№ 122.   146

+ 0.107

√45

Озц

№36 получен. 29 Октября 1853.

БИЛЕТЪ

ИЗЪ С. ПЕТЕРБУРГСКАГО

ЦЕНСУРНАГО КОМИТЕТА

Книгу подъ заглавіемъ: Элементарная теорія тригонометрическихъ линій и прямолинейная тригонометрія. Соч. Н. Соколова

№ 1520

напечатанную сходно съ приложеннымъ у сего экземпляромъ въ типографіи Харковскаго Университета

——— выпустить въ свѣтъ позволяется Октября 7 дня 1853 года.

Ценсоръ Н. Иос...

Слѣдующіе въ Ценсурный Комитетъ экземпляры получены.

Секретарь А. Ярославцов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЛИНІЙ
и
ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЛИНІЙ

и

ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРІЯ.

Сочиненіе

И. Соколова,

Профессора Императорскаго Харьковскаго Университета.

По положенію Главнаго Правленія Училищъ принято за учебникъ для Гимназій.

ХАРЬКОВЪ.

ВЪ УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ТИПОГРАФІИ.

1853.

ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЯЕТСЯ

съ тѣмъ, чтобы по напечатаніи представлено было въ Ценсурный Комитетъ узаконенное число экземпляровъ. С.-Петербургъ. 27 Сентября 1852 года.

Ценсоръ *Ал. Крыловъ.*

ВВЕДЕНІЕ.

Предметъ Тригонометріи и ея раздѣленіе.

Во всякомъ треугольникѣ, какъ прямолинейномъ, такъ и сферическомъ, различаютъ шесть частей: три стороны и три угла. Эти части въ такой находятся между собою зависимости, что по даннымъ тремъ изъ нихъ могутъ быть найдены и три остальныя, за исключеніемъ случая, когда въ треугольникѣ прямолинейномъ даны будутъ только углы. По этимъ даннымъ длина сторонъ треугольника, очевидно, не можетъ быть опредѣлена, потому что углы, равные даннымъ, могутъ принадлежать безчисленному множеству треугольниковъ подобныхъ, но имѣющихъ различныя стороны.

При достаточномъ числѣ надлежащихъ данныхъ неизвѣстныя части треугольника могутъ быть опредѣлены двоякимъ образомъ: 1) построеніемъ треугольника и 2) помощію вычисленія.

Способы построенія треугольниковъ по даннымъ тремъ частямъ ихъ, подробно объясняемые въ Геометріи, весьма легки и по теорiи совершенно точны; но, по причинѣ несовершенства требуемыхъ ими инструментовъ, доставляютъ на самомъ дѣлѣ результаты, имѣющiе только посредственную степень приближенiя. По этому и можно съ выгодою употреблять ихъ только тогда, когда въ опредѣленiи неизвѣстныхъ частей треугольника не требуется большой точности. Въ противномъ случаѣ необходимо прибѣгнуть къ вычисленiю, которое, будучи свободно отъ несовершенствъ построенiя, позволяетъ опредѣлять искомыя величины съ такою точностiю, какая въ каждомъ случаѣ потребуется.

Опредѣленiе неизвѣстныхъ частей треугольниковъ помощiю вычисленiя называется *разрѣшенiемъ треугольниковъ*.

Наука, излагающая способы разрѣшенiя треугольниковъ, называется *Тригонометрiею* и состоитъ изъ двухъ частей, изъ коихъ одна имѣетъ предметомъ разрѣшенiе прямолинейныхъ треугольниковъ, а другая сферическихъ, отъ чего первая и называется *прямолинейною Тригонометрiею*, а вторая *сферическою*.

Способы разрѣшенiя тѣхъ и другихъ треугольниковъ выводятся изъ разсматриванiя особенныхъ прямыхъ линiй, находящихся въ извѣстной зависимости отъ дугъ окружностей, въ коихъ онѣ проводятся, и называемыхъ вообще *тригонометрическими линiями*. Объясненiе значенiя и свойствъ этихъ прямыхъ составляетъ третью вступительную часть Тригонометрiи, которая должна предшествовать обѣимъ выше поименованнымъ. Въ предлагаемомъ сочиненiи будетъ изложена эта послѣдняя часть подъ названiемъ *теорiи тригонометрическихъ линiй* и тригонометрiя прямолинейная.

A.

ТЕОРІЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЛИНІЙ.

I.

Нѣкоторыя поясненія касательно выраженія линій числами.

§ 1. При рѣшеніи геометрическихъ задачъ посредствомъ вычисленія линіи опредѣленной длины выражаются числами, означающими отношенія ихъ къ извѣстнымъ линейнымъ мѣрамъ, каковы: футъ, аршинъ, сажень и т. п. Такъ напр. если за мѣру будетъ принята длина одного фута, то линія, заключающая въ себѣ пять такихъ мѣръ, изобразится числомъ 5.

§ 2. Когда на данной по положенію прямой или кривой линіи, коей длину можно представлять неопредѣленною, отъ какой-нибудь точки, принимаемой за постоянную или неподвижную, отмѣриваются части извѣстной длины съ тѣмъ, чтобы опредѣлить по нимъ разстоянія отъ помянутой точки другихъ точекъ, то для выраженія ихъ въ избранныхъ мѣрахъ употребляютъ числа съ знаками + или —, т. е. положительныя или отрицательныя, смотря по тому, по ту или по другую сторону отъ неподвижной точки онѣ откладываются.

Означенная неподвижная точка называется *началомъ*.

