Аналитическая геометрія — продолженіе.

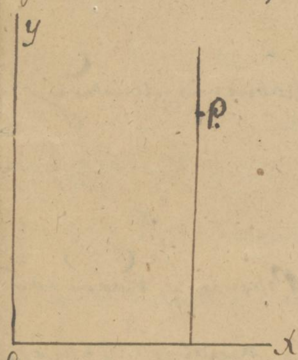
О геометрическомъ значеніи уравненій между двумя перемѣнными: 1°, двухъ, совмѣстно существующихъ, и 2°, одного. (~~Пусть~~ [illegible]) Начнемъ съ частнаго случая. Пусть имѣемъ два уравненія съ двумя неизвѣстными 1-ой степени такого вида:

$$ax+by+c=0,$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma=0,$$

коэффиціенты которыхъ пусть будутъ вещественныя величины. Если рѣшимъ эти уравненія, то, какъ извѣстно изъ элементарной алгебры, для x и y найдемъ по одной вещественной величинѣ. Пусть рѣшеніе этихъ уравненій даетъ:

$$x=A, \quad y=B,$$

гдѣ A и B вещественныя величины.



Представимъ себѣ систему координатъ. Два данныхъ уравненія привели насъ къ заключенію, что $x=A$, $y=B$. Послѣднія равенства опредѣляютъ нѣкоторую точку въ плоскости координатъ. Въ самомъ дѣлѣ, отложивъ на x линію $=A$ и, проведя параллельную къ y, отложимъ

часть = B. Pω будетъ точкой, опредѣляемой нашими равен-
ствами; но эти равенства вытекаютъ непосредственно
изъ данныхъ двухъ уравненій, почему и можемъ сказать,
что два уравненія 1^{е} ст. съ двумя перемѣнными и
съ вещественными коэффиціентами всегда опредѣля-
ютъ нѣкоторую точку въ плоскости. Но это до тѣхъ
поръ пока коэффиціенты вещественныя величины;
~~но~~ если же коэффиціенты величины мнимыя, то и коли-
чества A и B могутъ быть также мнимыми. Въ
послѣднемъ случаѣ уравненія наши не будутъ имѣть
того же геометрическаго значенія, потому что коорди-
наты каждой точки непремѣнно величины веществен-
ныя. И такъ мы можемъ сказать, что два уравненія
1^{е} ст. между двумя перемѣнными съ вещ. коэффиціен-
тами опредѣляютъ нѣкоторую точку въ плоскости
координатъ.

Пусть одновременно имѣемъ два уравненія между
двумя перемѣнными:

$$f(x,y)=0\,, \quad F(x,y)=0,$$

изъ которыхъ 1^{е} m^{ой} ст., а 2^{е} n^{ой}. Рѣшеніе подобной
системы уравненій доставитъ для неизвѣстныхъ
x, y, ~~одну лишь~~ не одну, а ~~не одну, а~~ несколько паръ рѣшеній вида:

$x = A$, $y = B$. Каждая такая пара, если A и B вещественныя величины, опредѣляетъ извѣстную точку въ плоскости. Но оба эти уравненія, существуя совмѣстно, будутъ опредѣлять уже не одну, а большее число точекъ въ плоскости. Число этихъ точекъ будетъ опредѣляться числомъ вещественныхъ паръ рѣшеній данной системы уравненій; оно можетъ быть по большей мѣрѣ равно произведенію показателей степеней обоихъ уравненій. Соединяя этотъ выводъ съ предшествовавшимъ, можемъ сказать вообще: <u>два уравненія съ двумя перемѣнными, существуя совмѣстно, опредѣляютъ одну или нѣсколько точекъ въ плоскости координатъ.</u>

Разсмотримъ теперь, что означаетъ одно уравненіе съ двумя неизвѣстными? — Начнемъ съ частнаго случ. Пусть имѣемъ 1 уравн. съ 2мя неизв. ст. вида

$$ax + by + c = 0,$$

коеффиціенты котораго суть вещественныя величины. Такъ какъ имѣемъ одно уравненіе, а неизвѣстныхъ 2, одно неизвѣстное остается произвольнымъ. Придадимъ x произвольную величину A. Подставимъ эту величину въ наше уравненіе, получимъ въ результатѣ урав.

1-ой ст., зависящее отъ одного y. Отсюда для y найдемъ опредѣленную величину, соотвѣтствующую $x = A$, положимъ B. Эти два равенства опредѣляютъ точку въ плоскости; пусть она P. Потомъ начнемъ измѣнять x, напр. сдѣлаемъ $x = A'$, для y найдемъ соотвѣтствующую величину B'. Эти два равенства опредѣлятъ другую точку P' и т. д.

Изъ нашего уравненія имѣемъ:

$$y = \frac{-ax - c}{b} = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

т. е. y есть раціональная функція x, которая съ измѣненіемъ x сама будетъ измѣняться непрерывнымъ образомъ. Если x измѣняется на величину весьма малую, y будетъ измѣняться тоже весьма мало; такъ что опредѣляемыя ими точки образуютъ непрерывный рядъ ихъ, составляющій нѣкоторую линію. Такимъ обр., мы можемъ сказать, что наше данное уравненіе опредѣляетъ нѣкоторую линію, лежащую въ плоскости координатъ. Иными словами: уравненіе наше выражаетъ условіе, которому должны быть подчинены координаты всѣхъ точекъ нѣкоторой линіи, лежащей на плоскости координатъ. Мы увидимъ въ послѣдствіи, что линія, опредѣляемая всякимъ уравненіемъ 1й ст. между 2мя перемѣнными, есть прямая.

Теперь же перейдемъ къ болѣе общему вопросу,— предположимъ только, что дано уравненіе:

$$f(x, y) = 0,$$

какой бы то ни было степени n. Такъ какъ въ этомъ уравненіи 2 неизвѣстныхъ, то его одного недостаточно для опредѣленія обоихъ неизвѣстныхъ; но уравненіе опредѣляетъ зависимость между x и y или, иными словами, опредѣляетъ наше y какъ неявную функцію x. Разрѣшивъ его, мы выразимъ y какъ явную функцію. Приписавъ x какое бы то ни было опредѣленное численное значеніе, мы получимъ уравненіе, зависящее отъ одного y. Разрѣшивъ послѣднее, получимъ одно или болѣе численныхъ значеній y, соотвѣтствующихъ приписанному значенію x. Взявъ величины x_1 и y_1, опредѣленныя при этомъ значеніи x, опредѣлимъ точку P_1; а взявъ x_1 и y_2, найдемъ т. P_2, и т.д. для каждаго значенія x найдемъ нѣсколько точекъ въ плоскости. Если $x = x_2$, то снова получимъ нѣсколько значеній для y, которыя снова опредѣлятъ нѣсколько точекъ и т.д.

Мы знаемъ, что разсматриваемыя въ анализѣ функціи непрерывны хотя между извѣстными предѣлами. Слѣдовательно, измѣняя x внутри нѣкоторыхъ извѣстн. предѣловъ на безконечно малую величину, y тоже будетъ измѣняться безконечно мало; и рядъ точекъ отъ этого происходящій образуетъ линію. Если же для нѣкоторыхъ частныхъ значеній x функція дѣлается разрывною, то и линія разрывается.

