Объ опредѣленіи длины въ неэвклидовой геометріи.

В. П. Алексѣевскаго.

Измѣреніе длины въ неэвклидовой геометріи основано на принципѣ: „если три точки A, B, C лежатъ на одной прямой, то разстояніе отъ A до C равно суммѣ разстояній отъ A до B и отъ B до C".

Такому требованію сложное отношеніе четырехъ точекъ не удовлетворяетъ, поэтому за мѣру длины принимается величина пропорціональная логариѳму сложнаго отношенія *).

Не смотря на очевидность этого принципа позволительно требовать доказательства его необходимости, такъ какъ ссылка на то, что онъ заимствуется изъ опыта, врядъ-ли можетъ служить достаточнымъ основаніемъ въ геометріи „неэвклидовой".

Съ другой стороны возникаетъ вопросъ, какъ согласить его съ положеніемъ, что два послѣдовательныхъ перемѣщенія прямой по ея направленію эквивалентны одному перемѣщенію, т. е. съ положеніемъ, что движенія составляютъ группу. Не удивительно ли, что понятіе объ эквивалентности перемѣщеній переводится на аналитическій языкъ въ видѣ алгебраической суммы? Конечно, нѣтъ сомнѣнія въ возможности этого, но рѣчь идетъ о необходимости.

Попытки согласить эти понятія привели меня къ болѣе общему опредѣленію длины. Оказывается, что упомянутый принципъ сводится къ признанію эвклидова постулата для той прямой, которая служитъ масштабомъ. Далѣе, сложное отношеніе, какъ и его логариѳмъ одинаково пригодны для опредѣленія длины, равно какъ и множество другихъ частныхъ случаевъ болѣе общей мѣры.

---

*) *F. Klein.* Nicht-Euklidische Geometrie. Zweiter Abdruck. Göttingen. 1893. S. 67.

**) *Clebsch-Lindemann.* Vorlesungen über Geometrie. Bd. 2. Leipzig. 1891. S. 465.

Эти результаты являются слѣдствіемъ введенія понятія суммы относительно инваріантныхъ точекъ; такое суммованіе есть не что иное, какъ интерпретація инволюціоннаго соотвѣтствія.

I.

Пусть имѣемъ прямую, между точками которой и рядомъ вещественныхъ чиселъ установлено одназначное соотвѣтствіе. Число, соотвѣтствующее точкѣ, называется координатой ея.

Допустимъ, что, при движеніи прямой вдоль нея самой, двѣ точки a и b остаются неподвижными; такія точки будемъ называть *инваріантными*.

Извѣстно, что передвиженіе прямой по ея направленію можетъ быть разсматриваемо, какъ преобразованіе, опредѣляемое уравненіемъ:

$$\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\mu, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

гдѣ c координата нѣкоторой точки до передвиженія прямой, x координата точки, съ которой первая совпадаетъ послѣ перемѣщенія прямой, μ параметръ, характеризующій величину этого перемѣщенія.

Координаты c и x опредѣляютъ начало и конецъ нѣкотораго отрѣзка прямой.

Изъ сказаннаго не трудно вывести опредѣленіе равенства двухъ отрѣзковъ одной и той-же прямой.

Какое бы понятіе мы ни соединяли со словомъ „длина", какъ-бы ни измѣрялось разстояніе, два отрѣзка одной и той-же прямой съ разными началами c и y и разными концами x и z будутъ равны, когда имѣетъ мѣсто равенство:

$$\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{y-b}{y-a}\cdot\frac{z-a}{z-b}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Отсюда обнаруживается, что всякій отрѣзокъ можно замѣнить ему *равнымъ*, начало котораго совпадаетъ съ началомъ координатъ. Положивъ въ предыдущемъ равенствѣ $c=0$, находимъ:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{y-b}{y-a}\cdot\frac{z-a}{z-b}. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Такимъ образомъ координата x характеризуетъ отрѣзокъ ox равный yz; одновременно, x можетъ замѣнить и параметръ μ, въ силу однозначной зависимости между ними.

Равенство (3) можетъ быть истолковано иначе.

Пусть прямой сообщено перемѣщеніе, такъ что начало координатъ 0 перешло въ y; затѣмъ той-же прямой сообщено новое перемѣщеніе, равное перемѣщенію отъ 0 до x; требуется опредѣлить перемѣщеніе эквивалентное обоимъ предыдущимъ. Обозначимъ положеніе 0 послѣ этого перемѣщенія чрезъ z. Ясно, что перемѣщеніе отъ y до z должно быть равно перемѣщенію отъ 0 до x. Выразивъ это заключеніе аналитически, придемъ къ равенству (3), откуда

$$z = \frac{ab(x+y)-(a+b)xy}{ab-xy} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Если-бы существовалъ только единственный способъ установленія однозначнаго соотвѣтствія между точками прямой и рядомъ чиселъ, то для сужденія о величинахъ отрѣзковъ, имѣющихъ одно и то-же начало въ 0, достаточно было-бы назвать координаты ихъ концовъ. Поэтому для прямыхъ съ однѣми и тѣми-же инваріантными точками a и b и съ тождественной нумераціей точекъ *подъ словомъ длина отрѣзка, имѣющаго начало въ 0, можно разумѣть координату* конца его.

Согласившись съ такимъ терминомъ, найдемъ въ формулѣ (4) рѣшеніе вопроса: по даннымъ длинамъ x и y двухъ отрѣзковъ найти длину отрѣзка эквивалентнаго имъ обоимъ.

Другими словами, формула (4) представляетъ опредѣленіе сложенія длинъ отрѣзковъ одной и той-же прямой; координату z мы будемъ называть *суммой x и y относительно инваріантныхъ точекъ a и b.*

Эти опредѣленія вполнѣ согласуются съ понятіями эвклидовой геометріи; предположивъ, что инваріантныя точки совпадаютъ и удалены въ безконечность, получаемъ

$$z = x + y.$$

Не трудно перейти теперь къ понятію о разности относительно инваріантныхъ точекъ. Очевидно такою разностью отрѣзковъ z и y будетъ x, при чемъ

$$x = \frac{ab(z-y)}{ab-(a+b)y+zy}.$$

Тотъ-же результатъ мы получимъ и изъ рав. (3), а это приводитъ къ такому заключенію.

Такъ какъ координатами z, y опредѣляется отрѣзокъ съ началомъ въ y и концомъ въ z, а x выражаетъ *длину* равнаго ему отрѣзка, то заключаемъ: *длина отрѣзка равняется разности координатъ его конца и начала, разности относительно инваріантныхъ точекъ.*

Теперь вернемся къ равенству (2). Приравнявъ каждую часть его выраженію:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b},$$

видимъ, что u представляетъ длину каждаго изъ разсматриваемыхъ отрѣзковъ (c, x) и (y, z); слѣдовательно, опредѣленіе равенства двухъ отрѣзковъ, данное выше, сводится къ признанію равенства ихъ длинъ.

До сихъ поръ мы разсматривали отрѣзки, имѣющіе одно и то же направленіе. Чтобы составить себѣ понятіе о равныхъ, но противоположныхъ отрѣзкахъ, полагаемъ, что ихъ сумма $z=0$; слѣдовательно, такіе отрѣзки связаны соотношеніемъ:

$$y=-\frac{abx}{ab-(a+b)x}.$$

Изъ того же равенства (4) находимъ зависимость между отрѣзками, сумма которыхъ равна безконечности, именно:

$$ab-xy=0.$$

Наконецъ, если $x=a$ или b, то, каково бы ни было y, сумма ихъ z будетъ $=a$ или b: при прибавленіи къ отрѣзку a какого угодно отрѣзка сумма остается a. Вотъ это-то свойство и можетъ служить объясненіемъ причины, почему инваріантныя точки обыкновенно называются безконечно-удаленными.

Не трудно вывести формулы умноженія и дѣленія отрѣзковъ.

Полагая въ рав. (3) $y=x$, находимъ

$$\frac{z-a}{z-b}=\frac{b}{a}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2.$$

Обобщая этотъ результатъ, находимъ, что сумма m отрѣзковъ равныхъ x опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{z-a}{z-b}=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^m.$$

Представивъ себѣ, что сумма n отрѣзковъ равныхъ u тоже равна z, послѣ несложныхъ преобразованій найдемъ формулу для вычисленія u въ функціи x:

$$u=ab\,\frac{\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{m}{n}}-1}{a\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\frac{m}{n}}-b}\quad\ldots\ldots\ldots(5)$$

Таково выраженіе отрѣзка „пропорціональнаго" отрѣзку x; коэффиціентъ пропорціональности равенъ $\frac{m}{n}$. Такой отрѣзокъ удобно изображать символически такъ

$$u = \frac{m}{n}(x).$$

Согласуется-ли этотъ выводъ съ эвклидовой геометріей? Чтобы убѣдиться въ этомъ, представимъ равенство (5) въ видѣ:

$$\frac{m}{n} = \frac{\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b}\right)}{\log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)}.$$

Полагая здѣсь $a = b = \infty$, находимъ

$$\frac{m}{n} = \frac{u}{x}.$$

Выведенные результаты относятся къ гиперболической геометріи, такъ какъ было предположено, что a и b числа вещественныя и различныя; чтобы перейти къ эллиптической геометріи достаточно, какъ извѣстно, принять, что координаты инваріантныхъ точекъ—числа комплексныя сопряженныя.

Сдѣлавъ допущеніе $a = b$, мы должны получить формулы, относящіяся къ параболической геометріи; но основное равенство (2) при этомъ обращается въ тождество; тѣмъ не менѣе слѣдствія, выведенныя изъ него, сохраняютъ смыслъ.

Чтобы убѣдиться въ этомъ, замѣтимъ, что вмѣсто параметра μ, можемъ взять другой, находящійся съ нимъ въ однозначномъ соотвѣтствіи. Вычтя изъ обѣихъ частей равенства (1) по единицѣ, приведемъ результатъ къ виду

$$\frac{c-x}{(c-a)(x-b)} = \frac{\mu-1}{b-a}.$$

Слѣдовательно, если принять за параметръ число v, опредѣляемое изъ формулы

$$v = \frac{\mu-1}{b-a},$$

то равенство (2) можно будетъ замѣнить слѣдующимъ:

$$\frac{c-x}{(c-a)(x-b)} = \frac{y-z}{(y-a)(z-b)},$$

которое уже не обращается въ тождество при $a = b$. Конечно въ этомъ случаѣ v должно разсматривать, какъ предѣлъ опредѣляющаго его отношенія.

II.

До сихъ поръ мы имѣли въ виду тождественныя прямыя, или, лучше сказать, тождественные ряды точекъ; теперь переходимъ къ общему случаю.

Прямыя могутъ различаться инваріантными точками и нумераціей точекъ, поэтому, о совмѣщеніи ихъ и рѣчи быть не можетъ; между ними возможно только соотвѣтствіе.

Положимъ, что мы нашли способъ установить однозначное соотвѣтствіе между точками разныхъ прямыхъ; положимъ, что начала координатъ ихъ другъ другу соотвѣтствуютъ и координатѣ x одной прямой соотвѣтствуетъ x' второй, x'' третьей и т. д., словомъ, отрѣзки ox, ox', ox'' другъ другу соотвѣтствуютъ. Если условиться считать такіе отрѣзки имѣющими равныя длины, то будетъ безразлично, которыя изъ чиселъ x, x', x'', ... принять за длину. Чтобы избѣгнуть путаницы, удобно избрать одну изъ прямыхъ за основную, за масштабъ, и названіе длины отнести къ координатамъ ея точекъ.

Такимъ образомъ, *длиною отрѣзка съ началомъ въ 0 называется координата конца соотвѣтственнаго отрѣзка масштаба*, поэтому число выражающее длину отрѣзка будетъ различно, смотря потому, на какомъ масштабѣ производится отсчитываніе. Это опредѣленіе обращается въ прежнее, когда масштабъ тождественъ съ измѣряемой прямой.

При такомъ опредѣленіи длина отрѣзка ox есть функція $F(x)$ координаты x, относительно которой намъ пока извѣстно, что $F(0) = 0$.

Остается указать, какимъ образомъ можно установить [соотвѣтствіе между точками измѣряемой прямой и точками масштаба. Мы достигаемъ этого предположеніемъ: *длина суммы двухъ отрѣзковъ равняется суммѣ ихъ длинъ*. Это предположеніе напоминаетъ принципъ слагаемости, но разница въ томъ, что здѣсь сложеніе на прямой и на масштабѣ совершается относительно ихъ инваріантныхъ точекъ.

Пусть инваріантныя точки прямой суть a и b, координаты концовъ двухъ данныхъ отрѣзковъ x, y, кордината ихъ суммы z.

Предположимъ, что α и β суть инваріантныя точки масштаба; тогда длины предыдущихъ отрѣзковъ будутъ $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ и по условію, въ силу извѣстной теоремы сложенія, два слѣдующія равенства:

$$F(z) = \frac{\alpha\beta[F(x) + F(y)] - (\alpha + \beta) F(x) F(y)}{\alpha\beta - F(x) F(y)}$$

$$z = \frac{ab(x + y) - (a + b) xy}{ab - xy}$$

существуютъ совмѣстно.

Такимъ образомъ, опредѣленіе длины сводится къ опредѣленію вида функціи $F(x)$.

Изъ разсмотрѣнія предыдущихъ равенствъ слѣдуетъ, что z появляется изъ x какъ результатъ линейной подстановки

$$\begin{pmatrix} ab - (a + b)y, & aby \\ -y \quad , & ab \end{pmatrix}$$

и одновременно $F(x)$ подвергается линейному преобразованію

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta - (\alpha + \beta) F(y), & \alpha\beta F(y) \\ -F(y) \quad , & \alpha\beta \end{pmatrix},$$

а изъ условія $F(0) = 0$ вытекаетъ, что $F(y)$ становится безконечно-малой величиной одновременно съ y. Изъ этихъ двухъ положеній заключаемъ, что безконечно-малому преобразованію x отвѣчаетъ безконечно-малое преобразованіе $F(x)$.

Такой выводъ намѣчаетъ путь для составленія дифференціальнаго уравненія, которому удовлетворяетъ $F(x)$.

Составивъ приращенія

$$F(z) - F(x) = F(y) \frac{[F(x) - \alpha][F(x) - \beta]}{\alpha\beta - F(x) F(y)},$$

$$z - x = y \frac{(x - a)(x - b)}{ab - xy},$$

по раздѣленіи ихъ, получимъ:

$$\frac{F(z) - F(x)}{z - x} = \frac{F(y)}{y} \cdot \frac{[F(x) - \alpha][F(x) - \beta]}{(x - a)(x - b)} \cdot \frac{ab - xy}{\alpha\beta - F(x) F(y)}.$$

Переходя къ предѣлу, при уменьшеніи y до нуля, находимъ:

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(0) \frac{[F(x) - \alpha][F(x) - \beta]}{(x - a)(x - b)} \frac{ab}{\alpha\beta}.$$

Очевидно, что постоянное $F'(0)$ должно быть отлично отъ нуля; обозначимъ его чрезъ k.

Интегрируя полученное уравненіе отъ 0 до x, получимъ:

$$F(x)=\alpha\beta\,\frac{\left(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda}-1}{\alpha\left(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda}-\beta}\quad\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

гдѣ

$$\lambda=k\,\frac{ab}{a-b}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}.$$

Таково выраженіе длины отрѣзка ox, когда a не равно b.