Въ какую сторону откладываемыя отъ начала части линій должны быть выражаемы положительными числами, зависитъ отъ произвола; но послѣ того, какъ такая сторона будетъ выбрана, необходимо изображать отрицательными числами тѣ части, кои берутся на сторонѣ противуположной. Такъ напр. если для выраженія линій OD, OD_1 и пр. (черт. 1) отложенныхъ отъ точки O какъ отъ начала, на прямой MN неопредѣленной длины, употреблены будутъ положительныя числа, то линіи OC, OC_1 и пр., взятыя на той-же линіи MN съ противуположной стороны относительно точки O, должны быть изображены числами отрицательными; на оборотъ, если бы послѣднія линіи были выражены числами положительными, то первыя должно было бы изобразить отрицательными.

На прямыхъ горизонтальныхъ положительными числами обыкновенно выражаются части, откладываемыя по правую сторону отъ начала, а на прямыхъ вертикальныхъ идущія вверхъ. На окружности круга, который предполагается находящимся въ вертикальной плоскости, и въ которомъ за начало откладываемыхъ дугъ принятъ конецъ радіуса, проведеннаго горизонтально отъ лѣвой руки къ правой, положительными числами принято выражать дуги, идущія вверхъ отъ начала. Во всѣхъ сихъ случаяхъ части, падающія относительно начала на стороны, противуположныя означеннымъ, т. е. на линіяхъ горизонтальныхъ — идущія влѣво, вертикальныхъ же равно какъ и на показанной окружности круга — внизъ, выражаются числами отрицательными.

Примѣчаніе. Что такой способъ выраженія разстояній, откладываемыхъ по направленію данной линіи отъ извѣстной точки въ противныя стороны, совершенно соотвѣтствуетъ значенію чиселъ положительныхъ и отрицательныхъ, въ этомъ легко можетъ убѣдить насъ слѣдующее соображеніе.

Къ раздѣленію чиселъ на положительныя и отрицательныя приводитъ насъ, какъ извѣстно, вычитаніе. Всякое число представляется какъ разность другихъ двухъ чиселъ, и если эта разность произошла отъ вычитанія меньшаго числа изъ бóльшаго, то ее называютъ числомъ положительнымъ, а если большаго изъ меньшаго, то отрицательнымъ.

На геометрическихъ чертежахъ вычитаніе линій производится чрезъ отложеніе вычитаемой линіи на уменьшаемой отъ одного конца сей послѣдней по направленію къ другому. Смотря по тому, будетъ ли уменьшаемая линія больше или меньше вычитаемой, линія, выражающая разность, будетъ находиться по ту или по другую сторону относительно послѣдняго конца. Такъ напр. положимъ, что изъ горизонтальной линіи AB требуется вычесть линію CD, меньшую линіи AB. Отложивъ вычитаемую линію CD на уменьшаемой AB отъ точки B до C, получимъ для искомой разности линію AC, находящуюся по правую сторону отъ точки A. Если бы изъ той-же линіи AB требовалось вычесть линію EF, большую AB, то отложивъ EF на AB отъ того-же конца B, мы получили бы для разности линію AE, находящуюся по лѣвую сторону отъ точти A.

Если линіи AB, CD и EF будутъ выражены въ числахъ, то разность AC изобразится числомъ положительнымъ, а AE—отрицательнымъ; откуда и видимъ, что выраженіе линій, откладываемыхъ отъ извѣстной точки въ двѣ противуположныя стороны, числами положительными и отрицательными вполнѣ соотвѣтствуетъ значенію сихъ послѣднихъ. Легко также видѣть, почему остается произвольнымъ, въ какую сторону откладываемыя линіи должны выражаться положительными числами, и въ какую отрицательными. Въ самомъ дѣлѣ, въ предыдущемъ примѣрѣ, производя вычитаніе линій CD и EF съ конца B линіи AB, мы получили положительную линію AC по правую сторону отъ точки A, а отрицательную AE—по лѣвую. Но если бы мы стали вычитать съ конца A, то положительная разность упала бы по лѣвую сторону отъ точки B, а отрицательная—по правую. Положимъ теперь, что намъ извѣстно только направленіе уменьшаемой линіи, совпадающей съ какою-нибудь неопредѣленною линіею MN, и конецъ ея O, около котораго должны находиться разности. Не зная, съ которой стороны относительно точки O находится другой конецъ, мы по произволу можемъ воображать его на той или на другой сторонѣ, и слѣдовательно также по произволу можемъ считать положительными разности, находящіяся по правую сторону точки O, а отрицательными по лѣвую, или на оборотъ, находящіяся по лѣвую сторону положительными, а по правую отрицательными.

II.

Понятіе о тригонометрическихъ линіяхъ. Выраженіе на письмѣ какъ тригонометрическихъ линій данной дуги, такъ и обратно дугъ, имѣющихъ данныя тригонометрическія линіи.

§ 3. Тригонометрическихъ линій шесть; онѣ извѣстны подъ названіемъ *синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса* и *косеканса*.

Чтобы показать значеніе этихъ линій, опишемъ изъ какой-нибудь точки O (черт. 4) произвольнымъ радіусомъ окружность, и принявъ точку A за начало дугъ, отложимъ отъ этой точки какую-нибудь дугу AM. Чрезъ начало A проведемъ діаметръ AA_1 и перпендикулярно къ нему другой діаметръ BB_1. Разстояніе точки M до діаметра AA_1 и называется *синусомъ* дуги AM; а разстояніе той-же точки M до діаметра BB_1—*косинусомъ*. Такимъ образомъ, если изъ точки M опустимъ на означенные діаметры перпендикуляры MP и MQ, то первый изъ нихъ будетъ синусъ дуги AM, а второй—косинусъ.

