

КУРСЪ
ТЕОРИИ
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

II.

Составилъ

Д. Деларю,

ОУЧЕБНИЙ ПРОФЕССОРЪ ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.

1880.

По обсуждению этого вопроса... (text is very faint and blurry, but appears to be a descriptive paragraph about a project or plan).

Спр. Члены совета, от... того, что... (text continues with a list or report).

- а) Исполнение... 30,000 р.
- б) Исполнение... 24,000 р.
- в) Исполнение... 30,000 р.
- г) 0%... 123,127 р.

К У Р СЪ

ТЕОРИИ

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

С О С Т А В И Л Ъ

Д. Деларю,

ОРДИНАРНЫЙ ПРОФЕССОРЪ ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА.

Х А Р Ь К О В Ъ.

Въ Университетской Типографіи.

1 8 8 0.

К У В Р

ТЕОРИИ

ИНФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

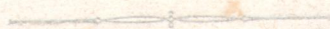
Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харь-
ковскаго Университета.

Ректоръ А. Пштра.

ОСТАВЛЯЮ

Д. Давидовъ

ОБЪЯВЛЕНІЕ ПРОФЕССОРА ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА



Х А Р Ъ К О В Ъ

Въ Университетской Типографіи

1880.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Недостатокъ въ руководствахъ къ изученію теоріи дифференціальныхъ уравненій ощущается не только у насъ, но и въ западной Европѣ, вообще столь богатой учебниками исчисленія безконечно-малыхъ. Дѣло въ томъ, что со времени изданія знаменитаго «*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*» Лакруа, обстоятельнаго нѣмецкаго курса Раабе¹ и Лекцій дифференціального и интегральнаго исчисленій аббата Муаньо², сочиненій, въ которыхъ теорія дифференціальныхъ уравненій излагалась въ тогдашнемъ ея состояніи, этотъ отдѣлъ анализа обогатился большимъ числомъ специальныхъ изслѣдованій, переработать которыя въ форму, доступную для начинающихъ, представлялось далеко не легкимъ. Въ слѣдствіе этого авторы руководства по исчисленію безконечно-малыхъ и предпочитали ограни-

¹ Die Differential- und Integralrechnung von J. L. Raabe. Zürich. 1839.

² Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Paris. 1840.

чиваться изложеніемъ только самыхъ основныхъ понятій теоріи дифференціальныхъ уравненій, оставляя изучающимъ ее трудъ знакомиться со спеціальными изслѣдованіями ученыхъ непосредственно по самымъ источникамъ. Единственный опытъ обстоятельнаго и систематическаго изложенія этого отдѣла анализа представляетъ сочиненіе англійскаго ученаго Буля «A treatise on differential equations», появившееся въ 1859 году; но и въ немъ, не смотря на многія положительныя его достоинства, теоріи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и частныхъ производныхъ развиты поверхностно. Правда, французскій ученый Серре, въ своемъ извѣстномъ «Cours de calcul différentiel et intégral, и Ноелъ, въ неоконченномъ еще изданіи своего «Cours de calcul infinitésimal», обратили сравнительно болѣе вниманія на изложеніе теоріи дифференціальныхъ уравненій; но и они не дали ей все-таки столько мѣста, сколько она заслуживаетъ.

Желаніе дать студентамъ физико-математическихъ факультетовъ нашихъ университетовъ пособие къ систематическому изученію столь важнаго отдѣла анализа, какъ теорія дифференціальныхъ уравненій, и побудило меня къ изданію настоящаго труда, представляющаго переработку моихъ университетскихъ лекцій. Эта цѣль опредѣлила какъ объемъ, такъ и характеръ самаго со-

чиненія. Я старался выдержать соразмѣрность въ развитіи различныхъ статей и, не вдаваясь въ излишнія подробности, не упустить ничего существеннаго для ознакомленія читателя съ приѣмами, выработанными до сихъ поръ наукою для интегрированія тѣхъ или другихъ видовъ дифференціальныхъ уравненій.

Курсъ свой я раздѣляю на два отдѣла. Первый, который теперь издается, содержитъ теорію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій; во второй войдутъ теоріи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, уравненій въ полныхъ дифференціалахъ и уравненій въ частныхъ производныхъ.

Первый отдѣлъ содержитъ шесть главъ, изъ которыхъ первая знакомитъ съ происхожденіемъ различныхъ видовъ дифференціальныхъ уравненій. Во второй главѣ излагаются приѣмы интегрированія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Здѣсь я старался, по возможности, ознакомить читателя съ примѣненіемъ способовъ раздѣленія переменныхъ и интегрирующаго множителя къ интеграціи всѣхъ наиболѣе извѣстныхъ формъ уравненій перваго порядка и первой степени. Далѣе я излагаю приѣмъ, предложенный для интеграціи дифференціальныхъ уравненій дерптскимъ профессоромъ Минтингомъ и привожу приложеніе его къ интеграціи уравненія вида $Mdx + Ndy = 0$, гдѣ M, N функціи второй степени отъ x, y , сдѣланное бывшимъ харьковскимъ

профессоромъ Е. И. Бейеромъ. Съ цѣлью показать возможность примѣненія къ разысканію полнаго интеграла различныхъ уравненій и иныхъ частныхъ приѣмовъ, я занимствовалъ нѣсколько наиболѣе выдающихся примѣровъ изъ мемуара Лагранжа «*Sur l'intégration de quelques équations différentielles*»¹. Глава эта заканчивается изложеніемъ приѣмовъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, но степеней выше первой.

Третья глава посвящена изложенію приѣмовъ интегрированія уравненій высшихъ порядковъ. Прежде всего останавливаюсь на уравненіяхъ линейныхъ. Изъ общихъ свойствъ ихъ я привожу только главные, имѣющія непосредственное значеніе для построенія приѣмовъ интегрированія. Затѣмъ я излагаю интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій съ постоянными коэффициентами, при чемъ, однако, ограничиваюсь приведеніемъ одного изъ нѣсколькихъ извѣстныхъ приѣмовъ. Изъ линейныхъ уравненій съ переменными коэффициентами я останавливаюсь преимущественно на уравненіяхъ втораго порядка безъ придаточнаго члена. Наконецъ, въ заключеніе, указываю на тѣ частныя формы дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ, въ которыхъ интегрированіе сводится на квадратуры или, по меньшей мѣрѣ, на интегрированіе уравненій низшаго порядка чѣмъ данное.

¹ Oeuvres, T. II, p. 5.

Четвертая глава знакомитъ съ приемами интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи безконечныхъ строкъ и опредѣленныхъ интеграловъ.

Въ пятой главѣ излагается теорія особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій какъ перваго, такъ и высшихъ порядковъ. Статьѣ этой, въ виду теоретическаго интереса, ею представляемаго, я позволилъ себѣ дать довольно значительное развитіе и ввести въ нее нѣкоторые результаты моихъ собственныхъ изслѣдованій, напечатанныхъ въ Московскомъ математическомъ сборникѣ.

Шестая и послѣдняя глава этого отдѣла посвящена изложенію главнѣйшихъ геометрическихъ приложений теоріи дифференціальныхъ уравненій.

Что касается до втораго отдѣла, съ изданіемъ котораго я надѣюсь не замедлить, то онъ будетъ посвященъ, какъ замѣчено уже выше, изложенію теоріи совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій, уравненій въ частныхъ производныхъ и уравненій въ полныхъ дифференціалахъ. Значеніе, которое отдѣлъ этотъ имѣетъ для прикладныхъ математическихъ наукъ, побуждало меня обратить на него особенное вниманіе и попытаться ознакомить читателя съ сущностію замѣчательныхъ изслѣдованій Якоби, Бертрана, Лювиля, Бура, Гамильтона и другихъ ученыхъ, обогатившихъ своими трудами теорію интегрированія какъ совокупныхъ уравненій,

такъ и уравненій въ частныхъ производныхъ. Такая попытка, при теперешнемъ состояніи науки, при той незаконченности, которою еще страдаютъ многіе изъ методовъ интеграціи этихъ классовъ уравненій, представляла значительныя трудности, требуя постоянной и значительной переработки научнаго матеріала. Я позволяю себѣ поэтому надѣяться, что эти обстоятельства послужатъ, въ глазахъ компетентныхъ судей, извиненіемъ мнѣ въ тѣхъ недостаткахъ, которые естественно будутъ встрѣчаться въ моемъ трудѣ.

Въ заключеніе считаю необходимымъ сдѣлать замѣчаніе относительно обозначеній, мною употребляемыхъ. Вездѣ, гдѣ это не можетъ повести къ недоразумѣніямъ, я пользуюсь для означенія производныхъ, берушихся по измѣняемости того или другаго переменнаго, обыкновенною характеристикою d ; напротивъ, въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ, рядомъ съ *частными* производными функціи, приходится разсматривать и производныя ея, взятыя относительно переменнаго и всего, что съ нимъ измѣняется, я первая означая характеристикою ∂ , а вторыя — характеристикою d . Такъ, $\frac{\partial u}{\partial x}$ выражаетъ частную производную отъ u , взятую исключительно относительно одного x , а $\frac{du}{dx}$ означаетъ производную, взятую по измѣняемости x и количествъ, отъ него зависящихъ. Для

частныхъ производныхъ $\frac{\partial u}{\partial x}$ употребляю, гдѣ это удобно, и обозначеніе $D_x u$, предложенное Коши. Результатъ подстановки въ функціональное выраженіе V вмѣсто переменнаго x его значенія x_0 я означаю часто чрезъ $\int_{x_0}^x V$, разность двухъ выраженій $\int_{x_1}^x V$ и $\int_{x_0}^x V$, представляю чрезъ $\int_{x_0}^{x_1} V$, т. е. пишу

$$\int_{x_1}^x V - \int_{x_0}^x V = \int_{x_0}^{x_1} V.$$

Эти обозначенія введены были, какъ извѣстно, Коши.

Рукопись издаваемого мною теперь перваго отдѣла моего курса была уже сдана въ типографію, когда я получилъ первый выпускъ сочиненія бывшаго варшавскаго профессора Н. Н. Алексѣева, озаглавленнаго «Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій». Представляя обработку лекцій, читанныхъ имъ въ университетѣ, трудъ почтеннаго профессора, по своей цѣли, соответствуетъ издаваемому мною курсу. Въ виду этого для меня естественно возникъ вопросъ: не излишнимъ ли становится теперь мое руководство? Ознакомившись однако съ появившимся выпускомъ сочиненія г-на Алексѣева, я рѣшился не останавливать своего изданія. Во-первыхъ, важность теоріи дифференціальныхъ уравненій такова, что появленіе и нѣсколькихъ руководствъ къ ея изученію представляется далеко не рос-

кошью; во-вторыхъ, лекціи почтеннаго профессора раз-
нятся отъ моего курса какъ выборомъ научнаго мате-
ріала, такъ и его обработкой; мнѣ кажется, поэтому,
что оба сочиненія могутъ пополнять, а не исключать
одно другое.

Относительно самой внѣшности изданія позволяю себѣ
надѣяться, что я сдѣлалъ все, что было возможно въ
провинціи, гдѣ и средства типографій, и наборщики да-
леко не тѣ, какъ въ столицахъ. Избѣжать опечатокъ
мнѣ не удалось, но я прилагаю списокъ тѣхъ изъ нихъ,
которыя были мною замѣчены.

Какъ бы ни былъ несовершенъ мой трудъ, но если
онъ принесетъ свою долю пользы тѣмъ, кто пожелаетъ
изучить теорію дифференціальныхъ уравненій, то я буду
считать себя вполнѣ вознагражденнымъ за усилія, по-
траченные мною на него.

Харьковъ.
1880 г. 3-го марта.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ТЕОРІЯ ОБЫКНОВЕННЫХЪ
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

Общая свѣдѣнія о дифференціальномъ исчисленіи	31
Интегрированіе уравненій перваго порядка в первой степени	37
Интегрированіе уравненія Риккати	47
Теорія интегрированія линейнаго дифференціального уравненія перваго порядка в первой степени	54
Способъ Мюллера	58
О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрированія линейнаго дифференціального уравненія перваго порядка в первой степени	65

конню, во-вторых, лекции профессора раз-
нятся от курса курса как амплитуда начального мате-
риала, так и его обработка; и, в-третьих, потому
что он не только может преподавать, а и решать
одно и другое.

