РОЗДІЛ VI.

ВИХРОВА ТЕОРІЯ КРИЛА КОНЕЧНОГО РОЗМАХУ

§ 1. Вступ

Вивчаючи безконечно довге крило в плоско-рівнобіжному потоко ми бачили, що таке крило від потоку зазнає тільки підіймальної сил що її величина пропорційна до циркуляції навколо крила.

Якщо взяти елемент безконечно довгого крила завширшки dx, то пі- діймальна сила, що припадає на нього, подається формулою:

$$dP = \rho V_0 \Gamma dx. \qquad (1$$

Визначаючи циркуляцію Γ з умови конечности швидкости в кутові точці профілю, маємо для неї величину:

$$\Gamma = \pi V_0 t \sin \alpha_1 , \qquad (2$$

де α_1 — кут атаки щодо першої осі профілю (тобто напряму, якому ві- повідає підіймальна сила, що дорівнює нулеві), t — якась довжина, щ характеризує профіль (і звичайно мало різниться від глибини профілю). Тому, що застосовувані на практиці кути α_1 дуже малі, то формулу (2 можна замінити такою, простішою

$$\Gamma = \pi V_0 t \alpha_1 , \qquad (3$$

так що

$$dP = \pi \rho V_0^2 t \alpha_1 dx , \qquad (4$$

при чому кут α_1 треба подати в радіянах.

У дослідах, де плоско-рівнобіжне обтікання крила здійснено з велики наближенням, виявлено, що ці формули досить добре погоджують з дійсністю.

Правда, у зв'язку з в'язкістю повітря, якою, виводячи формулу (2), м нехтували, наведені наслідки потребують двох поправок, а саме: дл підіймальної сили в дійсності буде трохи менша величина, ніж та, щ відповідає формулі (4), а для чолового опору буде величина зовсім мал але все таки не нуль. Джерело обох відхилів від теорії — це тертя повіт об поверхню крила.

Чоловий опір, що припадає на елемент dx безконечно-довгого крил (так званий профільний опір), можна подати в формі:

$$dQ_p = C_p \rho V_0^2 t dx , \qquad (5$$

де C_p — якийсь сучинник, що його визначають тепер майже тільки до- слідним шляхом.

[1] Див. додаток 3, приклад 2.

Для добрих профілів:

$$C_p \cong 0{,}004.$$

Формула (5) вносить першу поправку на поверхневе тертя у знайдений у нас раніше закон опору для безконечно-довгого крила.

Щоб внести другу поправку на поверхневе тертя крила, покладімо

$$\Gamma = kV_0 t\alpha_1 \tag{6}$$

$$dP = k\rho V_0^2 t\alpha_1 dx, \tag{7}$$

де k — якесь стале число, близьке до π, але завжди менше від нього. Це число залежить від профілю крила.[1]

Переходячи від плоско-рівнобіжних течій до обтікання реального крила, ми повинні зразу відзначити два важливі чинники, що їх потверджують усі експерименти; поперше — чоловий опір реального крила чимало перевищує ту величину, яку можна було б за формулою (5) розглядати, як наслідок поверхневого тертя; подруге, при рухові крила конечного розміру за ним утворюються вихри, що тягнуться від заднього окрайка крила назад, приблизно в формі плоскої смуги.

Не спиняючись тут на пояснюванні процесу утворювання вихрів позаду крила, зауважмо, що на вихротворення повинна витрачатися якась енергія, а це значить, що при рухові крила повинен поставати опір, зв'язаний із зазначеним вихротворенням. Отже, наведені експериментальні факти між собою зв'язані: вихри, що супроводять крило, спричиняються (або індукують) до якогось чолового опору, що в зв'язку з цим має назву індуктивного опору.

Тому що індуктивний опір є головна частина чолового опору і тому що він, відмінно від профільного опору, чимало залежить від розмаху крила, то стає зрозумілим важливе значення теорії індуктивного опору[2] (або вихрової теорії крила) при проєктуванні несних поверхень літака.

§ 2. Основні поняття

Перше ніж почати викладати основні припущення, що на них збудовано вихрову теорію крила, спинімось трохи на процесі утворення вихрової заслони, що супроводить крило в його рухові.

Рис. 102 a.

Покажімо, що для крила конечних розмірів існування такої вихрової заслони конче випливає з існування підіймальної сили. І справді, якщо на крило впливає якась підіймальна сила, то тиск коло нижнього боку крила більший, ніж тиск коло верхнього боку. Ця різниця тиску призводить до якоїсь течії, де повітря під крилом рухається від середини до країв, а над крилом від країв до середини (рис. 102 a). Цей рух зберігається також і після того як частки течива, що брали в ньому участь, залишають через основну течію крило.

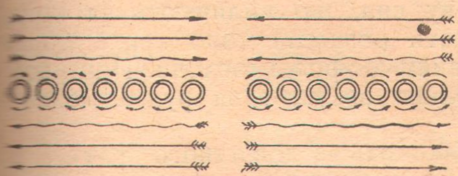

Рис. 102 b.

[1] Питання, як знайти число k для заданого профілю, розглянемо нижче (див. § 7 у цьому розділі).

[2] Ідеї, що лежать в основі цієї теорії, висловлювали Lanchester, М. Є. Жуковський і С. Чаплигін, але тільки Prandtl'еві та його школі пощастило розвинути струнку й повну вихрову теорію крила.

Отож, за рухомим крилом тягнеться якась поверхня, вздовж якої шви-кість течива зазнає розриву (рис. 102 b). Така поверхня розриву екві-лентна рядові рівнобіжних вихрів, що починаються на задньому окрай-крила й тягнуться назад у напрямі потоку (рис. 103).

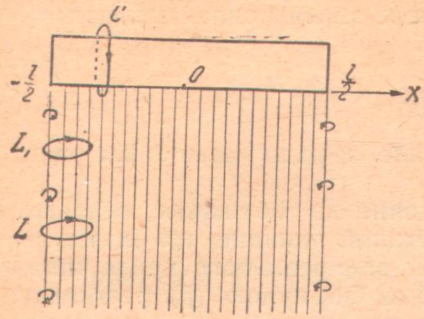

Рис. 103.

Візьмімо (рис. 103) якийсь контур, що обіймає частину цих вихрів де-будь за крилом. Циркуляція по цьо-контурові матиме деяку вартість; во-залежить від інтенсивности вихрів, щ-проходять через цей контур. Якщо м-розташуємо вісь X по розмахові цьо-крила, як це показано на рисунку, т-контур L, очевидно, визначатимуть т-абсциси, що відповідають крайнім ви-храм, захоплюваним контуром. Лів-абсциса є стале число, а права — якас-змінна величина x. Ось через що ци-куляцію по контурові L можна вважат-за функцію від x. Позначмо її $\Gamma(x)$.

Контур L можна перемістити в положення L_1, а також у лінію C, щ-охоплює крило в перекрої x. При цьому переміщенні контура L в но-положення він не перетне крила, а також не перетне вихрів.

Тому на підставі Stokes'ової теореми циркуляція по цьому контурові повинна залишатися під час досліджуваного переміщення контура сталою.

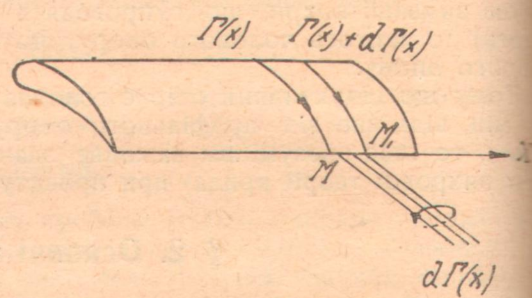

Рис. 104.

Отже ми доходимо висновку, що в перекрої крила з абсцисою x буде та сама циркуляція $\Gamma(x)$, що й навколо вихрів, які впираються на ліву частину крила, обмежену абсцисою x справа.

Якщо ми візьмемо два перекрої крила M і M_1 (рис. 104) з абсцисами x і $x+dx$, то циркуляції, щ-їм відповідають, будуть

$$\Gamma(x) \text{ і } \Gamma(x+dx) = \Gamma(x) + d\Gamma(x).$$

На підставі сказаного на елемент крила MM_1 повинна спиратися вихров-смуга з циркуляцією $d\Gamma(x)$.

Отже, ми показали, що циркуляція навколо крила конечного розмір-міняється, переходячи від одного перекрою до другого, і є, очевидн-якась функція від x. Разом з тим установлено зв'язок між циркуляціє-навколо крила та інтенсивностями вихрів, що супроводять крило.

Щоб розв'язати завдання про величину сил, що впливають на крил-конечного розміру, треба насамперед знати розподіл коло крила додат-кових швидкостей, що зв'язані з існуванням вихрової заслони. При цьом-точна математична теорія питання повинна зважити на рух і можли-зміни самої вихрової заслони.

Подавана нижче наближена теорія виходить із дослідного факту, щ-швидкість додаткової течії течива, утворювана вихровою заслоною, мал-порівнюючи з основною швидкістю потоку.

Тому вихрова теорія крила бере за основу такі положення:

1) можна знехтувати власний рух вихрової заслони;

2) вихрові лінії простолінійні й мають той самий напрям, що й швид-кість потоку на безконечності перед крилом (якщо припустити, що крил-в спокої, а потік набігає);

3) якщо позначити через $v(x)$ числову вартість зв'язаної з існуванням вихрової заслони сторчової швидкости для якоїсь точки x розмаху крила, то відношення

$$\frac{v(x)}{V_0}$$

є мала величина, що її квадрат можна знехтувати.

Виберімо тепер для всього дальшого таку систему координат: вісь X розташуємо, як і вище, по задньому окрайкові крила й зліва направо, якщо дивитися ззаду; за початок координат візьмемо середину розмаху, за напрям осі Z візьмемо напрям потоку на безконечності перед крилом вісь Y спрямуємо вгору. Візьмімо тепер елемент крила, обмежений перекроями з абсцисами x і $x+dx$. Ширина цього елемента дорівнює, отже, dx. Нехай першу вісь цього елемента поставлено під кутом α_1 до напряму руху крила.

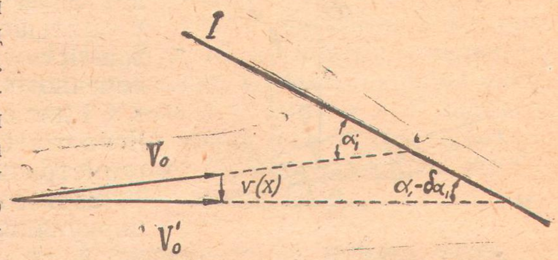

Рис. 105.

Кут α_1 назвімо геометричним кутом атаки.

У зв'язку з існуванням вихрової заслони під вибраним елементом крила буде якась швидкість $v(x)$, спрямована сторч униз. Цієї швидкости не було б, якби досліджуваний елемент крила належав до безконечно-довгого крила в плоскому потокові.

Складімо геометрично швидкість потоку на безконечності перед крилом з швидкістю $v(x)$ (рис. 105). Нова швидкість утворюватиме з першою віссю профілю вже не кут α_1, а менший кут

$$\alpha_1 - \Delta\alpha_1,$$

де

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha_1 = \frac{v(x)}{V_0}.$$

Вважаючи на малість відношення $\frac{v(x)}{V_0}$, можна прийняти $\operatorname{tg}\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha_1$ значить,

$$\Delta\alpha_1 = \frac{v(x)}{V_0} \tag{8}$$

через що новий кут атаки дорівнюватиме

$$\alpha_i = \alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0}. \tag{9}$$

Величина ж нової швидкости дорівнюватиме

$$V_0' = \sqrt{V_0^2 + [v(x)]^2} = V_0 \sqrt{1 + \left[\frac{v(x)}{V_0}\right]^2},$$

але тому, що квадрат відношення $\frac{v(x)}{V_0}$, за вищесказаним, ми нехтуємо, то й різницю між величинами нової та старої швидкости можна знехтувати (залишається тільки різниця в напрямах).

Уявімо собі тепер, що наш елемент крила належить не до конечного крила, а до безконечно-довгого, але поставленого не під кутом α_1, а під

кутом $\alpha_i = \alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0}$, при чому швидкість на безконечності має попередн
величину. Легко бачити, що ці елементи будуть в однаковому положен
щодо обтікання. Той ефект, що його дає для нашого елемента вихро
заслона, в уявлюваного елемента вже зважено через повертання на ві
повідний кут усього потоку.

Можна сказати, що в випадку конечного крила є деякий скіс поток
зв'язаний з існуванням вихрової заслони; інакше кажучи, якщо елеме
конечного крила поставлено під геометричним кутом атаки α_1, то дійсни
(або динамічний) кут атаки буде не α_1, а α
що визначається формулою (9).

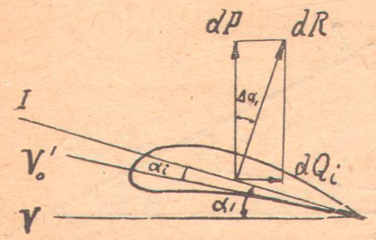

Рис. 106.

Дальше положення вихрової теорії є мо
жливість застосувати до елемента крил
конечного розмаху основні формули, пода
в § 1 для елемента безконечно-довгого крила
Ясно тільки, що скрізь доведеться брати не
геометричний, а дійсний кут атаки.

Застосовуючи формули § 1, знайдемо, що
циркуляція навколо елемента дорівнює

$$\Gamma(x) = kV_0 t(x) \left[\alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0}\right].$$

При цьому замість t у формулі (3) ми пишемо тут $t(x)$, бо глибин
крила конечного розмаху, загалом кажучи, різна в різних перекроях.

