ГЛАВА V.

О движеніи жидкаго тѣла въ какомъ ни есть пространствѣ.

Предъидущее разсужденіе о движеніи жидкаго тѣла въ трубкѣ чрезвычайно узкой открываетъ намъ путь къ изслѣдыванію движенія такого тѣла въ какомъ нибудь пространствѣ; ибо оное разсужденіе можно распространить на какое ни есть число различныхъ трубокъ, которыя можно вообразить въ жидкомъ составѣ и которыя суть не иное что, какъ струи жидкаго вещества имѣющаго постоянное теченіе. Сіе постоянство теченія состоитъ въ томъ, что всѣ частицы чрезъ ту же точку проходящія описываютъ тотъ же путь, и имѣютъ въ оной точкѣ одинакую скорость. Вообразимъ въ жидкомъ тѣлѣ гдѣ ни есть сѣченіе плоскостію, которую возьмемъ за плоскость осей координатъ y и z. Всѣ частицы, которыя проходятъ чрезъ ту же точку сего сѣченія, опредѣляемую координатами b и c, движутся по той же кривой линеѣ. Въ случаѣ предъ симъ нами разсмотрѣнномъ сіи координаты постоянны; но здѣсь онѣ могутъ измѣняться безчисленными образами при переходѣ отъ одной кривой линеи къ другой. Свойство каждой линеи будетъ выражаться двумя уравненіями между координатами x, y, z какой нибудь точки оной линеи; въ сихъ двухъ уравненіяхъ будутъ содержаться два постоянныя количества b и c, какъ параметры, которыя изъ нихъ опредѣлятся чрезъ x, y, z. Пусть произшедшія изъ того дифференціальныя формулы будутъ

$$db = Ldx + Mdy + Ndz,\quad dc = ldx + mdy + ndz,$$

въ которыхъ L, M, N, l, m, n суть функціи однѣхъ координатъ x, y, z.

Поелику частица, коея мѣсто въ концѣ времени t опредѣляется координатами x, y, z, движется по направленію кривой линеи въ томъ мѣстѣ, имѣющей постоянное положеніе; то будетъ $v = u.\frac{dx}{ds}$, $v = u\frac{dy}{ds}$, $w = u.\frac{dz}{ds}$, разумѣя подъ u, v, v, w и s тоже, что и предъ симъ. Посему будетъ $\frac{v}{v} = \frac{dy}{dx}$ и $\frac{w}{v} = \frac{dz}{dx}$, то есть скорости v, v, w имѣютъ такое же между собою отношеніе, какое и дифференціалы dx, dy, dz. Но какъ для той же кривой линеи $db = o$ и $dc = o$; то изъ уравненій $Ldx + Mdy + Ndz = o$, $ldx + mdy + ndz = o$, по исключеніи dz или dy получится уравненіе

$$Lndx + Mndy = Nldx + Nmdy,$$

или $Lmdx + Nmdz = Mldx + Mndz$;

изъ сихъ уравненій найдутся отношенія

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Ln - Nl}{Nm - Mn} = \frac{v}{v};\ \frac{dz}{dx} = \frac{Ml - Lm}{Nm - Mn} = \frac{w}{v}.$$

И такъ положимъ

$$v = K(Nm - Mn);\ v = K(Ln - Nl);\ w = K(Ml - Lm),$$

гдѣ множитель K долженъ быть таковъ, чтобы сіи скорости удовлетворяли уравненію непрерывности.

Полагая плотность или густоту постоянною, имѣемъ, какъ выше видѣли, сіе уравненіе непрерывности

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=o.$$

Поелику въ выраженіи $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ y и z почитаются постоянными; то оно относится къ разнымъ линеямъ; а посему b и c суть перемѣнныя, въ слѣдствіе чего будетъ $db=Ldx$, и $dc=ldx$. Сіе же замѣчаніе относится и къ $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dw}{dz}\right)$.