Сопоставимъ этотъ результатъ съ формулой (5) предыдущаго §.

Полагая $\alpha=a$, $\beta=b$, получимъ $\lambda=k$ и

$$F(x)=ab\,\frac{\left(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{x-a}{x-b}\right)^{k}-1}{a\left(\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{x-a}{x-b}\right)^{k}-b}.$$

Отсюда видимъ, что, не смотря на одинаковость координатъ трехъ соотвѣтственныхъ точекъ o, a, b, $F(x)$ отлично отъ x. Произвольное постоянное k даетъ возможность установить соотвѣтствіе любой точки с данной прямой съ произвольною точкою γ на масштабѣ. Сравнивая теперь этотъ выводъ съ формулой (5) предыдущаго §, убѣждаемся, что *мѣра длины ox на масштабѣ съ инваріантными точками a и b выражается отрѣзкомъ равнымъ отрѣзку* $k.(x)$ *данной прямой.*

Слѣдовательно, постоянное $F'(0)=k$ должно разсматривать какъ коэффиціентъ пропорціональности.

Въ общемъ случаѣ, при неравенствѣ координатъ инваріантныхъ точекъ прямой и масштаба, дѣло обстоитъ нѣсколько иначе.

Формула (1) является какъ результатъ исключенія u изъ равенствъ

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b}=\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda},$$

и

$$\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{F(x)-\alpha}{F(x)-\beta}=\frac{b}{a}\cdot\frac{u-a}{u-b},$$

изъ коихъ первое показываетъ, что u есть координата точки $\lambda.(x)$ на данной прямой; второе, что точки масштаба $F(x)$ находятся въ проективномъ соотвѣтствіи съ точками $\lambda.(x)$ данной прямой. Ясно, что это проективное соотвѣтствіе устанавливается тремя парами точекъ: $(a,\ \alpha)$, $(b,\ \beta)$, $(o,\ o)$.

Такимъ образомъ: *мѣра длины ох выражается отрѣзкамъ масштаба проективно-соотвѣтственнымъ съ отрѣзкомъ* $\lambda.(x)$ *данной прямой.*

Предположимъ теперь, что инваріантныя точки масштаба совпадаютъ, т. е. $\alpha = \beta$. Тогда дифференціальное уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{\alpha^2 dF}{(F-\alpha)^2} = \frac{k\,ab\,dx}{(x-a)(x-b)}.$$

Откуда

$$F(x) = \frac{\alpha\lambda \log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)}{\lambda\ \mathrm{og}\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)+\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

при чемъ

$$\lambda = \frac{k\,ab}{a-b}.$$

Теперь мы имѣемъ возможность выяснить значеніе предположенія, которое принимается какъ принципъ въ неэвклидовой геометріи.

Предположимъ, что инваріантныя точки масштаба не только совпадаютъ, но и удалены въ безконечность; т. е. примемъ, что $\alpha = \infty$, тогда

$$F(x) = \lambda \log\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

и теорема сложенія на масштабѣ обращается въ слѣдующую:

$$F(z) = F(x) + F(y).$$

Выраженіе (3) представляетъ обыкновенное опредѣленіе мѣры длины въ неэвклидовой геометріи. Выводъ его основываютъ на принципѣ слагаемости; очевидно: *принципъ слагаемости равносиленъ принятію за масштабъ такой прямой, инваріантныя точки которой совпадаютъ и удалены въ безконечность*; другими словами, въ данномъ случаѣ масштабъ есть не что иное какъ эвклидова прямая.

Итакъ *принципъ слагаемости длинъ и постулатъ Эвклида представляютъ одно и то-же предположеніе, выраженное въ различной формѣ.*

Общее опредѣленіе длины, данное выше, даетъ возможность измѣрить длину отрѣзка какой угодно прямой гиперболической, эллиптической или параболической на какомъ угодно масштабѣ и мы видимъ, что нѣтъ никакой необходимости принимать за масштабъ эвклидову прямую; такой выборъ можно оправдывать удобствомъ, привычкой, но отнюдь не необходимостью. Ясно также, что принципъ слагаемости нельзя разсматривать, какъ начало, непосредственно вытекающее изъ самаго понятія объ измѣреніи.

Формула (3) есть частный случай (1); легко убѣдиться, что и функція обратная (3) также представляетъ длину.

Это заключеніе основывается на простомъ замѣчаніи, что *между координатой конца измѣряемаго отрѣзка и его длиною существуетъ взаимность*: координаты масштаба выражаютъ длины соотвѣтственныхъ отрѣзковъ данной прямой и, обратно, координаты точекъ данной прямой представляютъ длины отрѣзковъ масштаба. Въ частномъ случаѣ при предположеніи, что данная прямая есть эвклидова, а машстабъ гиперболическая прямая, т. е. полагая $a = b = \infty$, получаемъ:

$$F(x) = \alpha\beta\,\frac{e^{\lambda x} - 1}{\alpha e^{\lambda x} - \beta},$$

при чемъ

$$\lambda = \frac{k(\alpha - \beta)}{\alpha\beta}.$$

Нѣкоторые частные случаи этой формулы заслуживаютъ упоминанія.

Пусть $\alpha = -1$, $\beta = +1$, $k = 1$, тогда

$$F(x) = \operatorname{tgh} x,$$

гиперболическій тангенсъ есть длина эвклидова отрѣзка на гиперболическомъ масштабѣ.

Если же $\alpha = +i$, $\beta = -i$, $k = 1$, длина опредѣляется равенствомъ:

$$F(x) = \operatorname{tg} x,$$

тангенсъ эвклидова отрѣзка x есть его длина на эллиптическомъ масштабѣ.

Въ силу взаимности координаты съ длиною, функціи $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctgh} x$ представляютъ эвклидовы длины эллиптическаго и гиперболическаго отрѣзковъ, при извѣстномъ выборѣ инваріантныхъ точекъ.

Простѣйшія выраженія длины, конечно, будутъ раціональныя функціи координатъ. Полученіе ихъ не представляетъ затрудненія благодаря произвольности постояннаго k. Если $a = b$, $\alpha = \beta$, то можно выбрать k такъ, чтобы $\lambda = 1$; для этого должно быть

$$k = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} : \frac{ab}{a - b};$$

тогда формула (1) обращается въ такую:

$$F(x) = \frac{\alpha\beta\,(a - b)\,x}{(a\beta - \alpha b)x + ab\,(\alpha - \beta)}.$$

Если же $a=b$, $\alpha=\beta$,

$$F(x)=\frac{ka\alpha x}{(ka-\alpha)\,x+a\alpha}.$$

Итакъ, во всякой геометріи можно выбрать масштабъ такъ, что длина выражается дробно-линейной функціей координаты, при чемъ *мѣра длины выражается отрѣзкомъ масштаба проективно-соотвѣтственнымъ съ измѣряемымъ отрѣзкомъ.*

Наконецъ, въ еще болѣе частномъ случаѣ, когда

$$a\beta-\alpha b=0,$$

находимъ

$$F(x)=kx,$$

при чемъ

$$k=\frac{\alpha}{a}=\frac{\beta}{b}.$$

То же имѣетъ мѣсто и въ параболической геометріи.

Слѣдовательно, *во всякой геометріи гиперболической, эллиптической и параболической можно выбрать масштабъ такъ, что мѣра длины будетъ пропорціональна самому отрѣзку.*

III.

Опредѣленіе длины, котораго мы придерживались до сихъ поръ, не представляетъ еще полнаго обобщенія, мы удержали *особенность длины уничтожаться одновременно съ отрѣзкомъ.* Необходимость устранить это ограниченіе обнаруживается непосредственно изъ предыдущихъ формулъ: онѣ теряютъ смыслъ при допущеніи, что одна или обѣ инваріантныя точки прямой или масштаба совпадаютъ съ началомъ координатъ.

Для объясненія причины этого обстоятельства надо напомнить, что всѣ выводы основаны на движеніи прямой по ея направленію. Чтобы судить о величинѣ перемѣщенія, мы разсматривали перемѣщенія начала координатъ и тѣмъ самымъ устранили возможность его совпаденія съ инваріантными точками. Поэтому для изслѣдованія тѣхъ случаевъ, когда начало неподвижно, необходимо видоизмѣнить формулы, принявъ за начало отрѣзковъ точку, отличную отъ начала координатъ и не совпадающую съ другой неподвижной точкой прямой.

Разсмотримъ сначала одинъ частный случай, когда инваріантныя точки прямой суть $a=0$, $b=\infty$. Положимъ, что отъ нѣкотораго перемѣщенія прямой точка c совпала съ x, въ то же время точка y совпала съ z.

Выраженіе равенства перемѣщеній получимъ изъ формулы (2) § 1, положивъ въ ней $a=0$, $b=\infty$, а именно:

$$\frac{x}{c}=\frac{z}{y},$$

при чемъ каждое изъ этихъ отношеній равно параметру перемѣщенія μ.

Пользуясь этимъ равенствомъ можно, по даннымъ началу y и концу z отрѣзка, найти конецъ равнаго ему отрѣзка, имѣющаго начало въ c.

Такъ какъ перемѣщеніе точки c до точки x вполнѣ характеризуется координатой x, то *длиной отрѣзка* cx *можно называть координату конца отрѣзка* x; слѣдовательно, предыдущая формула даетъ возможность опредѣлить длину всякаго отрѣзка прямой съ инваріантными точками 0 и ∞. Конечно, для упрощенія лучше всего принять $c=1$.

Напомнимъ, что теорема сложенія на прямой выражается тѣмъ же самымъ равенствомъ. Въ самомъ дѣлѣ, если сообщить прямой перемѣщеніе отъ c до y, потомъ перемѣщеніе отъ c до x, то точка y перейдетъ въ z, такъ какъ отрѣзки cx и yz должны быть равны; слѣдовательно равенство

$$z=\frac{xy}{c}$$

представляетъ теорему сложенія въ данномъ частномъ случаѣ.

Между новымъ опредѣленіемъ длины и прежнимъ нѣтъ существеннаго различія, хотя теперь длиной отрѣзка, не имѣющаго протяженія, будетъ c, число отличное отъ нуля. Не трудно догадаться, что существуетъ масштабъ на которомъ длины отрѣзковъ разсматриваемой прямой измѣряются посредствомъ

$$x-c,$$

такъ что одновременное уничтоженіе отрѣзка и его длины вновь возстановляется. Инваріантныя точки этого масштаба будутъ $-c$ и ∞, а теорема сложенія принимаетъ видъ:

$$F(z)=F(x)+F(y)+\frac{1}{c}F(x)F(y).$$

Сказанное справедливо вообще, какъ это видно изъ тождества:

$$\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}=\frac{b-c}{a-c}\cdot\frac{(x-c)-(a-c)}{(x-c)-(b-c)},$$

которое выражаетъ, что *длина* x *на масштабѣ* $(a\,,\ b)$ *при отсчитываніи отъ точки* c *равна длинѣ* $x-c$ *на масштабѣ* $(a-c\,,\ b-c)$ *при отсчитываніи отъ нуля.* Этотъ выводъ остается неизмѣннымъ и при допущеніи, что 0 есть инваріантная точка какъ на прямой, такъ и на масштабѣ, лишь-бы только c было отлично отъ нуля.

Итакъ, опредѣленіе длины слѣдуетъ дополнить замѣчаніемъ, что вообще нѣтъ надобности принимать начало координатъ за начало отрѣзковъ какъ на измѣряемой прямой, такъ и на масштабѣ, вслѣдствіе чего *длина отрѣзка безъ протяженія можетъ изображаться какимъ угодно числомъ.*

Примемъ точку c за начало отрѣзковъ на прямой $(a\,,\ b)$ и точку γ за начало на масштабѣ $(\alpha\,,\ \beta)$. Обозначимъ длину отрѣзка cx чрезъ $F(x)$, тогда по условію будетъ:

$$F(c)=\gamma\,.$$

На основаніи формулы (2) § 1 теорема сложенія на прямой приметъ видъ:

$$z=\frac{ab(x+y)-(a+b)xy-c(ab-xy)}{ab-xy+c(x+y-a-b)}\,.$$

Аналогичная формула для масштаба получится изъ предыдущей, замѣняя c, a, b, x, y, z соотвѣтственно чрезъ γ, α, β, $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$. Пользуясь этими зависимостями не трудно приложить пріемъ § 2 для составленія дифференціальнаго уравненія, опредѣляющаго $F(x)$; но можно обойтись и безъ этихъ вычисленій.

Мы только что установили связь между длинами на масштабахъ c, a, b и o, $a-c$, $b-c$; извѣстно, что вторая прямая есть преобразованіе первой вида:

$$x'=x-c\,.$$

Пусть искомая длина ξ отрѣзка cx вычисляется изъ уравненія

$$\xi=\Phi(x,\ c,\ a,\ b,\ \gamma,\ \alpha,\ \beta).$$

Преобразовавъ прямую x въ $x-c$ и ξ въ $\xi-\gamma$, получимъ:

$$\xi-\gamma=\Phi(x-c,\ o,\ a-c,\ b-c,\ o,\ \alpha-\gamma,\ \beta-\gamma),$$

такъ что $\xi-\gamma$ будетъ длиною $x-c$, при томъ начала отрѣзковъ на обѣихъ прямыхъ совпадаютъ съ началами координатъ. Слѣдовательно, это равенство отличается отъ формулы (1) § 2 только новыми обозначеніями; введя ихъ въ эту формулу и написавъ $F(x)$ вмѣсто ξ, получимъ:

$$F(x)=\gamma+(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\frac{\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda}-1}{(\alpha-\gamma)\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda}-(\beta-\gamma)}\ldots(1)$$

Соотвѣтственный показатель λ имѣетъ видъ:

$$\lambda=k\frac{(a-c)(b-c)}{a-b}\cdot\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)},$$

при чемъ постоянное k отлично отъ прежняго.

Едва-ли необходимо упоминать, что при $c=\infty$ или $\gamma=\infty$ предыдущее преобразованіе должно быть замѣнено преобразованіемъ типа $\frac{1}{x}$.

Если-же $\alpha=\beta$, то предыдущая формула приводится къ виду:

$$F(x)=\frac{\alpha\lambda\log\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)+\gamma(\alpha-\gamma)}{\lambda\log\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)+(\alpha-\gamma)}\quad.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

и

$$\lambda=\frac{k(a-c)(b-c)}{a-b}.$$

Разсмотримъ теперь одинъ изъ тѣхъ случаевъ, когда формула (1) § 2 становится непригодной, именно положимъ $\alpha=0$, $\beta=\infty$, $\gamma=1$. Выраженіе длины будетъ такое:

$$F(x)=\left(\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}\right)^{\lambda},$$

когда $a \gtrless b$; если же $a=b$, то

$$F(x)=e^{k(c-a)\frac{x-c}{x-a}}.$$

Слѣдовательно, простѣйшими выраженіями длины будутъ функціи:

$$x^k,\quad e^x.$$

Если-же выбрать постоянное k такъ, чтобы $\lambda=1$, то первая изъ двухъ послѣдихъ формулъ даетъ:

$$F(x)=\frac{c-b}{c-a}\cdot\frac{x-a}{x-b}.$$

Правая часть этого выраженія есть не что иное какъ параметръ μ, характеризующій величину перемѣщенія отъ c до x; слѣдовательно, *параметръ перемѣщенія есть длина отрѣзка* cx *прямой* (c, a, b) *на масштабѣ* $(1, o, \infty)$.