Сила опору буде спрямована нормально вже не до напряму швидкост
крила, а до напряму швидкости V'_0 допомічної течії, з якою ми порів
нюємо обтікання нашого елемента. Називаючи цю силу dR:

$$dR = \rho\Gamma(x)\, V_0\, dx \tag{11}$$

і пам'ятаючи, що ця сила вже не нормальна до напряму руху крила, зна
ходимо, що вона дає не тільки підіймальну силу, а й чоловий опі
(рис. 106). Позначаючи підіймальну силу через dP, а чоловий опір чере
dQ (іноді його позначають через dQ_i, щоб підкреслити, що це є індук
тивний опір, який різниться від повного опору, що дорівнює $dQ = dQ_i + dQ_p$
матимемо:

$$dP = \rho\Gamma(x)\, V_0\, dx \cos(\Delta\alpha_1),$$

$$dQ = \rho\Gamma(x)\, V_0\, dx \sin(\Delta\alpha_1).$$

Через те, що $\Delta\alpha_1$ мале, можемо прийняти, що

$$\cos(\Delta\alpha_1) = 1, \quad \sin(\Delta\alpha_1) = \Delta\alpha_1.$$

Тому остаточні формули мають вигляд:

$$dP = \rho\Gamma(x)\, V_0\, dx, \tag{12}$$

$$dQ = \rho\Gamma(x)\, V_0 \Delta\alpha_1\, dx = \rho\Gamma(x)\, v(x) dx. \tag{13}$$

Щоб визначити повну підіймальну силу й повний індуктивний опі
треба просумувати ці вирази по всьому розмахові крила. Якщо позначит
розмах через l, то це приводить до наслідку:

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x)\, dx, \tag{14}$$

$$Q = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x)\, v(x)\, dx. \tag{15}$$

Ці формули є основні для всього дальшого викладу. Друга з них показує, що нам треба знайти насамперед вираз для $v(x)$ через $\Gamma(x)$, бо, як ми вже зазначили, додаткову швидкість $v(x)$ певно обумовлює розподіл циркуляції по розмахові. Це питання ми розглянемо в дальшому параграфі.

§ 3. Визначення додаткової сторчової швидкости при заданому розподілі циркуляції

Візьмімо два перекрої крила, яким відповідають абсциси ξ і $\xi+d\xi$. Нехай циркуляція навколо крила в цих перекроях має вартості $\Gamma(\xi)$ і $\Gamma(\xi)+d\Gamma(\xi)$, так що на виділений елемент крила спирається вихрова смуга завширшки $d\xi$ з циркуляцією $d\Gamma(\xi)$. А що $d\xi$ досить мала величина, то можемо цю вихрову смугу розглядати, як простолінійний вихровий шнур.

Візьмімо якунебудь точку M розмаху крила з абсцисою x і знайдімо ту швидкість безпосередньо під цією точкою крила, яка існує через наявність виділеної вихрової смужки. При цьому будемо пам'ятати, що нас цікавить тільки величина сторчової проєкції швидкости.

Пригадаймо наслідки § 15 розділу I.

Якщо вихрова смуга тяглася б на безконечність в обидва боки, то для швидкости, що нас цікавить, був би вираз:

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{d\Gamma(\xi)}{x-\xi}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{d\Gamma}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi},$$

але в нас вихор тягнеться на безконечність тільки в один бік щодо нормалі з точки M на напрям вихру. Тому, визначаючи швидкість інтеґруванням виразу (21) в § 15 розділу I, ми матимемо тільки половину допіру оце наведеного виразу.

Отже швидкість у точці M, що залежить від виділеної вихрової смуги, дорівнює

$$\frac{1}{4\pi}\,\frac{d\Gamma}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi}.$$

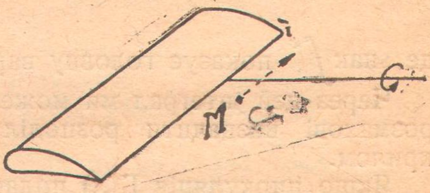

Рис. 107.

Зауважмо, що ця швидкість спрямована сторч униз і дає, значить, точно проєкцію, що нас цікавить. Звернімо тепер увагу на той випадок, коли точка M лежить безпосередньо під виділеним елементом крила. Тоді, як виходить з § 15 розділу I, швидкість у точці M буде не сторчова, а позема (рис. 107) і, значить, її проєкція на сторчовий напрям дорівнюватиме нулеві. Щоб мати повну сторчову швидкість у точці M, треба все крило розбити на елементи й зважити ролю всіх вихрових смужок. На підставі тільки но зробленого зауваження вихрова смужка, що лежить безпосередньо над точкою M, не дає сторчової проєкції. Тому цю смужку, визначаючи повну швидкість, ми повинні викинути.

Для цього, взявши якесь досить мале додатне число ε, виділімо смужку, якій відповідають абсциси $x-\varepsilon$ і $x+\varepsilon$.

Частину розмаху, що залишається, поділімо на елементи, для кожного з них складімо вираз (16) і просумуймо по всіх цих елементах. Так ми прийдемо для сторчової швидкости в точці M до виразу:

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\frac{l}{2}}^{x-\varepsilon}\frac{d\Gamma}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi}+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x+\varepsilon}^{\frac{l}{2}}\frac{d\Gamma}{d\xi}\,\frac{d\xi}{x-\xi}$$

В дійсності не впливає на швидкість у точці M тільки вихор, що лежить безпосередньо над нею; тому в цьому виразі ми повинні вважати ε за безконечно малу величину й перейти до границі $\lim \varepsilon = 0$.

Так, для сторчової швидкости $v(x)$ у точці M матимемо остаточний вираз:

$$v(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{-\frac{l}{2}}^{x-\varepsilon} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi} + \int_{x+\varepsilon}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi} \right\} \qquad (17)$$

Цей вираз дорівнював би інтеґралові

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi}, \qquad (18)$$

якби цей інтеґрал існував, але інтеґрал (18) не існує, бо порядок безконечности підінтеґральної функції в точці $\xi = x$ дорівнює 1.

Вираз же (17) має цілком певну конечну вартість [1]; за Cauchy його звуть головною вартістю інтеґрала (18). Так ми приходимо до формули

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}{}^{*} \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{x-\xi}, \qquad (19)$$

де знак $\int^*$ показує головну вартість інтеґрала (18).

Через цей інтеґрал ми можемо при певному розподілі циркуляції по розмахові визначити розподіл додаткових сторчових швидкостей під крилом.

Якщо циркуляція $\Gamma(x)$ подається за допомогою елементарних функцій, то, підставляючи її у вираз (19) і знайшовши головну вартість інтеґрала, ми зразу визначимо сторчову швидкість. Зауважмо, проте, що функції, які трапляються на практиці, рідко визначаються простими виразами, а багато частіше їх задають таблицями або графічно. В цих випадках

---

[1] Щоб показати існування границі

$$H = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x) \frac{dx}{x-c} \right\},$$

покладімо

$$f(x) = f(c) + (x-c)\,\varphi(x).$$

Тоді

$$H = f(c) \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-c} \right\} + \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} \varphi(x)\,dx \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} f(c) \left\{ \ln(c-x) \Big|_a^{c-\varepsilon} + \ln(x-c) \Big|_{c+\varepsilon}^{b} \right\} + \int_a^b \varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} f(c) \ln \frac{\varepsilon(b-c)}{(c-a)\cdot\varepsilon} + \int_a^b \varphi(x)\,dx = f(c) \ln \frac{b-c}{c-a} + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

доводиться користатися з дуже поширеного в механіці та фізиці способу розкладати такі функції в тригонометричні ряди.

Не маючи змоги докладніше спинитися на цьому питанні[1], ми скажемо тільки про звичайний спосіб, застосовуваний у таких випадках, щоб обчисляти сучинники розкладу функції в тригонометричний ряд.

Пам'ятаймо, що на кінцях крила циркуляція завжди дорівнює нулеві, тобто

$$\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)=0.$$

Це безпосередньо виходить із того, що було сказано в § 2 про зв'язок між циркуляцією навколо крила в перекрої x та інтенсивністю вихрів, що спираються на частину крила, обмежену з одного боку цим перекроєм. Далі з симетрії виходить, що в перекроях x та $-x$ циркуляція однакова, тобто

$$\Gamma(x)=\Gamma(-x). \tag{20}$$

Насамперед зробімо перетворення змінних, покладаючи

$$x=\frac{l}{2}\cos\vartheta.$$

Через те, що x міняється від $-\frac{l}{2}$ до $\frac{l}{2}$, то ϑ мінятиметься від π до 0. Після цього перетворення $\Gamma(x)$ буде вже якась функція від ϑ; її (як це виходить із теорії тригонометричних рядів), можна подати в формі:

$$\Gamma(x)=A_1\sin\vartheta+A_2\sin 2\vartheta+A_3\sin 3\vartheta+\ldots+A_n\sin n\vartheta+\ldots, \tag{21}$$

де $A_1, A_2, A_3, \ldots$ якісь сучинники (далі ми покажемо, як знайти ці сучинники, якщо $\Gamma(x)$ задано графічно або таблицею).

Вираз (21) є розклад циркуляції в тригонометричний ряд, або в ряд Fourier.

Обриваючи першу частину на якомусь члені, ми матимемо наближене представлення циркуляції за допомогою тригонометричних функцій. На практиці досить брати 7—9 членів цього розкладу.

Насамперед використаймо властивість (20). Вона показує, що в розкладі (21) повинні дорівнювати нулеві всі члени з паристими індексами. І справді, якщо

$$x=\frac{l}{2}\cos\vartheta,$$

то

$$-x=\frac{l}{2}\cos(\pi-\vartheta).$$

Тому функція $\Gamma(x)$ не повинна мінятися при заміні ϑ на $\pi-\vartheta$, тобто

$$\Gamma(x)=A_1\sin(\pi-\vartheta)+A_2\sin 2(\pi-\vartheta)+A_3\sin 3(\pi-\vartheta)+\ldots=$$
$$=A_1\sin\vartheta-A_2\sin 2\vartheta+A_3\sin 3\vartheta-\ldots.$$

Складаючи цей вираз із виразом (21), знайдемо, що

$$2\Gamma(x)=2A_1\sin\vartheta+2A_3\sin 3\vartheta+2A_5\sin 5\vartheta+\ldots$$

звідки

$$\Gamma(x)=A_1\sin\vartheta+A_3\sin 3\vartheta+A_5\sin 5\vartheta+\ldots \tag{22}$$

---

[1] Див. *Я. Безікович* і *А. Фрідман*, „Приближенные вычисления", вид. 2, 1930, стор. 152—165.

Спинімось тепер на іншому важливому питанні: нехай циркуляція задана розкладом (22), де сучинники $A_1, A_3 \ldots$ відомі; треба знайти функцію $v(x)$.

Покладаючи

$$\xi = \frac{l}{2}\cos\varphi$$

і зберігаючи позначення

$$x = \frac{l}{2}\cos\vartheta$$

знайдемо, що

$$\Gamma(\xi) = A_1\sin\varphi + A_3\sin 3\varphi + A_5\sin 5\varphi + A_7\sin 7\varphi + \ldots,$$

$$\frac{d\Gamma}{d\xi}d\xi = d\Gamma(\xi) = \{A_1\cos\varphi + 3A_3\cos 3\varphi + 5A_5\cos 5\varphi + 7A_7\cos 7\varphi + \ldots\}\,d\varphi.$$

$$\frac{1}{x-\xi} = \frac{2}{l}\,\frac{1}{\cos\vartheta - \cos\varphi},$$

так що на підставі формули (19)

$$v(x) = \frac{-1}{2\pi l}\left\{A_1\int_0^{\pi *}\frac{\cos\varphi\,.\,d\varphi}{\cos\vartheta - \cos\varphi} + 3A_3\int_0^{\pi *}\frac{\cos 3\varphi\,.\,d\varphi}{\cos\vartheta - \cos\varphi} + \right.$$

$$\left. + 5A_5\int_0^{\pi *}\frac{\cos 5\varphi\,.\,d\varphi}{\cos\vartheta - \cos\varphi} + \ldots\right\}.$$

Обчислімо тому вирази

$$I_k = \int_0^{\pi *}\frac{\cos k\varphi\,.\,d\varphi}{\cos\varphi - \cos\vartheta}.$$

Подаймо I_k у формі

$$I_k = \int_0^{\pi *}\frac{\cos k\vartheta\,.\,d\varphi}{\cos\varphi - \cos\vartheta} + \int_0^{\pi *}\frac{\cos k\varphi - \cos k\vartheta}{\cos\varphi - \cos\vartheta}\,d\varphi =$$

$$= \cos k\vartheta\int_0^{\pi *}\frac{d\varphi}{\cos\varphi - \cos\vartheta} + \int_0^{\pi *}\frac{\cos k\vartheta - \cos k\varphi}{\cos\vartheta - \cos\varphi}\,d\varphi,$$

де другий інтеґрал беруть уже в звичайному розумінні, а не тільки головну вартість, бо в ньому підінтеґральна функція на безконечність не обертається.

Знайдімо перший член написаної формули. Для цього скористаймося з легко перевірюваного співвідношення

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\ln\frac{\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}}{\sin\frac{\varphi+\vartheta}{2}}\,.\,C\right\} = \frac{1}{\cos\vartheta - \cos\varphi},$$

де C — довільна стала. Із нього випливає, що[1]

$$\int_0^{\pi *}\frac{d\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_0^{\vartheta-\varepsilon}\frac{d\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}+\int_{\vartheta+\varepsilon}^{\pi}\frac{d\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sin\vartheta}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln\frac{\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\vartheta+\varphi}{2}}\Bigg|_0^{\vartheta-\varepsilon}+\ln\frac{\sin\frac{\varphi-\vartheta}{2}}{\sin\frac{\varphi+\vartheta}{2}}\Bigg|_{\vartheta+\varepsilon}^{\pi}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sin\vartheta}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\ln\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\left(\vartheta-\frac{\varepsilon}{2}\right)}+\ln\frac{\sin\left(\vartheta+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sin\vartheta}\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{\sin\left(\vartheta+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\vartheta-\frac{\varepsilon}{2}\right)}=0.$$

Отже,

$$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos k\vartheta-\cos k\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}\,d\varphi, \tag{24}$$

щодо цього інтеґралу, то він дорівнює

$$I_k=\pi\frac{\sin k\vartheta}{\sin\vartheta}. \tag{25}$$

Справді, коли $k=1$

$$I_1=\int_0^{\pi}\frac{\cos\vartheta-\cos\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\pi}d\varphi=\pi=\pi\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta};$$

коли $k=2$

$$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\vartheta-\cos 2\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\vartheta-\cos^2\varphi}{\cos\vartheta-\cos\varphi}\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi}\left(\cos\vartheta+\cos\varphi\right)d\varphi=2\pi\cos\vartheta+2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}=2\pi\cos\vartheta=\pi\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Розкладаючи $\cos k\vartheta$ і $\cos k\varphi$ за степенями $\cos\vartheta$ і $\cos\varphi$ і ділячи різницю $\cos k\vartheta-\cos k\varphi$ на різницю $\cos\vartheta-\cos\varphi$, можна переконатися в правдивості формули (25) при будь-якому цілому k.