Относительно самого содержания лекций
нельзя сказать, что он отличается от того, что
приводится в учебнике и в лекциях, а наоборот, да-
ет более полное представление о предмете. В
лекциях он не только рассказывает, но и решает
задачи, что очень полезно.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ

Курс лекций по теории вероятностей и
теории ошибок. Лекции профессора
по теории вероятностей и теории ошибок.
Лекции профессора по теории вероятностей и
теории ошибок.

Лекции профессора по теории вероятностей и
теории ошибок.

О Г Л А В Л Е Н І Е.

Стр.

Предисловіе I.

Г л а в а п е р в а я.

Общее понятіе о различныхъ видахъ дифференціаль- ныхъ уравненій	1.
О происхожденіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій	3.
О происхожденіи уравненій въ частныхъ производныхъ	12.
О происхожденіи уравненій въ полныхъ дифференціалахъ	25.

Г л а в а в т о р а я.

Общія свойства дифференціальныхъ уравненій первого порядка и первой степени	31.
Интегрированіе уравненій первого порядка и первой степени чрезъ раздѣленіе переменныхъ	37.
Интегрированіе уравненія Рикатти	57.
Теорія интегрирующаго множителя дифференціальныхъ уравненій первого порядка и первой степени	64.
Способъ Миндинга	88.
О нѣкоторыхъ частныхъ пріемахъ интеграціи диффе- ренціальныхъ уравненій первого порядка и первой сте- пени	98.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, но степени выше первой.	107.
--	------

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

О различныхъ видахъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій порядковъ выше перваго	119.
---	------

О линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ n -го по- рядка	122.
--	------

Интегрированіе линейныхъ дифференціальныхъ уравне- ній вида $\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y + X$, гдѣ $A_1, A_2, \dots, A_n$ постоянныя количества, а X функ- ція x	135.
--	------

О линейныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ порядка выше перваго, имѣющихъ переменныя коэффициенты.	145.
--	------

О частныхъ интегрирующихся формахъ нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій порядковъ выше перваго.	153.
---	------

Объ интегрирующихъ множителяхъ дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ	173.
---	------

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при по- мощи строкъ	179.
---	------

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при по- мощи опредѣленныхъ интеграловъ	189.
--	------

О разысканіи выраженій опредѣленныхъ интеграловъ при помощи интегрированія дифференціальныхъ уравненій	204.
---	------

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Объ особенныхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ урав- неній перваго порядка и разысканіи ихъ по данному полному интегралу	210.
--	------

О разысканіи особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, когда полный интеграль не извѣстенъ 230.

Объ особенныхъ рѣшеніяхъ дифференціальныхъ уравненій порядковъ выше перваго 244.

Критеріумы, служащіе для отличія особенныхъ рѣшеній отъ частныхъ интеграловъ 259.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

Геометрическія приложенія теоріи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Общія замѣчанія 274.

Частныя задачи 275.

Геометрическое значеніе особенныхъ рѣшеній 283.

Задача траекторій 288.

О разности в особенностях развития дифференциальных	230
Уравнений первого порядка, полученных из дифференциальных	230
О разности в особенностях развития дифференциальных	230
Уравнений первого порядка, полученных из дифференциальных	230
О разности в особенностях развития дифференциальных	230
Уравнений первого порядка, полученных из дифференциальных	230

Глава первая

Теория дифференциальных уравнений первого порядка	234
Уравнения первого порядка	234
Теория дифференциальных уравнений первого порядка	234
Уравнения первого порядка	234
Теория дифференциальных уравнений первого порядка	234
Уравнения первого порядка	234

Глава вторая

Теория дифференциальных уравнений второго порядка	234
Уравнения второго порядка	234
Теория дифференциальных уравнений второго порядка	234
Уравнения второго порядка	234
Теория дифференциальных уравнений второго порядка	234
Уравнения второго порядка	234

Глава третья

О разности в особенностях развития дифференциальных	230
Уравнений первого порядка, полученных из дифференциальных	230
О разности в особенностях развития дифференциальных	230
Уравнений первого порядка, полученных из дифференциальных	230

О частных интегрирующихся формах нелинейных дифференциальных уравнений порядков выше первого.

89. Переходя теперь къ нелинейнымъ дифференціальнымъ уравненіямъ, замѣтимъ прежде всего, что въ тѣхъ случаяхъ, когда данное уравненіе не содержитъ явнымъ образомъ зависимаго перемѣннаго y , а заключаетъ только различныя производныя его, порядковъ этого уравненія всегда можетъ быть пониженъ на единицу.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣя уравненіе вида

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

и допустивъ

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad (2)$$

мы приведемъ данное уравненіе къ формѣ

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right) = 0. \quad (3)$$

Результатъ этотъ представляетъ уже дифференціальное уравненіе $(n-1)$ -аго порядка. Если мы въ состояніи окажемся проинтегрировать его и выразить z посредствомъ x и $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ количествъ, то, внеся найденное выраженіе z въ формулу (2) и проинтегрировавъ слѣдствіе, найдемъ

$$y = \int z dx + C,$$

уравненіе, которое и будетъ выражать полный интегралъ даннаго уравненія (1).

Высказанное замѣчаніе особенно примѣнимо въ случаѣ уравненій втораго порядка. Имѣя уравненіе вида

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

и положивъ

$$\frac{dy}{dx} = z,$$

мы получаемъ непосредственно

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

т. е. уравненіе перваго порядка. Если это послѣднее относится къ интегрирующимся видамъ, то найдемъ чрезъ его интеграцію

$$z = F(x, c_1),$$

т. е.

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, c_1);$$

слѣдовательно

$$(2) \quad y = \int F(x, c_1) dx + c_2.$$

90. Если-бы данное дифференціальное уравненіе не заключало явнымъ образомъ не только самаго зависимаго переменнаго, но и нѣсколькихъ послѣдовательныхъ его производныхъ, то порядокъ его могъ бы быть пониженъ на нѣсколько единицъ. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя уравненіе вида

$$f\left(x, \frac{d^i y}{dx^i}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

и положивъ

$$\frac{d^i y}{dx^i} = z, \quad (2)$$

мы непосредственно свели бы данное уравненіе на

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-i} z}{dx^{n-i}}\right) = 0. \quad (1)$$

Интеграція этого послѣдняго уравненія (если-бы мы оказались въ состояніи произвести ее) доставила бы для z выраженіе вида

$$z = \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-i}),$$

внеся которую въ формулу (2), мы получили бы

$$\frac{d^i y}{dx^i} = \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-i}).$$

Интегрирование этой послѣдней формулы доставило бы затѣмъ послѣдовательно

$$\frac{d^{i-1} y}{dx^{i-1}} = \int \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-i}) dx + c_{n-i+1},$$

$$\frac{d^{i-2} y}{dx^{i-2}} = \iint \Phi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-i}) dx^2 + c_{n-i+1} x + c_{n-i+2},$$

.....

$$y = \iiint \dots \int \Phi(x, c_1, \dots, c_{n-i}) dx^i = c'_{n-i+1} x^{i-1} + c'_{n-i+2} x^{i-2} + \dots + c_{n-i} x + c_n.$$

Послѣднее выраженіе и представляло бы полный интегралъ данного уравненія.

Въ виду этого уравненія третьяго порядка вида

$$f\left(x, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}\right) = 0$$

чрезъ допущеніе $\frac{d^2 y}{dx^2} = z$ сводятся на уравненія перваго порядка

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

91. Порядокъ дифференціального уравненія можетъ быть пониженъ на одну единицу и въ томъ случаѣ, когда въ него не входитъ явнымъ образомъ независимое переменное. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя уравненіе вида

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

■ ПОЛОЖИВЪ

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

мы найдемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2p}{dx^2} = \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p + \frac{d^2p}{dy^2} \cdot p^2,$$

почему данное уравнение преобразуется въ уравнение вида

$$f_1 \left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right) = 0.$$

Если-бы мы оказались въ состояніи проинтегрировать это послѣднее, то нашли бы

$$p = \Phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}),$$

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \Phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}),$$

Интеграція этой послѣдней формулы доставила бы затѣмъ

$$x = \int \frac{dy}{\Phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})} + c_n.$$

Примѣръ. — Пусть дано уравнение втораго порядка

$$y \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0.$$

Полагаемъ $\frac{dy}{dx} = p$, отъ чего данное уравнение сводится на уравнение 1-го порядка

$$yp \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0,$$

принимающее форму

$$\frac{dy}{y} + \frac{p \cdot dp}{1+p^2} = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаемъ

$$\log y + \log \sqrt{1 + p^2} = c',$$

или

$$\log y \sqrt{1 + p^2} = c'.$$

Слѣдовательно

$$y \sqrt{1 + p^2} = e^{c'} = c$$

или

$$1 + p^2 = \frac{c^2}{y^2},$$

или

$$p^2 = \frac{c^2}{y^2} - 1,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c^2 - y^2}{y^2}}.$$

Отсюда

$$dx = \frac{-y \cdot dy}{\sqrt{y^2 - c^2}}$$

и слѣдовательно

$$x = - \int \frac{y \cdot dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} + c_1,$$

т. е.

$$x = - \sqrt{y^2 - c^2} + c_1$$

или, окончательно,

$$(x_1 - c_1)^2 + y^2 - c^2 = 0.$$

92. Уравненія вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

гдѣ X функція одного переменнаго x , всегда интегрируются непосредственно, такъ-какъ въ этомъ случаѣ

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int Xdy + c,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \iint Xdx^2 + cx + c',$$

$$\dots = \dots$$

$$y = \iint \dots Xdx^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n.$$

Что-же касается до уравненія

$$\frac{d^n y}{dx^n} = Y,$$

гдѣ Y функція одного y , то оно можетъ быть проинтегрировано когда $n=2$. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = Y,$$

мы находимъ

$$2 \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} = 2Y \frac{dy}{dx},$$

формула, первая часть которой точная производная отъ $\left[\frac{dy}{dx}\right]^2$;

поэтому

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2 \int Y dy + c,$$

слѣдовательно

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2 \int Y dy + c},$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2 \int Y dy + c}},$$

и наконецъ

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int Y dy + c}} + c'.$$

93. Къ интегрирующимся формамъ уравненій высшихъ порядковъ слѣдуетъ отнести вообще уравненія вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right). \quad (1)$$

Допустивъ здѣсь

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z, \quad (2)$$

уравненіе (1) сводимъ на

$$\frac{dz}{dx} = f(z),$$

откуда

$$dx = \frac{dz}{f(z)}$$

и слѣдовательно

$$x = \int \frac{dz}{f(z)} + c. \quad (3)$$

Если интеграль, входящій въ послѣднюю формулу, можетъ быть выраженъ въ извѣстныхъ намъ функціяхъ, такъ что формула (3) въ окончательномъ результатѣ дастъ

$$z = \Phi(x, c),$$

то внеся это выраженіе z въ отношеніе (2), получимъ

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \Phi(x, c) \quad (4)$$

и разысканіе y сведется на квадратуры.

Если-бы мы не могли изъ уравненія (3) выразить z алгебраически въ x и c , то нужно было бы поступать иначе. Изъ уравненія (2) мы получаемъ

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int z dx = \int \frac{z dz}{f(z)} + c,$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int dx \left[\int \frac{z dz}{f(z)} + c \right] + c' = \int \frac{dz}{f(z)} \left[\int \frac{z dz}{f(z)} + c \right] + c',$$

.....

$$y = \int \frac{dz}{f(z)} \left[\int \frac{dz}{f(z)} \dots \left[\int \frac{dz}{f(z)} + c \right] + c' \right] \dots + c^{(n-2)} \Big].$$

Произведя въ послѣдней формулѣ означенныя интеграціи и затѣмъ исключивъ z при помощи формулы (3), мы и найдемъ полный интеграль даннаго уравненія (1).