Такимъ образомъ утвержденіе, что параметръ μ не годится для измѣренія длины отрѣзковъ, можемъ считать лишеннымъ основанія.

IV.

Вопросъ, которымъ мы занимались находится въ тѣсной связи съ одной задачей проективной геометріи.

Пусть имѣемъ двѣ прямыя, точки которыхъ находятся въ инволюціонномъ соотвѣтствіи. Положимъ, что a и b суть сопряженныя точки на одной прямой, α и β — на другой. Какое соотвѣтствіе можно установить между тѣми точками этихъ прямыхъ, которыя находятся внѣ отвѣзковъ (a, b) и (α, β)?

Возьмемъ еще двѣ пары сопряженныхъ точекъ (x, y) (c, z) на первой прямой и двѣ пары такихъ-же точекъ на второй: (ξ, η) (γ, ζ).

По опредѣленію

$$\frac{(c-x)(y-a)(b-z)}{(z-y)(x-b)(a-c)} = -1,$$

$$\frac{(\gamma-\xi)(\eta-\alpha)(\beta-\zeta)}{(\zeta-\eta)(\xi-\beta)(\alpha-\gamma)} = -1.$$

Требуется опредѣлить зависимость между соотвѣтственными точками ξ и x, предполагая, что точки c и γ другъ другу соотвѣтствуютъ.

Первое изъ этихъ условій выражаетъ не что иное, какъ то, что z есть сумма отрѣзковъ x, y, отсчитываемыхъ отъ c, сумма относительно инваріантныхъ точекъ a, b; это видно изъ послѣдней формулы § 1. Второе выражаетъ то же свойство на другой прямой. Слѣдовательно, вопросъ, который требуется рѣшить, отличается отъ опредѣленія длины въ неэвклидовой геометріи только формой выраженія, а потому искомая зависимость ξ отъ x рѣшается формулами, данными въ предыдущемъ; самое общее его рѣшеніе даетъ формула (1) § 3.

Sur le problème de la distribution de l'électricité.

Par W. Stekloff.

Dans une Note, inserée dans le № 21 (22 November 1897) des Comptes Rendus, M. Liapounoff a indiqué une méthode pour résoudre le problème de la distribution électrostatique sous certaines conditions par rapport à la surface du conducteur.

Dans cette Note nous allons indiquer une autre méthode de la solution du même problème, présentant une modification convenable de la méthode connue de M. Robin et toute différente de celle de M. Liapounoff.

Soit (S) une surface fermée convexe à courbure finie, determinée et différente de zéro.

Désignons par s un point de la surface (S), par M un point quelconque. Soit r la distance du point s au point M, ds l'élément de la surface (S), n la direction de la normale extérieure à cette surface. Soit enfin ϱ_0 une fonction quelconque finie et continue en tout point de (S).

Prenons une fonction V du point M finie et continue avec ses dérivées à l'intérieur et à l'extérieur du domaine (D), limité par (S).

Désignons par $\frac{\partial V_s}{\partial n}$ (ou simpl. $\frac{\partial V}{\partial n}$) la valeur de l'expression

$$\frac{\partial V}{\partial x}\cos(n\,,\,x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(n\,,\,y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(n\,,\,z) \qquad (1)$$

au point s, par $\frac{\partial V_{is}}{\partial n}$ (ou simpl. $\frac{\partial V_i}{\partial n}$) la limite, vers laquelle tend (1), quand le point M tend vers s, en étant à l'intérieur de (S), par $\frac{\partial V_{es}}{\partial n}$

(ou simpl. $\frac{\partial V_e}{\partial n}$) la limite, vers laquelle tend (1), quand le point M tend vers s, en étant à l'extérieur de (S) *).

Formons la suite d'intégrales

$$V_1 = -\frac{1}{2\pi}\int \varrho_0 \frac{1}{r} ds, \quad V_k = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}\frac{1}{r} ds. \qquad (k=2, 3, \ldots) \qquad (2)$$

V_k sont des fonctions du point M.

Supposons que M est un point de la surface (S).

Désignons par ψ l'angle de la droite $\overline{Ms}$ avec la normale n en M et par φ l'angle de la droite $\overline{Ms}$ avec la normale n en s.

On aura

$$\varrho_k = \frac{1}{2\pi}\int \varrho_{k-1}\frac{\cos\psi}{r^2} ds, \qquad (k=1,2,3,\ldots) \qquad (3)$$

où

$$\varrho_{k-1} = \frac{\partial V_{k-1}}{\partial n}. \qquad (k=2, 3, \ldots)$$

Reprenons maintenant la fonction V et posons

$$W = \int V_i \frac{\cos\varphi}{r^2} ds, \quad P = \int \frac{\partial V_i}{\partial n}\frac{1}{r} ds.$$

Supposons que V satisfait à l'équation de Laplace.

On a

$$V = \frac{1}{4\pi} W + \frac{1}{4\pi} P$$

pour chaque point M à l'intérieur de (S).

En supposant que M tend vers s et en passant à la limite, nous avons

$$V_{is} = \frac{1}{2\pi} W_s + \frac{1}{2\pi} P_s.$$

En appliquant cette formule à la fonction V_{k-1} et en tenant compte des égalités (2) et (3), on trouve

$$V_k = \frac{1}{2\pi}\int V_{k-1}\frac{\cos\varphi}{r^2} ds \qquad (k=2,3,\ldots)$$

en tous les points de la surface (S).

---

*) Nous supposons que M reste constamment sur la normale à la surface (S) en s.

Soit ϱ_0 une fonction positive. On a

$$v_k = \frac{1}{2\pi} \int v_{k-1} \frac{\cos \varphi}{r^2} ds,$$

v_k étant le module de V_k sur (S).

Soient M_k et m_k le maximum et le minimum de v_k.

On sait que

$$M_k < M_{k-1}, \quad m_k > m_{k-1}, \tag{4}$$

$$\lim_{k=\infty} V_k = \text{const.} \tag{5}$$

Si la courbure de la surface (S) est finie et différente de zéro, on peut assigner une limite supérieure D_1 et une limite inférieure D_0 du rapport

$$\frac{r}{\cos \psi}.$$

Soit en particulier $\varrho_0 = 1$.

Désignons les valeurs correspondantes de V_k par K_k, les valeurs de ϱ_k par I_k.

Soient M_k^0 et m_k^0 le maximum et le minimum de $|K_k|$.

On peut démontrer sans peine que

$$\frac{m_k^0}{D_1} \leqq I_k \leqq \frac{M_k^0}{D_0}. \tag{6}$$

Désignons par

$$I_{sk}^\gamma$$

l'intégrale I_k relative au point s et étendue à une portion quelconque γ de la surface (S).

Nous tirerons des égalités (3) à l'aide de la méthode de la moyenne arithmétique de C. Neumann

$$N_k - n_k \leqq (N_{k-1} - n_{k-1}) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{I_{sk}^\beta}{I_{sk}} + \frac{I_{s'k}^\alpha}{I_{sk}} \right) \right] =$$
$$= (N_{k-1} - n_{k-1})(1 - \tau_k),$$

N_k et n_k étant le maximum et le minimum du rapport

$$\frac{\varrho_k}{I_k}.$$

α et β sont les portions de la surface (S) telles que l'on a

$$\alpha + \beta = S,$$

S étant l'aire de la surface (S).

En tenant compte des inégalités (4) et (6), on peut démontrer que

$$\tau_k > Q \frac{D_0^2}{2D_1^2} \frac{l}{L^2} = \mu, \qquad (\mu < 1)$$

l et L étant le minimum et le maximum de l'intégrale

$$\int \frac{ds}{r},$$

Q le minimum de la somme

$$\int_\alpha \frac{ds}{r} + \int_\beta \frac{ds}{r_1} \text{*)}.$$

Par suite

$$N_k - n_k \leqq (M_0 - m_0)(1-\mu)^k = (M_0 - m_0)\lambda^k, \qquad (\lambda < 1)$$

où M_0 et m_0 sont le maximum et le minimum de ϱ_0 sur (S).

Supposons que ϱ_0 satisfait à la condition

$$\int \varrho_0 \, ds = 0.$$

Dans ce cas tous les ϱ_k changent le signe sur (S); il en est de même du rapport

$$\frac{\varrho_k}{I_k}.$$

On a par conséquent pour toutes les valeurs de k [inégalités (4) et (6)]

$$|\varrho_k| \leqq (M_0 - m_0) I_k \lambda^k \leqq (M_0 - m_0) \frac{M_1^0}{D_0} \lambda^k.$$

Donc *la série*

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_k + \ldots$$

converge absolument et uniformément sur (S).

---

*) Nous désignons par $\int_\alpha \frac{ds}{r}$ et $\int_\beta \frac{ds}{r_1}$ l'intégrale $\int \frac{ds}{r}$ relative aux points s et s' et étendue aux portions α et β.

D'après cela formons la fonction

$$V = \frac{1}{2\pi}\int (\lambda\varrho_0 + \lambda^2\varrho_1 + \dots + \lambda^{k+1}\varrho_k + \dots)\frac{1}{r}\,ds,$$

λ étant une constante dont le module est inférieur ou au plus égal à l'unité.

Il est évident que V satisfait aux conditions de la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{à l'intérieur de } (D),$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \lambda\varrho_0 + (\lambda - 1)[\lambda\varrho_1 + \lambda^2\varrho_2 + \dots + \lambda^k\varrho_k + \dots],$$

$$\text{sur } (S)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = -\lambda\varrho_0 + (\lambda + 1)[\lambda\varrho_1 + \lambda^2\varrho_2 + \dots + \lambda^k\varrho_k + \dots].$$

En posant $\lambda = 1$ nous obtiendrons la solution du problème intérieur de C. Neumann, en posant $\lambda = -1$, la solution du problème extérieur.

Supposons maintenant que ϱ_0 est toujours positif sur (S).

On a

$$\varrho_k' = \frac{1}{2\pi}\int \varrho_{k-1}'\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds,$$

en posant pour abréger

$$\varrho_{k-1}' = \varrho_k - \varrho_{k-1}.$$

D'après ce que nous avons expliqué on peut affirmer que la série

$$\varrho_1' + \varrho_2' + \dots + \varrho_k' + \dots$$

converge absolument et uniformément sur (S).

Donc ϱ_k tend vers une limite ϱ $(\varrho > 0)$.

En tenant compte des égalités (2) et en passant à la limite, nous avons [d'après (5)]

$$\int \frac{\varrho}{r}\,ds = \text{const.}$$

Par conséquent $\varrho = lim\,\varrho_k$ *est la densité d'une couche superficielle sans action sur un point intérieur.*

Le problème de la distribution de l'électricité est donc résolu pour toutes les surfaces convexes ayant la courbure finie et différente de zéro.

Mais cette dérniere restriction n'a rien d'essentiel.

Les résultats obtenus seront encore vrais, quand la surface (S) contient un nombre fini des portions planes et l'aire des portions, où la courbure est différente de zéro, n'est pas nulle.

Къ задачѣ о равновѣсіи упругихъ изотропныхъ цилиндровъ.

В. А. Стеклова.

(Сообщено въ засѣданіи Харьк. Матем. Общества 24 января 1897 года).

1. Въ настоящемъ изслѣдованіи я намѣренъ указать одно рѣшеніе уравненій равновѣсія упругихъ изотропныхъ цилиндровъ, болѣе общее, чѣмъ извѣстныя до сихъ поръ рѣшенія С. Венана и Клебша.

Изслѣдованіе этого рѣшенія приводитъ къ довольно интереснымъ результатамъ.

Такъ, пользуясь имъ, можно во первыхъ рѣшать нѣкоторые, сколько я знаю, до сихъ поръ не разсматривавшіеся вопросы о равновѣсіи цилиндровъ подъ дѣйствіемъ произвольно заданныхъ силъ, одинаково приложенныхъ къ точкамъ каждаго изъ сѣченій, перпендикулярнаго къ оси цилиндра, а также и подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ силъ болѣе общаго характера.

Во вторыхъ, оно даетъ возможность изслѣдовать условія равновѣсія разсматриваемыхъ тѣлъ при довольно разнообразныхъ гипотезахъ и болѣе общихъ, чѣмъ извѣстныя гипотезы С. Венана и Клебша, относительно распредѣленія такъ называемыхъ напряженій внутри тѣла.

Наконецъ, рѣшеніе, о которомъ идетъ рѣчь, позволяетъ связать теоріи упругихъ массивныхъ стержней С. Венана и массивныхъ упругихъ пластинокъ Клебша, такъ какъ рѣшенія уравненій упругости, соотвѣтствующія этимъ теоріямъ, являются весьма частными случаями того болѣе общаго рѣшенія, которое я имѣю въ виду указать въ предлагаемой работѣ.

2. Прежде чѣмъ приступить къ главной цѣли изслѣдованія считаю не безполезнымъ напомнить читателю основныя положенія, опредѣленія и обозначенія теоріи деформируемыхъ тѣлъ.

Разсмотримъ тѣло (A), матерія котораго заполняетъ нѣкоторую область (D) пространства, ограниченную замкнутой поверхностью (S).

Въ теоріи деформируемыхъ и въ частности упругихъ твердыхъ тѣлъ предполагается, что матерія распредѣляется непрерывно внутри области (D), такъ что плотность ϱ тѣла есть конечная и непрерывная функція координатъ точекъ области (D).

Предполагается далѣе, что между матеріальными точками, непрерывная совокупность которыхъ образуетъ тѣло (A), дѣйствуютъ силы взаимодѣйствія.

Разсмотримъ какую либо часть (B), выдѣленную изъ тѣла (A) и ограниченную замкнутой поверхностью (S_1).

Оставшуюся часть тѣла (A) назовемъ черезъ (C).

Частицы объема (B) находятся подъ дѣйствіемъ силъ взаимодѣйствія частицъ, заключенныхъ въ этомъ объемѣ (B), и частицъ, составляющихъ объемъ (C).

Предполагается, что векторъ и моментъ силъ взаимодѣйствія частицъ объема (B) равны нулю, а силы дѣйствія части (C) на часть (B) замѣняются силами, сплошнымъ образомъ приложенными къ поверхности (S_1).

Пусть $\sum X$, $\sum Y$ и $\sum Z$ суть проекціи на оси координатъ вектора силъ послѣдней категоріи, дѣйствующихъ на площадку Δs поверхности (S_1).

Предполагается, что отношенія

$$\frac{\sum X}{\Delta s}, \quad \frac{\sum Y}{\Delta s}, \quad \frac{\sum Z}{\Delta s}$$

стремятся къ опредѣленнымъ предѣламъ при $\Delta s = 0$.

Эти предѣлы обозначаются черезъ

$$X_n, \quad Y_n, \quad Z_n,$$

гдѣ подъ n разумѣется направленіе внѣшней нормали къ поверхности (S_1) въ той точкѣ s, въ которую обращается въ предѣлѣ контуръ, ограничивающій площадку Δs.