Отже, ми прийшли до такого важливого наслідку: якщо циркуляція по розмахові крила розподілена за законом

$$\Gamma(x)=A_1\sin\vartheta+A_3\sin 3\vartheta+A_5\sin 5\vartheta+A_7\sin 7\vartheta+\ldots \tag{22}$$

де

$$x=\frac{l}{2}\cos\vartheta,$$

[1] У першому з інтеґралів правої частини за сталу C можна взяти -1, а в другому $+1$.

то величина сторчової швидкости $v(x)$ подається у формі

$$v(x)=\frac{1}{2l\sin\vartheta}\left\{A_1\sin\vartheta+3A_3\sin3\vartheta+5A_5\sin5\vartheta+7A_7\sin7\vartheta+\ldots\right\} \qquad (26)$$

Такий наслідок дозволяє визначити сторчову додаткову швидкість, якщо циркуляцію задано розкладом у тригонометричний ряд.

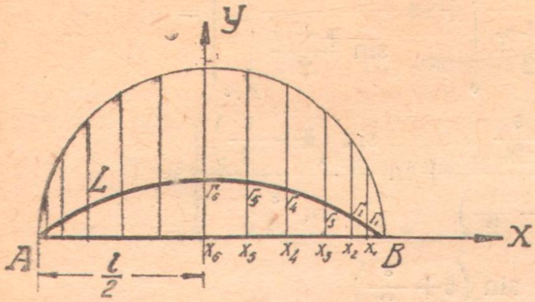

Рис. 108.

Якщо циркуляцію задано графічно (або, що те саме, за допомогою таблиці вартостей Г в різних перекроях), то для того, щоб визначити сторчову швидкість, треба спочатку наближено подати циркуляцію за допомогою метод гармонійної аналізи у формі суми (22), а потім уже скористатися відповідними наслідками.

Нехай відтинок AB є розмах крила (рис. 108); будемо відкладати циркуляцію по осі Y так, що крива L, симетрична на підставі (20) щодо осі Y, є закон розподілу циркуляції по розмахові. Із точки O, як із центру, опишімо обвід кола радіюсом $\frac{l}{2}$ і розділімо верхню його половину на 12 частин (можна було б ділити на більше число частин, щоб мати кращі наближення, але й ділення на 12 частин дає задовільні наслідки). Спускаючи з точок ділення нормалі на вісь X, матимемо ряд точок:

$$x_1=\frac{l}{2}\cos15^\circ,\quad x_2=\frac{l}{2}\cos30^\circ,\quad x_3=\frac{l}{2}\cos45^\circ,$$

$$x_4=\frac{l}{2}\cos60^\circ,\quad x_5=\frac{l}{2}\cos75^\circ,\quad x_6=\frac{l}{2}\cos90^\circ.$$

Знайдімо вартість циркуляції в цих точках безпосередньо з рисунку (або за допомогою таблиці) і позначмо їх відповідно через

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ \Gamma_4,\ \Gamma_5,\ \Gamma_6.$$

Через ці величини сучинники $A_1, A_2, \ldots . A_{11}$ визначаються такими формулами:[1]

$$3A_1=\Gamma_1\sin15^\circ+\Gamma_2\sin30^\circ+\Gamma_3\sin45^\circ+\Gamma_4\sin60^\circ+\Gamma_5\sin75^\circ+$$
$$+\frac{1}{2}\Gamma_6\sin90^\circ;$$

$$3A_3=\Gamma_1\sin45^\circ+\Gamma_2\sin90^\circ+\Gamma_3\sin45^\circ-\Gamma_5\sin45^\circ-\frac{1}{2}\Gamma_6\sin90^\circ,$$

$$3A_5=\Gamma_1\sin75^\circ+\Gamma_2\sin30^\circ-\Gamma_3\sin45^\circ-\Gamma_4\sin60^\circ+\Gamma_5\sin15^\circ+$$
$$+\frac{1}{2}\Gamma_6\sin90^\circ;$$

$$3A_7=\Gamma_1\sin75^\circ-\Gamma_2\sin30^\circ-\Gamma_3\sin45^\circ+\Gamma_4\sin60^\circ+\Gamma_5\sin15^\circ- \qquad (27)$$
$$-\frac{1}{2}\Gamma_6\sin90^\circ;$$

[1] Див. зазначену раніш книжку Я. Безіковича й А. Фрідмана.

$$3\,A_9 = \Gamma_1 \sin 45^\circ - \Gamma_2 \sin 90^\circ + \Gamma_3 \sin 45^\circ - \Gamma_5 \sin 45^\circ + \frac{1}{2}\Gamma_6 \sin 90^\circ,$$

$$3\,A_{11} = \Gamma_1 \sin 15^\circ - \Gamma_2 \sin 30^\circ + \Gamma_3 \sin 45^\circ - \Gamma_4 \sin 60^\circ + \Gamma_5 \sin 75^\circ - $$

$$- \frac{1}{2}\Gamma_6 \sin 90^\circ.$$

Уважно дослідивши ці формули, бачимо, що обчисляти зручно за такою схемою:

$\frac{1}{3}\sin 15^\circ = 0{,}0863$	Γ_1				Γ_5	
$\frac{1}{3}\sin 30^\circ = 0{,}1667$		Γ_2				Γ_2
$\frac{1}{3}\sin 45^\circ = 0{,}2357$	Γ_3		$\Gamma_1+\Gamma_3-\Gamma_5$		$-\Gamma_3$	
$\frac{1}{3}\sin 60^\circ = 0{,}2887$		Γ_4				$-\Gamma_4$
$\frac{1}{3}\sin 75^\circ = 0{,}3220$	Γ_5				Γ_1	
$\frac{1}{3}\sin 90^\circ = 0{,}3333$		$\frac{1}{2}\Gamma_6$		$\Gamma_2-\frac{1}{2}\Gamma_6$		$\frac{1}{2}\Gamma_6$
	I	II	I	II	I	II
Суми I + II	A_1		A_3		A_5	
Різниці I — II	A_{11}		A_9		A_7	

Визначивши сучинники A_1, A_3..., користуємось потім, як уже говорилося раніш, формулою (26), що дає величину сторчової швидкости.

§ 4. Munk'ова задача

Пригадаймо формули (14), (15) для підіймальної сили й індуктивного опору:

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x)\,dx \tag{14}$$

$$Q = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x)\,v(x)\,dx, \tag{15}$$

що ми їх мали в § 2 цього розділу.

Нехай розподіл циркуляції $\Gamma(x)$ по розмахові крила дає розклад:

$$\Gamma(x) = A_1 \sin\vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + A_5 \sin 5\vartheta + \ldots \tag{22}$$

де

$$x = \frac{l}{2}\cos\vartheta.$$

Тоді для сторчової швидкости $v(x)$ матимемо розклад:

$$v(x)=\frac{1}{2l\sin\vartheta}\{A_1\sin\vartheta+3A_3\sin 3\vartheta+5A_5\sin 5\vartheta+\ldots\}. \qquad (27)$$

Щоб обчислити підіймальну силу й індуктивний опір, залишається підставити наведені вирази для $\Gamma(x)$ і $v(x)$ у формули (14) і (15) і зробити інтеґрування.

Щоб полегшити інтеґрування, зазначмо, що

$$\int_0^\pi \sin k\vartheta\,.\sin m\vartheta\,.d\vartheta=\frac{1}{2}\int_0^\pi\{\cos(m-k)\vartheta-\cos(m+k)\vartheta\}d\vartheta.$$

Тому при $k\neq m$

$$\int_0^\pi \sin k\vartheta\,.\sin m\vartheta\,.d\vartheta=0 \qquad (28)$$

і при $k=m$

$$\int_0^\pi \sin^2 k\vartheta\,.d\vartheta=\frac{\pi}{2}. \qquad (29)$$

Користуючись із формул (14) і (15), легко знайдемо, що

$$P=\rho V_0\frac{l}{2}\int_0^\pi\{A_1\sin\vartheta+A_3\sin 3\vartheta+\ldots\}\sin\vartheta d\vartheta=\frac{\pi}{4}\rho V_0 lA_1 \qquad (30)$$

$$Q=\rho\frac{l}{2}\frac{1}{2l}\int_0^\pi\{A_1\sin\vartheta+A_3\sin 3\vartheta+\ldots\}\{A_1\sin\vartheta+3A_3\sin 3\vartheta+\ldots\}d\vartheta=$$

$$=\frac{\pi\rho}{8}\{A_1^2+3A_3^2+5A_5^2+\ldots\}. \qquad (31)$$

Справді, помножуючи вираз $A_1\sin\vartheta+3A_3\sin 3\vartheta+\ldots$ на вираз $A_1\sin\vartheta+A_3\sin 3\vartheta+\ldots$, матимемо члени виду $3A_1A_3\sin\vartheta.\sin 3\vartheta,\ldots$ інтеґрал від яких на підставі (28) дорівнює нулеві й член

$$A_1^2\sin^2\vartheta+3A_3^2\sin^2 3\vartheta+5A_5^2\sin^2 5\vartheta+\ldots,$$

що після інтеґрування дає

$$\frac{\pi}{2}\{A_1^2+3A_3^2+5A_5^2+\ldots\}.$$

З цього видно, що, знаючи розклад циркуляції в тригонометричний ряд, можна визначити підіймальну силу за формулою (30) і індуктивний опір за формулою (31).

Визначаючи A_1 через P формулою (30), можемо подати індуктивний опір Q у формі:

$$Q=\frac{2}{\pi}\frac{P^2}{\rho l^2V_0^2}+\frac{\pi\rho}{8}\left(3A_3^2+5A_5^2+\ldots\right),$$

звідки

$$Q-\frac{2}{\pi}\frac{P^2}{\rho l^2V_0^2}=\frac{\pi\rho}{8}\left(3A_3^2+5A_5^2+\ldots\right).$$

А що права частина цієї рівности додатна при будь-яких вартостях сучинників $A_3, A_5\ldots$, то

$$Q\geqslant\frac{2}{\pi}\frac{P^2}{\rho l^2V_0^2}, \qquad (32)$$

при чому знак рівности в цій формулі буває тільки тоді, коли всі сучинники A_3, A_5, $A_7 \ldots$ дорівнюють нулеві. Звідси маємо такий дуже важливий наслідок: при заданій підіймальній силі P крило має найменший індуктивний опір тоді, коли закон розподілу циркуляції вздовж розмаху крила дається формулою

$$\Gamma = \Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta, \tag{33}$$

де

$$x = \frac{l}{2} \cos \vartheta.$$

Виключаючи з цих співвідношень допоміжний кут ϑ, матимемо:

$$\frac{x^2}{\frac{l^2}{4}} + \frac{\Gamma^2}{A_1{}^2} = 1. \tag{34}$$

Це співвідношення показує, що найменший індуктивний опір при заданій підіймальній силі буде тоді, коли циркуляція розподілена вздовж розмаху крила за законом еліпси (рис. 109).

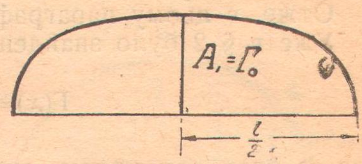

Рис. 109.

Цей наслідок має назву Munk'ової теореми іменем американського вченого, що знайшов його. [1]

Наведімо ряд формул, що стосуються до еліптичного розподілу циркуляції: із (34) маємо, позначаючи A_1 через Γ_0:

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}, \tag{35}$$

підіймальна сила дорівнює

$$P = \frac{\pi}{4} \rho V_0 l \Gamma_0, \tag{36}$$

індуктивний опір дорівнює [2]

$$Q_i = \frac{2}{\pi} \frac{P^2}{\rho l^2 V_0{}^2}, \tag{37}$$

додаткова сторчова швидкість під крилом дорівнює

$$v(x) = \frac{\Gamma_0}{2l} = \frac{2P}{\pi \rho V_0 l^2}. \tag{38}$$

Звернімо увагу на те, що при еліптичному розподілі циркуляції вздовж розмаху додаткова сторчова швидкість під крилом стала (те саме, очевидно, стосується й до скосу потоку).

§ 5. Розподіл циркуляції навколо заданого крила

У цьому параграфі ми будемо розв'язувати таку основну при проєктуванні крила проблему: дано крило, знайти закон розподілу циркуляції вздовж його розмаху.

Щоб не ускладняти обчислень, ми розглянемо той випадок, коли профілі крила по всіх перекроях подібні й усі елементи крила мають однаковий геометричний кут атаки (тобто крило не перекручене).

Тому що крило задано, то форма його в пляні нам відома і тому

[1] *Munk*, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges (Dissertation; Göttingen, 1919.

[2] Тут замість Q пишемо Q_i.

можна вважати за відому глибину крила в кожному перекрої, тобто глибину в функції від x:

$$t = t(x).$$

Так само можна вважати за відоме положення першої осі профілю, відносно якої ми відлічуємо геометричний кут атаки крила. Візьмімо якийсь елемент нашого крила. Якби цей елемент був частиною безконечно-довгого крила, як зазначалося в § 1, циркуляція навколо цього елемента мала б вираз

$$\Gamma = kt\alpha_1 V_0.$$

При цьому величина k, що характеризує профіль, в ідеальному течиві точно дорівнювала б π, але в реальних течивах вона завжди менша від π і залежить від профілю (але не залежить від кута атаки).

Тому, припускаючи, що крило задано, ми можемо вважати k за відоме число. Далі ми спинімося на питанні про фактичне визначення k для кожного профілю. Там таки ми побачимо, яку ролю відіграє при визначенні k експеримент.

Отже, в цьому параграфі ми вважатимемо число k за задане.