Предположивъ, сообразно сказанному въ § 2, что плоскость, въ которой находится описанная нами окружность, перпендикулярна къ горизонту, что начало A откладываемыхъ на ней дугъ находится на концѣ горизонтальнаго діаметра AA_1 съ правой стороны относительно центра O, и что дуги, откладываемыя вверхъ отъ начала, суть положительныя, проведемъ чрезъ точки A и B касательныя къ окружности неопредѣленной длины, и чрезъ конецъ M дуги AM діаметръ MN, который продолжимъ до пересѣченія въ точкахъ T и S съ обѣими касательными. Разстояніе точки T до точки A, или, что тоже, до діаметра AA_1, т. е. линія AT есть *тангенсъ* дуги AM, а разстояніе точки S до точки B, или до діаметра BB_1, т. е. линія BS—*котангенсъ*. Линіи OT и OS, измѣряющія разстоянія точекъ T и S до центра, называются первая *секансомъ*, а вторая—*косекансомъ* дуги AM.

Примѣчаніе. Линіи AP и BQ, измѣряющія разстоянія концовъ P и Q перпендикуляровъ MP и MQ до окружности, имѣютъ также особенныя названія: первая называется *обратнымъ синусомъ* (Sinus-versus), вторая—*обратнымъ косинусомъ* (Cosinus-versus); но такъ какъ обѣ онѣ весьма рѣдко употребляются при вычисленіяхъ, то обыкновенно ихъ и не разсматриваютъ въ Тригонометріи.

§ 4. На письмѣ синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ, секансъ и косекансъ данной дуги AM выражаются слѣдующимъ образомъ: Sin AM, Cos AM, tang AM, Cot AM, Sec AM, Cosec AM, гдѣ знаки Sin, Cos, tang, Cot, Sec, Cosec суть начальные слоги латинскихъ названій сихъ линій, именно: sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans, cosecans.

Наоборотъ, когда данъ или синусъ MP, или косинусъ MQ, или тангенсъ AT и пр. и требуется выразить соотвѣтствующую этимъ линіямъ дугу, то для этого употребляютъ слѣдующія знакоположенія: arc. Sin MP, arc. Cos MQ, arc.

tang AT, и т. д., гдѣ знакъ arc. есть сокращеніе слова *arcus*, которое значитъ дуга.

Замѣтимъ, что когда длина дуги AM будетъ дана, то каждое изъ знакоположеній: Sin AM, Cos AM и пр. имѣетъ одно опредѣленное значеніе. Напротивъ того, знакоположенія: arc. Sin. MP, arc. Cos MQ и т. д. при данной длинѣ линій MP, MQ и пр. могутъ имѣть по нѣсколько различныхъ значеній. Изъ послѣдующаго разбора свойствъ тригонометрическихъ линій все это само собою сдѣлается очевиднымъ.

III.

О знакахъ тригонометрическихъ линій.

§ 5. За мѣру разстояній конца M дуги AM до діаметровъ AA_1 и BB_1 могутъ быть взяты какъ перпендикуляры MP и MQ, такъ и равныя имъ линіи OQ и OP, отложенныя отъ центра O на самыхъ діаметрахъ. То-же самое имѣетъ мѣсто и относительно всякой другой дуги, начинающейся въ той-же точкѣ A. Отсюда заключаемъ, что синусы и косинусы всѣхъ дугъ можно изображать линіями, откладываемыми на діаметрахъ AA_1 и BB_1 отъ центра, который и служитъ общимъ ихъ началомъ, и такъ какъ, смотря по положенію конца дуги относительно діаметровъ AA_1 и BB_1 помянутыя линіи могутъ находиться съ той или другой стороны относительно этого начала, то слѣдуетъ отсюда, что синусы и косинусы дугъ различной длины могутъ быть положительные и отрицательные.

Тангенсы всѣхъ дугъ начинаются въ точкѣ A, а котангенсы въ точкѣ B и могутъ итти отъ этихъ точекъ по направленію проведенныхъ чрезъ нихъ касательныхъ линій въ обѣ стороны, т. е. тангенсы отъ точки A вверхъ или внизъ, а котангенсы отъ точки B вправо или влѣво, и слѣдовательно могутъ быть также положительные и отрицательные.

Началомъ секансовъ и косекансовъ служитъ центръ окружности, отъ котораго они проводятся или въ ту сторону, на которой находится конецъ дуги, или въ противуположную. Посему и эти линіи могутъ быть также положительныя и отрицательныя.

§ 6. Сообразно сказанному въ § 2 мы будемъ принимать синусы и тангенсы за положительные, когда они падаютъ вверхъ отъ точекъ O и A, косинусы и котангенсы, когда они находятся по правую сторону относительно точекъ O и B, а секансы и косекансы, когда они совпадаютъ съ продолженнымъ радіусомъ, проведеннымъ къ концу дуги.