Всякое уравненіе выше 1й ст., которое не разбивается на множителей 1й ст., выражаетъ кривыя линіи.

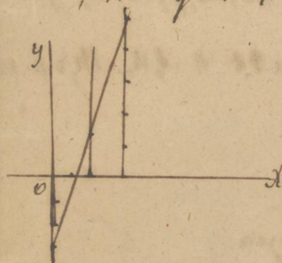
Сужденія, приведенныя нами, имѣютъ важное значеніе: на нихъ основана вся аналитическая геометрія, задача которой и состоитъ въ томъ, чтобы линіи и поверхности ~~плоскости~~ выражать посредствомъ уравненій, вычисляя съ которыми можно было бы изучать свойства линій и поверхностей.

Итакъ мы видимъ, что всякое между 2 перемѣнными уравненіе выражаетъ нѣкоторую линію въ плоскости посредств натъ. Остается рассмотрѣть какія линіи изображаютъ данныя уравненія тѣми или другими уравненіями.

Разсмотримъ для этого, прежде всего, два частныхъ случая. Положимъ:

$$y = 4x - 3.$$

Спрашивается, какую линію оно изображаетъ? Положимъ $x = +1$, то $y = +1$; если $x = 2$, $y = 5$; $x = 0$, $y = -3$, $x = 3$, $y = 9$.



Слѣдовательно, это уравненіе даетъ прямую.

$y = 0$ ∴ $4x - 3 = 0$ ∴ $x = \frac{3}{4}$.

Пусть дано:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

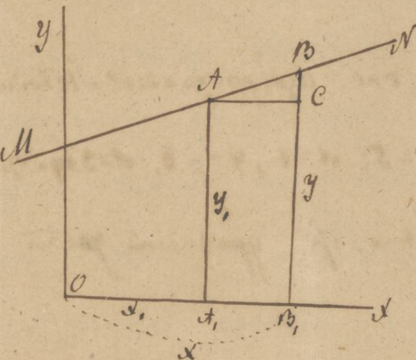
Чтобы узнать какую ~~границу даетъ~~ линію изображаетъ это уравненіе, сдѣлаемъ $x = 0$, получимъ $y^2 = a^2$ и $y = \pm a$; здѣсь два знака: слѣдов. линія пересѣкаетъ ось уов ~~координатъ~~ въ двухъ точкахъ, равно отстоящихъ отъ нач. коорд. Если $y = 0$, то $x = \pm a$ опред. точки, въ которыхъ эта линія пересѣкаетъ ось x. Подставляя разл. знач. x отъ $x = -a$, до $x = +a$, найдемъ что всѣ точки нашей линіи равно отстоятъ отъ 0 и что, слѣд., эта линія есть кругъ, описанный изъ 0 радіусомъ a.

Докажемъ, что каждая прямая линія выражается уравненіемъ 1ой ст. между двумя перемѣнными съ вещественными коэффиціентами.

2) что каждое уравненіе 1-ой ст. между двумя перемѣнными, коэфф. котораго вещ. величины, изображаетъ какую-нибудь прямую.

Ясно, что эти два вопроса обратные другъ другу

Начнемъ съ 1-го случая. Пусть имеемъ прямоугольную систему координатъ и прямую MN; требуется опредѣлить уравн. этой прямой. Возьмемъ на этой прямой произвольную точку A, координаты которой x_1, y_1; другая произвольная точка $B(x,y)$. $BB_1 = y$, $OB_1 = x$. Проведемъ $AC \parallel A_1B_1$. Изъ треуг. имеемъ:



$$AB \cdot \operatorname{Cos} BAC = AC; \quad AB \cdot \operatorname{Cos} ABC = BC; \text{ отсюда:}$$

$$AB = \frac{AC}{\operatorname{Cos} BAC}, \quad AB = \frac{BC}{\operatorname{Cos} ABC}$$

Следовательно, каково бы ни было положеніе B на прямой,

$$\text{I.} \quad \frac{AC}{\operatorname{Cos} BAC} = \frac{BC}{\operatorname{Cos} ABC}.$$

Полученныя равенства имеютъ мѣсто для всякой точки. $AC = x - x_1$; $BC = y - y_1$; (постоянныя) $\angle BAC = \lambda$; $\angle ABC = \mu$.

Подставимъ въ (I):

$$\text{II.} \quad \frac{x - x_1}{\operatorname{Cos} \lambda} = \frac{y - y_1}{\operatorname{Cos} \mu}.$$

Съ измѣненіемъ положенія точки B, x и y тоже измѣняются; но равенство существуетъ. Слѣдовательно это равенство опредѣляетъ зависимость, существующую между координатами нашей прямой. И такъ, что равенство и есть искомое уравнение прямой; в нем x_1, y_1 величины постоянныя, x, y перемен-ныя. Это уравнение прямой, 1-ой ст., коэффиц. суть величины. Эта форма часто употребляется у Коши, а также и у большинства французских геометров; оно назыв. уравнением Коши.

Заметимъ, что уравнение, выведенное сейчас нами, может быть видоизменено: знаменатели могут быть не cos углов, составл. прямою съ осями, а величины пропорциональныя cos. Изменить его в форме не трудно. Пусть имеем:

$$\cos\lambda : \cos\mu = g : h, \text{ откуда:}$$

$$\cos\lambda h = \cos\mu . g$$

Мы не изменим равенство (II), если умножим левую его часть на $\cos\lambda h$, а правую на $\cos\mu g$:

$$\frac{(x-x_1)\cos\lambda . h}{\cos\lambda} = \frac{(y-y_1).\cos\mu . g}{\cos\mu}, \text{ или:}$$

$$(x-x_1)h = (y-y_1)g, -$$

равенство, которое не изменится, если обе части его мы разделим на hg:

$$\text{III.} \quad \frac{x-x_1}{g} = \frac{y-y_1}{h}$$

Это уравнение удовлетворяет точкам той же пол. прямой, почему его геометрич. значение одинаково.

Обыкновенно ~~уравненiя~~ подрядъ прямой даютъ намъ съ численными коэффицiентами; поэтому не видно съ перваго разу, будутъ ли знаменатели cos угловъ или величины имъ пропорцiональныя.

Пусть дано:

$$\text{IV.}\quad \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b},$$ гдѣ $\underline{a}$ и $\underline{b}$ числа.

Требуется рѣшить a и b равны ли cos λ, cos μ ~~или~~ или только пропорцiональны имъ. Мы знаемъ что $\cos^2\lambda + \cos^2\mu = 1$; ~~и a^2+b^2~~ поэтому составляемъ выраженiе a^2+b^2; если это ~~послѣднее~~ оно ~~равно~~ 1, то ~~ничего~~ заключаемъ, что a и b ~~cos λ и cos μ~~ непосредственно равны cos λ, cos μ, а если нѣтъ, то что $\underline{a}$ и $\underline{b}$ только пропорцiональны этимъ косинусамъ.

Умножимъ обѣ части равенства (IV) на $\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\frac{x-x_1}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{y-y_1}{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

Докажемъ, что величины $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ во всякомъ случаѣ суть cos, и ~~докажемъ~~, что

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.^{F}$$

F Слѣдовательно, если $\underline{a}$ и $\underline{b}$ велич. пропорцiон. cos λ, cos μ, то $\cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\mu = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Приступимъ къ рѣшенiю 2-го вопроса.