Естьли положимъ, что K есть функція токмо количествъ b и c, такъ что $dK=Bdb+Cdc$; то будетъ

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)=(BL+Cl)(Nm-Mn)+K\left\{N\left(\frac{dm}{dx}\right)+m\left(\frac{dN}{dx}\right)\right.$$
$$\left.-M\left(\frac{dn}{dx}\right)-n\left(\frac{dM}{dx}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{dv}{dy}\right)=(BM+Cm)(Ln-Nl)+K\left\{L\left(\frac{dn}{dy}\right)+n\left(\frac{dL}{dy}\right)\right.$$
$$\left.-N\left(\frac{dl}{dy}\right)-l\left(\frac{dN}{dy}\right)\right\}$$

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)=(BN+Cn)(Ml-Lm)+K\left\{M\left(\frac{dl}{dz}\right)+l\left(\frac{dM}{dz}\right)\right.$$
$$\left.-L\left(\frac{dm}{dz}\right)-m\left(\frac{dL}{dz}\right)\right\}$$

Сумма сихъ трехъ формулъ должна быть равна нулю. Но изъ первыхъ трехъ членовъ находимъ

$$B[L(Nm-Mn)+M(Ln-Nl)+N(Ml-Lm)=o$$
$$C[l(Nm-Mn)+m(Ln-Nl)+n(Ml-Lm)=o;$$

поелику же формулы $Ldx+Mdy+Ndz$ и $ldx+mdy+ndz$ суть полные дифференціалы, то

$$\left(\frac{dm}{dx}\right)=\left(\frac{dl}{dy}\right),\left(\frac{dn}{dx}\right)=\left(\frac{dl}{dz}\right),\left(\frac{dm}{dz}\right)=\left(\frac{dn}{dy}\right);$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right)=\left(\frac{dL}{dy}\right),\left(\frac{dN}{dx}\right)=\left(\frac{dL}{dz}\right),\left(\frac{dM}{dz}\right)=\left(\frac{dN}{dy}\right);$$

а посему и послѣдніе три члена обращаются въ нуль. И такъ при K функціи токмо количествъ b и c уравненію непрерывности удовлетворяется. Но естьли бы въ K сверхъ b и c заключалися еще x, y, z; или два изъ нихъ, или даже одно, то бы оное условіе не могло быть выполнено Ибо положимъ, что K кромѣ b и c содержитъ въ себѣ еще x, y, и z. Изъ двухъ уравненій кривой линеи два изъ x, y, z опредѣляться чрезъ b, c и чрезъ третье изъ нихъ; и K приведется въ функцію трехъ количествъ b, c и одного изъ x, y, z. Пусть сіе послѣднее будетъ x; то сверхъ членовъ взаимно уничтожающихся будетъ оставаться одинъ членъ $\left(\frac{dK}{dx}\right)(Nm-Mn)$; тоже бы слѣдовало и въ разсужденіи y и z. И такъ K не должно содержать въ себѣ ни одного изъ количествъ x, y, z; а посему оно должно быть функція токмо количествъ b и c.

Такимъ образомъ найденныя нами три скорости удовлетворяютъ уравненію непрерывности.

Въ разсужденіи уравненія давленія замѣтимъ, что естьли переменнымъ количествомъ будетъ почитаться одно x, и возмется интегралъ второй части онаго уравненія; то, по введеніи въ постоянное количество входящее чрезъ интегрованіе двухъ прочихъ перемѣнныхъ количествъ y и z, получится истинный интегралъ. Чрезъ сіе найдется давленіе въ тѣхъ мѣстахъ, для коихъ y и z суть тѣже, или давленіе въ точкахъ находящихся на прямыхъ линеяхъ параллельныхъ оси ординатъ x.

Такимъ же образомъ полагая постоянными x и y или x и z, найдемъ, чрезъ интегрованіе, какъ измѣняется давленіе отъ одной точки до другой на линеѣ параллельной оси z, или оси y. Слѣдовательно давленіе для всякой линеи, какую токмо въ жидкомъ составѣ вообразить можно, будетъ извѣстно.