Такимъ образомъ имѣемъ

$$\lim \frac{\sum X}{\Delta s} = X_n,$$

$$\lim \frac{\sum Y}{\Delta s} = Y_n,$$

$$\lim \frac{\sum Z}{\Delta s} = Z_n.$$

Величины X_n, Y_n и Z_n зависятъ отъ положенія точки s на поверхности (S_1) и отъ предѣльнаго направленія площадки Δs, опредѣляемаго нормалью n къ (S_1) въ точкѣ s, и называются *проекціями на оси координатъ напряженія, отнесеннаго къ единицѣ площади и дѣйствующаго въ точкѣ s площадки даннаго направленія* (послѣднее опредѣляется направленіемъ n).

Напряженія X_n, Y_n и Z_n представляются непрерывными функціями координатъ.

Проведемъ черезъ точку s три взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ координатъ.

Согласно принятому обозначенію, проекціи на оси координатъ напряженій, дѣйствующихъ въ точкѣ s на площадки перпендикулярныя къ осямъ x, y и z, представятся въ слѣдующемъ видѣ:

	на ось x	на ось y	на ось z
проекція напряженія, дѣйствующаго въ точкѣ s площадки перпендикулярной къ оси x	X_x	Y_x	Z_x
. . . . y	X_y	Y_y	Z_y
. . . . z	X_z	Y_z	Z_z

Въ теоріи деформируемыхъ тѣлъ доказывается, что

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z), \\ Y_n &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z), \\ Z_n &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z), \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$Z_y = Y_z, \qquad X_z = Z_x, \qquad Y_x = X_y. \tag{2}$$

Упругое твердое тѣло есть частный случай тѣлъ деформируемыхъ какимъ бы то ни было способомъ.

Все вышеизложенное справедливо и для упругихъ твердыхъ тѣлъ.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ говорить только о послѣднихъ.

Въ упругомъ тѣлѣ напряженія развиваются подъ вліяніемъ сообщаемыхъ тѣлу деформацій.

Состояніе тѣла, когда всѣ напряженія равны нулю, называется *естественнымъ*.

Назовемъ черезъ x, y, z координаты какой либо точки тѣла въ естественномъ состояніи.

Координаты этой точки послѣ деформаціи можно представить подъ видомъ

$$x + u, \qquad y + v, \qquad z + w,$$

гдѣ u, v и w суть функціи координатъ x, y, z и, вообще, времени t.

Характерная особенность деформацій упругаго твердаго тѣла состоитъ въ слѣдующемъ:

Измѣненіе размѣровъ какой угодно части тѣла при деформаціи безконечно мало въ сравненіи съ размѣрами этой части.

Въ силу такого опредѣленія деформаціи упругаго твердаго тѣла величины u, v и w, равно какъ и ихъ производныя по координатамъ, должно считать безконечно малыми величинами.

За элементы, характеризующіе деформацію упругаго твердаго тѣла, принимаютъ величины, опредѣляющія измѣненіе послѣ деформаціи угловъ между каждыми двумя изъ трехъ реберъ элементарнаго прямоугольнаго до деформаціи параллелепипеда, пересѣкающихся въ одной вершинѣ, и удлинненія этихъ реберъ.

Назовемъ послѣдніе три изъ элементовъ деформаціи черезъ

$$x_x, \qquad y_y, \qquad z_z, \tag{3}$$

а удвоенныя величины первыхъ трехъ черезъ

$$z_y = y_z, \qquad x_z = z_x, \qquad y_x = x_y. \tag{3$_1$}$$

Въ теоріи упругости доказывается, что

$$\begin{gathered} x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ z_y = y_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad x_z = z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad y_x = x_y = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{gathered} \tag{4}$$

Напряженія X, Y и Z со значками x, y и z предполагаются частными производными по перемѣннымъ (3) и (3_1) отъ квадратичной всегда отрицательной формы f шести аргументовъ (3) и (3_1), *) т. е.

$$\begin{gathered} X_x = \frac{\partial f}{\partial x_x}, \qquad Z_y = Y_z = \frac{\partial f}{\partial z_y}, \\ Y_y = \frac{\partial f}{\partial y_y}, \qquad X_z = Z_x = \frac{\partial f}{\partial x_z}, \\ Z_z = \frac{\partial f}{\partial z_z}, \qquad Y_x = X_y = \frac{\partial f}{\partial x_y}. \end{gathered} \tag{5}$$

---

*) Это допущеніе равносильно допущенію существованія потенціала частичныхъ силъ.

Форма f вообще содержитъ 21 постоянный коэффиціентъ.

При различныхъ частныхъ предположеніяхъ относительно строенія упругаго тѣла число коэффиціентовъ уменьшается.

Тѣло называется *изотропнымъ*, если видъ функціи f не зависитъ отъ направленія координатныхъ осей.

Для такого тѣла, какъ доказывается въ теоріи упругости,

$$f = -K\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + k\Theta^2\right), \tag{6}$$

гдѣ

$$\Theta = x_x + y_y + z_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{7}$$

а K и k двѣ положительныя постоянныя, зависящія отъ физическихъ свойствъ тѣла.

Такимъ образомъ, для изотропнаго тѣла, въ силу равенствъ (5) и (6),

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ Y_y &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ Z_z &= -2K\left(k\Theta + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_z = Z_y &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ Z_x = X_z &= -K\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ X_y = Y_x &= -K\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

3. Пусть тѣло деформируется подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ его объема и силъ, приложенныхъ къ поверхности, его ограничивающей.

Назовемъ проекціи на оси координатъ первыхъ силъ черезъ

$$X, \quad Y, \quad Z,$$

а вторыхъ черезъ

$$P, \quad Q, \quad R.$$

Тѣ и другія будемъ предполагать непрерывными и конечными функціями координатъ.

Предположимъ, что тѣло находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ только что указанныхъ силъ.

При сдѣланныхъ выше предположеніяхъ, задача о равновѣсіи какого угодно упругаго твердаго тѣла приводится къ опредѣленію функцій u, v, w при помощи уравненій

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\varrho X=0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\varrho Y=0, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\varrho Z=0,$$

при условіяхъ на поверхности

$$P=X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z),$$

$$Q=Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y)+Y_z\cos(n,z), \qquad (11)$$

$$R=Z_x\cos(n,x)+Z_y\cos(n,y)+Z_z\cos(n,z).$$

Послѣднія являются слѣдствіями равенствъ (1), которыя должны имѣть мѣсто для любой точки тѣла.

Разсматриваемая задача будетъ вполнѣ опредѣлена условіями (10) и (11), если еще поставимъ условіе, что упругое твердое тѣло не можетъ испытывать перемѣщеній, свойственныхъ неизмѣняемой системѣ.

Въ случаѣ изотропнаго тѣла уравненія равновѣсія, при помощи равенствъ (8) и (9), представятся въ слѣдующемъ видѣ

$$\Delta u+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\frac{\varrho}{K}X=0,$$

$$\Delta v+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\frac{\varrho}{K}Y=0, \qquad (12)$$

$$\Delta w+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{\varrho}{K}Z=0,$$

гдѣ Δ есть знакъ операціи вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

а

$$\mu=2k+1.$$

Въ слѣдующихъ параграфахъ мы будемъ говорить только о тѣлахъ изотропныхъ.

4. При настоящихъ средствахъ анализа задача объ опредѣленіи функцій u, v и w при помощи уравненій (12) и условій (11) не можетъ быть рѣшена въ общемъ видѣ при произвольно заданныхъ функціяхъ X, Y, Z; P, Q, R и для какого угодно тѣла.

Даже для простѣйшихъ видовъ тѣлъ, за весьма рѣдкими исключеніями, она представляетъ почти неодолимыя трудности.

Въ настоящемъ изслѣдованіи мы разсмотримъ только тѣла цилиндрическія и допустимъ, что на ихъ внутреннія массы не дѣйствуетъ силъ, т. е.

$$X = Y = Z = 0.$$

За ось z примемъ по обыкновенію ось цилиндра, за плоскость xy плоскость одного изъ его основаній.

При этомъ условія опредѣленности *) задачи можно представить подъ видомъ

$$u = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

при

$$x = y = z = 0. \tag{13}$$

Назовемъ черезъ a уголъ, составляемый внѣшней нормалью n къ боковой поверхности (S') цилиндра съ осью x.

Условія (11) для боковой поверхности цилиндра примутъ видъ

$$\begin{aligned} X_x \cos a + X_y \sin a &= P, \\ Y_x \cos a + Y_y \sin a &= Q, \\ Z_x \cos a + Z_y \sin a &= R, \end{aligned} \tag{14}$$

гдѣ P, Q и R суть заданныя функціи координатъ точекъ поверхности (S').

Тѣ же условія (11) для основаній цилиндра приведутся къ слѣдующимъ

$$Z_x = P_1, \quad Z_y = Q_1, \quad Z_z = R_1, \tag{15}$$

гдѣ P_1, Q_1 и R_1 суть заданныя функціи x и y.

---

*) Условія, что тѣло не можетъ испытывать перемѣщеній, свойственныхъ неизмѣняемой системѣ.

Задача о равновѣсіи упругаго изотропнаго цилиндра при отсутствіи внѣшнихъ силъ приводится къ опредѣленію функцій u, v и w при помощи уравненій

$$\Delta u + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0\,,$$

$$\Delta v + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0\,, \tag{16}$$

$$\Delta w + \mu \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0$$

и условій (13), (14) и (15).

Къ уравненіямъ (16) должно присоединить еще слѣдующее

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{16_1}$$

Но и при сдѣланныхъ простѣйшихъ предположеніяхъ задачу нельзя рѣшить въ общемъ видѣ безъ нѣкоторыхъ, соотвѣтствующимъ образомъ составленныхъ, гипотезъ либо относительно распредѣленія напряженій внутри тѣла, либо относительно деформацій u, v и w.

Въ настоящее время извѣстно два частныхъ рѣшенія, сравнительно общаго характера, разсматриваемой задачи.

Одно принадлежитъ С. Венану, другое Клебшу.

С. Венанъ ставитъ гипотезу, что въ любой точкѣ внутри цилиндра напряженія на двѣ взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ zx и zy, параллельны оси цилиндра и допускаетъ, что на боковую поверхность цилиндра не дѣйствуетъ силъ, т. е.

$$P = Q = R = 0\,.$$

При этомъ само собою опредѣляется общій типъ силъ P_1, Q_1 и R_1, которыя должны быть приложены къ основаніямъ цилиндра для того, чтобы оправдывались сдѣланныя имъ допущенія.

Клебшъ дѣлаетъ какъ бы обратныя предположенія.

Онъ допускаетъ, что въ каждой точкѣ тѣла напряженія, дѣйствующія на площадки, перпендикулярныя къ оси цилиндра, равны нулю и на основанія цилиндра не дѣйствуетъ силъ.

При этомъ въ получаемомъ имъ рѣшеніи самъ собою опредѣляется (до извѣстной степени) общій типъ силъ, которыя должны дѣйствовать на боковую поверхность цилиндра, чтобы поставленная имъ гипотеза дѣйствительно имѣла мѣсто.

Эти двѣ задачи разсматриваются въ настоящее время независимо другъ отъ друга и рѣшенія, имъ соотвѣтствующія, получаются въ каждомъ изъ этихъ случаевъ особо интегрированіемъ уравненій (16) вмѣстѣ съ уравненіями, служащими аналитическимъ выраженіемъ гипотезъ, соотвѣтствующихъ каждому изъ разсматриваемыхъ случаевъ.

Въ настоящемъ изслѣдованіи, какъ было уже упомянуто, я укажу болѣе общее рѣшеніе уравненій упругости, въ которомъ, какъ весьма частные случаи, заключаются и рѣшенія С. Венана и Клебша.

5. Назовемъ черезъ x_1, y_1, z_1 координаты послѣ деформаціи той точки упругаго тѣла, координаты которой въ естественномъ состояніи (до деформаціи) суть x, y, z.

Имѣемъ

$$x_1 = x + u,$$

$$y_1 = y + v,$$

$$z_1 = z + w.$$

Всякая прямая, параллельная до деформаціи оси цилиндра (оси z), преобразуется послѣ деформаціи въ нѣкоторую кривую, уравненіе которой, съ приближеніемъ до безконечно малыхъ порядка не выше перваго, можно представить подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + u_1, \\ y_1 &= y + v_1, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

гдѣ u_1 и v_1 суть выраженія функцій u и v по замѣнѣ въ послѣднихъ перемѣнной z черезъ z_1.

Если u и v суть цѣлыя раціональныя функціи перемѣнной z, то уравненія (17) примутъ видъ

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_0 + m_1 z_1 + \ldots + m_s z_1^s, \\ y_1 &= n_0 + n_1 z_1 + \ldots + n_s z_1^s, \end{aligned}\right\} \qquad (17_1)$$

гдѣ m_j и $n_j (j = 0, 1, 2, \ldots, s)$ суть нѣкоторыя функціи отъ x и y.

При этомъ, какъ показываютъ уравненія (17_1), всякая прямая, параллельная до деформаціи оси цилиндра, обратится послѣ деформаціи въ кривую, проекціи которой на плоскости xz и yz суть параболы степени s.

Такую деформацію будемъ называть *параболической деформаціей степени s*.

Деформаціи, соотвѣтствующія задачамъ С. Венана и Клебша, суть параболическія: для первой третьей, для послѣдней второй степени.

Исходнымъ пунктомъ нашихъ изысканій будетъ служить слѣдующая задача:

Опредѣлить самый общій типъ функцій u, v и w при условіи, что деформація упругаго цилиндра есть параболическая третьей степени.

Такимъ образомъ, вмѣсто частныхъ гипотезъ о распредѣленіи напряженій внутри цилиндра мы беремъ за исходную точку опредѣленную и навѣрно возможную гипотезу о характерѣ деформацій u, v и w.

Очевидно, что въ опредѣленныхъ подъ этимъ условіемъ функціяхъ u, v и w должны будутъ содержаться, какъ частные случаи, и выраженія, соотвѣтствующія рѣшеніямъ С. Венана и Клебша, представляющимъ частные виды параболической деформаціи третьей степени.

6. Положимъ

$$\left.\begin{aligned}
u &= u_0 + z u_1 + \frac{z^2}{2!} u_2 + \frac{z^3}{3!} u_3 , \\
v &= v_0 + z v_1 + \frac{z^2}{2!} v_2 + \frac{z^3}{3!} v_3 , \\
w &= w_0 + z w_1 + \frac{z^2}{2!} w_2 + \frac{z^3}{3!} w_3 , \\
\Theta &= \Theta_0 + z\Theta_1 + \frac{z^2}{2!} \Theta_2 + \frac{z^3}{3!} \Theta ,
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

гдѣ u_j, v_j, w_j, Θ_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ суть функціи отъ x и y.

Эти выраженія для u, v, w и Θ должны удовлетворять уравненіямъ (16) и (16_1) при всякомъ z.