Для этого возьмемъ:

$$\text{I.}\quad Ax + By + C = 0,$$

гдѣ A, B, C вещественныя количества. Это уравнен съ двумя перемѣнными, слѣдов. если взять $x = x_1$ и подставивъ, найдемъ $y = y_1$. Подставивши въ уравненіе (I), получимъ тождество: т. е.:

$$(II).\quad Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

Вычтемъ II изъ I, имѣемъ:

$$III.\quad A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

~~которое~~ которому удовлетв. тѣ же количества, что и (I). Но

$$A(x - x_1) = -B(y - y_1);$$

раздѣливъ это на AB:

$$\frac{x - x_1}{B} = \frac{y - y_1}{-A},$$

гдѣ A и B вещественныя. Это есть уравненіе прямой, для которой

k) $\cos\lambda = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\mu = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Слѣдовательно уравненіе 1ой всегда изображаетъ прямую.

Что же касается до численн. значеній коэффиц. то опредѣлить его не трудно. ~~до A и B, то ихъ опредѣлить не~~ трудно: Въ самомъ дѣлѣ разд. ур. (I) на $\sqrt{A^2+B^2}$, найдемъ:

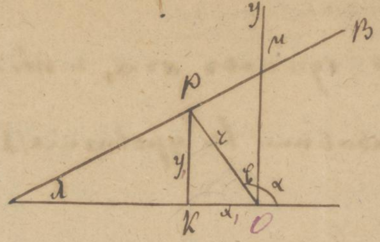
$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

или:

M) $\cos\lambda\, y + \cos\mu\, x + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$

Легко доказать, что $\cos\lambda$ и $\cos\mu$ можно замѣнить косинусами угловъ, составл. съ осями кратчайшимъ разстояніемъ нашей прямой от нач. координатъ и доказать, что это кратч. разстояніе равно $\frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Въ самомъ дѣлѣ: $\angle POx = \alpha$, $\angle POy = \beta$, $\lambda = \beta$,



$\alpha + \mu = 180^\circ$, $\alpha = 180^\circ - \mu$. Слѣд.

$\cos\lambda = \cos b$, $\cos\alpha = -\cos\mu$. Итакъ

Подставивъ во (M) эти величины,
~~опустимъ перпенд. PK; тогда~~

~~изъ △PKO имѣемъ:~~

$$\cos\alpha . x + \cos b y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

~~$y_1 = r\cos\lambda$, $x_1 = r\cos\mu$.~~

Такъ какъ P лежитъ на нашей прямой, то ур. это тождеств.
~~Но мы имѣемъ:~~
удовлетворяется ~~для~~ координатами этой точки, почему имѣемъ:

$$\cancel{\cos\alpha x + \cos b y = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

~~Кромѣ того:~~

$$\cos\alpha\, x_1 + \cos b\, y_1 = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Но лѣв. часть изображаетъ сумму проекцій y_1 и x_1 на PO и равна r,
~~Подставимъ вмѣсто равныхъ равныя:~~
слѣдовательно

$$\cancel{\cos^2\lambda r + \cos^2\mu r = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}},\ \text{т.е.}\ r = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

~~равенство, при помощи котораго опредѣлимъ:~~

$$\cancel{-r = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}}.$$

Подставивъ настоящее въ наше уравненіе:

$$\cos\alpha x + \cos b y - r = 0.$$

Это уравненіе назыв. **нормальнымъ**.

Коэффиціентъ 1-го члена есть cos угла, составл.
перпен. опущ. от нач. коорд.
~~прямой~~ съ осью x; коэфф. 2-го члена — cos угла
перпен. опущ. от нач. коорд.
составл. ~~прямою~~ съ осью y и наконецъ r есть
самое прямой
~~кратчайшее~~ разстояніе ~~отъ~~ начала коорд.

Всѣ коэфф. слѣдов. имѣютъ геометр. значенія.

Уравненіе: $Ax + By + C = 0$,

называется **общимъ**.

Для решенія поставленнаго вопроса,

Можно еще, употребить пріемъ неопредѣленныхъ множителей.

Мы знаемъ, что

$$\cos\beta = \cos\lambda, \quad \cos\mu = -\cos\alpha.$$

Нужно доказать, что уравненіе (2) $Ax+By+C=0$ (2)

$$\cancel{\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\cos\mu, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\lambda \text{ и } (2)}$$

удовлетворяется тѣми же значеніями, что уравненіе

(3) $\cos\alpha x + \cos\beta y - r = 0$

~~2) $Ax+By+C=0$~~

Докажемъ, что эти два уравненія могутъ разниться только общимъ множителемъ. Для этого необходимо доказать, что существ. k множитель, умноживши на который (2) получимъ уравненіе (3). Изъ самого допущенія, что

$$kAx + Bky + kC = \cos\alpha x + \cos\beta y - r.$$

Поэтому:

$$kA = \cos\alpha, \quad kB = \cos\beta, \quad kC = -r.$$

Изъ последнихъ равенствъ возьмемъ первыя 2 и возвысимъ ихъ въ квадратъ:

$$k^2A^2 = \cos^2\alpha$$
$$k^2B^2 = \cos^2\beta$$

$$k^2(A^2+B^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1,$$

откуда $k = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Подставимъ это значеніе въ третье равенство.

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = -r.$$

Эти равенства будутъ совершенно удовлетворяемы и будетъ вообще

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha = -\cos\mu.$$

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\beta = \cos\lambda$$

Следовательно допущеніе, что существуетъ множитель, дѣлающій лѣвую часть (2) тождественной (3) удовлетворяетъ нашимъ равенствамъ.

Можно ~~нашимъ тремъ уравненіямъ свободнымъ~~ уравненіе прямой представлять еще въ иной формѣ, кромѣ трехъ выведенныхъ нами: ~~еще иную форму~~:

$$1)\ \frac{x-x_1}{g} = \frac{y-y_1}{h}, \qquad 2)\ Ax+By+C=0$$

$$3)\ \cos\alpha\, x + \cos\beta\, y - r = 0$$

Опредѣлимъ изъ (2) y. Получимъ:

$$y = \frac{-(Ax+C)}{B} = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},\ \text{или},$$

если $-\frac{A}{B} = a$, $-\frac{C}{B} = b$,

$$4)\ y = ax+b.$$

Это уравненіе, какъ непосред. слѣдствіе ур. (2), опредѣляетъ ту же прямую. Остается опредѣлить значенія коэффиціентовъ a и b

Начнемъ съ a. Мы знаемъ, что

$$a = -\frac{A}{B},$$

а также:

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\mu, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\lambda,$$

гдѣ μ и λ углы дополнительные другъ друга до 90°. Слѣдов. вмѣсто cos μ можно взять sin λ. Раздѣливъ послѣдн. равенства другъ на друга, получаемъ:

$$-\frac{A}{B} = a = tg\,\lambda.$$

Слѣдовательно a = tg угла, составленнаго ~~[illegible]~~ прямою съ осью x-овъ. ~~[illegible], опредѣленнаго изъ начала координатъ [illegible] съ осью x.~~

Теперь опредѣлимъ b. Сдѣлаемъ въ ур. (4) x = 0, получимъ равенство, изъ котораго опредѣлимъ точку пересѣченія прямой съ осью y. Въ этомъ случаѣ y = b; слѣдов. b изображаетъ отрѣзокъ на оси y отъ начала до того мѣста, гдѣ наша прямая пересѣкаетъ ось y-овъ, и если b есть положительное, прямая наша пересѣкаетъ ось y выше точки O; въ противномъ случаѣ ниже.