Примѣръ. Пусть дано уравненіе

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Положивъ $\frac{dy}{dx} = z$, находимъ

$$az \frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2},$$

откуда

$$x = c + a \sqrt{1 + z^2}. \quad (\alpha)$$

Слѣдую первому изъ указанныхъ передъ этимъ приѣмовъ, т. е. рѣшая уравненіе (α) относительно z , получаемъ:

$$z = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{x-c}{a}\right)^2 - 1},$$

откуда

$$y = \iint \sqrt{\left(\frac{(x-c)^2}{a^2} - 1\right)} dx^2 + c_1 x + c_2. \quad (\beta)$$

Если употребить второй изъ указанныхъ приѣмовъ, то получимъ

$$dx = \frac{az dz}{\sqrt{1 + z^2}},$$

далѣе

$$\frac{dy}{dx} = \int z dx = \int \frac{az^2 dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{az \sqrt{1 + z^2}}{2} - \frac{a}{2} \log[z + \sqrt{1 + z^2}] + c.$$

Умноживъ вторую часть на

$$\frac{az dz}{\sqrt{1 + z^2}} = dx,$$

а первую часть на dx и проинтегрировавъ, получимъ:

$$y = \frac{a^2 z^3}{6} - \frac{a^2}{2} \sqrt{1+z^2} \log[z + \sqrt{1+z^2}] + \frac{a^2}{2} z + ac' \sqrt{1+z^2} + c''.$$

Теперь изъ этого уравненія и уравненія (α) остается исключить z .

94. Имѣя уравненіе вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right)$$

нужно положить $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = z$, отъ чего данное уравненіе приметъ видъ

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f(z).$$

Будучи проинтегрировано, оно доставитъ

$$x = \int \frac{dz}{\sqrt{2 \int f(z) dz + C}} + C'. \quad (\alpha)$$

Если изъ этого послѣдняго уравненія z можно будетъ выразить въ x , C и C' , то получимъ:

$$z = \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \varphi(x, C, C'),$$

въ виду чего разысканіе выраженія y сведется на квадратуры. Если-бы мы не были въ состояніи изъ уравн. (α) опредѣлить z , то можно было бы прибѣгнуть ко второму изъ приѣмовъ, изложенныхъ въ номерѣ 92.

95. Между уравненіями порядковъ выше перваго, которыя во многихъ случаяхъ удавалось проинтегрировать, слѣдуетъ отмѣтить однородныя уравненія.

Дифференціальное уравненіе называется *однороднымъ*, когда, принимая переменныя x , y и ихъ дифференціалы dx , dy , $d'y$,

$d^3y, \dots$ за множители первой степени, мы находимъ, что всѣ члены уравненія одной степени. Такъ, уравненіе

$$x^2 d^2y + x dx^2 + y dy^2 = 0$$

должно считаться однороднымъ, потому что всѣ его члены третьей степени. Но коль-соро $dx, dy, d^2y, \dots$ принимаются за

множители первой степени, выраженіе $p = \frac{dy}{dx}$ должно будетъ

приниматься за количество степени 0, выраженіе $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ за ко-

личество степени —1 и т. д. Въ виду этого, если дифферен-

ціальное уравненіе выражено въ $x, y, p, q, \dots$, то для того,

чтобы оно было однороднымъ, нужно, чтобы всѣ члены его ока-

зались одной степени, когда x, y принимаются за множители пер-

вой степени, p за множитель нулевой степени, q за множитель

—1-й степени, и т. д. Отсюда слѣдуетъ, что если сдѣлать $y = zx$,

$q = \frac{t}{x}, \dots$, то всѣ члены будутъ содержать x въ одной и той

же степени; поэтому переменное x исчезаетъ изъ уравненія и

исчезновеніе это составляетъ именно отличительный признакъ

однородныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, такъ-какъ x исчезаетъ

отъ допущенія $y = zx, q = \frac{t}{x}, \dots$, то послѣ этого получается

уравненіе, содержащее только количества $z, t, p \dots$ и потому

одно изъ этихъ количествъ всегда выразится въ остальныхъ.

Въ случаѣ уравненія второго порядка z, t, p будутъ единствен-

ными количествами, входящими въ уравненіе; такъ-какъ при

$$dy = p dx, \quad z dx + x dz = dy$$

получаемъ

$$z dx + x dz = p dx, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z},$$

то будетъ

$$dp = qdx = \frac{t}{x} dx,$$

откуда

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t}.$$

Сравненіе двухъ выраженій $\frac{dx}{x}$ доставляетъ

$$\frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{t}.$$

или

$$tdz = pdp - zdp, \quad (\alpha)$$

уравненіе первого порядка, интегрированіе котораго совершится извѣстными способами. Интегрированіе это сведется собственно на квадратуры въ слѣдующихъ случаяхъ:

1) Когда $t = qx$ будетъ однородною функціею отъ p и z , потому что въ этомъ случаѣ уравненіе (α) само будетъ однороднымъ и притомъ первой степени.

2) Когда t представляетъ ту или другую функцію p , потому что въ этомъ случаѣ уравн. (α) первого порядка и первой степени относительно z , и, приведенное къ формѣ

$$dz + z \frac{dp}{t} = \frac{pdp}{t},$$

оно приводитъ къ интегралу вида

$$\int_e \frac{dp}{t} = \int_e \int_t \frac{pdp}{t}.$$

3) Когда t представляетъ функцію разности $p - z$, потому что при допущеніи $p - z = u$ количество t сдѣлается функціею u , а такъ-какъ $p = z + u$, уравненіе (α) обратится въ

$$tdz = udu + udt$$

и мы получимъ

$$dz = \frac{udu}{t-u},$$

$$z = \int \frac{udu}{t-u}.$$

4) Когда, допустивъ $p - z = u$, получаемъ

$$t = u + \frac{Pu}{Qz + Rz^n},$$

гдѣ P, Q, R нѣкоторыя функціи u , потому что въ этомъ случаѣ уравненіе (α) приводится къ виду уравненія

$$Pd z = Qz \cdot du + Rz^n \cdot du,$$

которое относится къ интегрирующимся чрезъ квадратуры.

5) Когда имѣемъ

$$t = u + Mu^2 + Nu^n,$$

гдѣ M, N функціи z , потому что въ этомъ случаѣ уравненіе (α) принимаетъ видъ

$$Mu \cdot dz + Nu^{n-1} dz = du.$$

Приведемъ примѣры.

1) Пусть дано уравненіе

$$x^2 d^2 y = x \cdot dx dy + 3y \cdot dx^2,$$

т. е.

$$x^2 q = xp + 3y,$$

гдѣ $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2 y}{dx^2}$. Допустивъ

$$y = zx, q = \frac{t}{x},$$

получимъ

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t} = \frac{dp}{p+3z} = \frac{dz}{p-z}.$$

или

$$(p+3z)dz = pdp - zdp,$$

откуда

$$p = z + \sqrt{4z^2 + c_1},$$

$$\log x = \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \log \frac{2z + \sqrt{4z^2 + c_1}}{c_2} = \frac{1}{2} \log \frac{z + \sqrt{c' + z^2}}{c_2},$$

$$x^2 = \frac{z + \sqrt{c' + z^2}}{c_2} = \frac{y + \sqrt{c'x^2 + y^2}}{c_2x}, \quad y = c_2x^2 - \frac{c'}{x}.$$

2) Пусть дано уравненіе

$$nx^3 d^2y = (ydx - xdy)^2.$$

Дѣлая тѣ-же допущенія, какъ и въ предыдущемъ примѣрѣ, получимъ:

$$ndp = (p-z)dz,$$

а положивъ затѣмъ $p-z=u$, найдемъ

$$dz - \frac{ndu}{u-n} = 0, \quad x = \frac{u-n}{c_1u},$$

$$y = nx \log \frac{u-n}{c_2} = nx \log \frac{nc_1x}{c_2(1-c_1x)}.$$

3) Дано уравненіе

$$(dx^2 + dy^2)^{3/2} = ndx d^2y \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найдемъ

$$(1+p^2)^{3/2} dz = n(p-z)dp \sqrt{1+z^2}.$$

Чтобы проинтегрировать это уравненіе, положимъ

$$p = \tan \alpha, \quad z = \tan \beta;$$

получимъ:

$$d\alpha = \frac{d\alpha - d\beta}{1 - n \sin(\alpha - \beta)} = \frac{d\gamma}{1 - n \sin \gamma},$$

гдѣ $\gamma = \alpha - \beta$; далѣе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z} &= \frac{d\beta \cdot \cos \alpha}{\cos \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{(\cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \beta \cdot \sin \gamma) d\beta}{\cos \beta \cdot \sin \gamma} \\ &= \frac{\cos \gamma d\beta}{\sin \gamma} - \frac{\sin \beta \cdot d\beta}{\cos \beta} = \frac{n \cdot \cos \gamma \cdot d\beta}{1 - n \cdot \sin \gamma} - \frac{\sin \beta \cdot d\beta}{\cos \beta}, \end{aligned}$$

потому что

$$d\beta = \frac{n \sin \gamma \cdot d\gamma}{1 - n \cdot \sin \gamma};$$

слѣдовательно

$$x = \frac{c_1 \cos \beta}{1 - n \sin \gamma}, \quad y = \frac{c_1 \sin \beta}{1 - n \sin \gamma}, \quad \beta = \int \frac{n d\gamma}{1 - n \sin \gamma}.$$

96. Въ числу дифференціальныхъ уравненій второго порядка, интегрированіе которыхъ всегда можетъ быть сведено на интегрированіе уравненія перваго порядка, относятся еще уравненія, дѣлающіяся однородными, если въ нихъ разсматривать y какъ количество n -ой степени, а p и q какъ количества $(n-1)$ -ой и $(n-2)$ -ой степеней. Въ самомъ дѣлѣ, допустивъ въ такомъ уравненіи

$$y = x^n z, \quad p = x^{n-1} t, \quad q = x^{n-2} u,$$

въ силу отношеній $dy = p dx$, $dp = q dx$, получимъ:

$$x \cdot dz + n z \cdot dx = t dx, \quad x dt + (n-1) t dx = u \cdot dx,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{dz}{t - n z} = \frac{dt}{u - (n-1)t},$$

$$dz(u - (n-1)t) = (t - n z) dt;$$

но, по положенію, если въ данномъ уравненіи замѣнить y, p, q ихъ значеніями въ z, t, u , переменное x исчезаетъ и ре-

результатъ подстановки будетъ, поэтому, содержать только z , t , u ; изъ этого послѣдняго уравненія опредѣлится значеніе u , которое и внесется въ уравненіе перваго порядка между z и t . Послѣ этого интегрированіе закончится при помощи извѣстныхъ уже приѣмовъ.