Уже в § 2 було знайдено основне рівняння:

$$\Gamma(x) = kt(x)V_0 \left[\alpha_1 - \frac{v(x)}{V_0} \right], \tag{39}$$

що за його допомогою знаходимо закон розподілу циркуляції навколо крила при кожному куті атаки α_1. Наше завдання — розв'язати це рівняння. Точно розв'язати його не можна, але в цьому й нема жадної потреби. Ми дамо наближену методу розв'язувати це рівняння за Trefftz'ом.[1]

Для цього нагадаймо застосовуваний уже в нас розклад циркуляції в тригонометричний ряд:

$$\Gamma(x) = A_1 \sin \vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + A \sin 5_5 \vartheta + A_7 \sin 7\vartheta, \tag{22}$$

де

$$x = \frac{}{2} \cos \vartheta.$$

Як ми бачили, з цієї формули випливає, що

$$v(x) = \frac{1}{2l \sin \vartheta} \left\{ A_1 \sin \vartheta + 3A_3 \sin 3\vartheta + 5A_5 \sin 5\vartheta + 7A_7 \sin 7\vartheta \right\}.$$

Тому рівняння (39) матиме форму:

$$A_1 \sin 3\vartheta + A_3 \sin 3\vartheta + A_5 \sin 5\vartheta + A_7 \sin 7\vartheta =$$

$$= kt(x)V_0\alpha_1 - \frac{kt(x)}{2l \sin \vartheta} \left[A_1 \sin \vartheta + 3A_3 \sin 3\vartheta + 5A_5 \sin 5\vartheta + 7A_7 \sin 7\vartheta \right]. \tag{40}$$

Взявши в розкладі функції $\Gamma(x)$ тільки чотири члени, ми, розуміється, не розраховуємо на те, що рівняння (40) можна зробити тотожністю, вибравши відповідно сучинники A_1, A_3, A_5, A_7.

Для цього треба було б, взагалі кажучи, в розкладі функції $\Gamma(x)$ взяти безконечно багато членів. Ми можемо розпорядитися сучинниками A_1, A_3, A_5 і A_7 тільки так, щоб рівність (40) була точна тільки в кількох перекроях нашого крила.

При цьому чим більше членів візьмемо в розкладі функції $\Gamma(x)$, тим у більшому числі перекроїв розмаху можна зробити рівність (40) точною, і тим точніше буде наше наближення. Досвід показав, що досить брати

---

[1] *Trefftz*, Prandtlsche Tragflächen- und Propeller Theorie (Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 1, H. 3, 1921, S. 206 — 218).

як ми й зробили, за Trefftz'ом тільки 4 члени. Як перекрої, де рівність (40) повинна бути точна, виберемо ті, для яких

$$\vartheta = 22°30'; \; 45°; \; 67°30'; \; 90°. \tag{41$_1$}$$

Тоді на підставі симетрії рівність (40) справджуватиметься також і в тих перекроях, для яких

$$\vartheta = 112°30'; \; 135°; \; 157'30°.$$

Підставляючи ці вартості в рівняння (40), ми повинні й функцію $t(x)$ обчислити в відповідних точках, тобто при

$$x = \frac{l}{2}\cos 22°30'; \; \frac{l}{2}\cos 45°; \frac{l}{2}\cos 67°30'; \; \frac{l}{2}\cos 90°. \tag{41}$$

Щоб полегшити обчислення, пригадаймо, що точки (41) можна мати, проєктуючи вершки правильного многокутника на діяметр, як показує рис. 110.

Умовмось, як це зроблено на рисунку, позначати через t_1, t_2, t_3, t_4 глибину крила в перекроях, яким відповідають абсциси (41). Щоб полегшити обчислення, введімо такі позначення:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\,lk\,\alpha_1\,V_0 B_1, \\ A_3 &= 2\,lk\,\alpha_1\,V_0 B_3, \\ A_5 &= 2\,lk\,\alpha_1\,V_0 B_5, \\ A_7 &= 2\,lk\,\alpha_1\,V_0 B_7; \end{aligned} \tag{42}$$

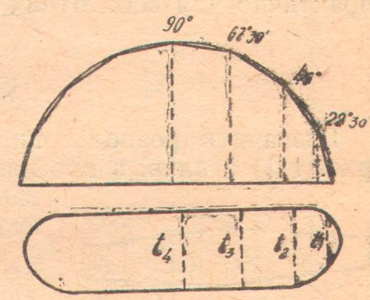

Рис. 110.

$$\frac{t(x)}{l} = \mu(x); \tag{43}$$

$$\mu(x_1) = \mu_1; \; \mu(x_2) = \mu_2; \; \mu(x_3) = \mu_3; \; \mu(x_4) = \mu_4. \tag{44}$$

Тоді наше рівняння матиме форму:

$$B_1 \sin\vartheta + B_3 \sin 3\vartheta + B_5 \sin 5\vartheta + B_7 \sin 7\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2}\mu(x) - \frac{k\mu(x)}{2\sin\vartheta}\left[B_1\sin\vartheta + 3B_3\sin 3\vartheta + 5B_5\sin 5\vartheta + 7B_7\sin 7\vartheta\right] \tag{45}$$

або

$$B_1(1-\cos 2\vartheta) + B_3(\cos 2\vartheta - \cos 4\vartheta) + B_5(\cos 4\vartheta - \cos 6\vartheta) +$$
$$+ B_7(\cos 6\vartheta - \cos 8\vartheta) = \mu(x)\,.\,\sin\vartheta - k\mu(x)\,[B_1\sin\vartheta + 3B_3\sin 3\vartheta + 5\,B_5\sin 5\vartheta + 7B_7\sin 7\vartheta].$$

Підставляючи замість ϑ вартості (41), матимемо остаточно таку систему для визначення невідомих сучинників B_1, B_3, B_5, B_7:

$$\begin{aligned} &B_1(0{,}293 + 0{,}383\,k\mu_1) + B_3(0{,}707 + 2{,}772\,k\mu_1) + B_5(0{,}707 + 4{,}619\,k\mu_1) + \\ &\quad + B_7(0{,}293 + 2{,}679\,k\mu_1) = 0{,}383\,\mu_1; \\ &B_1(1 + 0{,}707\,k\mu_2) + B_3(1 + 2{,}121\,k\mu_2) + B_5(-1 - 3{,}536\,k\mu_2) + \\ &\quad + B_7(-1 - 4{,}950\,k\mu_2) = 0{,}707\,\mu_2; \\ &B_1(1{,}707 + 0{,}924\,k\mu_3) + B_3(-0{,}707 - 1{,}149\,k\mu_3) + B_5(-0{,}707 - 1{,}913\,k\mu_3) + \\ &\quad + B_7(1{,}707 + 6{,}467\,k\mu_3) = 0{,}924\,\mu_3; \\ &B_1(2 + k\mu_4) + B_3(-2 - 3\,k\mu_4) + B_5(2 + 5\,k\mu_4) + B_7(-2 - 7\,k\mu_4) = \mu_4. \end{aligned} \tag{46}$$

Звернімо увагу на таку властивість цієї системи:
1) В рівняння системи не входить кут атаки α_1 і швидкість V_0.

2) Розмах і глибина крила в різних перекроях входять у формі відношень:

$$\frac{t_1}{l}=\mu_1;\ \frac{t_2}{l}=\mu_2;\ \frac{t_3}{l}=\mu_3;\ \frac{t_4}{l}=\mu_4.$$

Тому для двох геометрично подібних крил системи однакові.

Розв'язуючи наведену систему, ми знайдемо величини B_1, B_3, B_5, B_7, а, значить, якусь функцію

$$\Phi(x)=B_1\sin\vartheta+B_3\sin 3\vartheta+B_5\sin 5\vartheta+B_7\sin 7\vartheta,$$

що на підставі зазначених властивостей системи не залежить від абсолютних розмірів крила, а також від швидкости потоку та кута атаки.

Знайшовши $\Phi(x)$, визначімо потім циркуляцію $\Gamma(x)$ у формі

$$\Gamma(x)=2lk\alpha_1 V_0\,\Phi(x),$$

тобто матимемо розв'язання досліджуваної задачі для будь-якої швидкости V_0 і для будь-якого кута атаки α_1, аби тільки він був досить малий (практично для всіх літних кутів атаки).

§ 6. Приклад[1]

Визначити розподіл циркуляції по розмахові крила трапезоїдального (рис. 111) в пляні з профілем № 389 Ґетінґенської ляборatoрії. При цьому вартість сучинника k для досліджуваного профілю задано:

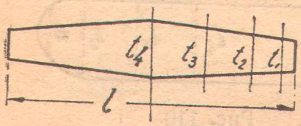

Рис. 111.

$$k=2{,}76.$$

З рисунка знаходимо вартості величини μ:

$$\mu_1=0{,}120,\ \mu_2=0{,}139,$$

$$\mu_3=0{,}167,\ \mu_4=0{,}200.$$

Підставляючи їх, а також величину k в систему (46), матимемо:

$$0{,}420\,B_1+1{,}625\,B_3+2{,}237\,B_5+1{,}180\,B_7=0{,}046,$$

$$1{,}271\,B_1+1{,}814\,B_3-2{,}356\,B_5-2{,}900\,B_7=0{,}098,$$

$$2{,}132\,B_1-1{,}236\,B_3-1{,}590\,B_5+4{,}687\,B_7=0{,}154,$$

$$2{,}552\,B_1-3{,}657\,B_3+4{,}760\,B_5-5{,}862\,B_7=0{,}200.$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо:

$$B_1=0{,}077,\ B_3=0{,}0042,$$

$$B_5=0{,}0030,\ B_7=0{,}00001,$$

так що для циркуляції матимемо вираз:

$$\Gamma=2lk\alpha_1 V_0(0{,}077\sin\vartheta+0{,}0042\sin 3\vartheta+0{,}0030\sin 5\vartheta+0{,}00001\sin 7\vartheta);$$

на підставі формул (30) і (31) бачимо, що для нашого крила

$$P=\frac{\pi}{4}\rho V_0 l\cdot 2lk\alpha_1 V_0\cdot 0{,}077=0{,}334\,\rho l^2 V_0^2\alpha_1,$$

$$Q_i=\frac{\pi\rho}{8}4l^2k\alpha_1^2V_0^2\ (0{,}077^2+3\cdot 0{,}0042^2+5\cdot 0{,}0030^2)=0{,}0721\,\rho l^2V_0^2\alpha_1^2.$$

[1] Пор. *А. В. Чесалов*, „Построение поляры Лилиенталя монопланного крила произвольной формы", „Труды ЦАГИ", вип. 42, стор. 64.

Звідси знайдемо, що для досліджуваного крила[1]

$$C_y = \frac{P}{\rho S V_0^2} = 0{,}0372\,\alpha_1^0, \quad C_i = \frac{Q_i}{\rho S V_0^2} = 0{,}101\, C_y^2.$$

Ці наслідки дозволяють збудувати криві для C_y і C_i для нашого крила (розуміється, правильні тільки в межах невеликих кутів атаки), що й зроблено на рис. 112.

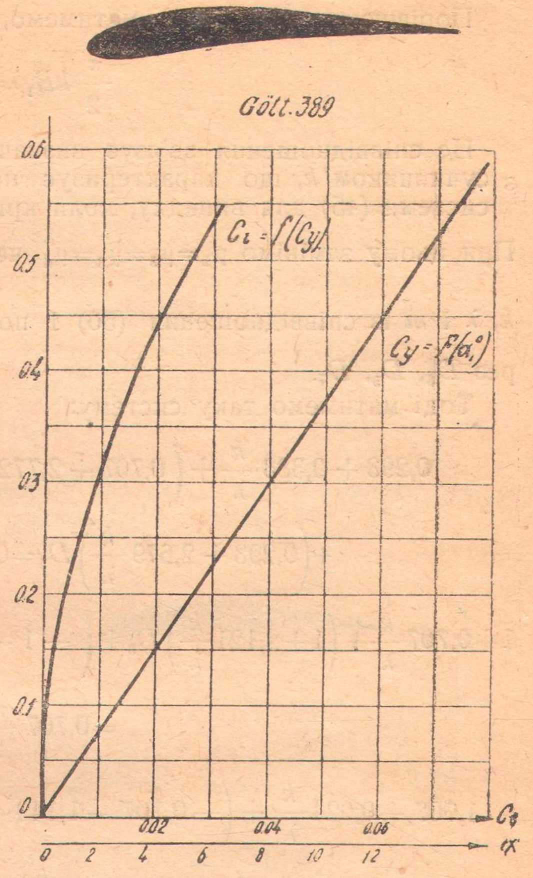

Рис. 112.

§ 7. Визначення сучинника k

Як уже зазначалося раніш, сучинник k у формулі

$$\Gamma = k V_0 t\, \alpha_1$$

для безконечно-довгого крила (де α_1 — кут атаки в радіянах, відлічуваний від напряму першої осі), коли нема тертя, дорівнював би π, а в реальних течивах через тертя завжди менший від π.

Постає питання, як можна визначити цей сучинник для будь-якого профілю, маючи наслідки продування якогось крила конечних розмірів з цим профілем. Звичайно, в ляборатоpіях випробовують крила прямокутні в пляні, для яких

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \frac{t}{l} = \frac{1}{\lambda},$$

де λ — відношення розмаху прямокутнього крила до глибини.

На підставі зауваження, зробленого в § 5, циркуляція для крила конечного розмаху подається формулою:

$$\Gamma(x) = 2\, l k \alpha_1 V_0\, \{B_1 \sin\vartheta + B_3 \sin 3\vartheta + B_5 \sin 5\vartheta + B_7 \sin 7\vartheta\}, \tag{47}$$

де B_1, B_3, B_5, B_7 — сучинники, що залежать від форми крила в пляні й від сучинника k, але не залежать від кута атаки, від швидкости й від абсолютних розмірів крила.

Із (47) виходить, що підіймальна сила P для крила конечного розмаху подається формулою:

$$P = \rho V_0 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Gamma(x)\, dx = \frac{\pi}{2} k B_1 \rho\, \alpha_1 l^2 V_0^2, \tag{48}$$

де B_1 залежить тільки від k й від форми крила, що у випадку прямокутнього пляну цілком характеризує відносний розмах λ.

---

[1] Тут кут атаки беруть уже в градусах, але відлічують, як і раніше, від напряму першої осі; в досліджуваному випадку подовження $\lambda = \frac{l^2}{S}$ дорівнює 6,37. Згідно з § 5 розділу V в наведених формулах замість величин P та Q_i введено абстрактні сучинники C_y та C_i.

Крім того, в наслідок продувань прямокутнього крила для підіймальної сили P маємо вираз[1]

$$P = m\rho\alpha_1 t l V_0^2, \tag{49}$$

де m — якийсь сучинник, визначений експериментально.