Раздѣлимъ ур. (2) на C, получимъ:

$$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$$

Допустимъ для краткости, что $\frac{-A}{C} = \frac{1}{p}$,

$-\frac{B}{C} = \frac{1}{q}$. Тогда:

(5) $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$

Это уравненіе, котор. непосред. слѣдствіе (2) тоже выражаетъ прямую линію; въ этомъ видѣ оно употребляется нѣмецкими геометрами по примѣру Плюккера.

Разсмотримъ, какое геометр. значеніе имѣютъ p и q?

Если допускаемъ $x = 0$, опредѣлимъ точку, въ которой наша прямая пересѣкаетъ ось y. Получимъ:

$$\frac{y}{q} = 1, \text{ или: } y = q.$$

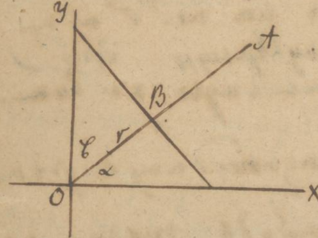
Если же $y = 0$, получимъ абсциссу точки пересѣченія прямой съ осью x-овъ, именно, $x = p$.

Вотъ всѣ употребительныя формы уравненій прям. Когда скоро имѣемъ одно изъ этихъ уравненій и допустимъ, что коэф. вещественные и посто[янные], то уравн. изобразитъ опредѣленную прямую; если же мы будемъ измѣнять коэффиціенты, то и положеніе прямой тоже будетъ измѣняться.

Возьмемъ нормальное уравненіе (3).

$$\cos\alpha\, x + \cos b\, y - r = 0,$$

характеристика котораго извѣстна. (Зная уголъ α,



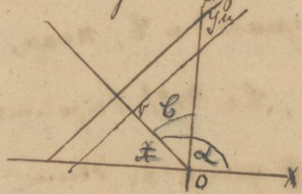
мы будемъ знать и b; напр., если $\alpha = 45^\circ$, $b = 45^\circ$.) Строимъ при точкѣ O уголъ α. Если, кромѣ того, намъ будетъ извѣстна длина перпендикуляра r, то отложивъ на OA прямую $OB = r$ и проведя чрезъ точку B прямую такъ, чтобы она была перпендикулярна ~~пересѣкала ось α подъ угломъ α~~ къ r, получимъ искомую линію. Если r будемъ увеличивать, получимъ другую прямую и т. д. слѣдовательно получимъ цѣлую систему # прямыхъ линій. Если станемъ измѣнять α и b, r оставимъ постояннымъ, получимъ цѣлую систему касательныхъ, проведенныхъ къ кругу, проведенному радіусомъ r. Если же α, b и r измѣняются вмѣстѣ, получимъ всякую прямую.

Пусть дано намъ уравненіе $Ax + By + C = 0$, гдѣ

$$\cos\lambda = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos b, \quad \cos\mu = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\alpha, \quad \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}} = r,$$

гдѣ A, B и C данныя числа.

Зная эти равенства, можемъ опредѣлить и саму прямую. Для этого проведемъ подъ угломъ α произвольную прямую, отложимъ на ней b и про-

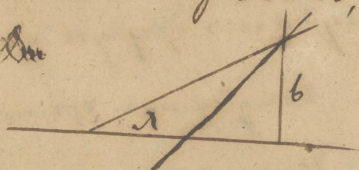


ведемъ ~~горизонтальную~~ перпендикулярную къ ~~ней~~ этой ~~проведенной перпендикулярна~~ ~~къ какой-нибудь точкѣ на~~ X, тогда и получимъ требуемую линію.

Возьмемъ еще уравненіе (4):

$$y = ax + b,$$

гдѣ a и b извѣстны. Мы знаемъ, что $a = tg\,\lambda$, b есть отрѣзокъ, образуемый прямою на оси y.



Откладываю вверхъ по оси y длину b. Зная $tg\,\lambda$, могу опредѣлить и самый λ, подъ которымъ ~~проведенная~~ искомая прямая пересѣкаетъ ось X-овъ. ~~и опредѣлить требуемую~~ Затѣмъ ставлю ~~Затѣмъ проведя~~ и самую прямую.

Теперь займемся рѣшеніемъ нѣкоторыхъ задачъ, относящихся къ прямымъ линіямъ.

<u>Задача 1.</u> Требуется опредѣлить уравненіе прямой, проходящей черезъ точку, координаты

которой x' и y' намъ даны.

Возьмемъ уравнение (4). Уравнение это должно удовлетворять координатамъ этой точки, след.:

$$y' = ax' + b.$$

Вычтемъ полученное равенство изъ (4), получимъ:

1) $y - y' = a(x - x')$.

Это уравнение прямой, проходящей через одну данную точку.

Здѣсь только одинъ коэффициентъ неопредѣленъ,

потому что одна точка не опредѣляетъ положения прямой, Если дана еще одна точка ~~положимъ~~ необходима другая точка на прямой, то

точка $(x''y'')$, ~~Получимъ~~ еще:

2) $y - y'' = a(x - x'')$.

Оба эти уравнения должны существовать совмѣстно. Опредѣливъ a изъ 1-го ур. и подставивъ во 2-е, получимъ:

$$y - y'' = \frac{y - y'}{x - x'}(x - x''), \text{ или}$$

$$(y - y'')(x - x') + (y' - y)(x - x'') = 0, \text{ или}$$

$$yx - y''x - yx' + y''x' + yx - y'x + yx'' - y'x'' = 0, \text{ откуда}$$

по сокращении:

$$(y' - y'')x + (x'' - x')y + x'y'' - x''y' = 0.$$

Вотъ уравнение прямой, проходящей через двѣ точки, координаты которыхъ намъ даны.

Выведемъ условіе, характеризующее, что прямая прохо~~дящая~~дитъ черезъ три данныя точки.

Возьмемъ уравненіе

$$\text{I} \quad y = ax + b.$$

Пусть $x_1 y_1$ одна точка, $x_2 y_2$ другая, $x_3 y_3$ третья.