Допустивъ эти предположенія, находимъ: 1) что положительная дуга AM, меньшая одной четверти окружности, имѣетъ всѣ тригонометрическія линіи положительныя. 2) Положительная дуга ABM_1, коей длина заключается между четвертью и половиною окружности, имѣетъ синусъ $M_1P_1=OQ_1$ и косекансъ OS_1 положительные, косинусъ же $M_1Q=OP_1$, секансъ OT_1, тангенсъ AT_1 и котангенсъ BS_1 отрицательные. 3) Положительная дуга ABA_1N, коей длина заключается между половиною и тремя четвертями окружности, имѣетъ тангенсъ и котангенсъ, измѣряемые линіями AT и BS, положительные; синусъ же $NP_2=OQ_2$, косинусъ $NQ_2=OP_2$, секансъ OT и косекансъ OS — отрицательные. Наконецъ 4) Положительная дуга $ABA_1B_1N_1$, коей длина заключается между тремя четвертями окружности и цѣлою окружностію, имѣетъ косинусъ $N_1Q_3=OP_3$ и секансъ OT_1 положительные, синусъ же $N_1P_3=OQ_3$, тангенсъ AT_1, котангенсъ BS_1 и косекансъ OS_1 — отрицательные.

При внимательномъ разсматриваніи чертежа (5) легко замѣтить, что тригонометрическія линіи могутъ измѣнять свои знаки только тогда, когда длина дуги, сдѣлавшись равною одной, двумъ и т. д. четвертямъ окружности, переходитъ въ слѣдующую за тѣмъ четверть. На основаніи этого замѣчанія изъ сказаннаго передъ симъ о тригонометрическихъ линіяхъ дугъ AM, ABM_1, ABA_1N и $ABA_1B_1N_1$ выводимъ слѣдующія общія заключенія: 1) Тригонометрическія линіи всѣхъ положительныхъ дугъ, коихъ длина заключается между нулемъ и четвертью окружности, суть положительныя. 2) Всѣ положительныя дуги, коихъ длина заключается между четвертью и половиною окружности, имѣютъ синусы и косекансы положительные, а прочія тригонометрическія линіи отрицательныя. 3) Всѣ положительныя дуги, коихъ длина заключается между половиною и тремя четвертями окружности, имѣютъ тангенсы и котангенсы положительные, а остальныя тригонометрическія линіи отрицательныя, и наконецъ 4) всѣ положительныя дуги, коихъ длина заключается между тремя четвертями и цѣлою окружностію, имѣютъ косинусы и секансы положительные, а остальныя четыре линіи отрицательныя.

Для легчайшаго впечатлѣнія этихъ выводовъ въ памяти представляемъ ихъ въ слѣдующей табличкѣ знаковъ:

Названія тригонометрическихъ линій.	Соотвѣтствующіе имъ знаки для дугъ, коихъ длина заключается между			
	нулемъ и четвертью окружности.	четвертью и половиною окружности.	половиною и тремя четвертями окруж.	тремя четвертями и цѣлою окруж.
Синусъ и косекансъ.	+	+	—	—
Косинусъ и секансъ.	+	—	—	+
Тангенсъ и котангенсъ.	+	—	+	—

Что касается тригонометрическихъ линій дугъ отрицательныхъ, т. е. откладываемыхъ отъ начала A внизъ, то одного взгляда на чертежъ 5-й достаточно, чтобы видѣть, что эти линіи имѣютъ слѣдующіе знаки:

Названія тригонометрическихъ линій.	Соотвѣтствующіе имъ знаки для дугъ, коихъ длина заключается между			
	нулемъ и четвертью окружности.	четвертью и половиною окружности.	половиною и тремя четвертями окруж.	тремя четвертями и цѣлою окруж.
Синусъ и косекансъ.	—	—	+	+
Косинусъ и секансъ.	+	—	—	+
Тангенсъ и котангенсъ.	—	+	—	+

§ 7. Иногда разсматриваются дуги, бóльшія цѣлой окружности. Такъ какъ тригонометрическія линіи зависятъ единственно отъ положенія конца дуги на окружности, и какъ концы дугъ, откладываемыхъ на данной окружности отъ одного начала и въ одну и ту-же сторону, и разнящихся между собою цѣлою окружностію или вообще какимъ-нибудь цѣлымъ числомъ окружностей, очевидно, совпадаютъ, то и соотвѣтствующія имъ тригонометрическія линіи не только должны имѣть одинакіе знаки, но и одинакую длину. Поэтому мы въ послѣдующемъ и ограничимся разсматриваніемъ дугъ, меньшихъ окружности, не забывая притомъ, что все, что будетъ сказано о тригонометрическихъ линіяхъ такихъ дугъ, безъ всякаго измѣненія и ограниченія можетъ быть приложено и къ дугамъ, коихъ длина превышаетъ длину сихъ дугъ какимъ бы ни было цѣлымъ числомъ окружностей.

IV.

О взаимномъ отношенiи тригонометрическихъ линiй одной и той-же дуги.

§ 8. Тригонометрическiя линiи всякой дуги въ такой находятся между собою зависимости, что, при данной величинѣ радiуса, достаточно знать величину одной изъ нихъ, чтобы найти величины всѣхъ прочихъ.

Возьмемъ какую-ни-есть дугу AM (чер. 5), и предположивъ, что какъ эта дуга и радiусъ AO, которымъ она описана, такъ и соотвѣтствующiя ей тригонометрическiя линiи MP, PO, AT, BS, OT, OS выражены въ числахъ чрезъ отнесенiе ихъ къ одной какой-ни-есть линейной мѣрѣ, означимъ для краткости численную величину дуги чрезъ a и радiуса чрезъ R. Изъ прямоугольнаго треугольника MPO, въ которомъ $MP = \mathrm{Sin}a$, $OP = \mathrm{Cos}a$ и $OM = R$, получимъ:

$$\mathrm{Sin}^2 a + \mathrm{Cos}^2 a = R^2 \quad (1)$$

Подобные треугольники MPO, TAO и SBO доставятъ:

$$MP : PO = AT : AO$$
$$MP : PO = BO : BS$$
$$PO : OM = OA : OT$$
$$MP : OM = OB : BS.$$

т. е.

