } (OV + WV)^2 = OT^2 + TW^2,$$

откуда

$$OV^2 + 2OV.WV + WV^2 = OT^2 + TW^2,$$

и такъ какъ $OV = OT$, какъ радіусы одного круга, то, уничтоживъ съ обѣихъ сторонъ равенства одинакіе члены $OV^2$ и $OT^2$, получимъ:

$$WV(2.OV + WV) = TW^2,$$

откуда

$$WV = \frac{TW^2}{2OV + WV}.$$

Но какъ линія WV въ сравненіи съ линіею OV, т. е. съ радіусомъ земли, обыкновенно бываетъ весьма незначительна, то, отбросивъ ее въ знаменателѣ предъидущей дроби, отъ чего сія послѣдняя не измѣнится замѣтнымъ образомъ, будемъ имѣть:

$$WV = \frac{TW^2}{2.OV},$$

— выраженіе, которое и представляетъ искомую поправку. Вмѣсто линіи OV берется въ немъ средняя величина земнаго радіуса, которая равна 20888350 фут., а линія TW опредѣляется изъ прямоугольнаго треугольника PWT, въ которомъ она составляетъ катетъ. Такимъ образомъ величина этого выраженія совершенно извѣстна. Придавъ его къ найденной по § 47 величинѣ линіи PW, мы и получимъ линію PV, т. е. истинную разность уровней мѣстъ P и T.

Замѣтимъ, что дуга TV называется *линіею истиннаго уровня* мѣста T, а касательная къ ней, или, что тоже, горизонтальная линія TW — *видимаго;* поправка $\frac{TW^2}{2.OV}$ называется *приведеніемъ видимаго уровня къ истинному.*

§ 51. Точки Q, U, въ которыхъ линіи OP, OT встрѣчаютъ поверхность моря LM, называются *проэкціями мѣстъ P и T на горизонтъ моря.* Разсматриваніе этихъ проэкцій необходимо въ томъ случаѣ, когда хотятъ сдѣлать изображеніе, представляющее въ уменьшенномъ видѣ какую-либо часть поверхности суши. Такъ какъ поверхность эта, по причинѣ своей неправильности, не можетъ быть изображена ни на какой правильной поверхности такъ, чтобы изображеніе во всѣхъ своихъ частяхъ было ей подобно, то по этому и проэктируютъ ее на правильную поверхность моря, которую воображаютъ какъ-бы прорѣзывающею выдающіяся изъ нея части суши, и изображаютъ эти проэкціи. Хотя такія изображенія, не имѣя полнаго сходства съ изображенными поверхностями, сами по себѣ и не могутъ дать объ нихъ вѣрнаго понятія, но этотъ недостатокъ совершенно пополняется чрезъ обозначеніе высотъ изображенныхъ точекъ надъ поверхностію моря. Въ самомъ дѣлѣ, пусть A, B, C, D и пр. (чер. 29) будутъ различныя точки поверхности суши, и $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ и пр. проэкціи ихъ на поверхности моря. Зная по изображенію расположеніе этихъ проэкцій, и кромѣ того длину отвѣсныхъ линій $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ и пр., изображающихъ высоту точекъ A, B, C, D и пр. надъ поверхностью моря, очевидно, будемъ имѣть совершенно вѣрное понятіе о расположеніи сихъ точекъ, а съ тѣмъ вмѣстѣ и о *видѣ поверхности, на которой онѣ находятся.*

Проэкціи, сдѣланныя на сферической поверхности моря, могутъ быть собственно изображаемы съ совершенною точностію только на сферической-же поверхности. Изображенія на плоскостяхъ, т. е. на листахъ бумаги, называемыя *картами* и составляемыя посредствомъ особенныхъ пріемовъ, необходимо представляютъ ихъ въ болѣе или менѣе измѣненномъ видѣ. Не входя въ объясненіе помянутыхъ пріемовъ, для уразумѣнія коихъ необходимо знаніе сферической Тригонометріи, мы ограничимся здѣсь разсмотрѣніемъ одного частнаго случая, именно, когда часть поверхности моря, на которой помѣщается изображаемая проэкція, имѣя незначительное во всѣ стороны протяженіе, не уклоняется замѣтно отъ касательной плоскости, проведенной чрезъ одну изъ ея точекъ. Предполагая ее совершенно сливающеюся съ такою плоскостью, мы получаемъ возможность находить весьма простыми способами какъ проэкцію на ней данной части поверхности земли, такъ и изображеніе этой проэкціи въ уменьшенномъ видѣ на бумагѣ.