Подставляя ихъ въ уравненія (16) и (16_1) и приравнивая нулю коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ z, получаемъ слѣдующую систему уравненій для опредѣленія функцій u_j, v_j, w_j и Θ_j

$$(19)\quad \begin{aligned}
u_2 + \Delta u_0 + \mu \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} &= 0 , \\
u_3 + \Delta u_1 + \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial x} &= 0 , \\
\Delta u_2 + \mu \frac{\partial \Theta_2}{\partial x} &= 0 , \\
\Delta u_3 + \mu \frac{\partial \Theta_3}{\partial x} &= 0 ,
\end{aligned} \qquad \begin{aligned}
v_2 + \Delta v_0 + \mu \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} &= 0 , \\
v_3 + \Delta v_1 + \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial y} &= 0 , \\
\Delta v_2 + \mu \frac{\partial \Theta_2}{\partial y} &= 0 , \\
\Delta v_3 + \mu \frac{\partial \Theta_3}{\partial y} &= 0 ,
\end{aligned} \quad (20)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta w_0 + w_2 + \mu\Theta_1 = 0\,, \\
&\Delta w_1 + w_3 + \mu\Theta_2 = 0\,, \\
&\Delta w_2 + \mu\Theta_3 = 0\,, \\
&\Delta w_3 = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\Theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_1\,, \\
&\Theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2\,, \\
&\Theta_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + w_3\,, \\
&\Theta_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{22}
$$

Первыя два каждой изъ группъ уравненій (19), (20) и (21) даютъ

$$
(23)\quad \left.\begin{aligned}
&u_2 = -\Delta u_0 - \mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial x}\,, \\
&u_3 = -\Delta u_1 - \mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial x}\,,
\end{aligned}\right\}
\qquad
\left.\begin{aligned}
&v_2 = -\Delta v_0 - \mu\frac{\partial\Theta_0}{\partial y}\,, \\
&v_3 = -\Delta v_1 - \mu\frac{\partial\Theta_1}{\partial y}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&w_1 = \Theta_0 - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right), \\
&w_2 = \Theta_1 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{25}
$$

Рѣшая второе изъ (21) и третье изъ (22) относительно Θ_2 и w_3, получаемъ

$$
\Theta_2(1+\mu) = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} - \Delta w_1\,,
$$

$$
w_3 = -\Delta w_1 - \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right).
$$

Отсюда, при помощи (23), (24) и (25), получаемъ

$$
\left.\begin{aligned}
&\Theta_2 = -\Delta\Theta_0\,, \\
&w_3 = \Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_0\right).
\end{aligned}\right\} \tag{26}
$$

Наконецъ, послѣднее изъ уравненій (22), при помощи (23) и (24), даетъ

$$\Theta_3 = -\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \mu\Theta_1\right). \tag{27}$$

Уравненія (23), (24), (25), (26) и (27) даютъ выраженія функцій u_k, v_k, $\Theta_k (k = 2, 3)$ и $w_i (i = 1, 2, 3)$ черезъ шесть функцій u_j, v_j и $\Theta_j (j = 0, 1)$.

Задача такимъ образомъ сводится къ опредѣленію этихъ послѣднихъ и функціи w_0.

Подставивъ найденныя выраженія u_k, v_k, w_k и $\Theta_k (k = 2, 3)$ въ два послѣднія изъ уравненій каждой изъ группъ (19), (20) и (21), получимъ слѣдующія уравненія, которымъ должны удовлетворять искомыя функціи

$$\Delta_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_0\right) = 0, \tag{28}$$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_1\right) = 0, \tag{28$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\left(\Delta u_j + 2\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x}\right) = 0, \\ &\Delta\left(\Delta v_j + 2\mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (j = 0, 1) \tag{29}$$

Въ первомъ изъ этихъ уравненій Δ_2 обозначаетъ дважды повторенную операцію Δ.

Наконецъ, первое изъ уравненій (21) даетъ слѣдующее уравненіе для функціи w_0

$$\Delta w_0 + (1+\mu)\Theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}. \tag{30}$$

Такимъ образомъ, параболическая деформація третьей степени возможна для цилиндрическаго тѣла тогда и только тогда, когда функціи u_j, v_j, $\Theta_j (j = 0, 1)$, при помощи которыхъ по формуламъ предыдущаго §-а выражаются всѣ коэффиціенты при степеняхъ z въ равенствахъ (18), *удовлетворяютъ уравненіямъ (28), (28₁), (29) и (30).*

Каждому рѣшенію этихъ уравненій будетъ соотвѣтствовать нѣкоторое опредѣленное рѣшеніе уравненій упругости, т. е. одна изъ возможныхъ параболическихъ деформацій третьей степени.

7. Прежде чѣмъ перейти къ изслѣдованію наиболѣе интересныхъ изъ этихъ рѣшеній, выразимъ напряженія X, Y, Z со значками x, y, z черезъ функціи u_j, v_j и $\Theta_j (j = 0, 1)$.

При помощи формулъ (8), (9), (18), (23), (24), (25), (26) и (27) получимъ

$$X_x = \sum_0^3 \frac{z^k}{k!} X_{x,k}, \quad Y_y = \sum_0^3 \frac{z^k}{k!} Y_{y,k}, \quad Z_z = \sum_0^3 \frac{z^k}{k!} Z_{z,k},$$

$$X_y = Y_x = \sum_0^3 \frac{z^k}{k!} X_{y,k}, \quad Y_z = Z_y = \sum_0^3 \frac{z^k}{k!} Y_{z,k}, \quad Z_x = X_z = \sum_0^3 \frac{z^k}{k!} Z_{x,k}, \tag{31}$$

гдѣ, какъ нетрудно убѣдиться,

$$X_{x,j} = -2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Theta_j + \frac{\partial u_j}{\partial x}\right),$$

$$Y_{y,j} = -2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Theta_j + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right), \qquad (j=0,1)$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right);$$

$$X_{x,i} = -2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Delta\Theta_j + \Delta\frac{\partial u_j}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial x^2}\right),$$

$$Y_{y,i} = -2K\left(\frac{\mu-1}{2}\Delta\Theta_j + \Delta\frac{\partial v_j}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial y^2}\right), \qquad (i=2,3;\ j=0,1)$$

$$X_{y,i} = -K\left[\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right) + 2\mu\frac{\partial^2\Theta_j}{\partial x\,\partial y}\right]; \tag{32}$$

$$Z_{x,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right),$$

$$Z_{x,k} = -K\left[(1-\mu)\frac{\partial\Theta_j}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) - \Delta u_j\right],$$

$$\qquad (k=1,2;\ j=0,1)$$

$$Z_{y,k} = -K\left[(1-\mu)\frac{\partial\Theta_j}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) - \Delta v_j\right],$$

$$Z_{x,3} = -K\frac{\partial\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\Theta_0\right)}{\partial x},$$

$$Z_{y,3} = -K \frac{\partial \varDelta\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} - (1-\mu)\,\Theta_0\right)}{\partial y};$$

$$Z_{z,j} = -2K\left[\frac{\mu+1}{2}\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right], \qquad (j=0,1)$$

(32)

$$Z_{z,2} = -2K\left[\varDelta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{1-\mu}{2}\varDelta\Theta_0\right],$$

$$Z_{z,3} = K(\mu-1)\,\varDelta\Theta_1.$$

8. Переходимъ теперь къ рѣшенію слѣдующей задачи:

Найти общее рѣшеніе уравненій равновѣсія упругаго изотропнаго цилиндра при слѣдующихъ условіяхъ:

1) Тѣло испытываетъ параболическую деформацію третьей степени,

2) На внутреннія массы тѣла не дѣйствуетъ силъ,

3) На боковую поверхность цилиндра дѣйствуютъ силы

$$X = X_0 + zX_1, \quad Y = Y_0 + zY_1, \quad Z = Z_0 + zZ_1,$$

гдѣ X_j, Y_j, $Z_j\,(j=0,1)$ *суть произвольно заданныя функціи* x *и* y.

Рѣшеніе задачи приводится къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j $(j=0,1)$, w_0 при помощи уравненій (28), (28_1), (29), (30) и условій

$$X_x \cos a + X_y \sin a = X_0 + zX_1,$$

$$Y_x \cos a + Y_y \sin a = Y_0 + zY_1,$$

$$Z_x \cos a + Z_y \sin a = Z_0 + zZ_1.$$

Послѣднія, при помощи (31), приведутся къ слѣдующимъ

(33)
$$X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a = X_j, \qquad (j=0,1)$$
$$X_{x,i}\cos a + X_{y,i}\sin a = 0, \qquad (i=2,3)$$

(34)
$$X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a = Y_j, \qquad (j=0,1)$$
$$X_{y,i}\cos a + Y_{y,i}\sin a = 0, \qquad (i=2,3)$$

(35_0) $$Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a = Z_0,$$

(35) $$Z_{x,k}\cos a + Z_{y,k}\sin a = Z_k, \qquad (k=1,2) \qquad (Z_2=0)$$

(35_1) $$Z_{x,3}\cos a + Z_{y,3}\sin a = 0.$$

Положимъ

$$\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\Delta\Theta_0=P.$$

Въ силу уравненія (28) имѣемъ

$$\Delta P=0. \tag{36}$$

Условіе (35_1), въ силу (32), приводится къ виду

$$\frac{\partial P}{\partial n}=0, \tag{37}$$

гдѣ n есть направленіе внѣшней нормали къ боковой поверхности цилиндра.

Изъ уравненій (36) и (37) слѣдуетъ, что

$$P=\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\Delta\Theta_0=C=\text{const}. \tag{38}$$

При этомъ

$$Z_{x,3}=0, \qquad Z_{y,3}=0. \tag{39}$$

Задача приведена къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j, w_0 при помощи уравненій (38), (28_1), (29), (30) и поверхностныхъ условій (33), (34), (35_0) и (35).

Уравненія (38) и (28_1) мы можемъ заключить въ одно, положивъ

$$\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-(1-\mu)\,\Delta\Theta_j=C_j \qquad (j=0,1) \tag{38_1}$$

и условившись считать

$$C_1=0.$$

Положивъ въ общихъ уравненіяхъ равновѣсія (10)

$$X=Y=Z=0$$

и подставивъ вмѣсто $X_x, X_y, \ldots, Z_z$ ихъ выраженія (31), разобьемъ уравненія (10) на систему 12-ти уравненій, между которыми будетъ 4 слѣдующаго вида [въ силу (39)]

$$\frac{\partial X_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial X_{y,i}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial Y_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial Y_{y,i}}{\partial y}=0. \qquad (i=2,3) \tag{40}$$

Помножимъ эти уравненія соотвѣтственно на u_i и v_i и, сложивъ, проинтегрируемъ результатъ по всей площади сѣченія, перпендикулярнаго къ оси цилиндра, которое будемъ называть *нормальнымъ сѣченіемъ цилиндра*.

Получимъ

$$\int\left[u_i\left(\frac{\partial X_{x,i}}{\partial x}+\frac{\partial X_{y,i}}{\partial y}\right)+v_i\left(\frac{\partial X_{y,i}}{\partial x}+\frac{\partial Y_{y,i}}{\partial y}\right)\right]dq=0,$$

гдѣ dq есть элементъ площади только что упомянутаго сѣченія.

Это равенство легко приводится къ слѣдующему виду

$$\int[(X_{x,i}\cos a+X_{y,i}\sin a)\,u_i+(X_{y,i}\cos a+Y_{y,i}\sin a)\,v_i]\,ds-$$
$$-\int\left[X_{x,i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+Y_{y,i}\frac{\partial v_i}{\partial y}+X_{y,i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right]dq=0,$$

гдѣ ds есть элементъ периферіи нормальнаго сѣченія.

Первый изъ этихъ интеграловъ (считая слѣва) равенъ нулю въ силу уравненій (33).

Слѣдовательно,

$$\int\left[X_{x,i}\frac{\partial u_i}{\partial x}+Y_{y,i}\frac{\partial v_i}{\partial y}+X_{y,i}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)\right]dq=0.$$

Замѣтивъ, что

$$X_{x,i}=-2K\left(k\Theta_i+\frac{\partial u_i}{\partial x}\right),\quad Y_{y,i}=-2K\left(k\Theta_i+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right),$$
$$X_{y,i}=-K\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right),$$

получимъ

$$\int\left[2k\,\Theta_i\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right]dq=0. \quad \textbf{(41)}$$

Уравненіе (27) при помощи (38_1) (при $j=1$) приводится къ слѣдующему виду

$$\Theta_3=-\Delta\Theta_1.$$

Принимая въ разсчетъ первое изъ уравненій (26), можемъ писать

$$\Theta_i=-\Delta\Theta_j. \qquad {\scriptstyle(i=2,3;\;j=0,1)} \qquad \textbf{(42)}$$

Воспользовавшись затѣмъ уравненіями (23) и (24), получимъ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=-\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)-\mu\Delta\Theta_j, \qquad (i=2,3;\ j=0,1)$$

или, на основаніи (38_1),

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y}=-C_j-\Delta\Theta_j. \qquad (i=2,3;\ j=0,1)$$

При помощи этого равенства и (42) приводимъ (41) къ слѣдующему виду

$$2kC_j\int\Delta\Theta_j\,dq+\int\left[2k(\Delta\Theta_j)^2+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right]dq=0. \qquad \textbf{(43)}$$

Подставимъ во второе изъ условій (35) (при $k=2$) вмѣсто $Z_{x,2}$ и $Z_{y,2}$ ихъ выраженія (32).

Получимъ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_j\right]\cos a+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_j\right]\sin a=$$
$$=-(\Delta u_j\cos a+\Delta v_j\sin a).$$

Положимъ

$$P_j=\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}-(1-\mu)\Theta_j.$$

Интегрируя предыдущее равенство по всей периферіи нормальнаго сѣченія, находимъ

$$\int\frac{\partial P_j}{\partial n}\,ds=-\int(\Delta u_j\cos a+\Delta v_j\sin a)\,ds.$$

Но

$$\int(\Delta u_j\cos a+\Delta v_j\sin a)\,ds=\int\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)dq=(1-\mu)\int\Delta\Theta_j\,dq+C_jq,$$

гдѣ q есть площадь нормальнаго сѣченія цилиндра.

Интегрируемъ затѣмъ (38_1) по всей площади этого сѣченія.

Получаемъ

$$\int \Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}+\frac{\partial v_j}{\partial y}\right) dq-(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq = C_j q = \int \frac{\partial P_j}{\partial n} ds.$$

Слѣдовательно,

$$C_j q = -(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq - C_j q\,,$$

т. е.

$$-(1-\mu)\int \Delta\Theta_j dq = 2k\int \Delta\Theta_j\, dq = 2C_j q\,,$$

гдѣ q есть площадь нормальнаго сѣченія.

Вслѣдствіе этого равенство (43) приметъ видъ

$$2C_j^2 q+\int\left[2k(\Delta\Theta_j)^2+2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}\right)^2\right] dq = 0\,.$$

Слѣдовательно, необходимо

$$C_j = 0\,,\quad \Delta\Theta_j = 0\,,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x}=0\,,\quad \frac{\partial v_i}{\partial y}=0\,,\quad \frac{\partial u_i}{\partial y}+\frac{\partial v_i}{\partial x}=0\,. \qquad (44)$$

Отсюда

$$u_i = \Phi_i(y)\,,\qquad v_i = \Psi_i(x)\,.$$

Подставивъ эти выраженія въ послѣднее изъ уравненій (44), получимъ

$$\Phi_i'(y)+\Psi_i'(x) = 0\,,$$

т. е.

$$\Phi_i(y) = a_i y + b_i\,,\qquad \Psi_i(x) = -a_i x + c_i\,, \qquad (i=2,3)$$

гдѣ a_i, b_i, c_i суть произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ уравненія (44) даютъ

$$C_j = 0\,,\quad \Delta\Theta_j = 0\,,\quad u_i = a_i y + b_i\,,\quad v_i = -a_i x + c_i\,.$$

$$(i=2,3;\ j=0,1).$$

При помощи этихъ уравненій и уравненій (23) и (24) получаемъ

$$\Delta u_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x} = a_j y + b_j\,,\quad \Delta v_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y} = -a_j x + c_j\,. \qquad (45)$$

Въ этихъ уравненіяхъ черезъ a_j, b_j и c_j замѣнены постоянныя a_i, b_i и c_i.