Поясимъ это примѣромъ.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$x^2 d^2 y = ay \cdot dx^2 + bx \cdot dx \cdot dy,$$

или

$$qx^2 = ay + bpx.$$

Въ этомъ примѣрѣ $n = 0$. Сдѣлавъ

$$p = \frac{t}{x}, \quad q = \frac{u}{x^2},$$

получимъ

$$u = ay + bt;$$

поэтому дифференціальное уравненіе

$$dz(u - (n - 1)t) = (t - nz)dt$$

обратится въ

$$aydy + (b + 1)tdy = tdt.$$

Сдѣлаемъ $t = yz$; получимъ

$$ady + (b + 1)zdy = yzdz + z^2 dy,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{a + (b + 1)z + z^2},$$

а полагая

$$a + (b + 1)z - z^2 = (\alpha + z)(\beta - z),$$

найдемъ:

$$\alpha\beta = a, \quad \beta - \alpha = b + 1,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\alpha}{\alpha+\beta} \frac{dz}{\alpha+z} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{dz}{\beta-z},$$

$$\log y = c_1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \log(\alpha+z) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \log(\beta-z),$$

или

$$y(\alpha+z)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\beta-z)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = c_1.$$

Съ другой стороны

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{(\alpha+z)(\beta-z)},$$

или

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha+\beta} \frac{dz}{\alpha+z} + \frac{1}{\alpha+\beta} \frac{dz}{\beta-z},$$

$$x = c_2 \left(\frac{\alpha+z}{\beta-z} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad \frac{\alpha+z}{\beta-z} = \left(\frac{x}{c_2} \right)^{\alpha+\beta}, \quad z = \frac{\beta x^{\alpha+\beta} - \alpha c_2^{\alpha+\beta}}{c_2^{\alpha+\beta} + x^{\alpha+\beta}};$$

подставляя эти выражения и положивъ $\frac{c_1}{\alpha+\beta} = c'$, получимъ на-
конецъ

$$y = c' \left(\frac{c_2^{\alpha}}{x^{\alpha}} + \frac{x^{\alpha}}{c_2^{\beta}} \right).$$

97. Къ уравненіямъ перваго порядка приводятся еще тѣ уравненія втораго порядка, въ которыхъ зависимое перемѣнное y и его дифференціалы dy, d^2y входятъ во всѣ члены въ одной и той-же степени. Въ самомъ дѣлѣ, если допустить

$$dy = p \cdot dx, \quad dp = q \cdot dx,$$

то количества y, p, q будутъ имѣть одиѣ и тѣ-же степени и въ преобразованномъ уравненіи; сдѣлавъ же $p = uy, q = vy,$

найдемъ, что y , какъ входящее во всѣ члены въ одной и той же степени, сократится. Преобразованное уравненіе будетъ содержать только x , u , v и изъ него можно будетъ выразить v въ x и u . Изъ двухъ уравненій

$$p = uy, \quad dp = qdx$$

найдемъ въ то-же время

$$dy = u y dx, \quad u dy + y du = v y dx;$$

слѣдовательно

$$\frac{dy}{y} = u dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{v dx - du}{u},$$

$$du + u^2 dx = v dx.$$

Послѣ этого останется только подставить вмѣсто v , въ это уравненіе перваго порядка, его значеніе въ x и u для того, чтобы, проинтегрировавъ, опредѣлить значеніе u въ x . Наконецъ y и интегралъ даннаго уравненія найдутся при посредствѣ уравненія

$$\log y = \int u dx, \quad y = e^{\int u dx}.$$

Уравненіе

$$du + u^2 dx = v dx$$

при допущеніи

$$v = u^2 + V$$

обращается въ

$$du = V dx$$

и интегрируется: 1° когда $V = \frac{X}{U}$, гдѣ X функція x , а U функція u ; 2° когда V однородная функція нулевой степени отъ x и u ; 3° когда имѣемъ $V = X_1 u + X_2 u^n$, гдѣ X_1 , X_2

функции x ; 4° когда $V = \frac{1}{U_1 x + U_2 x^n}$, гдѣ U_1, U_2 функции u .

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$\alpha y d^2 y + \beta dy^2 = \frac{y dx dy}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

т. е.

$$\alpha y q + \beta p^2 = \frac{p y}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Дѣлая $p = uy$, $q = vy$, получаемъ:

$$\alpha v + \beta u^2 = \frac{u}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad v = \frac{u}{\alpha \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\beta u^2}{\alpha},$$

$$du + u^2 dx = \frac{u dx}{\alpha \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\beta u^2 dx}{\alpha},$$

или, сдѣлавъ $u = \frac{1}{s}$,

$$ds + \frac{s dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) dx.$$

Помноживъ это уравненіе на $(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}}$ и проинтегрировавъ слѣдствіе, найдемъ

$$s (x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \int (x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}} dx.$$

Допустимъ еще

$$x + \sqrt{a^2 + x^2} = t^\alpha,$$

откуда

$$a^2 = t^{2\alpha} - 2t^\alpha x,$$

$$x = \frac{t^{2\alpha} - a^2}{2t^\alpha} = \frac{1}{2}t^\alpha - \frac{1}{2}a^2t^{-\alpha}, \quad dx = \frac{\alpha}{2}dt(t^{\alpha-1} + a^2t^{-\alpha-1}),$$

$$st = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \int \frac{\alpha}{2} (t^\alpha + a^2t^{-\alpha}) dt, \quad st = c_1 + \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + a^2 \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right);$$

но $\frac{dy}{y} = u dx = \frac{dx}{s}$, и мы имѣемъ

$$\frac{dx}{s} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{ds}{s} + \frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}};$$

слѣдовательно

$$\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \log y = \log s + \frac{1}{\alpha} \log (x + \sqrt{a^2+x^2}) = \log st + c_2,$$

$$y = c'(st)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

и сдѣлавъ $c_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} c''$,

$$y = c' \left(c'' + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

и такъ-какъ

$$t = (x + \sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{\alpha}},$$

то

$$c_1 y^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = A + \frac{1}{\alpha+1} (x + \sqrt{a^2+x^2})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{a^2}{1-\alpha} (x + \sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

98. Къ интегрирующимся уравненіямъ второго порядка относятся еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x) \frac{dy}{dx} + F(y) \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

исслѣдованное впервые Льюилемъ. Этотъ ученый проинтегрировалъ его пользуясь приѣмомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, но покойный академикъ нашъ Остроградскій показалъ, что оно можетъ быть проинтегрировано непосредственно, если только раздѣлить его предварительно на $\frac{dy}{dx}$. Оно чрезъ это приводится въ виду

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2} dx}{\frac{dy}{dx}} + f(x) dx + F(y) dy = 0$$

и интегрированіе его прямо доставляетъ

$$\log \frac{dy}{dx} + \int f(x) dx + \int F(y) dy = C,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = C \cdot e^{-\int f(x) dx} e^{-\int F(y) dy},$$

откуда

$$e^{\int F(y) dy} dy = c e^{-\int f(x) dx} dx$$

и слѣдовательно

$$\int e^{\int F(y) dy} dy = c \int e^{-\int f(x) dx} dx + c',$$

гдѣ c и c' произвольныя постоянныя. Это и есть полный интегралъ даннаго уравненія.

Объ интегрирующихъ множителяхъ дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ.

99. Разысканіе множителя, обращающаго первую часть дифференціального уравненія n -аго порядка

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

въ точную производную дифференціального выраженія, представляется а ргіогі самымъ естественнымъ путемъ для интеграціи даннаго уравненія. Лагранжъ доказалъ въ самомъ дѣлѣ, что такіе *интегрирующіе* множители существуютъ, вообще, для каждаго дифференціального уравненія.

Предположимъ себѣ, что данное уравненіе разрѣшено относительно наивысшей изъ входящихъ въ нее производныхъ зависимаго переменнаго и приведено такимъ образомъ къ виду

$$\frac{d^ny}{dx^n} + \varphi\left(x, y, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0. \quad (1)$$

Пусть, въ то-же время,

$$F\left(x, y, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = c \quad (2)$$

одинъ изъ первыхъ интеграловъ этого уравненія. Продифференцировавъ уравненіе (2) и допуская, при этомъ, для удобства обозначеній, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\dots$, $y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, получимъ:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dy'} y'' + \dots + \frac{dF}{dy^{(n-1)}} y^{(n)} = 0,$$

откуда

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = - \frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \dots + \frac{dF}{dy^{(n-1)}} y^{(n-1)}}{\frac{dF}{dy^{(n-1)}}} \quad (3)$$

Такъ-какъ уравненіе (2) есть одно изъ *первыхъ* рѣшеній уравненія (1), а вторая часть формулы (3) уже не содержитъ произвольнаго постояннаго количества, то выраженіе, доставляемое для $\frac{d^n y}{dx^n}$ уравненіемъ (3), должно быть тождественно съ выра-

$$f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) = \frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \dots + \frac{dF}{dy^{(n-1)}} y^{(n-1)}}{\frac{dF}{dy^{(n-1)}}}.$$

Придавъ въ обѣихъ частяхъ $\frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$, получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dx^n} + f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ = \frac{\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \dots + \frac{dF}{dy^{(n-1)}} y^{(n-1)} + \frac{dF}{dy^{(n-1)}} y^{(n)}}{\frac{dF}{dy^{(n-1)}}}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{dF}{dy^{(n-1)}} \left\{ \frac{d^n y}{dx^n} + f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) \right\} = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \dots + \frac{dF}{dy^{(n-1)}} y^{(n)}.$$

Правая часть этой формулы представляетъ однако точную производную отъ $F(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$, а потому и обнаруживается, что для обращенія лѣвой части даннаго уравненія (1)

въ точную производную достаточно умножить ее на выраженіе $\frac{dF}{dy^{n-1}}$.

И такъ, всегда существуетъ выраженіе порядка единицею низшаго чѣмъ данное уравненіе, которое представляетъ множитель, обращающій лѣвую часть дифференціального уравненія n -аго порядка (1) въ точную производную выраженія $(n-1)$ -аго порядка.

100. Нѣтъ сомнѣнія въ теоретической важности доказаннаго общаго предложенія; но на дѣлѣ разысканіе интегрирующихъ множителей для уравненій порядковъ выше перваго встрѣчаетъ большія трудности и удавалось геометрамъ только въ отдѣльных частныхъ случаяхъ. Чтобы представить образчикъ тѣхъ частныхъ приѣмовъ, къ которымъ приходится прибѣгать для разысканія интегрирующихъ множителей и интеграціи при помощи ихъ уравненій высшихъ порядковъ, возьмемъ уравненіе втораго порядка

$$d^2y + \frac{ay dx}{[by^2 + c + 2dx + ex^2]^2} = 0 \quad (1)$$

и проинтегрируемъ его приѣмомъ, употребленнымъ Эйлеромъ.

Разсмотримъ прежде всего — нельзя ли первую часть этого уравненія обратить въ точный дифференціалъ чрезъ умноженіе ея на выраженіе вида

$$2X_1 dy + 2X_2 y dx,$$

гдѣ X_1 , X_2 функціи x , требующія опредѣленія.

Означимъ черезъ

$$X_1 dy^2 + 2X_2 y dx dy + U dx^2 = C dx^2,$$

гдѣ U функція y , x , интеграль произведенія

$$2d^2y(X_1 dy + X_2 y dx) + \frac{2ay dx^2 [X_1 dy + X_2 y dx]}{[by^2 + c + 2fx + ex^2]^2};$$

въ такомъ случаѣ необходимо будетъ

$$d^2y(dx_1 + 2X_2dx) + 2y.dxdX_2dy + dx^2dU - \frac{2aydx^2(X_1dy + X_2ydx)}{[by^2 + c + 2fx + ex^2]^2} = 0.$$

Уравненіе это можетъ привести чрезъ интегрированіе къ опредѣленію U только при допущеніи

$$dX_1 + 2X_2dx = 0; \quad (2)$$

въ этомъ случаѣ оно сведется на

$$dU = \frac{ay(2X_1dy - ydX_1)}{[by^2 + c + 2fx + ex^2]^2} - 2ydy \frac{dX_2}{dx},$$

гдѣ вторая часть представляетъ дифференціалъ, взятый относительно y , выраженія

$$\frac{-aX_1}{b[by^2 + c + 2fx + ex^2]} - y^2 \frac{dX_2}{dx}; \quad (3)$$

поэтому будетъ

$$U = \frac{-aX_1}{b(by^2 + c + 2fx + ex^2)} - y^2 \frac{dX_2}{dx}, \quad (4)$$

если только дифференціалъ выраженія (3), взятый относительно x , равенъ нулю, т. е. если

$$\begin{aligned} & \frac{-a.dX_1(by^2 + c + 2fx + ex^2) + 2aX_1(f + ex)}{b(by^2 + c + 2fx + ex^2)^2} - y^2 \frac{d^2X_2}{dx^2} \\ & = - \frac{ay^2dX_1}{(by^2 + c + 2fx + ex^2)^2}; \end{aligned} \quad (5)$$

но этому уравненію можно удовлетворить допуская

$$\frac{d^2X_2}{dx^2} = 0, \quad -dX_1(c + 2fx + ex^2) + 2X_1dx(f + ex) = 0, \quad (6)$$

а потому нужно еще разсмотрѣть совмѣстимы ли эти два условія съ условнымъ уравненіемъ (2). Второе изъ уравненій (6) даетъ

$$X_1 = c_1 + 2fx + ex^2,$$

почему первое изъ уравненій (6) и ур. (2) обратятся въ

$$X_2 = -\frac{dX_1}{2dx} = -f - ex \text{ и } \frac{d^2X_2}{dx^2} = 0$$

и будутъ существовать совмѣстно. Слѣдовательно условія (6) могутъ существовать совмѣстно со (2) и искомый интегрирующий множитель даннаго уравненія оказывается равнымъ

$$2dy(c + 2fx + ex^2) - 2ydx(f + ex). \quad (7)$$

По введеніи этого множителя въ данное уравненіе лѣвая часть его дѣлается точнымъ дифференціаломъ выраженія

$$(c + 2fx + ex^2)dy^2 - 2(f + ex)ydydx \\ - \left[\frac{a(c + 2fx + ex^2)}{b(by^2 + c + 2fx + ex^2)} + ey^2 \right] dx^2,$$