Къ сему же достигнуть можно и чрезъ разсмотрѣніе одной линеи, какъ въ предъидущей главѣ, прибавивъ только къ интегралу функцію количествъ b и c. Какъ въ семъ случаѣ y и z зависятъ отъ x, то $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dv}{dz}\right)$, $\left(\frac{dv}{dy}\right)$ и проч. обращаются въ нуль. Посему будетъ

$$Udx + Vdy + Wdz = \left(\frac{dv}{dx}\right)vdx + \left(\frac{dv}{dx}\right)vdy + \left(\frac{dw}{dx}\right)vdz;$$

но какъ въ семъ случаѣ $vdy = vdx$, $vdz = wdx$, то выйдетъ

$$Udx + Vdy + Wdz = \left(\frac{vdv + vdv + wdw}{dx}\right)dx = \left(\frac{udu}{dx}\right)dx.$$

И такъ получится

$$\frac{p}{D} = S - \tfrac{1}{2}u^2 + f(b, c).$$

Впрочемъ и не отметая выраженій $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dv}{dz}\right)$ и проч. достигнемъ къ тому же концу. Дѣйствительно по причинѣ $vdy = vdx$, $vdz = wdx$,

$vdz = wdy$, будетъ

$$
\begin{aligned}
Udx + Vdy + Wdz &= \left(\frac{du}{dx}\right) udx + \left(\frac{du}{dy}\right) udy + \left(\frac{du}{dz}\right) udz \\
&+ \left(\frac{dv}{dx}\right) vdx + \left(\frac{dv}{dy}\right) vdy + \left(\frac{dv}{dz}\right) vdz \\
&+ \left(\frac{dw}{dx}\right) wdx + \left(\frac{dw}{dy}\right) wdy + \left(\frac{dw}{dz}\right) wdz \\
&= \left(\frac{udu}{dx}\right) dx + \left(\frac{udu}{dy}\right) dy + \left(\frac{udu}{dz}\right) dz \\
&= \tfrac{1}{2} du^2.
\end{aligned}
$$

Слѣдовательно будетъ, какъ и прежде,

$$\frac{p}{D} = S - \tfrac{1}{2} u^2 + A;$$

разумѣя подъ A функцію координатъ b, c.

Поелику A для той же кривой линеи есть постоянное, то мы можемъ теперь сравнивать между собою давленія въ разныхъ точкахъ той же линеи. Величина S для каждой точки найдется; потомъ по извѣстной фигурѣ кривой линеи извѣстны будутъ коэффиціенты L, M, N, l, m, n въ уравненіяхъ $Ldx + Mdy + Ndz = o$, $ldx + mdy + ndz = o$, по которымъ найдутся три скорости u, v, w; и наконецъ найдемъ

$$uu = KK \left\{ \begin{array}{l} LL(mm+nn) + MM(ll+nn) + NN(ll+mm) \\ -2LMlm - 2LNln - 2MNmn \end{array} \right\},$$

гдѣ K есть постоянное для всѣхъ точекъ кривой линеи, и $\frac{1}{2} uu$ показываетъ высоту соотвѣтствующую скорости u.

Найденное уравненіе $\frac{p}{D} = S - \frac{1}{2} uu + A$ будетъ истинный интегралъ дифференціальнаго уравненія $\frac{dp}{D} = dS - Udx - Vdy - Wdz$, когда для A возмется надлежащая величина. Посему величина A должна быть такая функція координатъ b, c, чтобы по взятіи дифференціала найденнаго уравненія, почитая b и c перемѣнными, достигли именно къ оному дифференціальному уравненію. И такъ должно быть

$$-udu + dA = -Udx - Vdy - Wdz$$

или

$$-udu + dA = -\begin{cases} \left(v\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)\right)dx + \\ \left(v\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)\right)dy + \\ \left(v\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)\right)dz. \end{cases}$$

Но поелику $dv = \left(\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dv}{dy}\right)dy + \left(\frac{dv}{dz}\right)dz$; то будетъ

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)vdx = vdv - \left(\frac{dv}{dy}\right)vdy - \left(\frac{dv}{dz}\right)vdz;$$

подобныя выраженія найдутся и для $\left(\frac{dv}{dy}\right)vdy$, $\left(\frac{dw}{dz}\right)wdz$; посему будетъ

$$\begin{array}{l} -udu + dA = -vdv \\ \quad -vdv - wdw + \end{array} \begin{cases} (vdy - vdx)\left(\frac{dv}{dy}\right) + (vdz - wdx)\left(\frac{dv}{dz}\right) + \\ (vdx - vdy)\left(\frac{dv}{dx}\right) + (vdz - wdy)\left(\frac{dv}{dz}\right) + \\ (wdx - vdz)\left(\frac{dw}{dx}\right) + (wdy - vdz)\left(\frac{dw}{dz}\right). \end{cases}$$