$$\mathrm{Sin}\,a : \mathrm{Cos}\,a = \mathrm{tang}a : R$$
$$\mathrm{Sin}\,a : \mathrm{Cos}\,a = R : \mathrm{Cot}\,a$$
$$\mathrm{Cos}\,a : R = R : \mathrm{Sec}\,a$$
$$\mathrm{Sin}\,a : R = R : \mathrm{Cosec}\,a$$

откуда

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tang}.a = \dfrac{R\,\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Cos}\,a}\,,\ \mathrm{Cot}.a = \dfrac{R\mathrm{Cos}\,a}{\mathrm{Sin}a} \\ \mathrm{Sec}.a = \dfrac{R^2}{\mathrm{Cos}\,a}\,,\ \mathrm{Cosec}.a = \dfrac{R^2}{\mathrm{Sin}a} \end{array}\right\}(2)$$

Равенства (1) и (2) и достаточны для опредѣленія величины тригонометрическихъ линій по данной величинѣ одной изъ нихъ и по извѣстному радіусу, и хотя мы получили ихъ для дуги AM$=$a, меньшей четверти окружности, но легко убѣдиться, что они имѣютъ мѣсто и при всѣхъ дугахъ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ. Ибо, за исключеніемъ случаевъ, когда конецъ дуги будетъ совпадать съ однимъ изъ концовъ діаметровъ AA_1 и BB_1, т. е. когда дуга будетъ равна нулю, одной, двумъ, тремъ четвертямъ окружности, или цѣлой окружности, тригонометрическія линіи всегда образуютъ такіе же прямоугольные и подобные между собою треугольники, изъ какихъ мы вывели предъидущія равенства. Замѣтимъ при этомъ, что равенства (2) всегда доставляютъ для тангенса, котангенса, секанса и косеканса величины съ знаками такими, какіе соотвѣтствуютъ ихъ положенію. Въ самомъ дѣлѣ, по этимъ равенствамъ тангенсъ и котангенсъ получаютъ знаки, какіе происходятъ отъ раздѣленія синуса на косинусъ, а секансъ и косекансъ—одинакіе съ косинусомъ и синусомъ, что дѣйствительно и должно быть, сообразно положенію тригонометрическихъ линій, какъ это видно изъ приведенныхъ въ § 5 таблицъ знаковъ.

§ 9. Равенство (1) служитъ для опредѣленія величины синуса по данной величинѣ косинуса и обратно. Предположивъ sin a извѣстнымъ, для косинуса получимъ: $\cos a = \pm\sqrt{R^2 - \sin^2 a}$ двѣ равныя величины съ противными знаками, что и должно быть, какъ легко видѣть изъ построенія. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что данная величина синуса положительная и изображается линіею ab (чер. 6). Чтобы найти косинусъ, откладываемъ эту линію на діаметрѣ BB_1 отъ центра O вверхъ до точки Q и чрезъ эту точку проводимъ хорду MN параллельно діаметру AA_1. Каждая изъ двухъ равныхъ и противуположныхъ линій MQ и NQ и можетъ изображать искомый косинусъ. Первая, очевидно, есть косинусъ положительной дуги AM, меньшей четверти окружности, или отрицательной AB_1A_1BM, заключающейся между тремя четвертями окружности и цѣлою окружностію; вторая положительной дуги ABN большей четверти окружности, или отрицательной AB_1A_1N, заключающейся между половиною и тремя четвертями окружности. Если извѣстно будетъ, какой изъ этихъ дугъ соотвѣтствуетъ данный синусъ, то вмѣстѣ съ тѣмъ извѣстно будетъ и то, какую изъ линій MQ и NQ должно принять за искомый косинусъ, и слѣдовательно какой изъ двухъ знаковъ должно удержать предъ найденнымъ для него выраженіемъ. Такимъ же точно образомъ объясняется и двоякая величина $\pm\sqrt{R^2-\cos^2 a}$, доставляемая равенствомъ (1) для Sin.a, когда Cos.a предполагается даннымъ, и также только изъ разсматриванія длины дуги можно заключить, какой изъ двухъ знаковъ долженъ быть избранъ.

Когда величины синуса и косинуса извѣстны, то равенства (2) непосредственно дадутъ величины тангенса, котангенса, секанса и косеканса.

Для примѣра положимъ, что $\sin a = {}^1/_2\,R$. Изъ равенства (1) найдемъ: $\cos a = \pm {}^1/_2\,R\sqrt{3}$, а равенства (2) доставятъ:

$$\text{tang}\, a = \pm\frac{R}{\sqrt{3}},\quad \cot.a = \pm R\sqrt{3}.$$

$$\sec.a = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}},\quad \text{cosec}.a = 2R.$$