потому первый интеграль даннаго уравненія будетъ:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (c + 2fx + ex^2) - 2y \frac{dy}{dx} (f + ex) \\ - \frac{a(c + 2fx + ex^2)}{b(by^2 + c + 2fx + ex^2)} + ey^2 = c_1. \quad (8)$$

Теперь остается найти полный интеграль. Для этого къ обѣмъ частямъ ур. (8) придаемъ $\frac{a}{b}$; получаемъ:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (c + 2fx + ex^2) - 2y \frac{dy}{dx} (f + ex) \\ + \frac{ay^2}{by^2 + c + 2fx + ex^2} + ey^2 = c'.$$

сдѣлать затѣмъ

$$c + 2fx + ex^2 = bz^2,$$

откуда

$$f + ex = \frac{bzdz}{dx},$$

то последнее уравнение обратится въ

$$\frac{bz^2dy^2}{dx^2} - \frac{2byzdydz}{dx^2} + ey^2 + \frac{ay^2}{b(y^2+z^2)} = \frac{C}{b}$$

и допустивъ $y = uz$, мы получимъ

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2} - \frac{bu^2z^2dz^2}{dx^2} + eu^2z^2 + \frac{au^2}{b(1+u^2)} = \frac{C}{b};$$

но

$$\frac{z^2dz^2}{dx^2} = \frac{(f+ex)^2}{b^2},$$

а потому

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2} + \frac{ce-f^2}{b}u^2 = \frac{C+(C-a)u^2}{b(1+u^2)},$$

или

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2} = \frac{C+(C-a+f^2-ce)u^2+(f^2-ce)u^4}{1+u^2}.$$

Замѣнивъ, наконецъ, z его выраженіемъ, найдемъ

$$\frac{dx}{c+2fx+ex^2} + \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{C+(C-a+f^2-ce)u^2+(f^2-ce)u^4}},$$

уравненій, въ которомъ переменныя раздѣлены и которое по-
этому непосредственно интегрируется и даетъ

$$\int \frac{dx}{c+2fx+ex^2} + \int \frac{\sqrt{1+u^2}.dy}{\sqrt{C+(C-a+f^2-ce)u^2+(f^2-ce)u^4}} = C_1.$$

Всяея сюда вмѣсто u его выраженіе

$$u = \frac{y}{z} = \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{c+2fx+ex^2}},$$

мы и получимъ полный интегралъ данного уравненія.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ СТРОКЪ И ОПРЕДѢЛЕННЫХЪ ИНТЕГРАЛОВЪ.

Интегрирование дифференціальныхъ уравненій при помощи строкъ.

101. Недостаточность имѣющихся въ нашемъ распоряженіи приемовъ опредѣленія полного первообразнаго каждаго даннаго дифференціальнаго уравненія, зависящаго отъ двухъ переменныхъ, вынуждаетъ часто стараться проинтегрировать то или другое данное дифференціальное уравненіе по крайней мѣрѣ при помощи безконечныхъ строкъ. Въ этомъ случаѣ, вмѣсто того, чтобы стараться опредѣлить общее уравненіе, связывающее зависимое переменное y съ независимымъ x и отвѣчающее отношенію между этими количествами и производными первого изъ нихъ, выражаемому самымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, задаются просто разысканіемъ для y такой безконечной строки, содержащей произвольныя постоянныя количества въ числѣ, соответствующемъ порядку дифференціальнаго уравненія, которая, завися отъ x , доставляла бы для y выраженіе, удовлетворяющее дифференціальному уравненію. Конечно, получаемыя строки должны быть сходящимися. При этомъ, когда окажется возможнымъ найти точное выраженіе суммы, полученной для y строки, найдется въ сущности и полный интегралъ дифференціальнаго урав-

ненія, приведенный къ конечной формѣ; но и при невозможности найти сумму строки, строка все-таки позволяет вычислять, съ требуемою степенью приближенія, значенія y , соответствующія тѣмъ или другимъ значеніямъ x . Отсюда то значеніе, которое приемъ интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи строкъ имѣетъ для прикладныхъ математическихъ наукъ.

102. Сущность самаго приема интегрированія дифференціальныхъ уравненій при помощи строкъ весьма проста. Имѣя уравненіе n -аго порядка, приведенное къ формѣ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1)$$

гдѣ черезъ $y', y'', \dots, y^{(n)}$ мы для простоты обозначаемъ различные производныя y , возьмемъ произвольное частное значеніе x , наприимѣръ x_0 , и пусть $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ соответствующія ему значенія y и его $(n-1)$ производныхъ. Уравненіе (1) опредѣлитъ намъ въ такомъ случаѣ соответствующее значеніе $y^{(n)}$; мы будемъ именно имѣть:

$$y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) = P. \quad (2)$$

Сверхъ того простое дифференцированіе ур. (1) приведетъ къ опредѣленію и всѣхъ значеній производныхъ y порядковъ выше n -аго, отвѣчающихъ $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$; мы именно получимъ выраженія вида

$$y_0^{(n+1)} = Q, y_0^{(n+2)} = R, \dots \quad (3)$$

гдѣ $Q, R, \dots$ опредѣленнымъ образомъ выражены въ $x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

Теперь, въ силу известной формулы Тейлора, предполагая y непрерывною функціею x , можемъ написать

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{1} y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} y''_0 + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)} + \frac{(x-x_0)^n}{n!} y_0^{(n)} + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} y_0^{(n+1)} + \dots$$

Здѣсь формулы (2) и (3) опредѣляютъ $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}$, ... въ количествахъ y_0 , y'_0 , ..., $y_0^{(n-1)}$, остающихся произвольными, хотя и постоянными величинами, такъ что получаемъ:

$$y = C + (x - x_0)C_1 + (x - x_0)^2C_2 + \dots + (x - x_0)^{n-1}C_{n-1} + \frac{(x - x_0)^n}{n!}P + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q + \dots, \quad (4)$$

гдѣ собственно

$$C = y_0, C_1 = y'_0, C_2 = \frac{1}{2}y''_0, \dots, C_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}y_0^{(n-1)}.$$

Формула эта, въ предѣлахъ сходимости строки, составляющей правую ея часть, во-первыхъ, удовлетворяетъ данному дифференціальному уравненію, а во-вторыхъ—выражаетъ y посредствомъ x и n произвольныхъ постоянныхъ; поэтому она и можетъ быть принимаема за полный интегралъ данного уравненія.

Вмѣсто формулы Тейлора иногда выгоднѣе пользоваться формулою Маклорена, отвѣчающею допущенію $x_0 = 0$; но для этого необходимо, конечно, чтобы для $x = x_0$ строка, входящая въ формулу (4), оставалась сходящеюся.

103. Для уясненія себѣ только-что указаннаго приѣма приведемъ примѣръ.

Пусть требуется проинтегрировать при помощи строкъ дифференціальное уравненіе втораго порядка

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + nxy = 0. \quad (1)$$

Черезъ дифференцированіе его находимъ:

$$x \frac{d^3y}{dx^3} + 3 \frac{d^2y}{dx^2} + nx \frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

$$x \frac{d^4y}{dx^4} + 4 \frac{d^3y}{dx^3} + nx \frac{d^2y}{dx^2} + 2n \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (m+1) \frac{d^m y}{dx^m} + nx \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + (m-1)n \frac{dy}{dx} = 0.$$

Пологая во всѣхъ этихъ уравненіяхъ $x=0$, получимъ

$$\frac{dy}{dx} = 0, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{n}{3}y, \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{n^2}{5}y, \dots$$

и вообще, если m нечетное число,

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 0,$$

а если m четное число, то

$$\frac{d^m y}{dx^m} = + \frac{n \cdot y}{m+1}$$

или

$$\frac{d^m y}{dx^m} = - \frac{n \cdot y}{m+1}$$

смотря по тому — будетъ ли m дѣлиться на 4 или не будетъ.

Изъ отношенія $\frac{dy}{dx} = 0$ обнаруживается, что значеніе y , соответствующее допущенію $x=0$, представляетъ произвольное постоянное количество. Означивъ его черезъ y_0 , будемъ имѣть:

$$\frac{dy_0}{dx} = 0, \frac{d^2y_0}{dx^2} = -\frac{n}{3}y_0, \frac{d^4y_0}{dx^4} = \frac{n^2}{5}y_0, \dots$$

и по формулѣ Маклорена мы получимъ:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{n^3x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots \right)$$

т. е.

$$y = y_0 \frac{\sin x \sqrt{n}}{x \sqrt{n}},$$

или, полагая

$$\frac{y_0}{\sqrt{n}} = C,$$

$$y = \frac{C \sin x \sqrt{n}}{x}. \quad (2)$$

Это выражение, какъ содержащее только одно произвольное постоянное количество, не можетъ быть принимаемо за полный интегралъ даннаго уравненія; оно представляетъ не болѣе какъ частный интегралъ, но зная частный интегралъ даннаго уравненія можно найти и полный интегралъ, рассматривая C какъ функцію переменнаго x .

Принимая C за функциональное количество и внося выражение y изъ формулы (2) въ данное уравненіе (1), мы получаемъ:

$$\frac{d^2 C}{dx^2} + 2 \sqrt{n} \frac{dC}{dx} \cotg x \sqrt{n} = 0,$$

а допуская $\frac{dC}{dx} = p$, находимъ:

$$p = \frac{C_1}{\sin^2 x \sqrt{n}},$$

гдѣ C_1 произвольное постоянное. Отсюда выведемъ

$$C = C' + C'' \cotg x \sqrt{n},$$

гдѣ C' , C'' произвольныя постоянныя.

Внося это выраженіе C въ формулу (2), получимъ теперь

$$y = \frac{C' \sin x \sqrt{n} + C'' \cos x \sqrt{n}}{x}, \quad (3)$$

выраженіе y , которое уже содержитъ два произвольныхъ по-

стоянныхъ количества, а потому уравненіе (3) и можетъ быть уже принято за полный интегралъ уравненія (1).

Допущеніе $x_0 = 0$ и употребленіе формулы Маклорена привело насъ на первыхъ порахъ не къ полному, а къ частному интегралу даннаго уравненія (1); но если положить x_0 вообще отличнымъ отъ нуля и означить черезъ y_0 , y_0' соотвѣтствующія значенія y и $\frac{dy}{dx}$, остающіяся произвольными величинами, то изъ уравненія (1) и тѣхъ уравненій, которыя изъ него выводятся путемъ дифференцированія, получимъ:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_0} &= - \left\{ \frac{2y_0'}{x_0} + ny_0 \right\}, \\ \left| \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x_0} &= \frac{(6 - nx_0^2)}{x_0^2} y_0' + \frac{2ny_0}{x_0}, \\ \left| \frac{d^4 y}{dx^4} \right|_{x_0} &= 6 \frac{(nx_0^2 - 4)}{x_0^3} y_0' + \left(n^2 - \frac{8n}{x_0^2} \right) y_0 - \frac{2n}{x_0} y_0 y_0', \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

гдѣ черезъ $\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_0}$, $\left| \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x_0}$, ... выражаемъ значенія производныхъ

$\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, ... для $x = x_0$. Въ виду этого формула Тейлора даетъ:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \frac{x - x_0}{1} y_0' - \frac{(x - x_0)^2}{1.2} \left\{ \frac{2y_0'}{x_0} + ny_0 \right\} \\ &\quad + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} \left\{ \frac{(6 - nx_0^2)}{x_0^2} y_0' + \frac{2ny_0}{x_0} \right\} \\ &\quad + \frac{(x - x_0)^4}{1.2.3.4} \left\{ 6 \frac{nx_0^2 - 4}{x_0^3} y_0' + \left(n^2 - \frac{8n}{x_0^2} \right) y_0 - \frac{2n}{x_0} y_0 y_0' \right\} + \dots \end{aligned}$$

Строка, составляющая вторую часть, содержитъ уже два произвольныхъ постоянныхъ количества, а потому формула эта, при

выборъ для x такихъ предѣловъ измѣняемости, при которыхъ строка оставалась бы сходящеюся, будетъ выражать полный интегралъ даннаго уравненія (1).