~~Нужно, чтобъ коэффиціенты удовлет~~

Допустимъ что (~~искомая~~) прямая проходитъ черезъ первую точку. Тогда:

$$\text{II} \quad y' = ax_1 + b.$$

Вычтя II изъ I, получимъ:

$$y - y_1 = a(x - x_1); \quad a = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Такимъ же образомъ получимъ:

$$y - y_2 = a(x - x_2).$$

Подставивъ сюда вмѣсто a его опредѣленную величину:

$$y - y_2 = \frac{y - y_1}{x - x_1}(x - x_2)$$

Подставимъ сюда координаты 3ей точки и получимъ:

$$y_3 - y_2 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x_3 - x_2).$$

Откуда:

$$y_3x_3 - y_2x_3 - y_3x_1 - y_2x_1 - y_3x_3 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_1x_2 = 0,$$

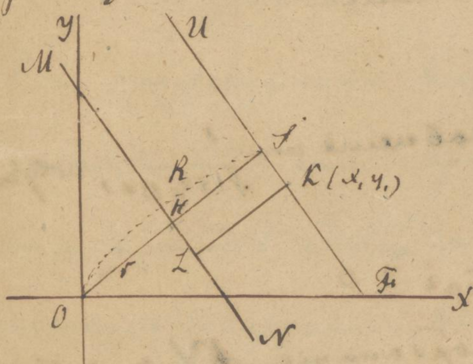
или:

$$(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 \mp y_3x_2 \pm y_2x_3 = 0.$$

Это равенство удовлетворяется, когда три данныя точки лежатъ на одной прямой.

Имея уравненія прямой, можемъ решать нѣкоторыя задачи:

Задача 1. Дано уравненіе прямой (A): $\cos\alpha x + \cos\beta y - r = 0$. Требуется опредѣлить длину перпендикуляра KL, опущеннаго изъ данной точки на прямую.



Уравненіе прямой UF представится такимъ образомъ:

(a) $\cos\alpha x + \cos\beta y - R = 0$, которому координаты точки K удовлетворяютъ тождественно:

Подставляя послѣднія, имеемъ:

$\cancel{R} = \cos\alpha x_1 + \cos\beta y_1 = \cancel{R}$.

гдѣ α, β, x_1 и y_1 величины извѣстныя. Длину $KL = TH = R - r$, опредѣлимъ изъ ~~нашего уравненія~~ ~~послѣдняго равенства~~ ~~$r = \cos\alpha x + \cos\beta y$~~, если въ него вмѣсто R подставимъ его выраженіе $r + L$; ~~Потому что~~ ~~Поэтому~~ потому что въ такомъ случаѣ получимъ:

$$\cancel{R - r = \cos\alpha x_1 + \cos\beta y_1 - \cos\alpha x - \cos\beta y}$$

$$\cos\alpha x_1 + \cos\beta y_1 - r = L,$$

Если въ уравн. (a) вычтемъ изъ одной части т. е. изъ правой выраженій по r, получимъ: ~~уравн~~ Слѣдовательно, для опредѣленія L слѣдуетъ только въ уравн.

$$\cancel{R - r = \cos\alpha x_1 + \cos\beta y_1 - r}.$$

~~Мы получаемъ, что — равно лѣв. части уравненія~~
~~Получается для $R - r$ выраженіе, въ которомъ~~
~~(a), когда въ ней~~
~~Замѣстить x и y черезъ x_1 и y_1.~~
данной прямой x и y замѣстить черезъ x' и y', т. е. координ. точки K.

Возьмемъ общее уравненіе

$$Ax + By + C = 0.$$

Помноживъ все уравненіе на $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, получимъ

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Подставимъ въ него координаты KL и получимъ ~~требуемое~~ искомое.

Пусть даны уравнения двухъ прямыхъ:

$$ax + by + c = 0,$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Требуется определить: пересекаются ли эти две прямыя или нетъ? Въ послед. случае определить координаты точки пересечения. При пересечении, точка пересечения лежитъ на той и на другой прямой; следовательно координаты ея должны удовлетворять обоимъ уравнениямъ.

Для решения задачи стоитъ только решить эти два уравнения совместно; получимъ величины удовлетворяющия обоимъ уравнениямъ:

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{a_1b - ab_1} \quad \text{и} \quad x = \frac{b_1c - bc_1}{a_1b - ab_1}.$$

Если коэффициенты вещественны, x и y также вещественны; если кроме того числитель и знаменатель отличны отъ нуля, для x и y имеемъ конечныя веществ. величины; следов. найдемъ пересечения точку, координаты которой определены.

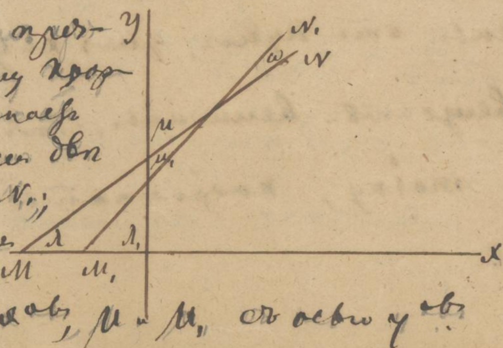
Можетъ случиться, что числитель = 0, а знаменатель отличенъ; тогда получимъ точку, для которой $x = 0$, $y = 0$, слѣдовательно, что т. пересѣч. въ началѣ координатъ.

Если же знаменатель равенъ 0, прямыя будутъ # между собою, т. е. буд. имѣть т. пересѣч. въ безконечн.

Если же и числитель и знаменатель равны 0, слѣдуетъ заключить, что данныя уравненія тождественны и, слѣдовательно, выражаютъ одну прямую.

Послѣдній случай впрочемъ можетъ происходить отъ того, что въ числитель и знаменатель входятъ общіе множители, образовавшіеся при извѣстныхъ ~~значеніяхъ~~ числахъ въ нихъ.

Опредѣлимъ ~~Разсмотримъ послѣдній случай было. Разсмот~~римъ уголъ, составляемый двумя прямыми между собою. ~~координатами~~ x Во всякомъ случаѣ



x Пусть имеемъ прямоугольную систему координатъ, въ плоскости которыхъ имѣемъ двѣ прямыхъ MN и M_1N_1; пусть уголъ пересѣченія ω; λ и λ_1 углы ихъ наклон. къ оси xовъ, μ и μ_1 къ оси yовъ.

I. $\omega = \lambda_1 - \lambda$.

Положимъ, что уравненіе прямой MN есть

$$\frac{x-x_1}{g} = \frac{y-y_1}{h},$$

а $N_1 M_1$:

$$\frac{x-x_2}{g_1} = \frac{y-y_2}{h_1}$$

Мы знаемъ, что

$$\cos\lambda = \frac{g}{\sqrt{g^2+h^2}}, \quad \cos\mu = \frac{h}{\sqrt{g^2+h^2}}$$

Изъ втораго урав. тоже

$$\cos\lambda_1 = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}, \quad \cos\mu = \frac{h_1}{\sqrt{g_1^2+h_1^2}}$$

Подставивъ въ уравн. I, получимъ:

$$\cos\omega = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \sin\lambda\sin\lambda_1 = \cos\lambda\cos\lambda_1 + \cos\mu\cos\mu_1$$

$$\cos\omega = \frac{gg_1+hh_1}{\sqrt{g^2+h^2}\sqrt{g_1^2+h_1^2}}$$

Найдемъ по таблицамъ ω.