Слѣдовательно

$$dA=(vdy-vdx)\left\{\left(\frac{dv}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}+(vdz-wdy)\left\{\left(\frac{dv}{dz}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{dw}{dy}\right)\right\}+(wdx-vdz)\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)-\left(\frac{dv}{dz}\right)\right\}$$

поелику A есть функція количествъ b, c; то пусть $dA=Edb+Fdc$; и какъ $db=Ldx+Mdy+Ndz$ $dc=ldx+mdy+ndz$; то по поставленіи выйдетъ

$$dA=(EL+Fl)\,dx+(EM+Fm)\,dy+(EN+Fn)\,dz$$

сравненіе сходственныхъ коеффиціентовъ доставляетъ

$$EL+Fl=v\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)-\left(\frac{dv}{dy}\right)\right\}+w\left\{\left(\frac{dw}{dx}\right)-\left(\frac{dv}{dz}\right)\right\}$$

$$EM+Fm=w\left\{\left(\frac{dw}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dz}\right)\right\}+v\left\{\left(\frac{dv}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}$$

$$EN+FN=v\left\{\left(\frac{dv}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dx}\right)\right\}+v\left\{\left(\frac{dv}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dy}\right)\right\}.$$

Изъ сихъ уравненій, по причинѣ $v=K(Nm-Mn)$, $v=K(Ln-Nl)$, $w=K(Ml-Lm)$ и $Lv+Mv+Nw=o$, $lv+mv+nw=o$, произойдутъ отношенія:

$$\frac{E}{K}=l\left\{\left(\frac{dw}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dz}\right)\right\}+m\left\{\left(\frac{dv}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dx}\right)\right\}$$
$$+n\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)-\left(\frac{dv}{dy}\right)\right\}$$

$$\frac{F}{K}=L\left\{\left(\frac{dw}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dz}\right)\right\}+M\left\{\left(\frac{dv}{dz}\right)-\left(\frac{dw}{dx}\right)\right\}$$
$$+N\left\{\left(\frac{dv}{dx}\right)-\left(\frac{dv}{dy}\right)\right\}.$$

Поелику E, F и K суть функціи токмо количествъ b и c, то вторыя части сихъ уравненій не должны содержать въ себѣ x, y, z; а посему скорости v, v, w должны быть таковы, чтобы, чрезъ поставленіе вмѣсто $\left(\frac{dv}{dy}\right)$, $\left(\frac{dv}{dz}\right)$, $\left(\frac{dw}{dx}\right)$ и проч. ихъ выраженій, координаты x. y, z изъ оныхъ уравненій выключилися. Сіе условіе постановляетъ для K извѣстное опредѣленіе, равно какъ и для коеффиціентовъ L, M, N, l, m, n. Посему два уравненія между x, y, z, b, c не зависятъ совершенно отъ нашего произволенія, но ограничиваются двумя условіями выраженными въ двухъ послѣднихъ уравненіяхъ.

Положимъ, для примѣра, что жидкое тѣло обращается около оси z, такъ, что каждая частица описываетъ окружность круга. Въ семъ случаѣ будетъ $z=c$, $xx+yy=bb$; откуда $db=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{xx+yy}}$ и $dc=dz$; почему $L=\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$, $M=\frac{y}{\sqrt{xx+yy}}$, $N=o$; $l=o$, $m=o$, $n=1$; и слѣдственно $v=\frac{-Ky}{\sqrt{xx+yy}}$, $v=\frac{Kx}{\sqrt{xx+yy}}$, $w=o$, и $u=\sqrt{v^2+v^2+w^2}=K$. Изъ сего явствуетъ, что по всей окружности того же круга скорость есть одинакова, и есть функція какъ радіуса b, такъ и высоты круга c.