Замѣтимъ, что уравненія (45) по внѣшнему виду не отличаются отъ уравненій равновѣсія плоской упругой пластинки, деформирующейся въ ея плоскости подъ дѣйствіемъ двухъ силъ, приложенныхъ къ ея периферіи: постоянной силы, равной

$$\sqrt{b_j^2 + c_j^2}$$

и составляющей съ осями координатъ углы, cosinus'ы которыхъ

$$\frac{b_j}{\sqrt{b_j^2+c_j^2}}, \qquad \frac{c_j}{\sqrt{b_j^2+c_j^2}}$$

и силы, пропорціональной разстоянію точекъ периферіи отъ начала координатъ и направленной по касательной къ периферіи.

Но въ данномъ случаѣ Θ_j, вообще, не равно

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}.$$

Воспользовавшись уравненіями (45), получимъ [рав. (32)]

$$X_{x,i} = 0\,, \quad X_{y,i} = 0\,, \quad Y_{y,i} = 0\,. \qquad (i=2,3)$$

При этомъ вторыя изъ условій (33) и (34) удовлетворяются сами собой.

9. Такимъ образомъ задача сведена къ опредѣленію функцій u_j, v_j, Θ_j *) при помощи уравненій

$$\Delta\Theta_j = 0\,, \quad \Delta u_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial x} = a_j y + b_j\,, \quad \Delta v_j + \mu\frac{\partial\Theta_j}{\partial y} = -a_j x + c_j \qquad (46)$$
$$(j=0,1)$$

при слѣдующихъ условіяхъ на периферіи нормальнаго сѣченія

$$\left((\mu-1)\Theta_j + 2\frac{\partial u_j}{\partial x}\right)\cos a + \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\sin a = -\frac{X_j}{K} = X_j'\,, \qquad (47)$$
$$(s=0,1)$$

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right)\cos a + \left((\mu-1)\Theta_j + 2\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\sin a = -\frac{Y_j}{K} = Y_j'\,, \qquad (47_1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right]\cos a + \frac{\partial}{\partial y}\left[\Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right)\right]\sin a = \\ = (b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a + Z_j'\,,\end{aligned} \qquad (48)$$

*) Мы пока оставляемъ въ сторонѣ функцію w_0.

если условимся считать

$$Z_0' = -\frac{Z_1}{K}, \quad Z_1' = 0.$$

Положимъ

$$S_j = \Theta_j - \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right).$$

Легко видѣть, что S_j удовлетворяетъ уравненію Лапласа

$$\Delta S_j = 0, \tag{49}$$

а на периферіи сѣченія условію [рав. (48)]

$$\frac{\partial S_j}{\partial n} = P_j, \tag{50}$$

гдѣ

$$P_j = (b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a + Z_j'.$$

Условіями (49) и (50) функція S_j опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной.

Задача возможна, если

$$\int P_j\, ds = 0.$$

Такъ какъ

$$\int [(b_j + a_j y)\cos a + (c_j - a_j x)\sin a]\, ds = 0,$$

то должно быть

$$\int Z_j'\, ds = 0.$$

Такимъ образомъ функція Z_1 должна удовлетворять условію

$$\int Z_1\, ds = 0,$$

въ остальномъ же она вполнѣ произвольна.

Существуютъ общіе методы для опредѣленія функцій, удовлетворяющихъ условіямъ вида (49) и (50).

Одна изъ такихъ методъ принадлежитъ C. Neumann'y, другая предложена недавно мною (идея принадлежитъ Robin'y).

*

Обѣ эти методы примѣнимы къ конвексньмъ контурамъ, имѣющимъ опредѣленную касательную и конечную кривизну въ каждой точкѣ.

Опредѣливъ такъ или иначе функцію S_j, получимъ

$$S_j = f_j(x, y),$$

гдѣ $f_j(x, y)$ есть опредѣленная до нѣкоторой произвольной постоянной функція координатъ.

Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$\Theta_j = f_j(x, y) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right). \qquad (j=0, 1) \qquad \textbf{(51)}$$

При этомъ условіе (48) удовлетворено, а уравненіе

$$\Delta\Theta_j = 0$$

является простымъ слѣдствіемъ двухъ послѣднихъ изъ уравненій (46) и уравненія (51).

Задача сведена къ опредѣленію функцій u_j, $v_j (j = 0, 1)$ при помощи уравненій

$$\left.\begin{aligned} \Delta u_j + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) &= a_j y + b_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial x}, \\ \Delta v_j + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) &= -a_j x + c_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(52)}$$

и условій (47) и (47_1) на периферіи.

Опредѣливъ при помощи этихъ уравненій функціи u_j и v_j, найдемъ и Θ_j при помощи (51).

10. Нетрудно убѣдиться, что уравненія (52) можно представить подъ видомъ

$$\frac{\partial X_{x,j}}{\partial x} + \frac{\partial X_{y,j}}{\partial y} = -K\left(a_j y + b_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial X_{y,j}}{\partial x} + \frac{\partial Y_{y,j}}{\partial y} = -K\left(-a_j x + c_j - \mu \frac{\partial f_j}{\partial y}\right).$$

Допустимъ, что возможны два рѣшенія уравненій (52) при условіяхъ (47) и (47_1).

Пусть значенія функцій u_j, v_j, Θ_j, соотвѣтствующихъ этимъ рѣшеніямъ, суть

$$u_j^0,\ v_j^0,\ \Theta_j^0 \quad \text{и} \quad u_j',\ v_j',\ \Theta_j'.$$

Положимъ

$$U_j = u_j^0 - u_j', \qquad V_j = v_j^0 - v_j', \qquad \Theta_j = \Theta_j^0 - \Theta_j'.$$

Будемъ разумѣть подъ $X'_{x,j}$, $X'_{y,j}$, $Y'_{y,j}$ выраженія $X_{x,j}$, $X_{y,j}$, $Y_{y,j}$ по замѣнѣ въ послѣднихъ функцій u_j, v_j черезъ U_j, V_j.

Получимъ

$$\frac{\partial X'_{x,j}}{\partial x} + \frac{\partial X'_{y,j}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X'_{y,j}}{\partial x} + \frac{\partial Y'_{y,j}}{\partial y} = 0. \tag{53}$$

На периферіи сѣченія будемъ имѣть

$$\begin{aligned} X'_{x,j}\cos a + X'_{y,j}\sin a &= 0, \\ X'_{y,j}\cos a + Y'_{y,j}\sin a &= 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Совершимъ надъ уравненіями (53) ту же операцію, что и надъ уравненіями (40) въ §-ѣ 8-мъ.

Получимъ [при помощи (54)]

$$\int \left[X'_{x,j}\frac{\partial U_j}{\partial x} + Y'_{y,j}\frac{\partial V_j}{\partial y} + X'_{y,j}\left(\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\right)\right] dq = 0. \tag{55}$$

Но

$$X'_{x,j} = -2K\left(k\Theta_j + \frac{\partial U_j}{\partial x}\right), \quad Y'_{y,j} = -2K\left(k\Theta_j + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right),$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x}\right), \quad \Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}.$$

Эти равенства, вмѣстѣ съ (55), приводятъ къ заключенію, что

$$\frac{\partial U_j}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V_j}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U_j}{\partial y} + \frac{\partial V_j}{\partial x} = 0,$$

т. е.

$$U_j = A_j y + B_j, \qquad V_j = -A_j x + C_j, \qquad (j=0,1)$$

гдѣ A_j, B_j, C_j суть произвольныя постоянныя.

Если мы воспользуемся еще условіями (13) §-а 4-аго, то получимъ

$$A_0 = B_0 = C_0 = 0.$$

Слѣдовательно, уравненія (52) вмѣстѣ съ поверхностными условіями (47) и (47_1) (при $j=0$) и условіями (13) опредѣляютъ функціи u_0 и v_0 вполнѣ и единственнымъ образомъ, Функціи же u_1 и v_1 опредѣляются вполнѣ до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій

$$A_1 y + B_1\,, \qquad - A_1 x + C_1\,.$$

11. Пусть u_j^0 и v_j^0 суть какія либо частныя рѣшенія уравненій (52). Положивъ

$$u_j = u_j^0 + U_j\,, \qquad v_j = v_j^0 + V_j\,,$$

сведемъ задачу къ опредѣленію функцій U_j и V_j при помощи уравненій

$$\varDelta U_j + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) = 0\,, \quad \varDelta V_j + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial y}\right) = 0 \qquad \textbf{(56)}$$

при поверхностныхъ условіяхъ типа (47) и (47_1), только въ правыхъ частяхъ вмѣсто функцій X_j' и Y_j' будутъ стоять нѣкоторыя другія, выраженія которыхъ мы не будемъ выписывать, а въ лѣвыхъ подъ функціей Θ_j нужно будетъ разумѣть выраженіе вида

$$\Theta_j = \frac{\partial U_j}{\partial x} + \frac{\partial V_j}{\partial x}.$$

Въ уравненіяхъ (52)

$$\mu = 2k + 1\,.$$

Положивъ

$$\frac{1}{1+k} = 1 - \lambda\,,$$

приведемъ уравненія (56) къ виду

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + (1+\lambda)\frac{\partial^2 V_j}{\partial x \partial y} + (1-\lambda)\frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} = 0\,, \\ &2\frac{\partial^2 V_j}{\partial y^2} + (1+\lambda)\frac{\partial^2 U_j}{\partial x \partial y} + (1-\lambda)\frac{\partial^2 V_j}{\partial x^2} = 0\,. \end{aligned} \qquad (j=0,1)$$

Эти уравненія по виду тождественны съ уравненіями равновѣсія упругой пластинки въ задачѣ Clebsch'a *).

---

*) См. Clebsch. „Theorie d. Elasticität". Leipzig, 1862, s. 166 etc. Постоянная λ въ данномъ случаѣ не равна постоянной μ въ задачѣ Clebsch'a, а именно

$$\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Опредѣленіе функцій U_j и V_j, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ при условіяхъ типа (47) и (47_1), для частнаго случая прямого кругового цилиндра произведено мною въ статьѣ: „О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ", напечатанной въ „Сообщеніяхъ Харьк. Мат. Общества" за 1891 годъ.

Повторять относящіяся сюда изслѣдованія нѣтъ надобности.

12. Окончательное рѣшеніе задачи, поставленной нами въ §-ѣ 8-омъ, приводится къ опредѣленію функціи w_0.

Для этого служитъ уравненіе (30), которое легко приводится къ слѣдующему виду

$$\varDelta w_0 = f_1(x, y) - \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) = \psi(x, y), \tag{57}$$

гдѣ $\psi(x, y)$ есть, очевидно, извѣстная функція координатъ (f_1, u_1 и v_1 извѣстны).

На периферіи нормальнаго сѣченія функція w_0 должна удовлетворять условію (35_0), которое при помощи равенствъ (32) преобразуется къ виду

$$\frac{\partial W_0}{\partial n} = -(u_1 \cos a + v_1 \sin a) - \frac{Z_0}{K} = \varphi(x, y), \tag{58}$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ есть извѣстная функція координатъ точекъ периферіи.

Задача возможна, если

$$\int \psi(x, y)\, dq + \int \varphi(x, y)\, ds = 0.$$

Этому условію можно удовлетворить, подобравъ соотвѣтствующимъ образомъ добавочную произвольную постоянную къ функціи $f_1(x, y)$.

Условіями (57) и (58) функція w_0 опредѣляется вполнѣ до нѣкоторой произвольной постоянной.

Послѣдняя опредѣлится изъ условія [услов. (13)]

$$w_0 = 0 \qquad \text{при } x = y = 0.$$

Опредѣленіе функціи w_0 легко приводится къ рѣшенію извѣстной задачи C. Neumann'a.

Задачу, поставленную въ началѣ 8-ого §-а, можно считать разрѣшенной въ самомъ общемъ видѣ.

13. *Въ частности можемъ положить*

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0.$$

Получимъ рѣшеніе задачи о равновѣсіи упругаго изотропнаго цилиндра при условіи, что на его внутреннія массы не дѣйствуетъ силъ, а къ боковой поверхности приложены произвольно заданныя силы, одинаково къ периферіи любого изъ нормальныхъ сѣченій цилиндра, независимо отъ разстоянія этого сѣченія отъ основанія цилиндра.

Положивъ, наконецъ, еще

$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0\,,$$

получимъ самое общее рѣшеніе уравненій равновѣсія при условіи, что на боковую поверхность не дѣйствуетъ силъ.

Это рѣшеніе является обобщеніемъ извѣстнаго рѣшенія С. Венана.

Послѣднее получится изъ приведеннаго нами, если ввести еще добавочное условіе, что моментъ и векторъ всѣхъ упругихъ силъ имѣютъ одну и ту же величину и направленіе въ каждомъ изъ нормальныхъ сѣченій цилиндра, независимо отъ разстоянія этого сѣченія отъ основанія цилиндра.

Это предложеніе является простымъ слѣдствіемъ общей теоремы, доказанной мною въ вышеупомянутой статьѣ: „О равновѣсіи упругихъ цилиндрическихъ тѣлъ“ въ 1891 году.

14. Укажемъ теперь одно *частное рѣшеніе уравненій (28), (28$_1$), и (29), которое содержитъ въ себѣ, какъ частные случаи, и рѣшенія С. Венана и Клебша.*

Этимъ уравненіямъ можно удовлетворить, полагая

$$\Delta u_j + m_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} = A_j\,,$$

$$\Delta v_j + m_j \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} = B_j\,, \qquad (j=0,1) \qquad \textbf{(59)}$$

$$\Theta_j = n_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) + A_j x + B_j y + C_j\,,$$

гдѣ A_j, B_j, C_j, m_j и n_j произвольныя постоянныя.

Въ самомъ дѣлѣ, прямымъ слѣдствіемъ уравненій (59) будутъ слѣдующія

$$\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) + m_j \Delta\Theta_j = 0\,,$$

$$n_j \Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) - \Delta\Theta_j = 0\,.$$

Если только постоянныя m_j и n_j таковы, что

$$1 + m_j n_j \gtrless 0\,,$$

то необходимо

$$\Delta\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right) = 0\,, \qquad \Delta\Theta_j = 0\,. \qquad {\scriptstyle (j=0,1)}$$

Уравненія (28), (28_1) и (29) оказываются прямыми слѣдствіями уравненій (59).