Вотъ выраженіе для опредѣл. $\cos\omega$, когда ~~Положимъ, что~~ уравненія даны въ формахъ

~~Кони.~~ Когда ур. прямыхъ даны въ общей формѣ:

$$ax+by+c=0$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

Тогда:

$$\cos\lambda = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Точно

$$\cos\lambda = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}, \quad \cos\mu = \frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$$

Или

$$\cos\omega = \frac{aa_1+bb_1}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2}}$$

Если же намъ даны ~~нормальныя~~ уравненія въ нормальной формѣ:

$$\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y - \nu = 0,$$

$$\cos\alpha_1\, x + \cos\beta_1\, y - \nu_1 = 0;$$

то

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1.$$

Если же уравненія даны въ формѣ

$$y = ax + b \qquad a = tg\,\lambda$$

$$y = a_1 x + b_1 \qquad a_1 = tg\,\lambda_1$$

Слѣдовательно:

$$tg\,\omega = \frac{tg\,\lambda_1 - tg\,\lambda}{1 + tg\,\lambda_1\, tg\,\lambda}$$

$$tg\,\omega = \frac{a - a_1}{1 + aa_1}$$

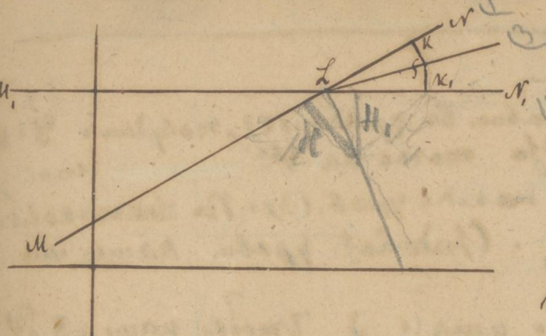
Пусть теперь ~~требуется~~ опредѣлить уравненіе прямой, проходящей черезъ точку пересѣченія 2^хъ прямыхъ, уравненія которыхъ ~~даны~~ ~~пусть даны~~:

~~Пусть~~:

$$M(N)\quad ax + by + c = 0$$

$$M_1(N_1)\quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

Означимъ для краткости первыя части этихъ уравненій соотвѣтственно черезъ X и X_1:



(1) $X = 0$

(2) $X_1 = 0$

Координаты точки пересѣченія удовлетворяютъ совмѣстно обоимъ нашимъ уравненіямъ. Уравненіе звѣзд. прямой, проходящей черезъ точку L должно удовлетворять координатамъ этой точки. Помножимъ одно изъ данныхъ уравненій (напр. 2-ое) на λ неопред. количество и сложимъ:

(3) $X + \lambda X_1 = 0$

Это уравненіе 1-ой степени относительно x, y и коэф. его вещественные, если λ вещественная величина; слѣдовательно, оно изображаетъ прямую. Кромѣ того, оно удовлетворяется коорд. точки L, почему изображ. прямую, проходящую черезъ эту точку. Такъ какъ λ неопредѣленная величина, то уравненіе это не изображаетъ опредѣлен. прямой, а всякую прямую, проход. черезъ точку L. Если λ придадимъ численную величину, то уравненіе это перейдетъ въ уравненіе извѣстной прямой.

Возвращаемся къ частн. случ. нашей задачи. Воспользуемся какое значеніе должно имѣть λ для того чтобы это уравненіе изображало линію раздѣляющую ~~Возвратимся къ частному случаю нашей задачи.~~ уголъ NLN₁ въ отношеніи $\frac{K}{K_1}$. Опустимъ построеніе нашъ на чертежѣ. Линіи ⊥ K опредѣляются, а если вмѣсто x, y подстав. въ ур. (1) x_1, y_1, т. е. коорд.

точка S; такъ что, ~~[illegible]~~ обозначая разстояніе ~~[illegible]~~ черезъ X_1, имѣемъ: $X_1 = K$. А если подставимъ въ уравн. (2), получимъ $Y = K_1$. Съ другой стороны, мы предположили, что эта точка на зве[illegible] линіи, слѣдоват. X_1, Y_1 должны удовлетворять также урав. (3). По подстановкѣ получимъ $K + \lambda K_1 = 0$; откуда $\lambda = \frac{-K}{K_1}$. Слѣдоват. уравн. нашей лин. изобразится такъ: $X - \frac{K}{K_1} Y = 0$.

Теперь посмотримъ какое значеніе должно имѣть λ, чтобы наше урав. (3) представляло линію, раздѣл. внѣшній уголъ въ ~~томъ~~ же самомъ отношеніи. Назовемъ одинъ $\perp$-а опущенный черезъ H, а другого черезъ H_1, и допустимъ, по условію, существованіе равенства

$$\frac{K}{K_1} = \frac{H}{H_1}$$

Такимъ же ходомъ сужденій выведемъ,

$$H + \lambda H_1 = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{-H}{H_1} = \frac{K}{K_1}.$$

Наконецъ,

$$X + \frac{K}{K_1} Y = 0.$$

Если допустимъ, что K и K_1 равны, то наши уравн.

$$X - Y = 0 \quad \text{и}$$

$$X + Y = 0$$

выражаютъ линіи, дѣлящія углы [illegible] по-поламъ.

Лекція.

Разсмотримъ какое геометрическое значеніе имѣютъ во 1° 3 уравненія съ 3 неизвѣстными; во 2° два уравненія и въ 3° одно ур.

Начнемъ съ 1°го случая. Допустимъ, что имѣемъ:

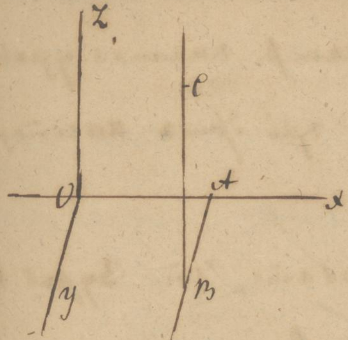
$$f(x, y, z) = 0,$$

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

$$\psi(x, y, z) = 0$$

Пусть неизв. x, y, z означаютъ прямоугольныя оси координатъ въ пространствѣ. Рѣшивъ наши уравненія, найдемъ одну или нѣсколько системъ вещественныхъ значеній для неизвѣстныхъ, которыя будутъ тождественно удовлетворять данной системѣ уравненій. Пусть x_1, y_1, z_1 одна система такихъ значеній.

Отложимъ отъ точки O на оси x-овъ $OA = x_1$,



потомъ отложимъ $AB = y_1$, изъ точки B возставимъ перпендикуляръ и смотря по тому, будетъ-ли z положит. или отрицательно, отложимъ на немъ z_1 вверхъ или внизъ отъ плоскости xy. Так. образ. опредѣл. т. C.

Видимъ слѣдовательно, что совмѣстное существованіе 3-хъ урав. съ 3-мя неизв. опредѣляетъ одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ въ пространствѣ.

Возьмемъ частный случай. Допустимъ, что имѣемъ три уравненія съ 3 неизвѣст.:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0.$$

Если рѣшимъ эти уравненія, найдемъ вообще одну систему значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющую тождественно нашимъ уравненіямъ. Эта система будетъ вещественна, когда коэфф. нашихъ уравненій вещественны, и опредѣлитъ еще одну нѣкоторую точку въ пространствѣ.

Слѣдовательно, можно сказать, что 3 урав. 1-й степ. между 3-мя перемѣнными ~~съ 3 неизв.~~, имѣющія веществ. коэффиц. опредѣляютъ одну точку въ пространствѣ.

Положимъ теперь, что имѣемъ 2 урав. съ 3-мя неизв. Разсмотримъ, какое геометрическое значеніе имѣютъ эти 2 уравненія?