Порівнюючи (48) і (49), матимемо, що

$$\frac{\pi}{2} k B_1 \lambda = m. \tag{50}$$

Це співвідношення зв'язує визначувану експериментально величину m з сучинником k, що характеризує профіль крила. Скористаймося тепер системи (45) для випадку, коли крило в пляні має прямокутню форму. При цьому замінімо $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ через $\frac{1}{\lambda}$, B_1 — його виразом через k, λ і m із співвідношення (50) і позначмо відношення $\frac{B_3}{B_1}$, $\frac{B_5}{B_1}$, $\frac{B_7}{B_1}$ через D_3, D_5, D_7.

Тоді матимемо таку систему:

$$0{,}293 + 0{,}383\frac{k}{\lambda} + \left(0{,}707 + 2{,}772\frac{k}{\lambda}\right)D_3 + \left(0{,}707 + 4{,}619\frac{k}{\lambda}\right)D_5 +$$

$$+\left(0{,}293 + 2{,}679\frac{k}{\lambda}\right)D_7 = 0{,}383\frac{\pi}{2}\frac{k}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{m}; \tag{51}$$

$$1 + 0{,}707\frac{k}{\lambda} + \left(1 + 2{,}121\frac{k}{\lambda}\right)D_3 + \left(-1 - 3{,}536\frac{k}{\lambda}\right)D_5 + \left(-1 - 4{,}950\frac{k}{\lambda}\right)D_7 =$$

$$= 0{,}707\frac{\pi}{2}\frac{k}{\lambda}\frac{\lambda}{m},$$

$$1{,}707 + 0{,}924\frac{k}{\lambda} + \left(-0{,}707 - 1{,}149\frac{k}{\lambda}\right)D_3 + \left(-0{,}707 - 1{,}913\frac{k}{\lambda}\right)D_5 +$$

$$+\left(1{,}707 + 6{,}467\frac{k}{\lambda}\right)D_7 = 0{,}924\frac{\pi}{2}\frac{k}{\lambda}\frac{\lambda}{m},$$

$$2 + \frac{k}{\lambda} + \left(-2 - 3\frac{k}{\lambda}\right)D_3 + \left(2 + 5\frac{k}{\lambda}\right)D_5 + \left(-2 - 7\frac{k}{\lambda}\right)D_7 = \frac{\pi}{2}\frac{k}{\lambda}\frac{\lambda}{m}.$$

Виключаючи з цієї системи сучинники D_3, D_5, D_7, ми знайдемо залежність між величинами $\frac{k}{\lambda}$ і $\frac{\lambda}{m}$.

Отже, знаючи k, ми зможемо через цю залежність обчислити при будь-якому відносному розмахові λ величину m, що цілком визначає за формулою (49) вираз для підіймальної сили прямокутнього крила з досліджуваним профілем та розмахом.

І, навпаки, знаючи m для прямокутнього крила з якимось розмахом, ми можемо, користаючись із зазначеної залежности, визначити сучинник k, що характеризує профіль крила. Для практичних завдань найзручніше на підставі системи (50) побудувати графік, що подає залежність між величинами $\frac{m}{\lambda}$ і $\frac{k}{\lambda}$.

---

[1] Справедливий для не дуже великих кутів атаки.

Цей графік дано на рис. 113.

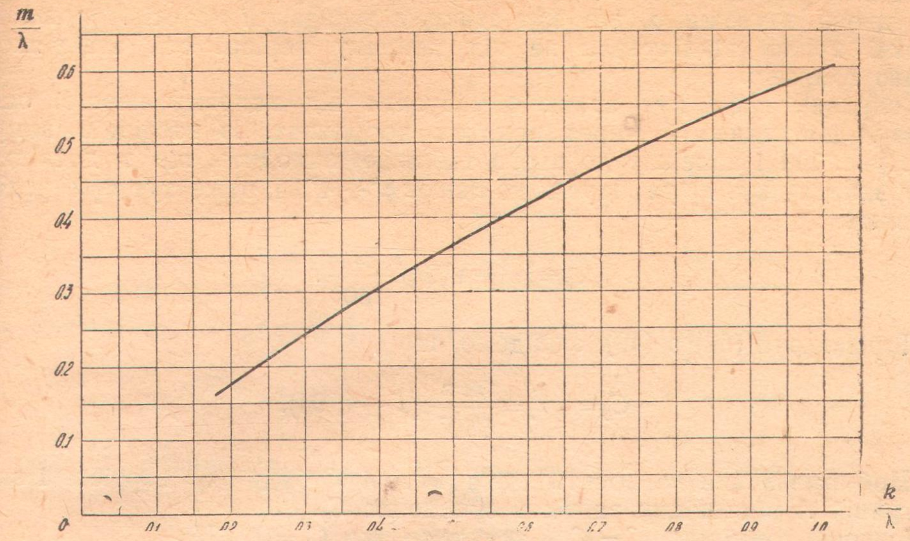

Рис. 113.

Щоб показати на прикладі, як користуватися з цього графіка, візьмімо профіль № 389 Ґетінґенської лябораторії (рис. 114).

Таблиця 7.

Випроби профілю № 389

$\alpha°$	C_y	C_x	C_m
−6	−0,039	0,01505	0,02545
−4,5	0,016	0,0084	0,042
−3,1	0,0685	0,0072	0,053
−1,6	0,1145	0,00775	0,064
−0,1	0,163	0,00905	0,0775
1,3	0,216	0,0110	0,090
2,8	0,2685	0,01445	0,1025
4,3	0,3175	0,0188	0,114
5,7	0,367	0,0236	0,1255
8,7	0,4695	0,03615	0,154
11,6	0,5455	0,050	0,1695
14,6	0,577	0,069	0,1805
17,6	0,566	0,0975	0,1895

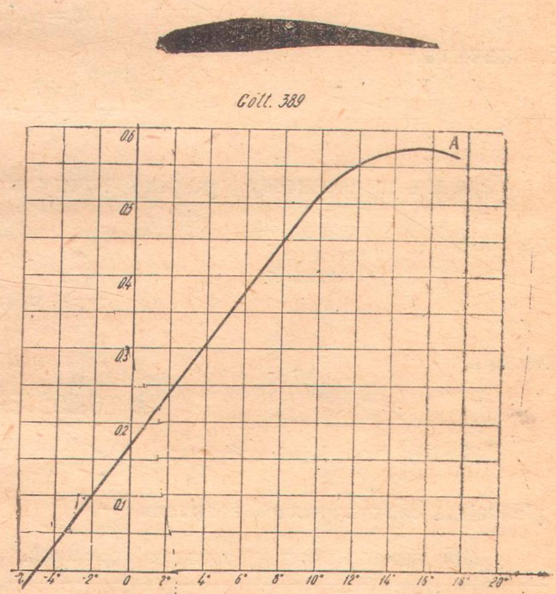

Рис. 114.

Крива A дає залежність величини C_y від кута атаки $\alpha°$. C_y зв'язане з підіймальною силою формулою

$$P = C_y \rho S V_0^2, \tag{52}$$

при чому $S = tl$ є площа крила.

Досліджувану криву одержано, випробовуючи крило з відносним розмахом 5. Отже,

$$\lambda = 5.$$

Насамперед, нам треба визначити для досліджуваного крила величину m. Для цього зауважимо, що кут атаки, відкладаний по осі X при випро-буванні крила, відлічували не від напряму першої осі, а від якогось іншого напряму.

І справді, якби кут атаки відлічувати від напряму першої осі, то крива A проходила б через початок координат. Із наслідків випробу (див. рис. 114 і належну до нього таблицю) виходить, що в досліджува-ному випадку кут α_1 у градусах дорівнює $\alpha^\circ + 4^\circ{,}94$, отже кут α_1 в радіяна дорівнює

$$\alpha_1 = (\alpha^\circ + 4^\circ{,}94)\,\frac{\pi}{180^\circ}\,.$$

Порівнюючи (52) з (49), знайдемо, що

$$C_y = m\,\alpha_1 = \frac{m\,\pi}{180^\circ}\,(\alpha^\circ + 4{,}^\circ 94).$$

Щоб визначити m, досить дати кутові α° будь-яку вартість і знайти по кривій A відповідну вартість сучинника C_y.

Узявши, приміром, $\alpha^\circ = 4^\circ{,}3$, знайдемо, що $C_y = 0{,}3175$.

Отже,

$$0{,}3175 = \frac{m\pi}{180}\,.\,9{,}24,$$

звідки

$$m = 1{,}97$$

і, значить,

$$\frac{m}{\lambda} = \frac{1{,}97}{5} = 0{,}394.$$

Узявши по нашому графіку точку з ординатою $\frac{m}{\lambda} = 0{,}394$, знайдемо для неї

$$\frac{k}{\lambda} = 0{,}552\,,$$

звідки

$$k = 0{,}552\,.\,5 = 2{,}76\,.$$

Примітка. Щоб побудувати графік, систему (51) розв'язували щодо $\frac{m}{\lambda}$ для ряду рівновіддалених вартостей величини $\frac{k}{\lambda}$.

При цьому мали таку таблицю вартостей.

$\frac{k}{\lambda}$	0,2	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	1
$\frac{m}{\lambda}$	0,175	0,276	0,306	0,338	0,366	0,392	0,416	0,441	0,465	0,488	0,594

Дальша проста формула дає наближено залежність між $\frac{m}{\lambda}$ та $\frac{k}{\lambda}$ для вартостей, що лежать в інтервалі від 0,2 до 1:

$$\frac{m}{\lambda} = 0{,}03 + 0{,}76\,\frac{k}{\lambda} - 0{,}2\,\frac{k^2}{\lambda^2}\,.$$

§ 8. Наближені формули для моноплянного крила

Пригадаймо формули (30) і (31) для підіймальної сили й індуктивного опору конечного крила:

$$P=\frac{\pi}{4}\rho A_1 l V_0, \tag{30}$$

$$Q_i=\frac{\pi\rho}{8}\left(A_1^2+3A_3^2+5A_5^2+\ldots\right). \tag{31}$$

На підставі формули (30) формулу (31) можна подати так:

$$Q_i=\frac{2P^2}{\pi\rho l^2 V_0^2}\left(1+3\frac{A_3^2}{A_1^2}+5\frac{A_5^2}{A_1^2}+7\frac{A_7^2}{A_1^2}+\ldots\ldots\right). \tag{53}$$

У розділі V [формули (7) та (8)] зазначалося, що підіймальну силу й чоловий опір подають звичайно у формі:

$$P=C_y\rho S V_0^2, \tag{54}$$

$$Q=C_x\rho S V_0^2, \tag{55}$$

де S — площа крила, з чого ми вже користувалися й в цьому розділі.

Чоловий опір складається з профільного опору Q_p та індуктивного опору Q_i, при чому профільний опір на підставі (5) дорівнює:

$$Q_p=C_p\rho S V_0^2. \tag{56}$$

Подамо через це індуктивний опір у формі

$$Q_i=C_i\rho S V_0^2 \tag{57}$$

і назвімо C_i сучинником індуктивного опору.

Будемо, як й раніш, називати подовженням крила відношення квадрату розмаху до площі. Для прямокутнього крила подовження дорівнює відносному розмахові. Позначаючи подовження через λ, матимемо:

$$\lambda=\frac{l^2}{S}. \tag{58}$$

Скориставшись із формул (53), (54), (57), (58), матимемо, що

$$C_i=\frac{2}{\pi\lambda}NC_y^2, \tag{59}$$

де

$$N=1+3\frac{A_3^2}{A_1^2}+5\frac{A_5^2}{A_1^2}+7\frac{A_7^2}{A_1^2}+\ldots\ldots$$

Для кожного крила N є певне число, що дорівнює одиниці, якщо циркуляція розподіляється вздовж розмаху крила за еліптичним законом; в інших же випадках N більше від одиниці.

Ми бачимо, що залежність сучинника C_i від сучинника C_y подає параболя; її звичайно звуть параболя індуктивного опору. Тепер параболю індуктивного опору наносять завжди рядом з Lilienthal'евою кривою на рисунку, що показує наслідки продувань крила.

Тому що

$$Q=Q_i+Q_p,$$

а, значить,

$$C_x=C_i+C_p,$$

то, маючи Lilienthal'еву криву й параболю індуктивного опору, може простим обчисленням (див. рис. 115) визначити величину профільно опору залежно від кута атаки. Виявляється, що C_p на літніх кутах ата майже не залежить від кута ата з цього ми потім скористаємось.

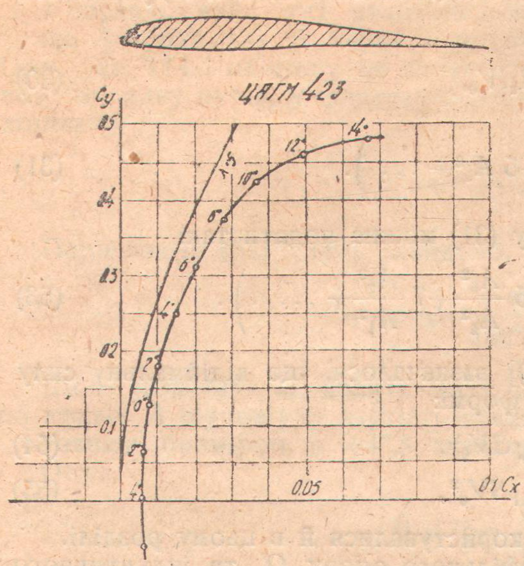

Рис. 115.

Звернімось тепер до форму (38) для крила з еліптичним з коном розподілу циркуляції вздо розмаху.

На підставі цієї формули ск потоку коло такого крила стал уздовж розмаху й дорівнює в р діянах

$$\Delta\alpha_1 = \frac{v(x)}{V_0} = \frac{2P}{\pi\rho l^2 V_0^2}.$$

На підставі (54) і (58) цей вир можна подати в формі:

$$\Delta\alpha_1 = \frac{2C_y\rho S V_0^2}{\pi\rho l^2 V_0^2} = \frac{2}{\pi\lambda} C_y. \quad (60)$$

Якщо кут атаки подають у гр дусах, то формула (60) замінить такою:

$$\Delta\alpha_1{}^\circ = 57^\circ{,}3 \frac{2}{\pi\lambda} C_y. \quad (6$$

Переходячи від крила з еліптичним законом розподілу циркуля вздовж розмаху крила до крила довільного, ми помічаємо, що тут спра ускладняється. Коли крило довільне, то скіс потоку міняється від одно перекрою крила до другого; і якщо ми схочемо зв'язати його з сучи ником C_y так, як це робиться за формулою (61), то нам доведеться вве вже якусь середню вартість скосу потоку вздовж розмаху крила.