§ 10. Въ поименованныхъ выше (§ 8) случаяхъ, т. е. когда дуга равняется нулю, или одной, двумъ, тремъ четвертямъ окружности, или цѣлой окружности, образуемые тригонометрическими линіями треугольники уничтожаются, и по справедливости можно усомниться, остаются ли равенства (1) и (2) вѣрными и при такихъ величинахъ дуги. Но легко убѣдиться, что и эти случаи не дѣлаютъ исключенія. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ одинъ какой-ни-есть изъ нихъ, напр. когда $a=o$. Такъ какъ нуль есть предѣлъ уменьшающихся величинъ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ (разумѣя въ обоихъ случаяхъ уменьшеніе численной величины), то для опредѣленности понятій положимъ, что положительная дуга AM, (чер. 5) постепенно уменьшаясь. обращается въ нуль. Ясно, что по мѣрѣ приближенія конца M этой дуги къ ея началу A, синусъ MP и тангенсъ AT уменьшаются, и обращаются въ нуль, когда точка M совершенно совпадаетъ съ точкою A; секансъ OT также уменьшается, и, при совпаденіи точки M съ точкою A, дѣлается равнымъ радіусу OA. Напротивъ того, косинусъ OP, котангенсъ BS и косекансъ OS увеличиваются и при томъ такъ, что, когда точка M совпадетъ съ точкою A, то первый сдѣлается равнымъ радіусу OA, а два послѣдніе не будутъ имѣть никакой опредѣленной длины; ибо діаметръ MM_1, совпадая съ діаметромъ AA_1, будетъ параллеленъ касательной, проведенной чрезъ точку B, и не пересѣчется съ нею, какъ бы далеко ни былъ продолженъ, или, какъ говорятъ, пересѣчется на безконечно-большомъ разстояніи какъ отъ центра O, такъ и отъ точки B, такъ что котангенсъ и косекансъ будутъ имѣть безконечную длину, простираясь отъ діаметра BB_1 вправо.

Если бы дуга, обратившаяся въ нуль, была отрицательная, то и въ такомъ случаѣ получились бы тѣ же тригонометрическія линіи, съ тѣмъ только различіемъ, что котангенсъ и косекансъ должны быть воображаемы простирающимися на безконечное разстояніе влѣво отъ діаметра BB_1.

Такимъ образомъ, при $a=o$ должно быть: $\sin a=o$, $\tang a=o$, $\sec a=R$, $\cos a=R$, $\cot a=\pm\infty$, $\operatorname{cosec} a=\pm\infty$, гдѣ изъ двухъ знаковъ $+$ и $-$ долженъ быть взятъ первый, когда положительная дуга обращается въ нуль, и второй, когда отрицательная.

Такія величины дѣйствительно и получаются изъ равенствъ (1) и (2). Ибо, когда $\sin a = o$, то изъ равенства (1) находимъ: $\cos a = \pm R$, гдѣ при $a = o$ должно взять верхній знакъ, а изъ равенствъ (2), удерживая предъ нулемъ, въ который обращается sin.a, знаки, соотвѣтствующіе какъ положительному, такъ и отрицательному состоянію дуги a, предшествующему состоянію нуля, получимъ:

$$\operatorname{tang} a = \frac{R \sin a}{\cos a} = \pm \frac{R.o}{R} = o \ ; \ \operatorname{Sec} a = \frac{R^2}{\cos a} = \frac{R^2}{R} = R.$$

$$\cot a = \frac{R \cos a}{\sin a} = \frac{R^2}{\pm o} = \pm \infty \ ; \ \operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\sin a} = \frac{R^2}{\pm o} = \pm \infty.$$

Подобнымъ образомъ легко показать, что доставляемыя равенствами (1) и (2) величины тригонометрическихъ линій и въ прочихъ случаяхъ совершенно согласны съ тѣми, какія должны быть по построенію. Итакъ заключаемъ, что справедливость помянутыхъ равенствъ не подлежитъ никакому исключенію.

§ 11. Хотя посредствомъ равенствъ (1) и (2) легче всего опредѣляются величины тригонометрическихъ линій по данной величинѣ синуса или косинуса; но если бы дана была величина и другой какой-либо тригонометрической линіи, то величины остальныхъ могли бы быть опредѣлены по тѣмъ-же равенствамъ безъ особенныхъ затрудненій. Положимъ напр., что извѣстенъ тангенсъ, и требуется найти величины остальныхъ пяти линій. Изъ двухъ равенствъ:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = R^2 \text{ и}$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{R \sin a}{\cos a}, \text{ находимъ:}$$

$$\sin a = \frac{\pm R \operatorname{tang} a}{\sqrt{R^2 + \operatorname{tang}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{\pm R^2}{\sqrt{R^2 + \operatorname{tang}^2 a}},$$

гдѣ изъ двухъ знаковъ + и — должно удержать тотъ или другой, смотря по длинѣ дуги, при чемъ необходимо замѣтить, что всегда должно брать оба выраженія съ однимъ и тѣмъ-же знакомъ, потому что въ противномъ случаѣ они не удовлетворяли бы равенству $\frac{R \sin a}{\cos a} = \operatorname{tang} a$. Остальныя три равенства, при помощи найденныхъ выраженій для sin.a и cos.a доставляютъ:

$$\cot.a = \frac{R^2}{\operatorname{tang} a},\ \sec a = \pm \sqrt{R^2 + \operatorname{tang}^2 a},\ \operatorname{cosec} a = \pm R \sqrt{1 + \frac{R^2}{\operatorname{tang}^2 a}}.$$

V.

Объ отношеніяхъ тригонометрическихъ линій различныхъ дугъ, описанныхъ однимъ и тѣмъ-же радіусомъ.

§ 12. Между тригонометрическими линіями различныхъ дугъ, принадлежащихъ одной и той-же окружности, существуютъ многоразличныя отношенія, посредствомъ которыхъ, по извѣстнымъ тригонометрическимъ линіямъ одной или нѣсколькихъ данныхъ дугъ, могутъ быть опредѣлены тригонометрическія линіи многихъ другихъ дугъ, находящихся съ данными въ извѣстныхъ отношеніяхъ.