104. Часто для разысканія полнаго интеграла дифференціальнаго уравненія, выраженнаго при помощи строки, вмѣсто формулъ Тейлора и Маклорена, прибѣгаютъ къ методу неопредѣленныхъ коэффициентовъ. Путь этотъ иногда выгоднѣе, а въ тѣхъ случаяхъ, когда строка, выражающая искомый интегралъ уравненія, должна содержать отрицательныя степени независимаго переменнаго, онъ даже единственный, отвѣчающій цѣли.

Ходъ сужденій здѣсь слѣдующ. Имѣя уравненіе n -го порядка

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}),$$

полагаютъ

$$y = y_0 + A_1(x-x_0)^\alpha + A_2(x-x_0)^{\alpha+1} + A_3(x-x_0)^{\alpha+2} + \dots,$$

или, сдѣлавъ $x - x_0 = z$, $dx = dz$,

$$y = y_0 + A_1z^\alpha + A_2z^{\alpha+1} + A_3z^{\alpha+2} + \dots,$$

и затѣмъ стараются опредѣлить коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \dots$ и показатель степени α при помощи условія, чтобы выраженіе y удовлетворяло данному уравненію и чтобы какъ само y , такъ и $(n-1)$ его послѣдовательныхъ производныхъ, для $x = x_0$, принимали соотвѣтственно данныя значенія $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$.

Пусть, для большей ясности, дано уравненіе

$$dy - ydx - bx^m dx = 0$$

требуется найти значеніе y , ему удовлетворяющее и обращающееся въ 0 для $x = 0$. Полагая

$$y = A_1z^\alpha + A_2z^{\alpha+1} + A_3z^{\alpha+2} + \dots$$

найдемъ:

$$bz^m - A_1 \alpha z^{\alpha-1} + [A_1 - A_2(\alpha+1)]z^\alpha + [A_2 - A_3(\alpha+2)]z^{\alpha+1} + \dots = 0.$$

Это уравнение должно удовлетворяться, каково бы ни было z , и такъ-какъ b , по положенію, не равно нулю, то нужно сперва сдѣлать $\alpha - 1 = m$, $\alpha = m + 1$; отъ этого данное уравненіе перейдетъ въ слѣдующее:

$$[b - A_1(m+1)]z^m + [A_1 - A_2(m+2)]z^{m+1} + [A_2 - A_3(m+3)]z^{m+2} + \dots = 0$$

и повлечетъ за собою равенства

$$b - A_1(m+1) = 0, A_1 - A_2(m+2) = 0, A_2 - A_3(m+3) = 0, \dots$$

изъ которыхъ

$$A_1 = \frac{b}{m+1}, A_2 = \frac{b}{(m+1)(m+2)}, A_3 = \frac{b}{(m+1)(m+2)(m+3)}, \dots$$

Слѣдовательно

$$y = \frac{b}{m+1} x^{m+1} \left\{ 1 + \frac{x}{m+2} + \frac{x^2}{(m+2)(m+3)} + \dots \right\}.$$

Строка, входящая въ правую часть, всегда — сходящаяся, а потому найденная формула и можетъ быть принимаема за выраженіе интеграла даннаго уравненія, хотя и не полного, а частнаго, такъ-какъ въ нее не входитъ произвольнаго постояннаго количества.

Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

которое разсматривалось уже нами въ предыдущемъ номерѣ.

Сдѣлаемъ вообще

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots$$

и постараемся опредѣлить коэффициенты $A, B, C, \dots$ и показатели степени $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ такъ, чтобы эта формула представляла рѣшеніе даннаго уравненія. Дифференцируя послѣднюю формулу, найдемъ:

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + \dots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \dots,$$

такъ-что результатъ подстановки этихъ выраженій въ данное уравненіе будетъ таковъ:

$$A\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-2} + nAx^\alpha + B\beta(\beta+1)x^{\beta-2} + nBx^\beta + C\gamma(\gamma+1)x^{\gamma-2} + nCx^\gamma + \dots = 0.$$

При допущеніи, что $\alpha < \beta < \gamma, \dots, \alpha - 2$ будетъ наименьшимъ изъ показателей степени x въ этомъ уравненіи и такъ-какъ, при томъ, послѣднее уравненіе не можетъ имѣть мѣста при всякомъ x иначе, какъ при равенствѣ нулю всѣхъ коэффициентовъ при различныхъ степеняхъ x , то прежде всего нужно, чтобы мы имѣли

$$A\alpha(\alpha+1) = 0,$$

условіе, которое требуетъ, чтобы было

$$\alpha = 0$$

или

$$\alpha = -1.$$

Возьмемъ сперва $\alpha = -1$. Два наименьшіе изъ слѣдующихъ показателей степени суть α и $\beta - 2$. Они могутъ быть или равны, или неравны другъ другу. Если они равны между собою, членъ

$$\dots + B\beta(\beta+1)x^{\beta-2}, = 0$$

который не можетъ сократиться ни съ однимъ изъ прочихъ, долженъ быть равенъ нулю, для чего необходимо, чтобы имѣли $\beta=0$ или $\beta=-1$. Но положить $\beta=-1$ нельзя, такъ-какъ по положенію β должно быть болѣе α , а потому нужно допустить $\beta=0$. Теперь перейдемъ къ показателямъ степени α и $\gamma-2$, которые нужно будетъ приравнять между собою, потому что членъ nx^α не можетъ самъ по себѣ обратиться въ нуль, а долженъ уничтожиться съ другимъ; отсюда слѣдуетъ

$$\gamma=1, nA + C\gamma(\gamma+1)=0.$$

Продолжая и далѣе точно такъ-же, получимъ:

$$\delta=2, nB + D\delta(\delta+1)=0,$$

$$\epsilon=3, nC + E\epsilon(\epsilon+1)=0,$$

$$\dots \dots \dots$$

Два первые коэффициента останутся неопредѣленными и послужатъ произвольными постоянными; остальные выразятся такимъ образомъ:

$$C = -\frac{nA}{1.2}, D = -\frac{nB}{1.2.3},$$

$$E = \frac{n^2 A}{1.2.3.4}, F = \frac{n^2 B}{1.2.3.4.5},$$

$$\dots \dots \dots$$

такъ-что въ итогѣ получится

$$y = A\left(\frac{p}{x} - \frac{nx}{1.2} + \frac{n^2 x^3}{1.2.3.4} + \dots\right) + B\left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2 x^4}{1.2.3.4} - \dots\right),$$

$$y = A \frac{\cos \sqrt{n}x}{x} + B \frac{\sin \sqrt{n}x}{\sqrt{n}x},$$

$$y = \frac{C' \cos \sqrt{n}x + C'' \sin \sqrt{n}x}{x}.$$

Это и есть полный интеграл данного уравненія.

Если-бы мы допустили $\alpha = 0$, то пришли бы къ строкѣ, выражающей не полный, а частный интегралъ данного уравненія.

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій при помощи определенныхъ интеграловъ.

105. Въ иныхъ случаяхъ функціональное количество y , определяемое дифференціальнымъ уравненіемъ, выражается при помощи определенныхъ интеграловъ, а потому не излишне показать какимъ путемъ приходятъ обыкновенно къ выраженію интеграловъ дифференціальныхъ уравненій въ такой формѣ, оказывающейся весьма удобною въ нѣкоторыхъ вопросахъ математической физики.

Обыкновенно начинаютъ съ разысканія выраженія интеграла дифференціального уравненія въ формѣ безконечной строки и затемъ, для выраженія суммы строки, прибѣгаютъ къ посредству определенныхъ интеграловъ. Какъ именно поступаютъ при этомъ — всего лучше можно выяснитъ на примѣрахъ.

106. Пусть имѣемъ уравненіе.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0, \quad (1)$$

встрѣчающееся во многихъ вопросахъ физики и механики. По-

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\epsilon + \dots, \quad (2)$$

гдѣ коэффициенты $A, B, C, \dots$ и показатели степени $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ нужно опредѣлить такъ, чтобы формула (2) представила собою рѣшеніе уравненія (1). Продифференцировавъ формулу (2), получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha x^{\alpha-1} + B\beta x^{\beta-1} + C\gamma x^{\gamma-1} + D\delta x^{\delta-1} + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \dots,$$

и внося эти выраженія $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ въ уравненіе (1), будемъ имѣть

$$A\alpha[m+\alpha-1]x^{\alpha-2} + B\beta[m+\beta-1]x^{\beta-2} + C\gamma[m+\gamma-1]x^{\gamma-2} + \dots + nAx^{\alpha} + nBx^{\beta} + nCx^{\gamma} + \dots = 0. \quad (3)$$

Полагая, что $\alpha < \beta < \gamma < \delta, \dots$, будемъ имѣть, что $\alpha - 2$ наименьшій изъ показателей степени x ; поэтого прежде всего должно быть

$$A\alpha[m+\alpha-1] = 0,$$

откуда

$$\alpha = 0 \text{ или } \alpha = -m + 1.$$

Примемъ $\alpha = 0$ и затѣмъ допустимъ, что

$$\beta - 2 = \alpha, \quad \gamma - 2 = \beta, \quad \delta - 2 = \gamma,$$

т. е. что

$$\beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \delta = 6, \quad \epsilon = 8, \dots$$

Послѣ этого, приравнивая нулю коэффициенты при различныхъ степеняхъ x въ уравненіи (3), получимъ:

$$2B(m+1) + nA = 0,$$

$$4C(m+3) + nB = 0,$$

$$6D(m+5) + nC = 0,$$

$$(2) \quad \dots + \dots + \dots + \dots + \dots = 0$$

откуда

$$B = \frac{-\frac{n}{2}}{1(m+1)} A, \quad C = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2(m+1)(m+3)} A, \\ D = \frac{-\left(\frac{n}{2}\right)^3}{1.2.3.(m+1)(m+3)(m+5)} A, \dots$$

Слѣдовательно формула (1) приметъ видъ:

$$y = A \left\{ 1 - \frac{\frac{n}{2} x^2}{1(m+1)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^4}{1.2.(m+1)(m+3)} - \frac{\frac{n^3}{2} x^6}{1.2.3.(m+1)(m+3)(m+5)} + \dots \right\} \quad (4)$$

Это, очевидно, частный интегралъ даннаго уравненія, содержащій всего одно постоянное произвольное количество A .

Если допустить $\alpha = -m+1$, то равенства

$$\beta - 2 = \alpha, \quad \gamma - 2 = \beta, \quad \delta - 2 = \gamma, \dots$$

доставить

$$\beta = -m+3, \quad \gamma = -m+5, \quad \delta = -m+7, \dots$$

и приравнивая нулю коэффициенты при различныхъ степеняхъ x въ уравненіи (3), мы найдемъ

$$B = \frac{-\frac{n}{2}}{-m+3} A, \quad C = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{1.2(-m+5)(-m+5)} A, \\ A, \quad D = \frac{-\left(\frac{n}{2}\right)^3}{1.2.3(-m+3)(-m+5)(-m+7)} A, \dots$$

и слѣдовательно формула (2) обратится въ

$$y = A \left\{ x^{-m+1} - \frac{\frac{n}{2} x^{-m+3}}{1 \cdot (-m+3)} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 x^{-m+5}}{1 \cdot 2 \cdot (-m+3) \cdot (-m+5)} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3 x^{-m+7}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-m+3) \cdot (-m+5) \cdot (-m+7)} + \dots \right\} \dots \quad (5)$$

Эта формула опять представляет частное рѣшеніе данного уравненія (1).

Относительно формулъ (4) и (5) нужно замѣтить, что строка, входящая въ первую изъ нихъ, становится расходящеюся при m нечетномъ отрицательномъ числѣ, а строка, входящая во вторую изъ нихъ, напротивъ, дѣлается расходящеюся, когда m нечетное положительное число. Слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, одна изъ формулъ (4) и (5) непремѣнно имѣетъ мѣсто, а зная одинъ частный интегралъ уравненія (1) всегда можно будетъ найти и его полный интегралъ.