Так, ми можемо для кожного крила покласти, що

$$\Delta\alpha_1{}^\circ = 57^\circ{,}3 \frac{M}{\lambda} C_y, \quad (6$$

де M — якийсь сучинник, характеристичний для крила, λ — подовжен а $\Delta\alpha_1{}^0$ — середній скіс потоку вздовж крила в градусах.

Формули (59) і (62) багато важать у побудові Lilienthal'евої поляр про що ми будемо говорити в найближчому параграфі. Отже, для найуж ваніших форм крила треба визначити вартості сучинників N і M. На п ставі сказаного раніш ці сучинники залежать від розподілу циркуля по розмахові крила, що її також цілком визначає форма профілю кри форма пляну та зміна кута устави вздовж розмаху. Знаючи ці чинни можна визначити розподіл циркуляції вздовж розмаху, а значить, і с чинники N і M, методою, поданою в § 5 і 7.

Таким чином для випадку, коли кут устави й форма профілю однак в усіх перекроях, знайдемо такі наближені формули:[1]

1) прямокутнє крило з подовженням λ в межах $\lambda = 5 \div 8$ (рис. 116):

Рис. 116.

$$\Delta\alpha_1{}^\circ = 57^\circ{,}3 \frac{0{,}750}{\lambda} C_y,$$

$$C_i = \frac{0{,}670}{\lambda} C_y^2;$$

[1] Пор. *Чесалов*, стор. 66—67.

2) трапезоідальне крило для відношення

$$\frac{b}{b_0} = \frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$$

й подовження в межах $\lambda = 5 \div 8$ (рис. 117):

$$\Delta\alpha_1{}^\circ = 57^\circ{,}3\,\frac{2}{\pi\lambda}\,C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda}\,C_y{}^2;$$

Рис. 117.

3) крило із скошеними кінцями для подовження в межах $\lambda = 5 \div 8$ (рис. 118):

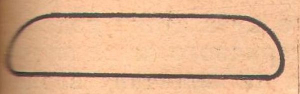

Рис. 118.

$$\Delta\alpha_1{}^\circ = 57^\circ{,}3\,\frac{0{,}675}{\lambda}\,C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda}\,C_y{}^2;$$

4) крило з закругленими кінцями для подовження в межах $\lambda = 5 \div 8$ (рис. 119)

$$\Delta\alpha_1{}^\circ = 57^\circ{,}3\,\frac{0{,}730}{\lambda}\,C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda}\,C_y{}^2;$$

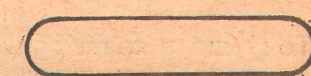

Рис. 119.

5) крило еліптичне (рис. 120):

Рис. 120.

$$\Delta\alpha_1{}^\circ = 57^\circ{,}3\,\frac{2}{\pi\lambda}\,C_y,$$

$$C_i = \frac{2}{\pi\lambda}\,C_y{}^2.$$

§ 9. Перерахунок Lilienthal'евої діяграми з одного подовження на інше

Згідно із сказаним у § 7, з певного продування прямокутнього й неперекрученого крила із сталим профілем можна знайти сучинник k, що характеризує профіль. А якщо для довільного крила властивості профілю відомі в усіх перекроях, то Lilienthal'еву діяграму для такого крила можна знайти без нових продувань, самим тільки обчисленням. Зважаючи на те, що тут доводиться розв'язувати багато рівнянь, бажано мати хоч й менш точні, але доцільніші способи для найпростіших випадків.

Такий спосіб ми покажемо в цьому параграфі для випадків, досліджених у § 8.

Нехай дано два крила: обидва неперекручені й обидва мають у всіх перекроях той самий (спільний для обох крил) профіль. Крила визначаються, отже, своєю формою в пляні й своїм подовженням. Назвімо через λ' і λ'' подовження першого й другого крила.

Припускаючи, що форма крил у пляні відповідає випадкам, дослідженим у попередньому параграфі, випишімо для кожного з цих крил відповідну йому пару формул з попереднього параграфу й будемо позначати одним штрихом перше крило, а двома штрихами — крило друге.

Маємо формули:

$$\Delta\alpha'=57{,}3\,\frac{M'}{\lambda'}\,C_y \text{ (в градусах)}, \qquad (63_1)$$

$$C'_i=\frac{2}{\pi\lambda'}\,N'C_y^2; \qquad (64_1)$$

$$\Delta\alpha''=57{,}3\,\frac{M''}{\lambda''}\,C_y \text{ (в градусах)}, \qquad (63_2)$$

$$C''_i=\frac{2}{\pi\lambda''}\,N''C_y^2. \qquad (64_2)$$

Тому що крила неперекручені, то кут устави кожного крила в усіх його перекроях однаковий, але дійсний кут атаки в різних елементах крила буде різний.

Почнімо досліджувати пересічну вартість дійсного кута атаки вздовж розмаху. Щоб його знайти, треба відняти з геометричного кута атаки крила пересічну для крила величину скосу потоку; а цю величину визначають формули (63_1) і (63_2).

Припустімо тепер, що ми досліджуємо обидва крила при однакових пересічних дійсних кутах атаки і нехай геометричні кути, що відповідають цьому пересічному дійсному кутові атаки, дорівнюють

$$\alpha' \text{ і } \alpha''.$$

Тому що в крилах однакові профілі, то при рівних пересічних дійсних кутах атаки будуть рівні сучинники підіймальної сили; а значить пересічний дійсний кут атаки для першого крила дорівнює

$$\alpha'-57{,}3\,\frac{M'}{\lambda'}\,C_y,$$

а для другого

$$\alpha''-57{,}3\,\frac{M''}{\lambda''}\,C_y.$$

Із рівности пересічних дійсних кутів виходить, що

$$\alpha''-57{,}3\,\frac{M''}{\lambda''}\,C_y=\alpha'-57{,}3\,\frac{M'}{\lambda'}\,C_y$$

або

$$\alpha''-\alpha'=57{,}3\left(\frac{M''}{\lambda''}-\frac{M'}{\lambda'}\right)C_y. \qquad (65)$$

Ця формула показує залежність між геометричними кутами атаки крил для кожної вартости сучинника підіймальної сили C_y.

Нехай для першого крила відома крива A' (рис. 121), що показує C_y залежно від геометричного кута атаки (цей кут може відлічуватись не від напряму першої осі профілю).

Візьмімо якусь точку a' на кривій A'; їй відповідає певна вартість геометричного кута атаки α' й певна вартість сучинника C_y. Та сама вартість сучинника для другого крила атаки буде при геометричному куті атаки, що дорівнює не α', а α''. Тому, щоб мати відповідну точку a'' кривої A'' для другого крила, досить перенести точку a' рівнобіжно з поземою віссю на віддаль $\alpha''-\alpha'$, що визначається формулою (65) (зауважмо, що ця віддаль може бути і додатна і від'ємна).

Повторюючи ту саму побудову для інших вартостей сучинника C_y легко побудуємо криву A''.

Щоб збудувати криву A'' за кривою A', найпростіше спочатку провести просту G, що відповідає рівнянню (65), а потім перенести кожну точку кривої A' по простій, рівнобіжній з віссю X, на величину відтинка між простою G та віссю Y.

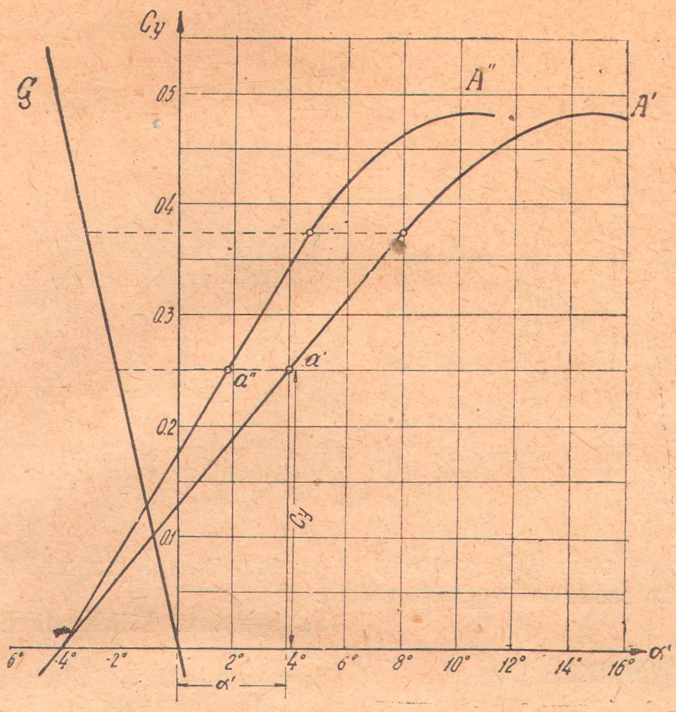

Рис. 121.

Почнімо тепер досліджувати опір крил.

Тому що профілі крил однакові, то й сучинники профільного опору будуть однакові; але сучинник профільного опору дорівнює сучинникові повного опору мінус сучинник індуктивного опору. Тому, припускаючи, що пересічний дійсний кут атаки обох крил однаковий, знайдемо для сучинника C_p профільного опору, з одного боку, вираз

$$C'_x - C'_i = C'_x - \frac{2}{\pi\lambda'} N' C_y^2,$$

а з другого,

$$C''_x - C_i'' = C''_x - \frac{2}{\pi\lambda''} N'' C_y^2.$$

З їхньої рівности виходить, що

$$C''_x - C'_x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{N''}{\lambda''} - \frac{N'}{\lambda'}\right) C_y^2. \quad (66$$

Ця формула показує залежність між вартостями сучинників повного опору для обох крил при тій самій вартості сучинника підіймальної сили й дозволяє за Lilienthal'евою діяграмою одного крила побудувати Lilienthal'еву діяграму для другого крила.

Нехай L' — Lilienthal'ева крива для першого крила (рис. 122).

Візьмімо на ній точку b', якій відповідає чоловий опір C'_x і підіймальна сила C_y. Ту саму вартість сучинника C_y матимемо для другого крила при вартості сучинника чолового опору, що дорівнює C''_x; значить, точку b' треба пересунути на величину $C''_x - C'_x$ в поземому напрямі.

Щоб збудувати точки кривої L'', зручно збудувати

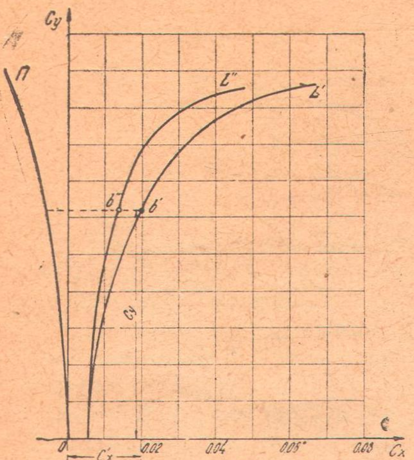

Рис. 122.

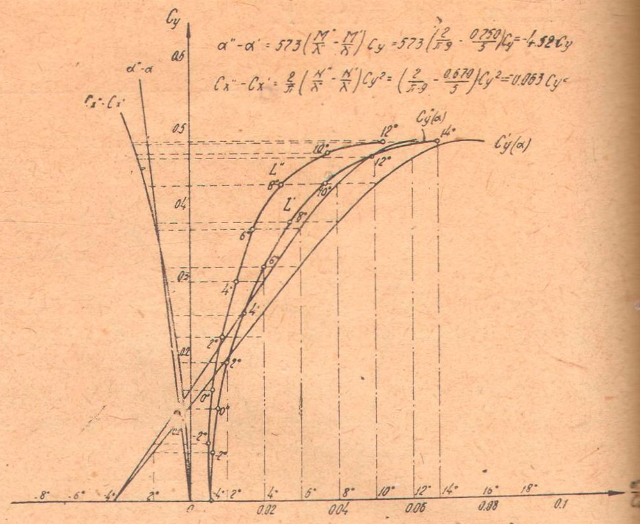

Рис. 123.

перед тим параболю (66), а потім перенести точки першої кривої L' на відтинки, що їх визначає параболя (66).

Так будують Lilienthal'еву криву для другого крила.

Тому що на Lilienthal'евій кривій відзначають не дійсні, а геометричні кути атаки, то, коли перенесемо точку b' в положення b'', позначка зміниться.

Щоб запобігти позначкам з дробовим числом градусів, на побудованій кривій L'' роблять позначки за допомогою кривої A'', побудованої раніш.

Подаваний далі приклад пояснює сказане й разом із тим дає зручну схему будови нових Lilienthal'евих кривих.

П р и к л а д. За даними наслідками продування прямокутнього крила (рис. 123) з профілем № 423 (ЦАГИ) при $\lambda = 5$ збудувати Lilienthal'еву поляру для трапезоїдального крила того самого профілю при $\lambda = 9$.

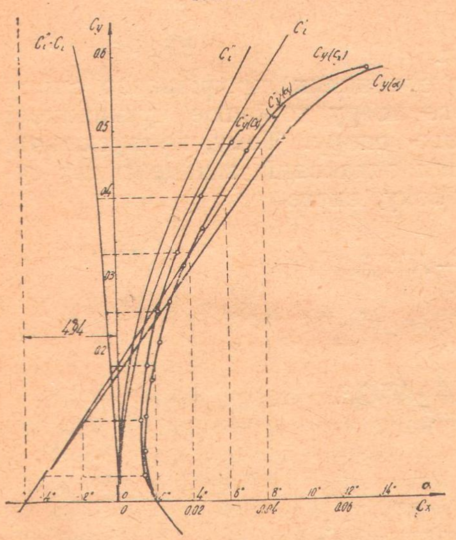

Рис. 124.

П р и м і т к а. Легко бачити, які зміни стаються в способі перерахування Lilienthal'евої поляри, якщо для обчислюваного крила сучинники C_y і C_i в функції від кута атаки знайдено методою §§ 5 і 6. У цьому випадку в формулу (66) замість N'' треба підставити відповідну вартість з виразу для C_i. Це дасть змогу збудувати поляру. Щодо розмічання кутів атаки, то це можна зробити за допомогою кривої для C_y. На рис. 124 це зроблено для крила, дослідженого в § 6.