§ 13. Пусть будетъ дана положительная дуга AM, меньшая четверти окружности (чер. 6). Если чрезъ точку M проведемъ параллельно діаметру AA_1 хорду MN, то дуга ABN будетъ имѣть такой-же по величинѣ и по знаку синусъ, какъ и дуга AM, и такой-же по величинѣ косинусъ, только съ противнымъ знакомъ. Ибо концы M и N сихъ дугъ находятся въ одинакихъ разстояніяхъ отъ діаметровъ AA_1 и BB_1, и при томъ съ одной и той-же стороны относительно перваго, а относительно втораго съ противуположныхъ сторонъ. Проведя потомъ чрезъ точку N хорду NM_1, параллельную діаметру BB_1, получимъ новую дугу ABA_1M_1, коей синусъ равенъ по величинѣ синусу дуги AM и ABN, но долженъ быть взятъ съ противнымъ знакомъ, косинусъ же равенъ по величинѣ и по знаку косинусу дуги ABN. Наконецъ, если чрезъ точку M_1 проведемъ хорду M_1N_1, параллельную діаметру AA_1, то дуга $ABA_1B_1N_1$ будетъ имѣть такой-же точно синусъ, какъ и дуга ABA_1M_1, косинусъ же одинаковый по величинѣ, но съ противнымъ знакомъ.

Такъ какъ хорды MN и M_1N_1, параллельныя діаметру AA_1, находятся на равныхъ отъ него разстояніяхъ, то слѣдуетъ отсюда, что дуги AM, NA_1, A_1M_1 и N_1A равны между собою. Посему, если означимъ общую величину ихъ чрезъ a и чрезъ C половину окружности, то будемъ имѣть: $AM=a$, $ABN=C-a$, $ABA_1M_1=C+a$, $ABA_1B_1N_1=2C-a$, и въ-слѣдствіе сказаннаго выше получимъ слѣдующія равенства:

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\sin a=\sin(C-a)=-\sin(C+a)=-\sin(2C-a)\\ \cos a=-\cos(C-a)=-\cos(C+a)=\cos(2C-a)\end{array}\right.$$

Эти равенства показываютъ:

1.) Что синусы дугъ a и C—a, коихъ сумма равна половинѣ окружности, и кои поэтому называются *дополненіями одна другой до половины окружности*, равны между собою какъ по величинѣ, такъ и по знакамъ; косинусы же равны по величинѣ, но имѣютъ противные знаки.

2.) Что синусы дугъ C—a и C+a, коихъ сумма равна двумъ полуокружностямъ, будучи равны по величинѣ, разнятся знаками; косинусы же равны по величинѣ и по знакамъ.

3.) Что синусы дугъ C+a и 2C—a, коихъ сумма равна тремъ полуокружностямъ, одинаковы по величинѣ и по знакамъ; косинусы же одинаковы по величинѣ, но разнятся знаками. Наконецъ

4) что синусы и косинусы дугъ a и C+a, или C—a и 2C—a, коихъ разность равна половинѣ окружности, равны по величинѣ, но имѣютъ противные знаки.

Если припомнимъ, что тригонометрическія линіи всякой дуги не измѣняются, если къ ней прибавлено будетъ какое-ни-есть цѣлое число окружностей, то изъ тѣхъ-же равенствъ (1) легко выведемъ слѣдующее общее заключеніе: «синусы «двухъ дугъ, коихъ сумма равна какому-ни-есть нечетному «числу полуокружностей, одинаковы какъ по величины, такъ «и по знакамъ; косинусы же такихъ дугъ одинаковы по «величинѣ, но имѣютъ различные знаки. А когда сумма двухъ «дугъ составляетъ четное число полуокружностей; то наобо-«ротъ косинусы ихъ равны по величинѣ и по знакамъ, синусы «же имѣютъ одинакую величину, но разные знаки. Отъ при-«бавленія къ дугѣ нечетнаго числа полуокружностей синусъ «и косинусъ измѣняютъ знаки, удерживая ту-же величину».

§ 14. Всѣ эти выводы безъ всякаго измѣненія прикладываются и къ дугамъ отрицательнымъ, какъ это само собою видно изъ чертежа 6. Если же хотимъ сравнить синусы и косинусы дугъ отрицательныхъ съ синусами и косинусами дугъ положительныхъ, то изъ разсматриванія тогоже чертежа непосредственно находимъ:

$$\sin(-a)=\sin(2C-a),\ \sin\{-(C-a)\}=\sin(C+a),$$
$$\sin\{-(C+a)\}=\sin(C-a),\ \sin\{-(2C-a)\}=\sin a.$$
$$\cos(-a)=\cos(2C-a),\ \cos\{-(C-a)\}=\cos(C+a)$$
$$\cos\{-(C+a)\}=\cos(C-a),\ \cos\{-(2C-a)\}=\cos a.$$

Но изъ равенствъ (1) имѣемъ:

$$\sin(2C-a)=-\sin a,\ \sin(C+a)=-\sin(C-a).$$
$$\cos(2C-a)=\cos a,\ \cos(C+a)=\cos(C-a).$$

Посему будетъ:

$$(2)\left\{\begin{array}{l}\sin(-a)=-\sin a,\ \sin\{-(C-a)\}=-\sin(C-a).\\ \sin\{-(C+a)\}=-\sin(C+a),\ \sin\{-(2C-a)\}=-\sin(2C-a)\\ \cos(-a)=\cos a,\ \cos\{-(C-a)\}=\cos(C-a)\\ \cos\{-(C+a)\}=\cos(C+a),\ \cos\{-(2C-a)\}=\cos(2C-a\end{array}\right.$$

откуда видимъ, что синусы отрицательныхъ дугъ равны синусамъ одинаковыхъ по величинѣ дугъ положительныхъ, взятыхъ съ знакомъ —; косинусы же дугъ отрицательныхъ совершенно равны косинусамъ одинаковыхъ по величинѣ дугъ положительныхъ.