107. Возьмемъ теперь формулу

$$\cos(\alpha \cos \omega) = 1 - \frac{\alpha^2 \cos^2 \omega}{1 \cdot 2} + \frac{\alpha^4 \cos^4 \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots + \frac{(-\alpha^2)^p \cos^{2p} \omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2p} + \dots, \quad (6)$$

умножимъ обѣ части ея на

$$\sin^{m-1} \omega \cdot d\omega$$

и слѣдствіе проинтегрируемъ между предѣлами 0 и π , полагая впрочемъ m числомъ положительнымъ, безъ чего получающійся интегралъ былъ бы безконечностью. Принимая во вниманіе формулу

$$\int_0^\pi \cos^{2i} \omega \cdot \sin^\mu \omega \cdot d\omega = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2i-3)(2i-1)}{(\mu+2)(\mu+4) \dots (\mu+2i-2)(\mu+2i)} \int_0^\pi \sin^\mu \omega \cdot d\omega,$$

выводимую известными приемами интегрирования тригонометрических функций и въ которой нужно допустить, для того, чтобы интегралы были конечными величинами, $\mu > -1$, мы придемъ къ уравненію

$$\left[\int_0^{\pi} \cos(\alpha \cdot \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega = \int_0^{\pi} \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega - \dots \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)^p \int_0^{\pi} \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p(m+1)(m+3) \dots (m+2p-1)} + \dots \right]$$

положивъ $\alpha = x\sqrt{n}$ и выведя $\int_0^{\pi} \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega$ за скобки, получимъ:

$$\int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega \\ = \int_0^{\pi} \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega \left[1 - \frac{\frac{nx^2}{2}}{1 \cdot (m+1)} + \frac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+3)} - \dots \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1 \cdot 2 \dots p(m+1)(m+3) \dots (m+2p-1)} + \dots \right] \quad (7)$$

Здѣсь правая часть отличается отъ правой части формулы (4) предыдущаго нумера только постояннымъ множителемъ, почему интегралъ уравненія (1), выражаемый формулою (4), можетъ быть представленъ въ формѣ

$$y = B \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega, \quad (8)$$

если только $m > 0$.

Что касается до формулы (5), то ее можно написать такимъ образомъ:

$$y = Ax^{-m+1} \left[1 - \frac{\frac{nx^2}{2}}{1 \cdot (-m+3)} + \frac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1 \cdot 2 \cdot (-m+3)(-m+5)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1 \cdot 2 \dots p(-m+3)(-m+5) \dots (-m+2p+1)} + \dots \right] \dots (9)$$

Теперь ясно, что строка, входящая въ формулу (7), обращается въ строку, содержащуюся въ формулѣ (9), отъ замѣны m чрезъ $-m+2$; поэтому, при $m < 2$, формулу (9) можно привести къ виду:

$$y = B, x^{1-m} \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{1-m} \omega \cdot d\omega, \quad (10)$$

гдѣ B , означаетъ произвольное постоянное.

Такъ-какъ, при существованіи условій

$$m > 0, \quad m < 2,$$

формулы (8) и (10) обѣ имѣютъ мѣсто, то въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть два частныхъ рѣшенія линейнаго уравненія (1), а потому полный его интегралъ выразится уравненіемъ:

$$y = B \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{m-1} \omega \cdot d\omega \\ + Bx^{1-m} \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin^{1-m} \omega \cdot d\omega. \quad (11)$$

108. Рассмотримъ теперь случай, когда $m = 0$ и уравненіе (1) сводится на

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ny = 0.$$

Здѣсь формула (4) не имѣетъ мѣста, а потому мы будемъ имѣть только частный интегралъ даннаго уравненія въ формѣ

$$y = B, x \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin \omega \cdot d\omega.$$

Производя здѣсь интегрированіе на дѣлѣ и означивъ черезъ C произвольное постоянное количество, получимъ:

$$y = C \sin x\sqrt{n},$$

а переходя отъ этого частнаго интеграла къ полному, найдемъ

$$y = C \sin x\sqrt{n} + C_1 \cos x\sqrt{n},$$

результатъ, который, впрочемъ, получился бы гораздо проще прямымъ путемъ интегрированія даннаго уравненія.

109. Допустимъ теперь $m = 2$. Уравненіе (1) приметъ видъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

Въ этомъ случаѣ формула (5) не имѣетъ мѣста, почему мы получимъ частный интегралъ даннаго уравненія въ формѣ

$$y = B \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \sin \omega \cdot d\omega,$$

такъ что, произведя самую интеграцію, найдемъ

$$y = \frac{C \sin x\sqrt{n}}{x}.$$

Перейдя отъ этого частнаго интеграла къ полному, найдемъ:

$$y = \frac{C \sin x\sqrt{n} + C_1 \cos x\sqrt{n}}{x}.$$

110. Въ случаѣ, когда $m=1$, оба члена правой части формулы (10) сводятся на одинъ и потому формула (11) выражаетъ уже не полный, а частный интегралъ уравненія.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

Можно, впрочемъ, формулу (11) видоизмѣнить такъ, чтобы она и въ этомъ случаѣ доставляла полный интегралъ. Замѣнимъ во второмъ членѣ правой части формулы (11) количество m черезъ $1 + \delta$; получимъ:

$$B_1 x^{-\delta} \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) (\sin \omega)^{-\delta} d\omega.$$

Теперь

$$x^{-\delta} = 1 - \delta \log x + \frac{\delta^2}{1.2} (\log x)^2 - \dots,$$

$$(\sin \omega)^{-\delta} = 1 - \delta \log(\sin \omega) + \frac{\delta^2}{1.2} [\log(\sin \omega)]^2 - \dots,$$

а потому

$$x^{-\delta} (\sin \omega)^{-\delta} = 1 - \delta (\log x + \log \sin \omega) + \dots$$

и вторая часть выраженія y обращается, когда отбросимъ члены, содержащіе δ въ степени выше первой, въ слѣдующее выраженіе:

$$B_1 \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) d\omega - B_1 \delta \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cos \omega) (\log x + \log \sin \omega) d\omega;$$

въ то-же время первая часть выраженія y принимаетъ точно такъ-же видъ

$$B \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) d\omega + B\delta \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \log \sin \omega \cdot d\omega.$$

Сложивъ эти два выражения и положивъ $B + B_1 = C$, получимъ:

$$y = C \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) d\omega + (B - C)\delta \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) (\log x + \log \sin \omega) d\omega + B\delta \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \log \sin \omega \cdot d\omega.$$

Допустимъ теперь, что δ стремится къ нулю, а $B\delta$ къ произвольному постоянному количеству C_1 ; въ такомъ случаѣ для *полнаго* значенія y получимъ, перейдя къ предѣлу и замѣтивъ, что $\log x + 2 \log \sin \omega = \log(x \sin^2 \omega)$,

$$y = C \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) d\omega + C_1 \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cdot \cos \omega) \log(x \sin^2 \omega) d\omega.$$

Это и есть полный интегралъ уравненія

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + my = 0.$$

111. Не мѣшаетъ замѣтить, что всякій разъ, когда m будетъ четнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, одинъ изъ членовъ правой части выраженія y въ формулѣ 11 (нум. 107)

можно будетъ выразить не прибѣгая къ знаку интегрированія; что касается до другаго члена, то онъ исчезаетъ въ-слѣдствіе того, что m будетъ въ предѣлахъ 0 и 2. Чтобы доказать это означимъ, вообще, чрезъ A_p опредѣленный интеграль

$$\int_0^{\pi} \cos(\lambda \cos \omega) \sin^p \omega \cdot d\omega;$$

интегрированіе по частямъ доставитъ, принимая, что $p > 3$, слѣдующее отношеніе

$$A_p = \frac{(p-1)(p-2)}{\lambda^2} A_{p-2} - \frac{(p-1)(p-3)}{\lambda^2} A_{p-4}.$$

Если p нечетное число, то при помощи этой формулы сведемъ

опредѣленіе A_p на разысканіе $A_0 = \int_0^{\pi} \cos(\lambda \cos \omega) d\omega$, который не выражается конечнымъ образомъ въ функціи λ . Напротивъ, когда p четное число, A_p выразится въ интегралахъ A_2 и A_0 , которые вычисляются точно и выражаются формулами

$$A_1 = \frac{2 \sin \lambda}{\lambda}, \quad A_2 = \frac{4}{\lambda^3} (\sin \lambda - \lambda \cos \lambda),$$

почему и обнаруживается, что одинъ изъ интеграловъ, входящихъ въ формулу (11), выразится въ x въ конечной формѣ, когда m число нечетное, положительное или отрицательное.

112. Интеграль уравненія

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0, \quad (1)$$

можетъ быть представленъ въ формѣ, отличной отъ той, въ которой мы его вывели передъ этимъ, и при томъ болѣе удобной во многихъ случаяхъ, особенно когда m четное, положительное или отрицательное число.

Положимъ

$$y = Ax^\alpha \varphi(x) + A_1 x^{\alpha+1} \varphi'(x) + A_2 x^{\alpha+2} \varphi''(x) + \dots, \quad (2)$$

гдѣ постоянныя $A, A_1, A_2, \dots$ и функція $\varphi(x)$ принимаются за неопредѣленные количества. Подставимъ это выраженіе y въ уравненіи (1) и будемъ стараться неопредѣленные коэффициенты формулы (2) опредѣлить такимъ образомъ, чтобы уравненіе (1) удовлетворялось тождественно упомянутою подстановкою.

Дифференцированіе формулы (2) доставляетъ:

$$\frac{m}{x} \frac{dy}{dx} = mA\alpha x^{\alpha-2} \varphi(x) + mA_1(\alpha+1)x^{\alpha-1} \varphi'(x) + mA_2(\alpha+2)x^\alpha \varphi''(x) + \dots + mA x^{\alpha-1} \varphi'(x) + mA_1 x^\alpha \varphi''(x) + \dots$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \varphi(x) + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1} \varphi'(x) + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha \varphi''(x) + \dots + 2A\alpha x^{\alpha-1} \varphi'(x) + 2A_1(\alpha+1)x^\alpha \varphi''(x) + \dots + Ax^\alpha \varphi''(x) + \dots$$

и если внести эти выраженія въ уравненіе (1) и приравнять нулю коэффициентъ общаго члена, содержащаго $x^{\alpha+p-2}$, то получимъ:

$$[(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1} + A_{p-2}] \varphi^p(x) + nA_{p-2} \varphi^{p-2}(x) = 0,$$

причемъ, для упрощенія этого отношенія между $\varphi^p(x)$ и $\varphi^{p-2}(x)$ и освобожденія его отъ p , допустимъ

$$(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1} = 0.$$

Отсюда будетъ слѣдовать, что

$$\varphi^p(x) + n\varphi^{p-2}(x) = 0,$$

уравненіе, которому можно удовлетворять, каково бы ни было p , допущеніемъ

$$\varphi''(x) + n\varphi(x) = 0,$$

откуда найдемъ

$$\varphi(x) = C \sin x \sqrt{n} + C' \cos x \sqrt{n},$$

гдѣ C, C' произвольныя постоянныя количества.

Нужно замѣтить, что приведенное вычисленіе не прилагается ко всѣмъ членамъ строки, получаемой отъ подстановки выраженія (2) y въ уравненіе (1); вычисленіе это предполагаетъ p по меньшей мѣрѣ равнымъ 2-мъ и притомъ необходимо отдѣльно разсматривать два члена, содержащіе $(\alpha - 1)$ -ую и $(\alpha - 2)$ -ую степени x . Приравнивая нулю коэффициенты при этихъ степеняхъ x , получаемъ:

$$\alpha(\alpha - 1) + m\alpha = 0, \quad A_1(\alpha + 1)(\alpha + m) + A(m + 2\alpha) = 0.$$

Первое изъ этихъ уравненій доставляетъ

$$\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = 1 - m,$$

а второе, какъ въ томъ, такъ и въ другомъ изъ этихъ случаевъ, даетъ

$$A_1 = -A.$$

Разсмотримъ послѣдовательно разложенія, соответствующія обрѣзамъ этимъ значеніямъ α .