ДОДАТОК 1.

Деякі конформні зображення.

1. Зображення кола на півплощину (рис. 125):

$$z=R\frac{1+it}{1-it}.$$

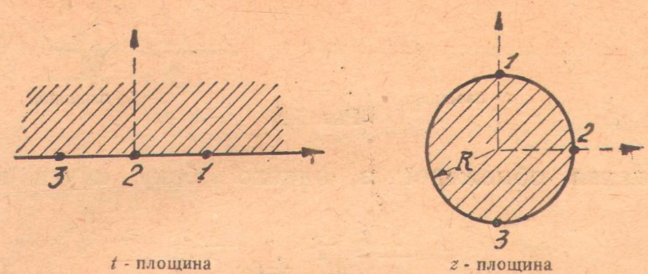

Рис. 125.

2. Зображення півкола на півплощину (рис. 126):

$$t=\left(\frac{\zeta+R}{\zeta-R}\right)^2$$

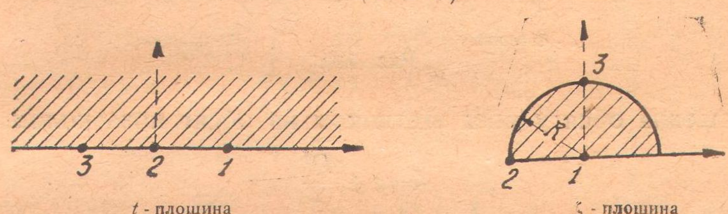

Рис. 126.

3. Зображення кута на півплощину (рис. 127):

$$t=\zeta^n.$$

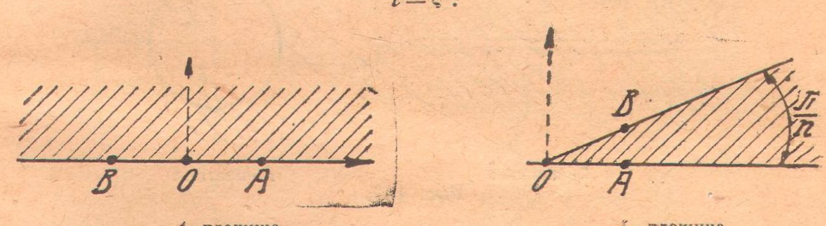

Рис. 127.

4. Зображення колового сектора на півплощину (рис. 128):

$$t=\left(\frac{\zeta^n+R^n}{\zeta^n-R^n}\right)^2$$

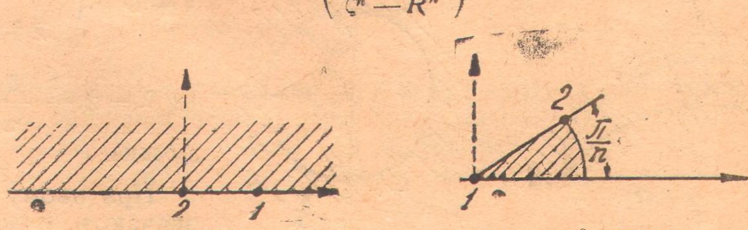

Рис. 128.

5. Зображення смуги на півплощину (рис. 129):

$$t = e^{\frac{\pi}{h}\zeta}$$

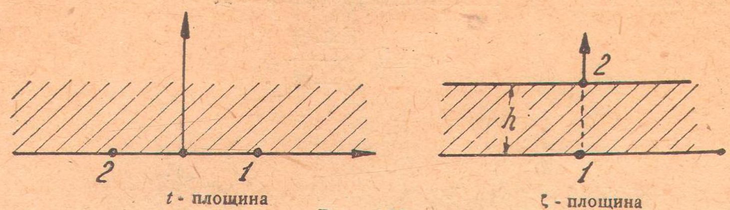

Рис. 129.

6. Зображення обмеженої з одного боку смуги на півплощину (рис. 130):

$$t = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{h}\zeta} + e^{-\frac{\pi}{h}\zeta}\right)$$

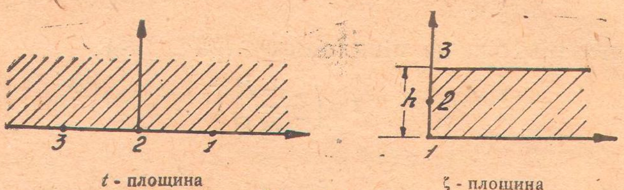

Рис. 130.

7. Зображення обсягу поза відтинком на обсяг поза колом (рис. 131):

$$\zeta = z + \frac{R^2}{z}$$

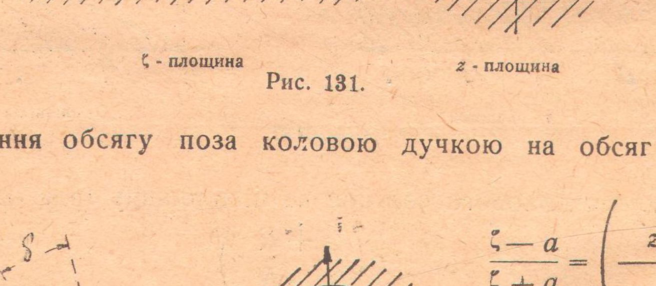

Рис. 131.

8. Зображення обсягу поза коловою дучкою на обсяг поза колом рис. 132):

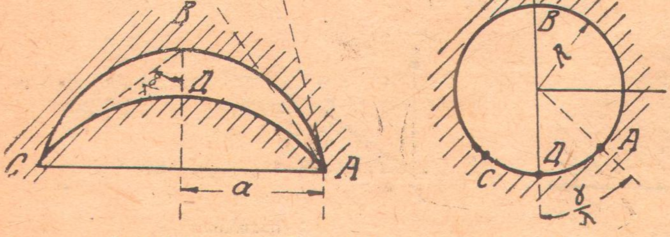

Рис. 132.

$$\frac{\zeta - a}{\zeta + a} = \left(\frac{z + iRe^{i\frac{\gamma}{\lambda}}}{z + iRe^{-i\frac{\gamma}{\lambda}}}\right)$$

де $\lambda = 2 - \frac{\delta}{\pi}$ (δ — кут дучки).

При цьому a, γ, δ визначають дучку, а R — довільне.

Якщо R визначити з рівности

$$R=\frac{a}{\lambda \sin\frac{\gamma}{\lambda}},$$

то для великих модулем ζ буде розклад:

$$z=\zeta-i\frac{a}{\lambda}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{\lambda}-\frac{\lambda^2-1}{3\lambda^2}\frac{a^2}{\zeta}+\ldots$$

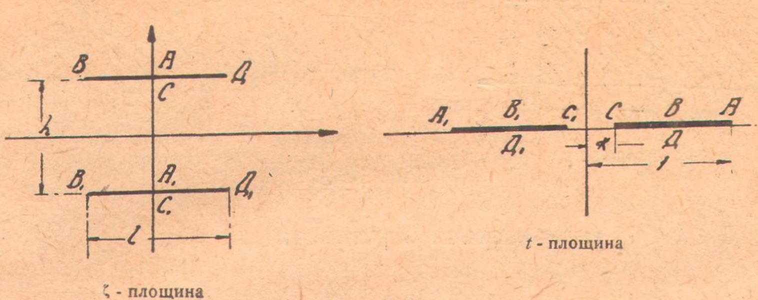

Рис. 133.

9. Зображення обсягу поза двома рівними відтинками, що лежать на одній простій, на обсяг поза двома рівними рівнобіжними відтинками (рис. 133):

$$\zeta=\frac{h}{\pi}\int\limits_0^t\frac{(E'-K't^2)\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-\varkappa^2)}},$$

де

$$0<\varkappa<1,\quad \varkappa'=\sqrt{1-\varkappa^2},$$

$$K'=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2x^2)}};\quad E'=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-\varkappa'^2x^2}{1-x^2}}\,dx;$$

$$\lambda=\sqrt{\frac{1-\frac{E'}{K'}}{1-\varkappa^2}};$$

$$\frac{l}{h}=\frac{2}{\pi}\left\{K'\int\limits_0^\lambda\sqrt{\frac{1-\varkappa'^2x^2}{1-x^2}}\,dx-E'\int\limits_0^\lambda\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2x^2)}}\right\}.$$

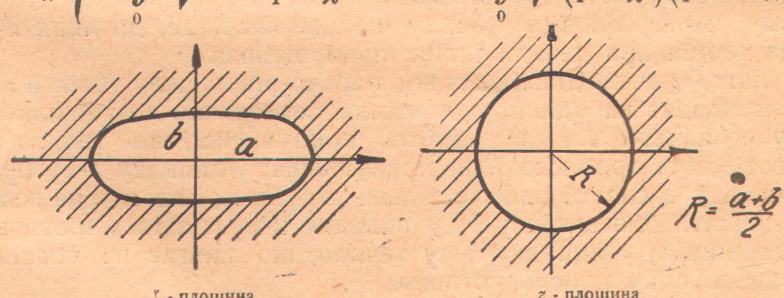

Рис. 134.

Щоб обчислити інтеґрали, що тут зустрічаються (так звані еліптичні інтеґрали), є спеціяльні таблиці. Див. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven (Verlag von B. Teubner, 1928).

10. Зображення обсягу поза еліпсою на обсяг поза колом (рис. 134):

$$\zeta=z+\frac{a^2-b^2}{4z}.$$

11. Зображення прямокутника на півплощину (рис. 135):

$$\zeta = \frac{a}{k}\int\limits_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

ζ - площина t - площина

Рис. 135.

Модуль $k\,(0<k<1)$ визначається з рівности

$$\frac{K'}{K} = \frac{2b}{a},$$

де

$$k = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$K' = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}},$$

$$K' = \sqrt{1-k^2}.$$

ДОДАТОК 2.

Удар струмини на платівку в обмеженому потокові [1]

У § 5 розділу IV ми застосували струминну теорію Helmholtz—Kirchhoff'а до обчислення тиску течива на платівку, що рухається в усьому просторі, занятому течивом, нормально до своєї площини.

У цьому параграфі без доводу подано наслідки, до яких приводить струминна теорія при деяких інших припущеннях.

Як і раніш, будемо досліджувати плоско-рівнобіжну течію й обчисляти силу, що припадає на одиницю довжини безконечно-довгої платівки, що її ширину позначено l. Але замість припущення, що течиво заповнює ввесь простір, тут зроблено інші припущення: у випадку 1-му припущено, що на платівку в спокої набігає вільна струмина, яка має на великій віддал перед платівкою ширину h; у випадку 2-му платівка міститься в канал завширшки h; у випадку 3-му течиво, що набігає на платівку, обмежене з одного боку плоскою стіною.

У всіх випадках досліджують прямий удар, тобто платівка лежить під прямим кутом до напряму потоку на великій віддалі перед платівкою, діє в усьому дальшому швидкість позначено V_0, при цьому в перших двох випадках платівка лежить симетрично щодо потоку.

---

[1] Подані в цьому параграфі наслідки добули М. Є. Жуковський, U. Cisotti, H. Villat, див. *В. Голубев*, „Теория крыла аэроплана в плоско-параллельном потоке" („Труды ЦАГИ", вип. 29); *H. Villat*, Aperçus théoriques sur la résistance des fluides (Paris, 1920).

Умови положення платівки в досліджуваних тут випадках аналогічні з тими, що бувають при випробах крила в аеродинамічних трубах, а також при рухові крила коло поверхні землі. Тому, хоч безпосередньо наслідків цього параграфу до крила не можна застосувати, порівнявши їх з наведеною в § 5 розділу IV формулою

$$R = \frac{\pi}{4+\pi} \rho l V_0^2, \tag{1}$$

можна зробити деякі висновки про значення труби, а також інших умов, що обмежують обсяг, занятий потоком.

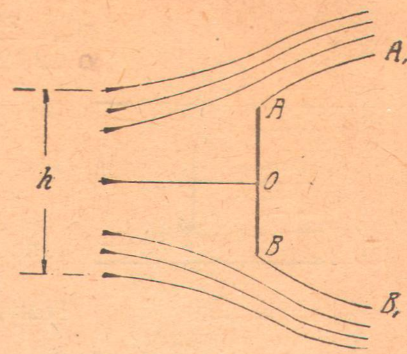

Рис. 136.

1) Платівка вміщена у вільну струмину конечної ширини (рис. 136). Опір R подається формулою:

$$R = \frac{\pi}{\pi + 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} . \rho l V_0^2 , \tag{2}$$

де параметр α визначається із співвідношення

$$l = 2h \sin^2 \frac{\alpha}{2}\left[1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} . \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{3}$$

Зауважмо, що параметр α дорівнює кутові, що в точці A дотична до струмини AA_1 утворює з віссю симетрії, тобто з поземим напрямом.

На підставі (3) α є функція від відношення $\frac{h}{l}$. Тому можна покласти:

$$\frac{\pi}{\pi + 2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} . \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = C\left(\frac{h}{l}\right), \tag{4}$$

так що

$$R = C\left(\frac{h}{l}\right) \rho l V_0^2. \tag{5}$$

На дальшій таблиці подано вартості сучинника $C\left(\frac{h}{l}\right)$.

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{h}{l}$	∞	29	7,4	3,2	1,8	1,1	0,8	0,58	0,4	0
$C\left(\frac{h}{l}\right)$	0,44	0,44	0,43	0,43	0,43	0,42	0,40	0,38	0,36	0

Зауважмо, що при $h=\infty$ маємо випадок, досліджений у § 5 розділу IV, коли течиво заповнює ввесь простір і коли, отже, справджується формула (1). Із таблиці виходить, що поки h не менше за l, тобто поки $\frac{h}{l} \geqslant 1$, сучинник $C\left(\frac{h}{l}\right)$ мало різниться від тої вартости, яка відповідає $h=\infty$, тобто від $0{,}44 = \frac{\pi}{4+\pi}$.

2) Платівка, вміщена в канал між двома плоскими стінками (рис. 137) Опір подається формулою:

$$R = \frac{\pi \operatorname{tg}^2\beta(\operatorname{tg}\beta - 1)}{2\{2\beta(\operatorname{tg}\beta + 1) - \pi\}} \rho l V_0^2, \quad (6$$

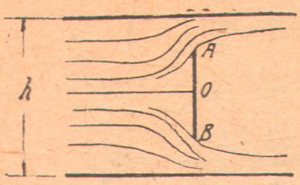

Рис. 137.