Пусть MN (чер. 30) будетъ касательная къ поверхности моря, т. е. горизонтальная плоскость, и положимъ, что требуется найти проэкцію на ней части поверхности земли, ограниченной многоугольникомъ ABCDE. Если изъ всѣхъ точекъ A, B, C и пр. опустимъ на эту плоскость перпендикуляры $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$, $EE_1$ и основанія ихъ $A_1$, $B_1$ и пр. соединимъ прямыми линіями $A_1B_1$, $B_1C_1$ и пр., то многоугольникъ $A_1B_1C_1D_1E_1$ и будетъ искомая проэкція. Предполагая извѣстными стороны многоугольника ABCDE и углы наклоненія ихъ къ плоскости MN, легко найти и стороны многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Въ самомъ дѣлѣ, предположивъ напр., что сторона AB составляетъ съ плоскостью MN уголъ $\alpha$, и при томъ такъ, что точка B находится выше точки A, если чрезъ сію послѣднюю точку проведемъ линію AK, параллельную линіи $A_1B_1$, то будетъ уголъ $BAK=\alpha$ и $AK=A_1B_1=AB\cos\alpha$. Такимъ-же точно образомъ опредѣлятся и прочія стороны многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Что касается до угловъ его, то лучшіе угломѣрные инструменты, каковы теодолиты, даютъ возможность находить величину ихъ чрезъ непосредственное измѣреніе. Такъ напр. уставивъ теодолитъ въ точкѣ A такъ, чтобы горизонтальный кругъ его имѣлъ горизонтальное положеніе, и визируя оттуда на точки B и E, находимъ непосредственно величину угла $B_1A_1E_1$.

Если-бы нужно было въ многоугольникѣ $A_1B_1C_1D_1E_1$ означить положеніе проэкціи какой-либо точки a, находящейся внутри многоугольника ABCDE, то вообразивъ эту точку соединенною съ одною изъ сторонъ AB, BC и проч., напр. съ AB, прямыми линіями aA и aB, и найдя показаннымъ выше образомъ проэкціи $a_1A_1$ и $a_1B_1$ этихъ прямыхъ, мы получимъ треугольникъ $A_1B_1\,a_1$, котораго уголъ $a_1$ и опредѣлитъ положеніе проэкціи точки a. Подобнымъ образомъ легко можетъ быть опредѣлено положеніе проэкцій какого угодно числа точекъ, находящихся какъ внутри многоугольника ABCDE, такъ и внѣ его.

Линіи AB, BC, и пр. равно какъ и Aa, Ba, коихъ длину мы предполагали извѣстною, или всѣ опредѣляются измѣреніемъ, или же измѣряется только одна изъ нихъ, принимаемая за базисъ, а прочія опредѣляются чрезъ разрѣшеніе треугольниковъ, на которые разбивается многоугольникъ ABCDE. Послѣдній способъ легче и вѣрнѣе перваго; по чему преимущественно и долженъ быть употребляемъ.

Что касается до изображенія найденной проэкціи, въ уменьшенномъ видѣ, на бумагѣ, то оно безъ труда совершается по правиламъ построенія подобныхъ фигуръ, подробно объясняемымъ въ элементарной Геометріи.

§ 52. Составленныя сказаннымъ образомъ изображенія частей земной поверхности называются *планами*, а самое составленіе ихъ—*съёмкою плановъ*, или просто *съёмкою*.