Уравненіе (30) преобразуется въ слѣдующее

$$\Delta w_0 = [1 - n_1(1+\mu)]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - (1+\mu)(A_1 x + B_1 y + C_1). \tag{60}$$

Первыя два изъ уравненій (59) можно представить подъ видомъ

$$\left.\begin{aligned} (1+m_j n_j)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + m_j n_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} &= (1-m_j)A_j\,, \\ (1+m_j n_j)\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + m_j n_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} &= (1-m_j)B_j\,. \end{aligned}\right\} {\scriptstyle (j=0,1)} \tag{61}$$

Разумѣя теперь подъ u_j, v_j функціи, удовлетворяющія этимъ уравненіямъ, подъ w_0 функцію, удовлетворяющую уравненію (60), получаемъ рѣшеніе уравненій равновѣсія подъ видомъ

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z u_1 + \frac{z^2}{2}\left[n_0(m_0-\mu)\frac{\partial P_0}{\partial x} + (m_0-\mu-1)A_0\right] + \\ &\quad + \frac{z^3}{6}\left[n_1(m_1-\mu)\frac{\partial P_1}{\partial x} + (m_1-\mu-1)A_1\right], \\ v &= v_0 + z v_1 + \frac{z^2}{2}\left[n_0(m_0-\mu)\frac{\partial P_0}{\partial y} + (m_0-\mu-1)B_0\right] + \\ &\quad + \frac{z^3}{6}\left[n_1(m_1-\mu)\frac{\partial P_1}{\partial y} + (m_1-\mu-1)B_1\right], \\ w &= w_0 + z[(n_0-1)P_0 + A_0 x + B_0 y + C_0] + \\ &\quad + \frac{z^2}{2}[(n_1-1)P_1 + A_1 x + B_1 y + C_1], \\ \Theta &= n_0 P_0 + A_0 x + B_0 y + C_0 + z[n_1 P_1 + A_1 x + B_1 y + C_1]. \end{aligned} \tag{62}$$

Коэффиціенты при степеняхъ z въ выраженіяхъ проекцій напряженій на оси координатъ будутъ опредѣляться слѣдующими формулами

$$X_{x,j} = -2K\left[\frac{\mu-1}{2}(n_jP_j + A_jx + B_jy + C_j) + \frac{\partial u_j}{\partial x}\right],$$

$$Y_{y,j} = -2K\left[\frac{\mu-1}{2}(n_jP_j + A_jx + B_jy + C_j) + \frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \qquad (j=0,1)$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right),$$

$$X_{x,i} = -2Kn_j(\mu - m_j)\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}, \quad Y_{y,i} = -2Kn_j(\mu - m_j)\frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2}, \qquad (i=2,3$$

$$X_{y,i} = 0,$$

$$Z_{x,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right), \qquad \mathbf{(63)}$$

$$Z_{x,k} = -K\left[[(1-\mu)n_j + m_jn_j - 1]\frac{\partial P_j}{\partial x} + (m_j - \mu)A_j\right],$$

$$(k=1,2;\ j=0,1)$$

$$Z_{y,k} = -K\left[[(1-\mu)n_j + m_jn_j - 1]\frac{\partial P_j}{\partial y} + (m_j - \mu)B_j\right],$$

$$Z_{x,3} = 0, \quad Z_{y,3} = 0,$$

$$Z_{z,j} = -K\left[[n_j(\mu+1) - 2]P_j + (\mu+1)(A_jx + B_jy + C_j)\right], \qquad (j=0,1)$$

$$Z_{z,i} = 0. \qquad (i=2,3)$$

Въ уравненіяхъ (62) и (63)

$$P_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y}.$$

Функціи u_j и v_j можно опредѣлить при помощи уравненій (61) при условіяхъ на поверхности

$$X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a = X_j,$$

$$(j=0,1)$$

$$X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a = Y_j,$$

гдѣ X_j и Y_j суть заданныя функціи координатъ x и y.

Для опредѣленія функціи w_0, удовлетворяющей уравненію (60), можно поставить на поверхности цилиндра условіе вида

$$Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a = Z_0,$$

разумѣя подъ Z_0 заданную функцію координатъ.

Вообще, какъ не трудно видѣть, *получается рѣшеніе задачи о равновѣсіи цилиндра подъ дѣйствіемъ слѣдующихъ силъ, приложенныхъ къ его боковой поверхности*

$$P = X_0 + zX_1 + z^2X_2 + z^3X_3,$$

$$Q = Y_0 + zY_1 + z^2Y_2 + z^3Y_3,$$

$$R = Z_0 + zZ_1 + z^2Z_2,$$

гдѣ X_k, Y_k $(k = 0, 1, 2, 3)$, Z_i $(i = 0, 1, 2)$ *суть функціи координатъ* x *и* y.

Пять изъ этихъ одиннадцати функцій можно задать произвольно, остальныя опредѣлятся по этимъ пяти.

15. До сихъ поръ мы предполагали постоянныя m_j и n_j какими угодно, подчиненными лишь одному условію

$$1 + m_j n_j \gtrless 0, \tag{64}$$

а постоянныя A_j, B_j, C_j совершенно произвольными.

Разсмотримъ теперь два частныхъ случая:

1) Постоянныя A_j, B_j, C_j произвольны, а

$$m_0 = m_1 = \mu, \qquad n_1 = n_0 = 1, \tag{65}$$

2) Постоянныя A_j, B_j, C_j равны нулю, а

$$m_0 = m_1 = \frac{3\mu - 1}{2}, \quad n_0 = n_1 = \frac{2}{\mu + 1}. \tag{66}$$

Эти значенія постоянныхъ m_j, n_j возможны, такъ какъ условіе (64) навѣрно выполняется въ обоихъ случаяхъ.

Предположимъ, что m_j и n_j удовлетворяютъ условіямъ (65).

Уравненія (60) и (61) примутъ слѣдующій видъ

$$\left.\begin{aligned}
&(1+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} = (1-\mu)A_j, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=0,1) \\
&(1+\mu)\frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} = (1-\mu)B_j,
\end{aligned}\right. \tag{67}$$

$$\Delta w_0 + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + (1+\mu)(A_1 x + B_1 y + C_1) = 0.$$

Уравненія (62) дадутъ слѣдующія выраженія для проекцій на оси координатъ перемѣщеній точекъ упругаго тѣла

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 + zu_1 - \frac{z^2}{2} A_0 - \frac{z^3}{6} A_1 , \\
v &= v_0 + zv_1 - \frac{z^2}{2} B_0 - \frac{z^3}{6} B_1 , \qquad (68) \\
w &= w_0 + z(A_0 x + B_0 y + C_0) + \frac{z^2}{2}(A_1 x + B_1 y + C_1) .
\end{aligned}
$$

Наконецъ, уравненія (63) приведутся къ слѣдующимъ

$$
\begin{aligned}
X_{x,j} &= - K\left[(\mu+1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu-1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right], \\
Y_{y,j} &= - K\left[(\mu-1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu+1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right], \\
Z_{z,j} &= - K[(\mu-1)P_j + (\mu+1)(A_j x + B_j y + C_j)], \qquad (69) \\
X_{y,j} &= - K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right), \qquad (j=0,1) \\
Z_{x,0} &= - K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = - K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right), \\
X_{x,i} &= 0 , \quad Y_{y,i} = 0 , \quad X_{y,i} = 0 , \quad Z_{z,i} = 0 , \qquad (i=2,3) \\
Z_{x,k} &= 0 , \quad Z_{y,k} = 0 . \qquad (k=1,2,3)
\end{aligned}
$$

Задача будетъ рѣшена, коль скоро будутъ извѣстны функціи u_j, v_j $(j=0, 1)$ и w_0.

Эти функціи должны удовлетворять уравненіямъ (67), на поверхности же цилиндра (боковой) можно поставить слѣдующія условія

$$
\begin{aligned}
X_{x,j}\cos a + X_{y,j}\sin a &= X_j , \\
X_{y,j}\cos a + Y_{y,j}\sin a &= Y_j , \qquad (70) \\
Z_{x,0}\cos a + Z_{y,0}\sin a &= Z_0 ,
\end{aligned}
$$

гдѣ подъ $X_{x,j}, \ldots, Z_{y,0}$ разумѣются выраженія (69), а подъ X_j, Y_j $(j=0, 1)$, Z_0 заданныя функціи координатъ x, y.

Уравненія (67) вмѣстѣ съ условіями (70) опредѣляютъ функціи u_j и v_j до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій типа

$$Ay + B, \quad -Ax + C, \tag{71}$$

а функцію w_0 до произвольной постоянной.

Въ разсматриваемомъ случаѣ получается рѣшеніе аналогичное тому, которое мы указывали въ §-ахъ отъ 8-ого до 14-аго.

16. Предположимъ, что

$$X_j = 0, \qquad Y_j = 0.$$

Опредѣленіе функцій u_j, v_j приводится къ интегрированію уравненій

$$\begin{aligned} \Delta u_j + \mu \frac{\partial \Theta_j}{\partial x} &= A_j, \\ \Delta v_j + \mu \frac{\partial \Theta_j}{\partial y} &= B_j, \end{aligned} \tag{72}$$

гдѣ

$$\Theta_j = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} + A_j x + B_j y + C_j,$$

при слѣдующихъ условіяхъ на поверхности

$$\begin{aligned} &\left[(\mu+1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu-1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right]\cos a + \\ &\qquad + \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right]\sin a = 0, \\ &\left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right]\cos a + \\ &+ \left[(\mu-1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu+1)\frac{\partial v_j}{\partial y} + (\mu-1)(A_j x + B_j y + C_j)\right]\sin a = 0. \end{aligned} \tag{73}$$

Такъ какъ условіями (72) и (73) функціи u_j, v_j опредѣляются вполнѣ до нѣкоторыхъ линейныхъ функцій типа (71), то, найдя какое бы то ни было рѣшеніе уравненій (72), удовлетворяющее въ тоже время и условіямъ (73), мы получимъ самое общее рѣшеніе, прибавивъ къ найденному только что упомянутыя линейныя функціи вида (71).

Положимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} = \frac{1-\mu}{\mu}(A_j x + B_j y + D_j), \tag{74}$$

гдѣ D_j есть нѣкоторая постоянная.

Уравненія (72) приведутся къ слѣдующимъ

$$\Delta u_j = 0\,, \quad \Delta v_j = 0. \tag{75}$$

При помощи уравненій (74) и (75) находимъ

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} - \frac{\partial v_j}{\partial x} = \frac{1-\mu}{\mu}(B_j x - A_j y + E_j)\,, \tag{74_1}$$

гдѣ E_j произвольная постоянная.

Принявъ въ разсчетъ это уравненіе и (74), приводимъ равенства (73) къ слѣдующему виду

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial u_j}{\partial x} + \lambda(A_j x + B_j y + F_j)\right]\cos a + \left[\frac{\partial u_j}{\partial y} + \lambda(B_j x - A_j y + E_j)\right]\sin a = 0, \\ &\left[\frac{\partial v_j}{\partial x} - \lambda(B_j x - A_j y + E_j)\right]\cos a + \left[\frac{\partial v_j}{\partial y} + \lambda(A_j x + B_j y + F_j)\right]\sin a = 0, \end{aligned} \tag{76}$$

гдѣ

$$\lambda = \frac{\mu - 1}{2\mu}\,, \quad F_j = \mu C_j - (\mu - 1) D_j.$$

Положимъ

$$\varphi_j = \lambda\left[A_j \frac{x^2 - y^2}{2} + B_j xy + F_j x + E_j y\right],$$

$$\psi_j = \lambda\left[A_j xy - B_j \frac{x^2 - y^2}{2} - E_j x + F_j y\right].$$

Можемъ писать [рав. (76)]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(u_j + \varphi_j)}{\partial x}\cos a + \frac{\partial(u_j + \varphi_j)}{\partial y}\sin a = 0\,, \\ &\frac{\partial(v_j + \psi_j)}{\partial x}\cos a + \frac{\partial(v_j + \psi_j)}{\partial y}\sin a = 0. \end{aligned} \tag{77}$$

Такъ какъ

$$\Delta(u_j + \varphi_j) = 0\,, \qquad \Delta(v_j + \psi_j) = 0\,,$$

то

$$u_j = -\lambda\left[A_j \frac{x^2 - y^2}{2} + B_j xy + F_j x + E_j y\right] + M_j\,,$$

$$v_j = -\lambda\left[A_j xy - B_j \frac{x^2 - y^2}{2} - E_j x + F_j y\right] + N_j.$$

Уравненія (74) и (74_1) будутъ удовлетворены, если положимъ

$$C_j = D_j .$$

Самое общее рѣшеніе получимъ, прибавивъ къ найденнымъ функціямъ u_j и v_j линейныя функціи типа (71).

Остается только опредѣлить функцію w_0 при помощи послѣдняго изъ уравненій (67) и послѣдняго изъ условій (70).

Очевидно, *что полученное такимъ путемъ рѣшеніе совпадетъ съ рѣшеніемъ С. Венана, если положить еще*

$$Z_0 = 0 .$$

17. Разсмотримъ второй случай

$$A_j = B_j = C_j = 0\,, \qquad m_0 = m_1 = \frac{3\mu - 1}{2}\,, \qquad n_0 = n_1 = \frac{2}{\mu + 1} .$$

Уравненія (61) обратятся въ слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} &4\mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + (\mu + 1) \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + (3\mu - 1) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x \partial y} = 0\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j=0,1) \\ &4\mu \frac{\partial^2 v_j}{\partial y^2} + (\mu + 1) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + (3\mu - 1) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x \partial y} = 0\,, \end{aligned}\right\} \quad (78)$$

а равенства (63) въ слѣдующія

$$X_{x,j} = -\frac{2K}{\mu + 1}\left[2\mu \frac{\partial u_j}{\partial x} + (\mu - 1)\frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \quad X_{x,i} = -K \frac{1 - \mu}{1 + \mu}\frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2}\,,$$

$$(j=0,1;\ i=2,3)$$

$$Y_{y,j} = -\frac{2K}{\mu + 1}\left[(\mu - 1)\frac{\partial u_j}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial v_j}{\partial y}\right], \quad Y_{y,i} = -K \frac{1 - \mu}{1 + \mu}\frac{\partial^2 P_j}{\partial y^2}\,,$$

$$X_{y,j} = -K\left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x}\right), \quad X_{y,i} = 0\,,$$

$$Z_{x,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1\right), \quad Z_{y,0} = -K\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1\right),$$

$$Z_{x,k} = 0\,, \quad Z_{y,k} = 0\,, \qquad (k=1,2,3)$$

$$Z_{z,s} = 0 . \qquad (s=0,1,2,3)$$

Проекціи на оси координатъ силъ, дѣйствующихъ на боковую поверхность цилиндра представятся подъ видомъ

$$P = X_0 + zX_1 + z^2 X_2 + z^3 X_3 ,$$

$$Q = Y_0 + zY + z^2 Y_2 + z^3 Y_3 ,$$

$$R = Z_0 ,$$

гдѣ X_s, $Y_s (s = 0, 1, 2, 3)$, Z_0 суть функціи x и y.

Изъ нихъ пять, напр., X_0, Y_0, X_1, Y_1 и Z_0, какъ упоминалось выше, могутъ быть заданы произвольно, остальныя опредѣлятся сами собой.

Предположимъ, что

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + u_1 = 0 , \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} + v_1 = 0 . \tag{79}$$

Въ такомъ случаѣ

$$Z_{x,0} = 0 , \qquad Z_{y,0} = 0 .$$

Уравненіе (60) приметъ видъ

$$\varDelta w_0 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0$$

и является прямымъ слѣдствіемъ уравненій (79).