Сверхъ сего здѣсь

$$dA=(vdy-vdx)\left\{\left(\frac{dv}{dy}\right)-\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}+vdz\left(\frac{dv}{dz}\right)+vdz\left(\frac{dv}{dz}\right);$$

но $vdy-vdx=\frac{-Kydy-Kxdx}{\sqrt{xx+yy}}=-Kdb$, притомъ полагая $dK = Bdb + Cdz = \frac{Bxdx + Bydy}{\sqrt{xx+yy}} + Cdz$, имѣемъ

$\left(\frac{dv}{dy}\right) = \frac{-Kxx}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} - \frac{Byy}{xx+yy}$; $\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{Kyy}{(xx+yy)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Bxx}{xx+yy}$;

$\left(\frac{dv}{dz}\right) = \frac{Cx}{\sqrt{xx+yy}}$ и $\left(\frac{dv}{dz}\right) = \frac{-Cy}{\sqrt{xx+yy}}$; посему будетъ

$dA = \frac{KKdb}{b} + BKdb + CKdc = \frac{KKdb}{b} + KdK.$

Поелику сіе уравненіе должно допускать интегрованіе, то K должно быть функція одного b; и будетъ

$$A = \int\frac{KKdb}{b} + \tfrac{1}{2}KK;$$

и наконецъ

$$\frac{P}{D} = S + \int\frac{KKdb}{b}.$$

Уравненіе кривой линеи производящей своимъ вращеніемъ около оси z поверхность будетъ

$$S + \int\frac{KKdb}{b} = o.$$

Пустъ всѣ частицы вращающагося жидкаго несжимаемаго тѣла побуждаются центропритягательною силою R; скорость вращенія частицы, отстоящей отъ оси на разстояніе $= y$ и отъ центра на r, пусть ϑ. Уравненіе кривой производящей линеи будетъ

$$-\int Rdr + \int\frac{\vartheta\vartheta dy}{y} = o.$$

Пусть, на примѣръ $R = \alpha r^m$, $\vartheta = \beta y^n$; наше уравненіе будетъ

$$\frac{\beta\beta y^{2n}}{2n} = \frac{\alpha r^{m+1} - \alpha a^{m+1}}{m+1},$$

гдѣ a означаетъ полуось вращенія, которой когда z сдѣлается равенъ, тогда $y=o$. Посему уравненію найдется полудіаметръ екватора e, чрезъ поставленіе $y=z=e$, и будетъ

$$\frac{(m+1)\beta\beta}{2\alpha n} . e^{2n} = e^{m+1} - a^{m+1}.$$

Или по извѣстному полудіаметру екватора опредѣлится полуось такимъ образомъ:

$$a = \sqrt[m+1]{\left(e^{m+1} - \frac{(m+1)\beta\beta}{2\alpha n} . e^{2n}\right)}.$$

Естьли положимъ $m=1$ и $n=1$; то уравненіе поверхности будетъ

$$\beta\beta y^2 = \alpha r^2 - \alpha a^2,$$

или, поставивъ x^2+y^2 вмѣсто r^2,

$$\alpha(x^2+y^2) = \beta\beta y^2 + \alpha a^2,$$

откуда

$$y^2 = \frac{\alpha}{\alpha - \beta^2}(a^2 - a^2),$$

что есть уравненіе еллипсиса, коего полуоси e и a относятся между собою такъ, какъ α къ $\alpha - \beta^2$, а посему тѣло имѣетъ видъ еллипсиса у полюсовъ сжатаго, а у екватора растянутаго.

Положимъ еще, что жидкое тѣло обращается въ цилиндрическомъ сосудѣ около его оси вертикальной, и на частицы онаго тѣла дѣйствуетъ одна токмо тяжесть, которую положимъ равною единицѣ. Вообразимъ сѣченіе цилиндра плоскостію проходящею чрезъ его ось, возмемъ сію ось за ось абциссъ x.

Уравненіе кривой линеи образуемой сѣченіемъ поверхности будетъ

$$\int \frac{zzdy}{y} = x - a.$$

Естьли скорость z пропорціональна ординатѣ y; или $z = \frac{y}{\sqrt{c}}$; то выйдетъ уравненіе

$$yy = 2c(x - a);$$

слѣдовательно искомая кривая линея будетъ парабола, коея вершина находится на оси цилиндра, которой параметръ $= 2c$, и которая обращеніемъ своимъ около оси производитъ вогнутую поверхность жидкаго тѣла.