Изъ предъидущаго видно, что съёмка плана состоитъ: во 1ˣᵗ въ опредѣленіи проэкціи данной части поверхности земли на горизонтальной плоскости, проведенной чрезъ одну изъ ея точекъ, и во 2ˣᵗ въ изображеніи этой проэкціи въ уменьшенномъ видѣ на бумагѣ. Посредствомъ менсулы оба эти дѣйствія производятся въ одно и тоже время, отъ чего этотъ инструментъ преимущественно и употребляется для съёмки плановъ. При этомъ поступаютъ слѣдующимъ образомъ: вымѣрявши въ наиболѣе удобномъ и по возможности горизонтальномъ положеніи базисъ и нанеся его въ данномъ масштабѣ на менсулу, опредѣляютъ на сей послѣдней положеніе всѣхъ точекъ, кои должны быть означены на планѣ, по одному изъ слѣдующихъ трехъ способовъ:

1. Пусть ab (чер. 31) будетъ линія на менсулѣ, представляющая вымѣрянный базисъ AB, и C — точка, которая должна быть на планѣ означена. Уставивъ менсулу въ горизонтальномъ положеніи и при томъ такъ, чтобы точка a находилась на одной отвѣсной линіи съ точкою A, и чтобы линія ab направлена была по AB, чертимъ уголъ cab, равный углу CAB. Потомъ измѣряемъ линію AC и откладываемъ ее на боку ac въ томъ-же масштабѣ, въ какомъ начерчена линія ab. Точка c и будетъ искомою точкою, потому что она, по причинѣ подобія треугольниковъ abc и ABC, имѣетъ очевидно такое-же положеніе относительно точекъ a и b, какое точка C—относительно A и B.

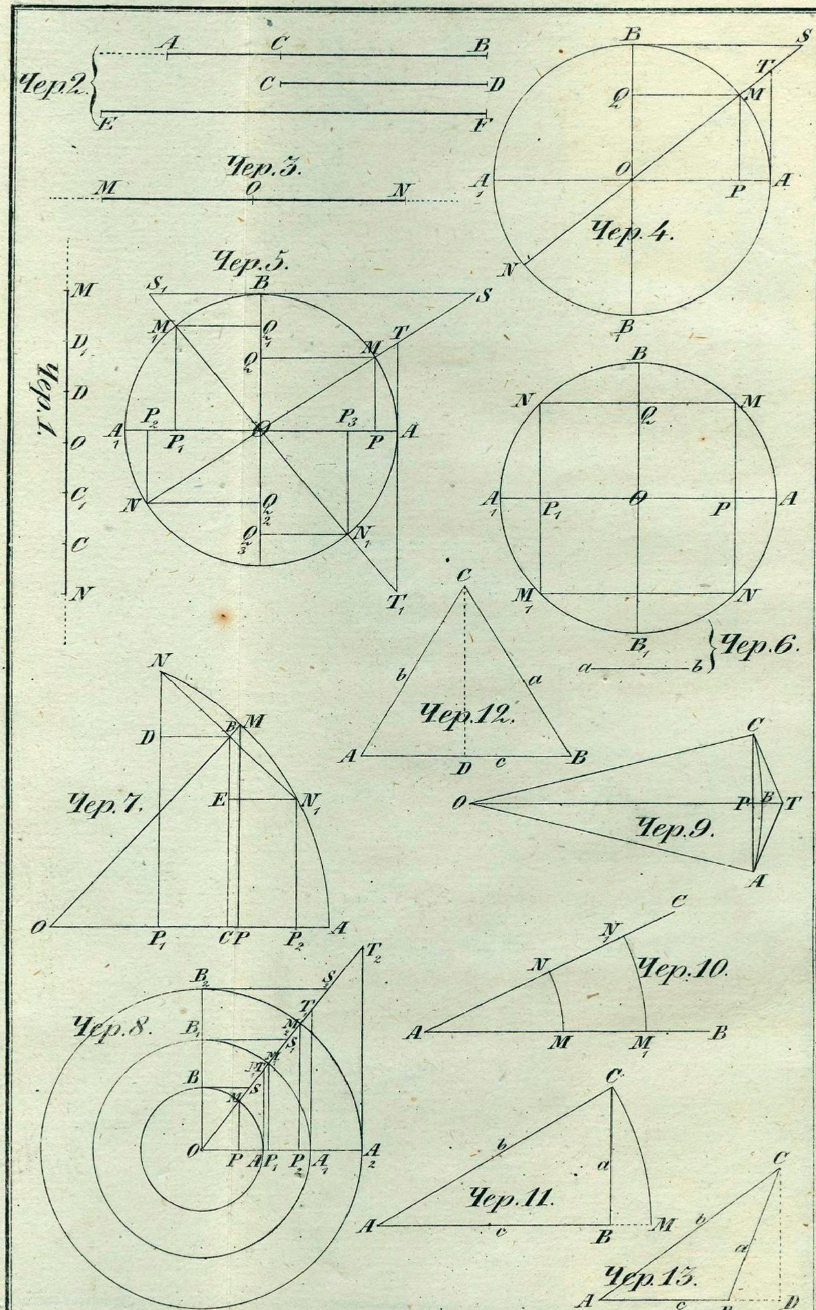
2. Начертивши, какъ предъ симъ сказано, уголъ cab (чер. 32), равный углу CAB, переносимъ менсулу въ точку B, и приведя ее въ положеніе, чтобы точка b находилась точно надъ точкою B и линія ba направлена была по линіи BA, составляемъ уголъ cba, равный углу CBA. Точка c, въ которой линіи ac и bc пересѣкаются, и представляетъ точку C въ ея истинномъ положеніи относительно точекъ A и B.