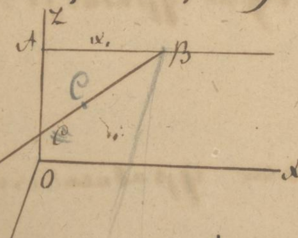
Такъ какъ уравненій 2, а неизвѣстныхъ 3, то мы можемъ опредѣлить 2 неизвѣстныхъ какъ функціи 3-го неизвѣстнаго, остающагося произвольнымъ. Допустимъ, въ самомъ дѣлѣ, что z произвольная. Сдѣлавъ $z = z_1$, подставивъ въ урав.

$$f(x, y, z) = 0$$
$$\varphi(x, y, z) = 0$$

и рѣшивъ ур.

$$f(x, y, z_1) = 0$$
$$\varphi(x, y, z_1) = 0,$$

найдемъ извѣстныя величины x, y, соотвѣтствующій z_1. Если допустимъ $z = z_2$, найдемъ одну или несколько паръ значеній x, y, соответствующихъ этому новому значенію z.



Пусть $z_1 = OA$; соответствующее ему значеніе x пусть AB, y — BC. Этимъ мы определимъ т. C; другая система значеній x и y определитъ другую точку и т. д. И очевидно, что если вообще x и y выражаются функціями z и называемъ их въ пределахъ непрерывными, увидимъ, что совмѣстное существованіе таких 2хъ равенствъ можно сказать, что 2 уравненія съ 3мя неизвестными определяютъ некоторую линію въ пространствѣ.

уравненіе выражаетъ некоторую линію въ пространствѣ,

Пусть, наконецъ, имеемъ одно уравненіе съ 3мя неизвестными:

$$f(x, y, z) = 0$$

Здесь 2 неизвестныя могутъ изменяться произвольно. Пусть x и y изменяются произвольно; въ такомъ случаѣ ~~z выразится~~ различныхъ значеній z, функціи 2хъ переменныхъ будутъ выражать различныя точки въ пространствѣ; и очевидно что ~~эти~~ въ пределахъ непрерывныхъ эта функція выражаетъ поверхность.

Совокупность всехъ точекъ представитъ намъ поверхность.

Итакъ, можемъ сказать: одно уравн. съ 3 неизв. определяетъ поверхность.

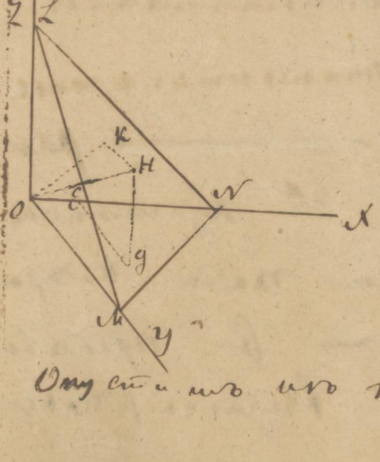
Разсмотримъ теперь: какимъ уравненiемъ съ 3мя неизвестными изображается плоскость.

Для этого докажемъ:

во 1хъ, что всякая плоскость определяется уравн. 1й ст. между 3мя переменными

и во 2хъ, что всякое уравненiе 1й ст. между 3мя съ веществ. коэффицiентами определяетъ плоскость.

Пусть имеемъ систему прямоугольныхъ координатъ въ пространстве и въ немъ плоскость



LNM. Нужно доказать, что координаты этой плоскости удовлетв. всегда уравненiю 1й ст., коэффицiенты которого вещественны.

Опустимъ изъ точки O перпенд. на данную плоск.

Пусть $OK = r$; $\angle rx = \alpha$, $\angle ry = \beta$, $\angle rz = \gamma$. Возьмемъ (положимъ,)
произвольную точку H въ той же плоскости
и опустимъ изъ нея $\perp$ на плоскость xy-овъ и изъ
g $\perp$ на плоскость xz въ плоск. xy-овъ. Тогда $gH = z_1$,
$gq = y_1$, $Oq = x_1$.
Въ силу извѣстнаго будемъ имѣть:

I. $\cos\alpha\, x + \cos\beta\, y + \cos\gamma\, z - r = 0.$

Здѣсь x, y, z координаты точки H.
Если будемъ переходить отъ одной точки на нашей плоскости къ другой, увидимъ, что выведенное отношеніе будетъ удовлетворять координатамъ всѣхъ нашихъ точекъ. Слѣдовательно, если выведенному равенству подчинены всѣ координаты ~~нашей~~ плоскости, и есть ~~это~~ уравненіе 1-й степ. и коорд. величины вмѣстѣ взятыя, — первая часть нашего предложенія доказана.
Докажемъ обратное предложеніе: Всякое уравненіе съ 3 перемѣнными и съ веществ. коэффиціентами изображаетъ плоскость.
Пусть имѣемъ:

II. $Ax + By + Cz + D = 0$.

Намъ достаточно доказать, что это уравненіе будетъ удовлетворяться тѣми же значеніями, что и (I). Докажемъ, что они могутъ разниться только каким-нибудь постояннымъ множителемъ R. Для этого помноживъ (II) на R:

$$RAx + RBy + RCz + RD = 0.$$

Допустимъ, что это уравненіе тождественно съ (I), получаемъ:

1) $\cos\alpha = RA$

2) $\cos\beta = RB$ 4) $-p = RD$

3) $\cos\gamma = RC$

Далѣе:

$$\cos^2\alpha = R^2A^2$$
$$\cos^2\beta = R^2B^2$$
$$\cos^2\gamma = R^2C^2$$

$1 = R^2(A^2+B^2+C^2)$, изъ котораго

$$R = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Подставивъ это значеніе R въ равенство (4):

$$-p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если бъ это равенство не нужно имѣть,

мы нашли бы, что равенство не удовлетворяется одними и тѣми же значеніями. И такъ, чтобы свести (II) на (I), достаточно умножить первое на $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. При этомъ самые значенія коэффиці-ентовъ легко могутъ быть вычислены.

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Вотъ геометрическія значенія коэффиціентовъ. Итакъ мы доказали свое предложеніе.

Уравненіе плоскости, представленное въ общей формѣ:

1) $Ax + By + Cz + D = 0,$

называется общимъ уравненіемъ плоскости. Извѣстно, что значенія коэф. будутъ опредѣляться такъ:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$-r = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Уравненіе, выраженное непосредственно вещественнымъ образомъ:

$$2)\ \cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z - p = 0,$$

называется <u>нормальнымъ</u>.

Кромѣ этихъ уравненій, плоскость представляютъ въ различныхъ формахъ. Напр., мы можемъ раздѣлить урав. 1-е на $-D$. Получимъ:

$$\frac{-A}{D}x + \frac{-B}{D}y + \frac{-C}{D}z - 1 = 0.$$

Обозначивъ:

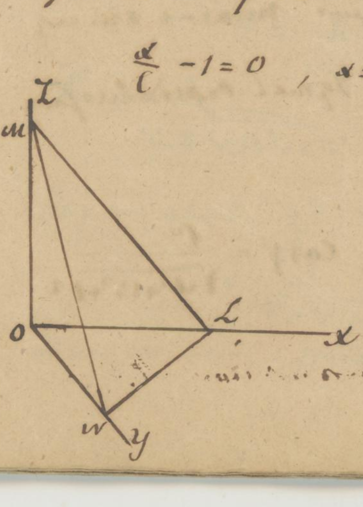
$$-\frac{A}{D} = \frac{1}{l}, \quad \frac{-B}{D} = \frac{1}{m}, \quad \frac{-C}{D} = \frac{1}{n},$$

получимъ:

$$3)\ \frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} - 1 = 0.$$

Вопросъ: какое геометрическое значеніе коэффиціентовъ послѣдняго уравненія, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{m}$ и др. Легко доказать, что они изображаютъ отрѣзки плоскости съ осями координатъ. Сдѣлавши y и $z = 0$, опредѣлимъ:

$$\frac{x}{l} - 1 = 0, \quad x = l = OL.$$



Сдѣлавши

$x = 0$, $z = 0$, ~~получ~~

$\frac{y}{m} - 1 = 0$, $y = m$, которое есть ...