Уравненія (78) при $j = 1$ приводятся, при помощи (79), къ двумъ слѣдующимъ

$$\frac{\partial \varDelta w_0}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial \varDelta w_0}{\partial y} = 0 ,$$

или

$$\varDelta w_0 = M ,$$

гдѣ M есть произвольная постоянная.

Положивъ

$$w_0 = f + \frac{M}{4} (x^2 + y^2) ,$$

получимъ слѣдующее уравненіе для опредѣленія f

$$\varDelta f = 0 .$$

Функціи u_1 и v_1 выразятся черезъ f слѣдующимъ образомъ

$$u_1 = - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{M}{2} x , \quad v_1 = - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{M}{2} y .$$

Послѣднее изъ уравненій (59) даетъ

$$\frac{\mu+1}{2}\Theta_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = -M.$$

Принявъ во вниманіе все сказанное, получаемъ [изъ (62)]

$$u = u_0 - z\left(\frac{M}{2}x + \frac{\partial f}{\partial x}\right) + z^2 \frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right),$$

$$v = v_0 - z\left(\frac{M}{2}y + \frac{\partial f}{\partial y}\right) + z^2 \frac{\mu-1}{\mu+1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right),$$

$$w = f + \frac{M}{2}(x^2+y^2) + z\frac{1-\mu}{1+\mu}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\right) - \frac{z^2}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}M.$$

Здѣсь f есть функція, удовлетворяющая уравненію Лапласа, а u_0, v_0 удовлетворяютъ уравненіямъ вида

$$4\mu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (\mu+1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (3\mu-1)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$4\mu\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + (\mu+1)\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (3\mu-1)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} = 0.$$

Полученное такимъ образомъ рѣшеніе очевидно совпадаетъ съ извѣстнымъ рѣшеніемъ Clebsch'а [см. Clebsch. „Theorie d. Elasticität", Leipzig, 1862, s. 152, форм. (130) и (131)].

18. Въ заключеніе замѣтимъ, что, пользуясь вышеприведенными изслѣдованіями, мы могли бы рѣшить задачу о равновѣсіи цилиндра при гипотезѣ, что напряженія, дѣйствующія въ каждой точкѣ тѣла на двѣ взаимно перпендикулярныя площадки, параллельныя плоскостямъ xz и yz, лежатъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ только что упомянутымъ (обобщеніе извѣстной гипотезы С. Венана), а также и при нѣкоторыхъ другихъ предположеніяхъ относительно распредѣленія напряженій внутри цилиндра.

Я позволю себѣ ограничиться этимъ замѣчаніемъ, не приводя относящихся сюда изслѣдованій.

Объ одномъ случаѣ движенія твердаго тѣла.

Г. В. Колосова.

Дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла приводятся, какъ извѣстно, къ виду:

$$Mx'' = V_x\,, \quad My'' = V_y\,, \quad Mz'' = V_z\,,$$

$$\left.\begin{aligned} Ap' &= (B-C)\,qr + Л_\xi\,, \\ Bq' &= (C-A)\,rp + Л_\eta\,, \\ Cr' &= (A-B)\,pq + Л_\zeta\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ x, y, z координаты его центра инерціи C *) по отношенію къ 3-мъ неподвижнымъ въ пространствѣ осямъ OX, OY, OZ, V_x, V_y, V_z проэкціи на эти оси главнаго вектора силъ и реакцій связей, приложенныхъ къ тѣлу, p, q, r проэкціи угловой скорости его на главныя оси инерціи Ξ, Y, Z въ C, а $Л_\xi$, $Л_\eta$, $Л_\zeta$ проэкціи на послѣднія главнаго момента силъ и реакцій.

Вообразивъ въ C перпендикуляръ Z къ круговымъ сѣченіямъ гираціоннаго эллипсоида нашего тѣла въ этой точкѣ, сдѣлаемъ слѣдующее предположеніе на счетъ силъ и реакцій связей: главный моментъ ихъ вокругъ Z остается все время движенія равнымъ нулю. Если α, β, γ будутъ косинусы угловъ, образованныхъ этимъ перпендикуляромъ съ осями инерціи, то

$$\beta = 0\,, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1\,, \quad A\alpha^2 (B-C) = C\gamma^2 (A-B)\ **)\,, \qquad (2)$$

---

*) Дифференціальныя уравненія (1) будутъ имѣть тотъ же видъ, если C не центръ инерціи, а какая угодно точка тѣла, но неподвижная. Все нижеслѣдующее распространимо и на этотъ случай.

**) Мы предполагаемъ A, B, C различными другъ отъ друга и

$$A > B > C.$$

откуда между прочимъ:

$$A\alpha^2 + C\gamma^2 = \frac{AC}{B}, \tag{3}$$

а предположеніе на счетъ силъ и реакцій будетъ:

$$\text{Л}_\xi \alpha + \text{Л}_\zeta \gamma = 0. \tag{4}$$

Дифференціальныя уравненія (1) допускаютъ въ этихъ предположеніяхъ частное рѣшеніе, соотвѣтствующее уравненію

$$A\alpha p + C\gamma r = 0, \tag{5}$$

выражающему, что главный моментъ количествъ движенія лежитъ все время въ плоскости круговыхъ сѣченій гираціоннаго эллипсоида. Въ настоящей замѣткѣ мы изслѣдуемъ это частное рѣшеніе и для этого вмѣсто главныхъ осей инерціи Ξ, Y, Z мы примемъ за оси неизмѣнно связанныя съ тѣломъ оси X, Y, Z, получающіяся изъ Ξ, Y, Z, если мы повернемъ послѣднія около оси Y до совпаденія Z съ Z. Будемъ имѣть слѣдующія формулы преобразованія:

$$P = \gamma p - \alpha r, \quad Q = q, \quad R = \alpha p + \gamma r \text{ *)} \tag{6}$$

и наоборотъ:

$$p = \gamma P + \alpha R \qquad \text{и т. д..} \tag{7}$$

Такія же формулы мы получимъ для преобразованія Л_ξ, Л_η, Л_ζ въ моменты вокругъ осей X, Y, Z: Л_X, Л_Y, Л_Z, напримѣръ изъ (7), замѣчая, что $\text{Л}_Z = 0$, получимъ:

$$\text{Л}_\xi = \gamma \text{Л}_X. \tag{8}$$

Дифференцируя (6) и пользуясь (1), найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \gamma\frac{dp}{dt} - \alpha\frac{dr}{dt} = q\left(\frac{\gamma}{A}(B-C)r - \frac{\alpha}{C}(A-B)p\right) + \\ &\qquad + \frac{C\gamma\text{Л}_\xi - A\alpha\text{Л}_\zeta}{AC} \\ \frac{dQ}{dt} &= \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B}rp + \frac{\text{Л}_\eta}{B}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

---

*) P, Q, R проэкціи угловой скорости на новыя оси.

Изъ формулъ (6) при помощи (5) и условія (3), получимъ:

$$P=\frac{Ap}{B\gamma},$$

$$R=\frac{\gamma(A-C)r}{A},$$

$$\frac{\gamma}{A}(B-C)r-\frac{\alpha}{C}(A-B)p=\left(\frac{\gamma}{A}(B-C)+\frac{\alpha}{C}(A-B)\frac{C\gamma}{A\alpha}\right)r=R,$$

$$\frac{C-A}{B}rp=-RP.$$

Точно также на основаніи (4), (3) и (8):

$$\frac{C\gamma Л_\xi-A\alpha Л_\zeta}{AC}=\left(\frac{\gamma}{A}+\frac{\alpha^2}{C\gamma}\right)Л_\xi=\frac{A\alpha^2+C\gamma^2}{AC\gamma}Л_\xi=\frac{Л_\xi}{B\gamma}=\frac{Л_X}{B},$$

и уравненія (9) примутъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP}{dt}&=RQ+\frac{Л_X}{B},\\ \frac{dQ}{dt}&=-RP+\frac{Л_Y}{B}.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Эти 2 уравненія вмѣстѣ съ (5), которое при новыхъ осяхъ приметъ видъ:

$$R-aP=0,\ \left(\text{гдѣ}\quad a=\frac{B(C-A)\alpha\gamma}{AC}\right),\qquad(11)$$

мы примемъ вмѣсто уравненій системы (1), и тогда эта система выразитъ слѣдующую особенность нашей задачи: при рѣшеніи ея, данное матерьяльное твердое тѣло можно замѣнить нематерьяльнымъ одинаковаго съ нимъ вида, къ разнымъ точкамъ котораго приложены силы совершенно также, какъ къ нашему тѣлу, и движенія котораго стѣснены тѣми же связями, какъ и нашего, а по оси Z новаго тѣла расположена масса M въ видѣ безконечно тонкаго стержня такъ, что центръ инерціи ея въ C, а моментъ инерціи относительно C равенъ B, если только къ полученнымъ въ этихъ предположеніяхъ дифференціальнымъ уравненіямъ прибавить уравненіе (11).

Для дальнѣйшаго интегрированія мы предположимъ, что относительное расположеніе осей OX, OY, OZ и $O\mathrm{X}$, $O\mathrm{Y}$, $O\mathrm{Z}$ задано 3-мя Эйлеровыми углами $ж$, $ф$, $э$ *), такъ что

*) См. курсъ Аналит. Механики пр. Д. К. Бобылева; наши P, Q, R соотвѣтствуютъ p, q, r Д. К.

$$P = -ж' \sin ф \cos э + ф' \sin э, \qquad R = ж' \cos ф + э', \tag{12}$$

и сдѣлаемъ еще слѣдующія предположенія на счетъ силъ и реакцій: 1) силы имѣютъ потенціалъ; 2) не только главный моментъ силъ и реакцій вокругъ оси Z равенъ 0, но и отдѣльно: моментъ силъ $= 0$ и моменты каждой изъ реакцій $= 0$. Если потенціалъ силъ будетъ U, а уравненія связей: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_p = 0$, гдѣ U, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$ нѣкоторыя функціи отъ x, y, z, $ф$, $ж$, $э$, то послѣднее требованіе равносильно требованію, чтобы уголъ $э$ не входилъ въ U, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_p$.

Въ этихъ предположеніяхъ уголъ $э$ въ дѣйствительности войдетъ только въ уравненіе (11), а въ ураненія (10) войдетъ только видимымъ образомъ и немедленно изчезнетъ, если вмѣсто проэкцій на оси X и Y мы введемъ проэкціи на направленіе CN, перпендикулярное къ плоскости, опредѣляемой направленіями CZ, CZ, и на перпендикулярное къ CN пересѣченіе плоскостей XY и ZZ. Уравненіе (11) и система (10) могутъ быть тогда интегрированы отдѣльно. Уравненіе (11) по введеніи въ него выраженій (12) приметъ видъ:

$$ж' \cos ф + э' - a(ф' \sin э - ж' \sin ф \cos э) = 0.$$

Введя въ него новую перемѣнную,

$$\tau = e^{э\sqrt{-1}} = \cos э + \sqrt{-1} \sin э,$$

приведемъ его къ виду:

$$\frac{d\tau}{dt} = l\tau^2 + m\tau + n, \tag{13}$$

гдѣ

$$l = \frac{a}{2}(ф' - \sqrt{-1} \sin ф\, ж'),$$

$$m = -\sqrt{-1} \cos ф\, ж',$$

$$n = -\frac{a}{2}(ф' + \sqrt{-1} \sin ф\, ж').$$

Уравненіе (13), какъ извѣстно, подстановкою $\tau = -\dfrac{1}{l}\dfrac{\omega'}{\omega}$ сводится къ линейному уравненію 2-го порядка въ ω.

Примѣры:

1) Движеніе по инерціи $Л_\xi = Л_\eta = Л_\zeta = 0$.

Замѣнивъ данное тѣло стержнемъ, сведемъ задачу къ вопросу о движеніи по инерціи безконечно тонкаго стержня. Это есть равномѣрное вращеніе около оси, сохраняющей постоянное направленіе въ пространствѣ, такъ что при надлежащемъ выборѣ осей OX, OY, OZ можно положить:

$$ж = 0\,, \quad ф = \omega t.$$

Уравненіе (11) будетъ $э' = a\omega \sin э$, откуда

$$\operatorname{tang} \frac{э}{2} = e^{a\omega t + \varepsilon}\,,$$

гдѣ ε постоянное произвольное.

2) Вращеніе твердаго тѣла (тяжелаго) вокругъ неподвижной точки на оси Z (случай Гесса-Некрасова). Замѣнивъ тѣло стержнемъ, найдемъ, что движеніе центра инерціи совершается по законамъ коническаго маятника; въ уравненіи (13) коэффиціенты выразятся въ эллиптическихъ функціяхъ (см. статью пр. П. А. Некрасова. Мат. Сб., XVIII).

3) Движеніе твердаго тяжелаго тѣла, опирающагося остріемъ (на оси Z) на гладкую плоскость (волчекъ Гесса)*). Замѣнивъ тѣло стержнемъ, приведемъ задачу къ обращенію ультраэллиптическаго интеграла, а въ уравненіи (13) коэффиціенты будутъ зависѣть отъ функцій, получающихся черезъ такое обращеніе.

Въ заключеніе замѣтимъ, что наше тѣло можетъ составлять часть цѣлой системы тѣлъ и, если взаимодѣйствія его съ другими тѣлами подчинены условіямъ, требуемымъ нашей задачей для реакцій связей,— все сказанное нами распространимо и на этотъ случай. Какъ примѣръ, разсмотримъ слѣдующую задачу:

4) Катаніе сферы съ гироскопомъ Гесса внутри по горизонтальной плоскости безъ скольженія. Эта задача одинакова съ задачей Д. К. Бобылева о сферѣ съ гироскопомъ внутри, только вмѣсто оси симметріи съ однимъ изъ діаметровъ шара неизмѣнно связанъ перпендикуляръ Z. Замѣняя данное тѣло стержнемъ и предполагая вмѣстѣ съ проф. Н. Е. Жуковскимъ, что въ экваторіальной плоскости (перпендикулярной къ Z) имѣется кольцо **), разность моментовъ инерціи котораго около оси Z и экваторіальной оси $= B$, мы сведемъ нашу задачу къ задачѣ о катаніи однородной сферы по горизонтальной плоскости безъ скольженія. Направленіе и величина угловой скорости сферы остаются здѣсь, какъ извѣстно, неизмѣнными, и надлежащимъ образомъ выбравъ оси OX, OY, OZ, можно положить:

$$ж = \omega t\,, \quad ф = \alpha.$$

---

*) Распространимость случая Гесса на волчекъ Гесса замѣчена пр. А. М. Ляпуновымъ и почти одновременно мною.

**) При отсутствіи кольца задача приводитъ къ эллиптическимъ функціямъ подобно задачѣ Д. К. Бобылева.

Уравненіе (11) будетъ:

$$\omega\cos\alpha + \vartheta' + a\omega\sin\alpha\cos\vartheta = 0\,,$$

откуда

$$\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} = -\sqrt{\frac{a\sin\alpha + \cos\alpha}{a\sin\alpha - \cos\alpha}\;\frac{e^{(\omega t+\varepsilon)\sqrt{a^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}} + 1}{e^{(\omega t+\varepsilon)\sqrt{a^2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}} - 1}}\,,$$

гдѣ ε постоянное произвольное.