3. Уставивъ менсулу надъ точкою A (чер. 33), чертимъ, подобно какъ въ предъидущихъ случаяхъ, уголъ cab, равный углу CAB, и продолжаемъ линію ca, сколько можно, больше. Потомъ переносимъ менсулу въ точку C и устанавливаемъ ее такъ, чтобы, при горизонтальномъ ея положеніи, линія ac направлена была по линіи AC, а край алидады или линейки кипрегеля, приставленный къ точкѣ b,—по линіи CB. Проведя потомъ по этому краю линію bc, въ точкѣ c пересѣченія ея съ линіею ac, и будемъ имѣть искомую точку. Ибо, такъ какъ ca направлена по CA и уголъ при a равенъ углу при A, то линія ba должна быть параллельна линіи BA, уголъ abc равенъ углу ABC, и слѣд. треугольникъ abc подобенъ треугольнику ABC.

*Примѣчаніе.* Въ практикѣ обыкновенно употребляется второй изъ объясненныхъ нами способовъ; къ остальнымъ прибѣгаютъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда мѣстность дѣлаетъ его употребленіе невозможнымъ.

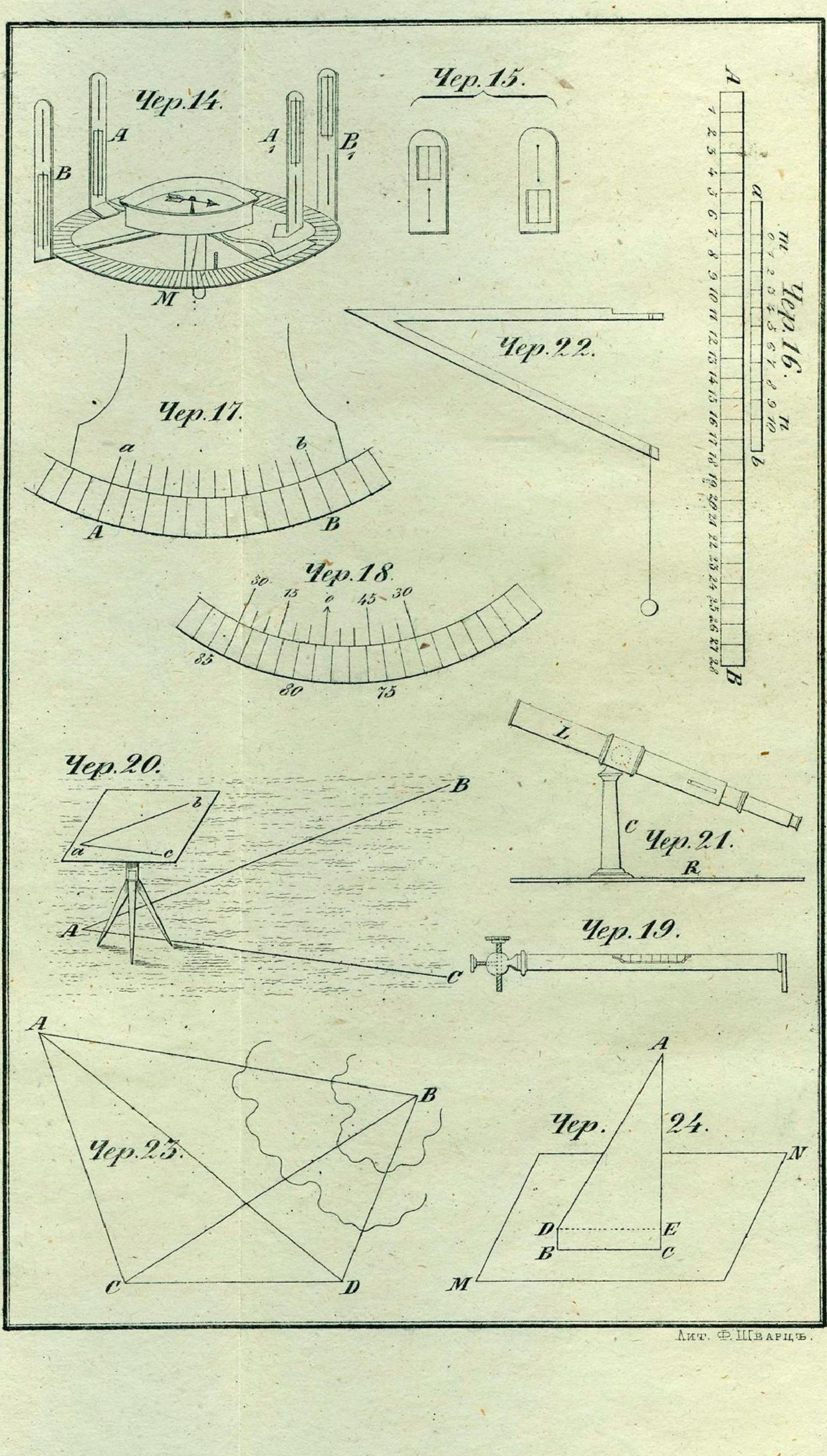
3. Установивъ мензулу надъ точкою A (чер. 33), чертимъ, подобно какъ въ предъидущихъ случаяхъ, уголъ cab, равный углу CAB, и продолжаемъ линію ca, сколько можно, больше. Потомъ переносимъ мензулу въ точку C и устанавливаемъ ее такъ, чтобы, при горизонтальномъ ея положеніи, линія ac направлена была по линіи AC, а край алидады или линейки направленъ, приставленный къ точкѣ b,—по линіи CB. Проведя потомъ по этому краю линію bc, въ точкѣ c пересѣченія ея съ линіею ac, и будемъ имѣть искомую точку. Ибо, такъ какъ ca направлена по CA и уголъ при a равенъ углу при A, то линія ba должна быть параллельна линіи BA, уголъ abc равенъ углу ABC, и слѣд. треугольникъ abc подобенъ треугольнику ABC.

*Примѣчаніе.* Въ практикѣ обыкновенно употребляется второй изъ объясненныхъ нами способовъ; къ остальнымъ прибѣгаютъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда мѣстность дѣлаетъ его употребленіе невозможнымъ.