также, какъ длина OM, и т.д.

Можно еще следующимъ образомъ поступить. Именно, мы можемъ разрешить наше уравн. (1) относительно какой-нибудь координаты. Напр.

$$z = \frac{-A}{C}x + \frac{-B}{C}y + \frac{-D}{C}$$

или, делая $\frac{-A}{C} = a$, $\frac{-B}{C} = b$, $\frac{-D}{C} = c$, получимъ:

4). $z = ax + by + c.$

~~Определение геометрическаго значения коэфф. последняго~~ уравнения

!

Вотъ все главныя формы уравнения плоскости.

Очевидно, что уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

при постоянныхъ коэффиц. изображаетъ некоторую постоянную плоскость. Если же изменяется одно D, то уравнение изобразитъ систему параллельныхъ плоскостей, отстоящихъ въ различныхъ разстоянияхъ отъ начала координатъ. Это видно изъ равенства:

$$\frac{-D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = r.$$

Если же D неизменяемо, а изменяемы A, B, C, получимъ всю систему плоскостей, касательныхъ

къ одной шаровой поверхности, описанной D. r.

То же самое въ уравненіи, въ которомъ въ знаменатель

$$\frac{x}{l}+\frac{y}{m}+\frac{z}{n}-1=0.$$

Если будемъ измѣнять одно l, получимъ плоскости параллельныя. Если же m и n

Имѣя уравненіе плоскости, можно рѣшать различныя задачи.

Задача 1. Найти уравненіе плоскости, проходящей черезъ точку, координаты которой x_1, y_1, z_1.

Наше уравненіе можемъ выразить:

1) $\cos\alpha\, x+\cos\beta\, y+\cos\gamma\, z-r=0.$

Требуется по условію опредѣлить неизвѣстность

Если подставимъ въ него x_1, y_1, z_1 вмѣсто x, y, z, получимъ:

2) $\cos\alpha\, x_1+\cos\beta\, y_1+\cos\gamma\, z_1-r=0$

Вычтя 2) изъ 1),

3) $\cos\alpha(x-x_1)+\cos\beta(y-y_1)+\cos\gamma(z-z_1)=0.$

Но решеніе неопределенно; это потому, что намъ дано только одну точку, чрезъ которую можно провести безконечное число плоскостей. Допустимъ еще, что наша плоскость проходитъ чрезъ другую точку, координаты которой $x_2 y_2 z_2$; ясно, что они должны удовлетворять уравненію $\cos\alpha\, x_2 + \cos\beta\, y_2 + \cos\gamma\, z_2 - v = 0$. Вычитая это уравнен. изъ (1), получимъ

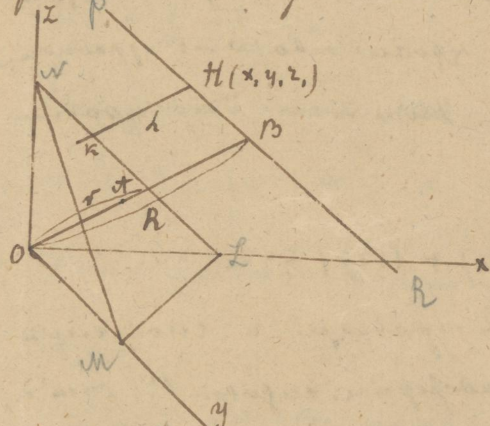
4) $\cos\alpha(x - x_2) + \cos\beta(y - y_2) + \cos\gamma(z - z_2) = 0.$

Так. обр. мы получили 2 уравнен. и можемъ исключить одинъ изъ параметровъ. Въ самомъ д., умноживъ 3ье ур. на $x - x_2$ и 4ое на $x - x_1$ и вычтя полученные результаты, получимъ:

$$\cos\beta\{(x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_2)\} + \cos\gamma\{(x - x_2)(z - z_1) - (x - x_1)(z - z_2)\} = 0.$$

Но все-таки и это уравненіе имеетъ характеръ неопределенный: причина этому та, что черезъ данныя точки можно провести безконечное число плоскостей. Поэтому допустимъ еще, что плоскость проходитъ черезъ 3ью точку, лежащую не на той же прямой $(x_3 y_3 z_3)$. Въ последнемъ случае, сделавъ преобразованія такія же какъ въ первомъ случае, получимъ уравненіе съ определенными коэффициентами.—

Пусть теперь дана система прямоугольных осей координат и плоскость, пересекающая оси координат въ т.т. L, M, N; и дана точка H, координаты которой x_1, y_1, z_1, вне плоскости. Требуется определить разстояние этой точки от данной плоскости.



Для этого изъ т. H проводимъ плоскость PR ∥ данной плоскости; ⊥ OA продолжимъ до пересечения съ плоскостью PR и обозначимъ полученную длину через R, OA черезъ r. Изъ т. H провед. Hk ∥ OB. Следоват. $Hk = AB$. Уравнение плоскости PR, параллельной данной, изобразится такъ:

$$1)\ \cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z - R = 0.$$

А уравнение данной:

$$2)\ \cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z - r = 0$$

Такъ какъ точка H лежитъ въ плоскости PR, координаты ея должны удовлетворять уравнению (1), т.е. получимъ вместо следующее уравнение:

$$3)\ \cos\alpha x_1 + \cos\beta y_1 + \cos\gamma z_1 - R = 0;$$

Но $R = h + r$; подставивъ это выражение R въ ур. (3) и перенеся h во вторую часть, получимъ:

$$\cos\alpha x_1 + \cos\beta y_1 + \cos\gamma z_1 - r = h$$

Так. обр. и определяется длина требуемаго перпендикуляра

Теперь разсмотримъ какимъ образомъ опредѣлять:
линіи пересѣченія двухъ плоскостей между собою?
Пусть имѣемъ два уравненія:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

Допустимъ, что двѣ плоскости выражаемыя нашими
уравненіями, пересѣкаются между собою. Въ так. случ.
координаты точекъ линіи пересѣченія будутъ удовлетво-
рять одновременно обоимъ нашимъ уравненіямъ.
Рѣшая эти уравненія совмѣстно, можемъ исклю-
чить изъ нихъ 1 перемѣнное и въ результатѣ полу-
чить уравненіе вида:

$$ax + by + c = 0$$

Такъ какъ это уравненіе есть непосредственное слѣдствіе
данныхъ уравненій, то оно будетъ удовлетворяться
координатами всѣхъ точекъ лежащихъ на линіи
пересѣченія плоскостей.