1) Пусть сперва $\alpha = 1 - m$. Въ этомъ случаѣ общее отношеніе между A_p и A_{p-1} переходитъ въ

$$p(p - m + 1)A_p = (m - 2p)A_{p-1}.$$

Измѣняя послѣдовательно p въ $p - 1, p - 2, \dots$ опредѣлимъ A_p какъ функцію A_1 , а такъ-какъ $A_1 = -A$, то будемъ имѣть выраженіе коэффициента A_p въ количествѣ A , остающемся неопредѣленнымъ, но которое можно будетъ приравнять 1 въ виду двухъ произвольныхъ постоянныхъ C, C' .

Такимъ образомъ найдемъ:

$$A_p = - \frac{(m-2p)(m-2p+2)\dots(m-4)}{(p-m+1)(p-m)\dots(3-m)1.2\dots p}$$

и выражение y приметъ форму

$$y = x^{1-m} \left\{ C \sin x\sqrt{n} + C' \cos x\sqrt{n} - x \frac{d(C \sin x\sqrt{n} + C' \cos x\sqrt{n})}{dx} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(m-4)\dots(m-2p)}{(m-3)\dots(m-p-1)1.2\dots p} \frac{(-x)^p d^p(C \sin x\sqrt{n} + C' \cos x\sqrt{n})}{dx^p} \right\}.$$

Когда для некотораго коэффициента A_p найдется выраженіе равное нулю, строка, законченная предшествующимъ членомъ, будетъ удовлетворять данному дифференціальному уравненію и, слѣдовательно, полный интегралъ будетъ выраженъ посредствомъ конечнаго числа членовъ. Случай этотъ будетъ имѣть мѣсто всякій разъ, когда m будетъ положительнымъ четнымъ числомъ.

2) Пусть теперь $\alpha = 0$. Отношеніе между A_{p-1} и A_p перейдетъ теперь въ слѣдующее:

$$A_p = - \frac{m+2p-2}{p(m+p-1)} A_{p-1},$$

изъ котораго выведемъ, принимая опять A равнымъ единицѣ, что

$$A_p = \frac{(m+2)(m+4)\dots(m+2p-2)}{(m+1)(m+2)\dots(m+p-1)} \frac{(-1)^p}{1.2\dots p},$$

такъ что для y получимъ выраженіе

$$y = C \sin x\sqrt{n} + C' \cos x\sqrt{n} - x \frac{d(C \sin x\sqrt{n} + C' \cos x\sqrt{n})}{dx} + \dots \\ + \frac{(-x)^p (m+2)(m+4)\dots(m+2p-2)}{1.2\dots p (m+1)(m+2)\dots(m+p+1)} \frac{d^p(C \sin x\sqrt{n} + C' \cos x\sqrt{n})}{dx^p} + \dots$$

И эту строку заканчиваютъ членомъ, коэффициентъ котораго равенъ нулю, что всегда случается, когда t четное отрицательное число.

И такъ, полный интегралъ уравненія (1) всегда выражается конечнымъ числомъ членовъ, когда t четное, положительное или отрицательное число.

113. Возьмемъ еще уравненіе

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = be^{px} \quad (1)$$

и положимъ въ немъ

$$y = \frac{1}{au} \cdot \frac{du}{dx} \quad (2)$$

отъ чего самое уравненіе преобразуется въ

$$\frac{d^2u}{dx^2} = abue^{px}. \quad (3)$$

Если допустить, далѣе,

$$\frac{2\sqrt{ab}}{p} e^{\frac{1}{2}px} = z,$$

то получимъ:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} - u = 0. \quad (4)$$

Это преобразованное уравненіе не болѣе какъ частный случай уравненія, изслѣдованнаго въ предыдущихъ нумерахъ, а потому мы получимъ:

$$u = C \int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1} \cos \omega) d\omega + C_1 \int_0^\pi \cos(z\sqrt{-1} \cos \omega) \log(z \sin^2 \omega) d\omega,$$

$$u = C' \int_0^{\pi} (e^{z \cos \omega} + e^{-z \cos \omega}) d\omega + C'' \int_0^{\pi} (e^{z \cos \omega} + e^{-z \cos \omega}) \log(z \sin^2 \omega) d\omega. \quad (5)$$

Въ этой формулѣ остается замѣнить z его значеніемъ въ x . Затѣмъ, для разысканія выраженія y , останется формулу (5) продифференцировать и найденное выраженіе $\frac{du}{dx}$ подставить въ формулу (2).

114. Разсмотримъ еще уравненіе

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left[p^2 - \frac{n(n+1)}{x^2} \right] y = 0,$$

встрѣчающееся въ приложенияхъ физики.

Допустивъ $y = x^{n+1} z$, получимъ:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2(n+1)}{x} \frac{dz}{dx} + p^2 z = 0,$$

уравненіе, по формѣ своей сходное съ уравненіемъ выше проинтегрированнымъ.

Если допустить n числомъ положительнымъ, хотя и какимъ угодно, $2(n+1)$ не будетъ заключаться между 0 и 2 и потому можно будетъ выразить посредствомъ опредѣленнаго интеграла только частное рѣшеніе послѣдняго уравненія. Мы, именно, получимъ:

$$z = A \int_0^{\pi} \cos(x\sqrt{n} \cos \omega) \sin^{2n+1} \omega d\omega$$

и можно будетъ отъ этого частнаго интеграла перейти къ полному интегралу.

Въ частномъ случаѣ, когда $p^2 = n = 1$, данное уравненіе принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(p^2 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0$$

и мы будемъ имѣть

$$y = Ax^2 \int_0^\pi \cos(px \cos \omega) \sin^2 \omega \cdot d\omega,$$

а произведя на самомъ дѣлѣ интегрированіе:

$$y = B \left(\frac{\sin px}{px} - \cos px \right),$$

гдѣ B произвольное постоянное. Замѣною B функциею x легко перейти отъ этого частнаго рѣшенія и къ полному интегралу даннаго дифференціального уравненія.

О разысканіи выражений определенныхъ интеграловъ при помощи интегрированія дифференціальныхъ уравненій.

115. Если опредѣленные интегралы служатъ во многихъ случаяхъ, какъ мы видѣли, къ выраженію интеграловъ дифференціальныхъ уравненій, то и наоборотъ — разысканіе опредѣленнаго интеграла можетъ быть сводимо на интегрированіе дифференціального уравненія между однимъ изъ постоянныхъ, входящихъ подъ знакъ $\int$, и производными этого количества.

Производныя этого интеграла по отношенію къ помянутымъ постояннымъ всегда представляютъ сами интегралы, взятые между тѣми-же предѣлами, и если возможно при помощи такихъ дифференцированій возвратиться къ первоначальному интегралу, то

включеніе этого интеграла доставить уравненіе между его производными, взятыми по отношенію одного изъ постоянныхъ. Если уравненіе это окажется возможнымъ проинтегрировать, то будемъ имѣть выраженіе, содержащее опредѣленный интегралъ какъ частный случай, и нужно будетъ затѣмъ только опредѣлить произвольныя постоянныя такимъ образомъ, чтобы найденное выраженіе свелось на данный опредѣленный интегралъ.

Возьмемъ, на примѣръ, опредѣленный интегралъ

$$\int_0^{\pi} \cos(x \cos \omega) d\omega.$$

Разсматривая его какъ функцію x и положивъ

$$y = \int_0^{\pi} \cos(x \cos \omega) d\omega, \quad (1)$$

продифференцируемъ два раза это выраженіе по отношенію къ x ; получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = - \int_0^{\pi} \sin(x \cos \omega) \cos \omega d\omega, \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \int_0^{\pi} \cos(x \cos \omega) \cos^2 \omega d\omega. \quad (3)$$

Для болѣе удобнаго сравненія этихъ выраженій между собою можно ввести во второе изъ нихъ $\cos(x \cos \omega)$ вмѣсто $\sin(x \cos \omega)$, чего достигаютъ интегрированіемъ по частямъ.

Мы получаемъ:

$$- \sin \omega \cdot \sin(x \cos \omega) - x \int \sin^2 \omega \cdot \cos(x \cos \omega) d\omega$$

и такъ-какъ первый членъ исчезаетъ для предѣловъ 0 и π , то будетъ:

$$\frac{dy}{dx} = -x \int_0^{\pi} \cos(x \cos \omega) \sin^2 \omega. d\omega.$$

Дѣля на x и слѣдствіе сложивъ съ формулою (2), получаемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = - \int_0^{\pi} \cos(x \cos \omega) d\omega,$$

а принявъ во вниманіе формулу (1), придемъ къ уравненію

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad (4)$$

отъ интеграціи котораго и будетъ зависѣть опредѣленіе выраженія y , т. е. даннаго опредѣленнаго интеграла; интеграція же этого дифференціального уравненія была уже указана нами выше. Правда, мы нашли только частный интегралъ уравненія (4), выраженный въ безконечной строкѣ, но въ настоящемъ случаѣ легко убѣдиться, что строка эта все-таки выражаетъ данный ин-

тегралъ $\int_0^{\pi} \cos(x \cos \omega) d\omega$, если только произвольному постоянному приписать подходящее частное значеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, развертывая въ строку выраженіе $\cos(x \cos \omega)$, получаемъ:

$$\cos(x \cos \omega) = 1 - \frac{x^2 \cos^2 \omega}{1.2} + \frac{x^4 \cos^4 \omega}{1.2.3.4} + \dots + \frac{x^{2m} \cos^{2m} \omega}{1.2 \dots 2m} + \dots$$

Умножимъ на $d\omega$ и проинтегрируемъ въ предѣлахъ 0 и π , замѣтивъ при этомъ, что

$$\int_0^{\pi} \cos^{2m} \omega. d\omega = \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2.4.6 \dots 2m} \pi,$$

получимъ:

$$\int_0^{\pi} \cos(x \cdot \cos \omega) d\omega = \pi \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right)$$

Слѣдовательно оказывается, что опредѣленный интегралъ $\int_0^{\pi} \cos(x \cdot \cos \omega) d\omega$ не иное что, какъ частный интегралъ, который мы нашли для уравненія (2) и въ которомъ нужно только положить произвольное постоянное количество равнымъ π .

116. Разыщемъ еще дифференціальное уравненіе, которое опредѣляло бы опредѣленный интегралъ $\int_0^{\infty} e^{-m^2 x^2} \cos 2nx. dx$.

Пусть

$$y = \int_0^{\pi} e^{-m^2 x^2} \cos 2nx. dx;$$

получимъ:

$$\frac{dy}{dn} = - \int_0^{\infty} 2xe^{-m^2 x^2} \sin 2nx. dx.$$

Но

$$\int 2xe^{-m^2 x^2} \sin 2nx. dx = \frac{-1}{m^2} e^{-m^2 x^2} \sin 2nx + \frac{2n}{m^2} \int e^{-m^2 x^2} \cos 2nx. dx,$$

а потому

$$\frac{dy}{dn} = - \frac{2ny}{m^2},$$

или

$$y = Ce^{\frac{n^2}{m^2}} \cos 2nx.$$

Слѣдовательно $\int_0^\infty e^{-m^2 x^2} \cos 2nx. dx$ заключается въ выраженіи

$Ce^{\frac{n^2}{m^2}}$, въ которомъ C не зависитъ отъ x и n ; остается поэтому рассмотреть, какое значеніе должно принять C для того, чтобы $Ce^{\frac{n^2}{m^2}}$ сдѣлалось равнымъ данному опредѣленному интегралу. Для $n=0$ интегралъ этотъ обращается въ

$$\int_0^\infty e^{-m^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m}$$

а $Ce^{\frac{n^2}{m^2}}$ переходитъ въ C ; слѣдовательно значеніе произвольнаго постояннаго C должно быть равно $\frac{\sqrt{\pi}}{2m}$ и мы получаемъ;

$$\int_0^\pi e^{-m^2 x^2} \cos 2nx. dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

Если-бы мы разсматривали $\int_0^\infty e^{-m^2 x^2} \cos 2nx. dx$ какъ функцію m , то нашли бы:

$$\frac{dy}{dm} = \left(\frac{2n^2}{m^3} - \frac{1}{m} \right) y,$$

откуда

$$y = \frac{C}{m} e^{-\frac{n^2}{m^2}}$$

и мы нашли бы

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$