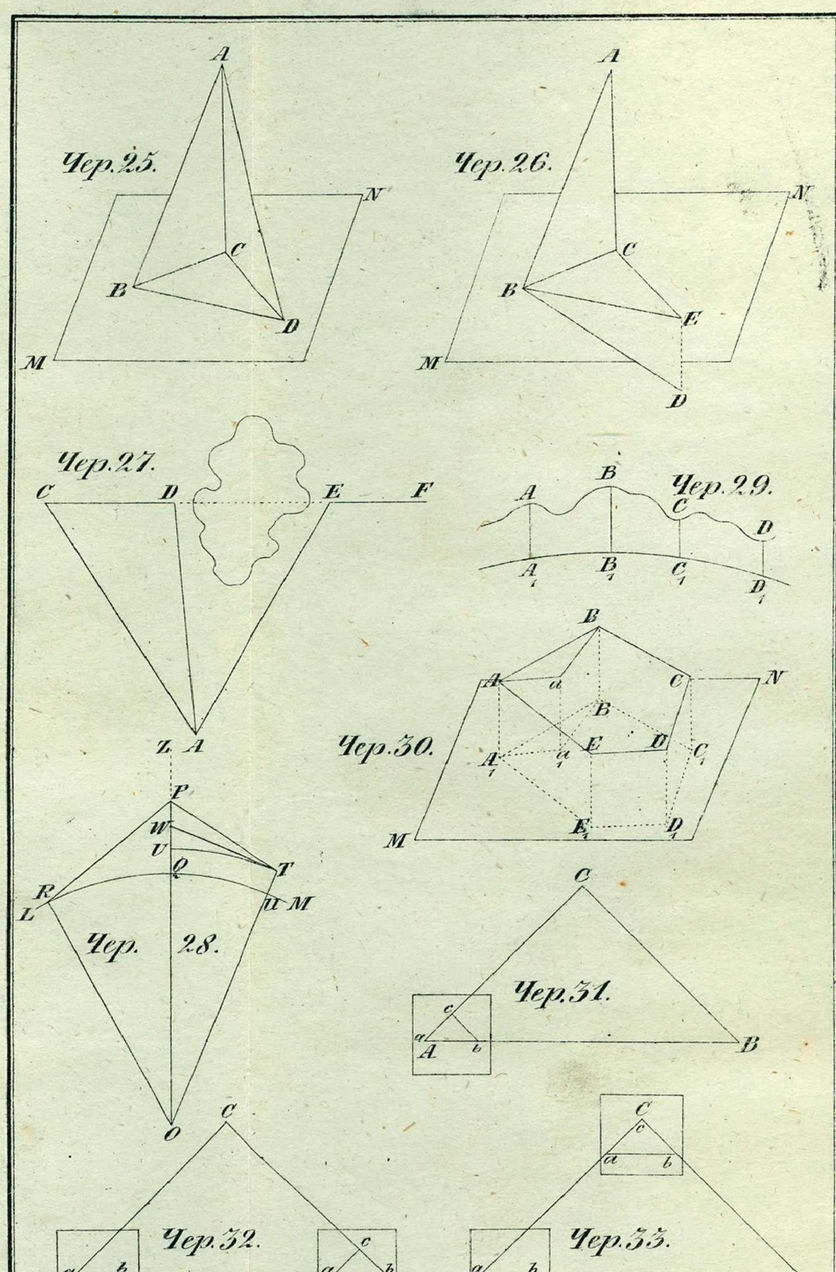


Чер.1.
Чер.2.
Чер.3.
Чер.4.
Чер.5.
Чер.6.
Чер.7.
Чер.8.
Чер.9.
Чер.10.
Чер.11.
Чер.12.
Чер.13.


Лит. Ф. Шварцъ.


Чер. 14.
Чер. 15.
Чер. 16.
Чер. 17.
Чер. 18.
Чер. 19.
Чер. 20.
Чер. 21.
Чер. 22.
Чер. 23.
Чер. 24.

Лит. Ф. Шварцъ.




Лит. Ф. Шварцъ.