при чому β визначається із співвідношення

$$\frac{l}{h} = \frac{(\operatorname{tg}\beta - 1)\{2\beta(\operatorname{tg}\beta + 1) - \pi\}}{\pi \operatorname{tg}^2\beta}; \quad (7)$$

воно показує, що β є функція від відношення $\frac{h}{l}$.

Тому, покладаючи

$$K\left(\frac{h}{l}\right) = \frac{\pi \operatorname{tg}^2\beta(\operatorname{tg}\beta - 1)}{2\{2\beta(\operatorname{tg}\beta + 1) - \pi\}}, \quad (8)$$

можемо написати (6) у формі

$$R = K\left(\frac{h}{l}\right) \rho l V_0^2.$$

Тому що $h > l$, то β повинне справджувати нерівність

$$\frac{\pi}{4} \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

Зауважмо, що $V_0 \operatorname{tg}\beta$ виявляє швидкість потоку на безконечності позаду платівки.

Наведена таблиця показує, що тут уплив обмежености потоку багато більший, ніж у першому випадку.

$\frac{h}{l}$	$K\left(\frac{h}{l}\right)$	$\frac{h}{l}$	$K\left(\frac{h}{l}\right)$
1,21	60,5	4	2
1,44	18,0	9	1,1
1,69	9,4	16	0,9
1,96	6,1	25	0,8
2,25	4,5	36	0,72
2,56	3,6	49	0,68
2,89	2,94	64	0,64
3,24	2,4	81	0,63
3,61	2,2	100	0,61
		∞	0,44

3) Потік, що набігає на платівку, обмежений з одного боку плоскою стіною, нормальною до напряму платівки (рис. 138).

У цьому випадку для опору буде така сама формула (1), як і для випадку потоку, необмеженого з усіх боків.

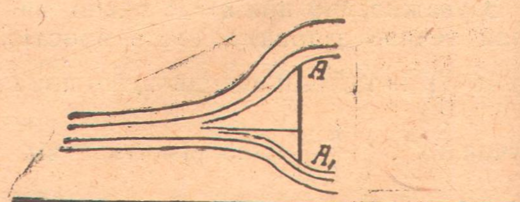

Рис. 138.

Зауважмо, що для косого удару,

тобто для випадку, коли платівка AA_1 нахилена до стіни під кутом, відмінним від 90°, для опору буде вираз, відмінний від того, який буває у випадку потоку, що заповнює ввесь простір. [1]

ДОДАТОК 3

Плоско-рівнобіжне обтікання деяких складних крил

1) Вплив нерухомої границі (поверхні землі) на підіймальну силу крила (рис. 139). Припустімо, що крило задано профілем L, що центр крила міститься на висоті h над поверхнею землі, яку на рисунку показано віссю x. Комплексну змінну позначмо через

$$z = x + iy.$$

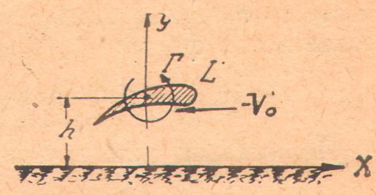

Рис. 139.

Якщо циркуляція навколо крила дорівнює Γ, а швидкість крила позема й дорівнює V_0, то комплексний потенціял течії виражається формулою:

$$w = -V_0 z - \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln (z - hi) + \frac{\Gamma i}{2\pi} \ln (z + hi) + \ldots,$$

де пропущені члени мають форму

$$\frac{A+Bi}{z+hi} + \frac{A-Bi}{z-hi}, \quad \frac{C+Di}{(z+hi)^2} + \frac{C-Di}{(z-hi)^2}, \ldots,$$

а сучинники $A, B, C, D \ldots$ залежать від форми профілю. Обчислюючи за формулою Blasius'a-Чаплигіна підіймальну силу, знайдемо, що вона дорівнює

$$P = \rho V_0 \Gamma \left(1 - \frac{\Gamma}{4\pi V_0 h}\right) = \rho V_0 \Gamma - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h}.$$

Якби границі не було, то підіймальна сила дорівнювала б $\rho V_0 \Gamma$; границя ж, як бачимо, зменшує підіймальну силу.

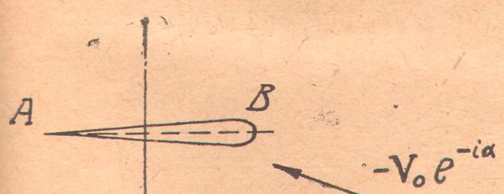

Рис. 140.

2) Обтікання крила, що в профілі мало різниться від злегка закругленого спереду відтинка простої (рис. 140). Точка A (їй відповідає число $z = -a$) є задній кант; точка B ($z = a$) лежить у середині закруглення.

Якщо швидкість крила має проєкції $V_0 \cos\alpha$, $-V_0 \sin\alpha$, то для відповідної оберненої течії комплексна швидкість з великим наближенням подається у формі:

$$u - iv = -V_0 \left(\cos\alpha + i \sin\alpha \sqrt{\frac{z+a}{z-a}}\right).$$

Підіймальна сила дорівнює:

$$P = \pi\rho 2 a V_0^2 \sin\alpha.$$

[1] Див. зазначений раніш твір H. Villat.

3) Обтікання розрізного крила, що складається з кількох крил дослідженого раніш типу (рис. 141).

Рис. 141.

Заднім кантам крил A_1, $A_2 \ldots$, A_n відповідають числа $z = a_1, a_2, \ldots, a_n$; точкам $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що лежать у середині закруглень, відповідають числа $z = b_1, b_2, b_3 \ldots, b_n$; комплексна швидкість з великим наближенням подається в формі:

$$u - iv = -V_0 \left\{ \cos\alpha + i \sin\alpha \sqrt{\frac{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}{(z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_n)}} \right\}.$$

Підіймальна сила дорівнює

$$P = \pi\rho V_0^2 L \sin\alpha,$$

де $L = A_1B_1 + A_2B_2 + \ldots + A_nB_n$ є сума глибин усіх крил. Отже, підіймальна сила розрізного крила не залежить від того, зімкнені чи розсунуті крила, що його утворюють.

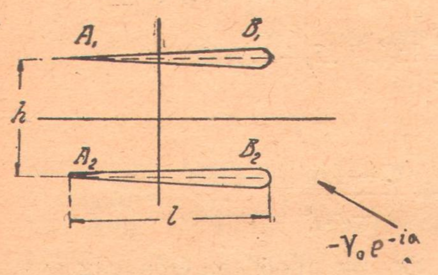

Рис. 142.

4) Обтікання біплянного крила, що складається з однакових і сторч одне над одним установлених крил дослідженого раніш типу (рис. 142).

Заднім кантам крил A_1 і A_2 відповідають числа $z = -\frac{l}{2} + \frac{hi}{2}$, $z = -\frac{l}{2} - \frac{hi}{2}$; точкам B_1 і B_2, що лежать у середині закруглень, відповідають числа $z = \frac{l}{2} + \frac{hi}{2}$, $z = \frac{l}{2} - \frac{hi}{2}$.

Знайшовши з рівностей [1]

$$\frac{l}{h} = \frac{2}{\pi} \left\{ K' \int_0^{\lambda} \sqrt{\frac{1-\varkappa'^2 x^2}{1-x^2}}\, dx - E' \int_0^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa'^2 x^2)}} \right\},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - \frac{E'}{K'}}{1-\varkappa^2}}, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1$$

модуль $\varkappa$, покладімо

$$z = \frac{h}{\pi} \int_0^t \frac{(E' - K' t^2)\, dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-\varkappa^2)}} \qquad (*)$$

Тоді комплексна швидкість з великим наближенням подається у формі:

$$u - iv = -V_0 \left\{ \cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{K't^2 - E'} \left[K' \sqrt{(1-t^2)(t^2-\varkappa^2)} - \sqrt{\frac{K'}{E'}} \cdot \sqrt{(K'-E')(E'-\varkappa^2 K')}\, t \right] \right\},$$

де t зв'язане з z формулою (*).

[1] Див. додаток I, приклад 9.

Користуючись із формули Чаплиґіна-Blasius'а, матимемо для підіймальної сили вираз

$$P=2\rho V_0^2 h \sin\alpha \sqrt{\frac{K'}{E'}} \sqrt{(K'-E')\ (E'-\varkappa^2 K')}\,.$$

Цей вираз можна подати у формі:

$$P=2\pi\rho V_0^2 l \sin\alpha\, L,$$

де L — якийсь сучинник, що залежить від відношення $\frac{h}{l}$.

На рис. 143 вартості сучинника L подано графічно.

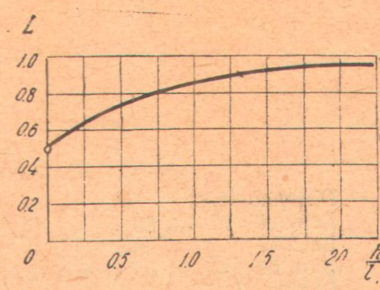

Рис. 143.

Завважуючи, що L завжди менший від 1, і пригадуючи, що для монопляна з глибиною $2l$ підіймальна сила дорівнює

$$2\pi\rho V_0^2 l \sin\alpha\,,$$

знаходимо, що підіймальна сила моноплянного крила з глибиною, яка дорівнює сумі глибин крил біпляна, за інших рівних умов більша від підіймальної сили біпляна.

ПОКАЗНИК ІМЕН

УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКИЙ ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИЧОК

Б

Бік (кута) — сторона

В

Важіль—рычаг
Вартість—значение
Вежа—башня
Вершок—вершина
Віддаль—расстояние
Від'ємний—отрицательный
Віднімання (мат.) — вычитание
Вільний —свободный
Відмінний—отличный
Відносний—относительный
Відповідний—соответственный
Відтинок—отрезок
Відхил—отклонение
Вісний—осевой
Вітрило—парус
Вимір (наслідок) — измерение
Вимірювання (процес)—измерение
Вимірчий—измерительный
Випробування—испытание
Вислідна (сила) — равнодействующая
Вихор—вихрь
Вихротворення—вихреобразование
Властивість—свойство

Г

Гарматень (арт.)—снаряд
Границя—предел
Густина (фіз.) — плотность

Д

Двигун—двигатель
Дучка—луночка

З

Занурення—погружение
Заслона—пелена
Збурювати (потік)—возмущать
Зображення—изображение

К

Ковзання—скольжение
Ковзти—скользить
Коловий (швидк.) — окружной, круговой

Л

Лійкуватий—воронкообразный
Літ (льоту)—лет
Літак (-ка)—самолет
Літальний—летательный
Літний—летный
Лижви—лыжи

М

Межа—граница
Мірило—масштаб

Н

Наближення—приближение
Наближено—приближенно
Напруга—напряжение
Напрям—направление
Насичений—насыщенный
Незалежний—независимый
Нерівність—неравенство
Нерухомий—неподвижный
Несний—несущий
Нестисливість—несжимаемость

О

Обвід—окружность
Обертання—вращение
Обертати—обращать, вращать
Обертовий—вращающийся
Обіймати—охватывать
Обмежений—ограниченный
Обсяг—область
Обчислення—вычисление
Окрайок—кромка
Опірення—оперение
Опірний—опорный
Опір—сопротивление
Отвір—отверстие

П

Пара—пар
Первісний—первоначальный
Передатний—передаточный
Перепона—преграда, препятствие
Перекрій—сечение
Перетворити—преобразовать
Перетин—пересечение
Перетинати—пересекать
Півколо—полуокружность
Півплощина—полуплоскость

Платівка—пластинка
Плавкий —плавный
Площа—площадь
Площина—плоскость
Площинка—площадка
Побудова—построение
Побудувати—построить
Поверхневий—поверхностный
Поверхня—поверхность
Подовжній—продольный
Подовження—удлинение
Поземий—горизонтальный
Поплавець—поплавок
Поправковий—поправочный
Порожнина—полость
Потік—поток
Потужність—мощность
Похилий—наклоненный
Початковий—начальный
Почіпка—подвес
Похідний—производный
Припливати—притекать
Приріст—приращение
Пришвидшення—ускорение
Проміжний—промежуточный
Промінь—луч
Проста (лінія)—прямая
Простір—пространство
Прямокутній—прямоугольный

Р

Рамено—плечо
Рівень—уровень
Рівність—равенство
Рівняння—уравнение
Рисунок—чертеж
Розв'язання (мат.)—решение
Розв'язати—решить
Розклад—разложение
Розмір—размер
Розмічання—разметка
Розподіл—распределение
Розрідження—разрежение
Розсунений—раздвинутый
Розташування—расположение
Розтяг—растяжение
Розчалка—расчалка
Рух—движение
Рухомий—подвижный

С

Середовище—среда
Сідання—посадка
Складовий—составной
Смуга—полоса
Спадний—убывающий
Спіралюватий—спиралеобразный
Спокій—покой
Спокійний (в спокої)—покоящийся
Спостереження—наблюдение
Спостережний—наблюдательный
Спостерігати—наблюдать
Справджуватись—выполняться
Сталий—постоянный
Стерно—руль
Стійкість—устойчивость
Стисливість—сжимаемость
Стовп—столб
Стояк—стойка
Сторчовий—вертикальный
Стрибок—прыжок, скачок
Стрижень—стержень
Струм (електр.)—ток
Сувісний—соосный
Супряжений—сопряженный
Суставний—шарнирный
Суцільний—сплошной

Т

Твірний—образующий
Терези—весы
Тертя—трение
Течія—течение
Течиво—жидкость
Течкий—текущий
Течний—жидкий
Тимчасовий—временный
Тиск—давление
Тотожній—тождественный
Трикутник—треугольник
Тягар—груз
Тятива—хорда

У

Устава—установка
Утворення—образование
Ущільнення—уплотнение
Уявлюваний—воображаемый
Уявний—мнимый

Ц

Цупкий—жесткий

Ч

Човен—лодка
Чоловий—лобовой

Ш

Шар—слой
Швидкісний—скоростный
Швидкість—скорость
Шерехатість—шероховатость
Шина—шина
Шинування—обтяжка
Шкідливий—вредный

Щ

Щілина—щель

Я

Якість—качество

ЗМІСТ

Розділ VI. Вихрова теорія крила конечного розмаху