§ 15. На основанiи равенствъ: $\sec. a = \frac{R^2}{\cos a}$, $\operatorname{cosec} a = \frac{R^2}{\sin a}$, сказанное о равенствѣ синусовъ и косинусовъ различныхъ дугъ безъ всякаго измѣненiя имѣетъ мѣсто и относительно косекансовъ и секансовъ. Что касается до тангенсовъ и котангенсовъ, то, такъ какъ $\operatorname{tang} a = \frac{R \sin. a}{\cos. a}$, $\cot. a = \frac{R \cos. a}{\sin a}$, какова бы ни была дуга a, изъ равенствъ (1) заключаемъ:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}. a = -\operatorname{tang} (C-a) = \operatorname{tang} (C+a) = -\operatorname{tang} (2C-a) \\ \cot. a = -\cot (C-a) = \cot (C+a) = -\cot (2C-a). \end{array} \right.$$

Отсюда видимъ, что тангенсы и котангенсы отъ присоединенiя къ дугѣ половины окружности не измѣняются.

§ 16. Каждыя двѣ дуги, коихъ сумма или разность составляетъ четверть отружности, называются *дополненiями одна другой до четверти окружности*. Такъ дуга AM имѣетъ дополненiемъ своимъ дугу BM, ибо $AM+BM=AB=\frac{1}{2}C$; для дуги ABN дополненiемъ служитъ дуга BN, потому что $ABN-BN=AB=\frac{1}{2}C$ и т. д.

Если предположимъ, что дуги BM и BN имѣютъ началомъ своимъ точку B, то линiи MQ и NQ будутъ изображать ихъ синусы, а линiи MP и NP_1—косинусы. Но какъ тѣ-же самыя линiи составляютъ первыя двѣ—синусы, а вторыя—косинусы дугъ AM и ABN, то заключаемъ отсюда, что косинусы дугъ равны синусамъ ихъ дополненiй до четверти окружности, и на оборотъ косинусы сихъ послѣднихъ равны синусамъ первыхъ. То-же самое имѣетъ мѣсто и относительно прочихъ тригонометрическихъ линій. Такимъ образомъ имѣемъ:

$$(4)\left\{\begin{array}{l}\cos.a=\sin\left(\frac{1}{2}C-a\right),\ \cot.a=\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C-a\right),\ \operatorname{cosec}a=\\ \quad=\sec\left(\frac{1}{2}C-a\right)\\ \cos\left(\frac{1}{2}C-a\right)=\sin a,\ \cot\left(\frac{1}{2}C-a\right)=\operatorname{tang}a,\\ \quad\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}C-a\right)=\sec a.\end{array}\right.$$

Но если въ равенствахъ: $\sin a=\sin(C-a)$, $\cos a=-\cos(C-a)$, $\operatorname{tang} a=-\operatorname{tang}(C-a)$, $\cot.a=-\cot(C-a)$, $\sec a= -\sec.(C-a)$, $\operatorname{cosec}.a=\operatorname{cosec}(C-a)$ вмѣсто a поставимъ $\frac{1}{2}C-a$, то получимъ:

$\sin\left(\frac{1}{2}C-a\right)=\sin\left(\frac{1}{2}C+a\right)$, $\cos\left(\frac{1}{2}C-a\right)=-\cos\left(\frac{1}{2}C+a\right)$, $\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C-a\right)=-\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C+a\right)$, $\cot\left(\frac{1}{2}C-a\right)=-\cot\left(\frac{1}{2}C+a\right)$, $\sec\left(\frac{1}{2}C-a\right)=-\sec\left(\frac{1}{2}C+a\right)$, $\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}C-a\right)=\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}C+a\right)$ откуда, соображаясь съ равенствами (4), находимъ:

$$(5)\left\{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{1}{2}C+a\right)=\cos.a,\ \cos\left(\frac{1}{2}C+a\right)=-\sin a,\\ \quad\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}C+a\right)=-\cot.a,\\ \cot\left(\frac{1}{2}C+a\right)=-\operatorname{tang}a,\ \sec\left(\frac{1}{2}C+a\right)=-\operatorname{cosec}a,\\ \quad\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}C+a\right)=\sec a.\end{array}\right.$$

—равенства, кои показываютъ, что когда дуга увеличится на четверть окружности, то синусъ, тангенсъ, котангенсъ и косекансъ ея, измѣнивши знаки, сдѣлаются косинусомъ, котангенсомъ, тангенсомъ и секансомъ; косинусъ же и секансъ превратятся въ синусъ и косекансъ безъ всякаго измѣненія.

§ 17. Изъ сказаннаго въ предыдущихъ параграфахъ легко видѣть, что опредѣленіе тригонометрическихъ линій всякой дуги какъ положительной, такъ и отрицательной можетъ быть сведено на опредѣленіе тригонометрическихъ линій дуги положительной, меньшей одной осьмой части окружности. Ибо, пусть будетъ дана какая-ни-есть положительная дуга S, и положимъ, что требуется найти одну изъ соотвѣтствующихъ ей тригонометрическихъ линій, напр. синусъ. Если S больше окружности, то, положивъ $S=2nC+S_1$, гдѣ n означаетъ число заключающихся въ S окружностей, будемъ имѣть: $\sin S=\sin S_1$. Предположивъ, что $S_1>C$, такъ что $S_1=C+S_2$, гдѣ $S_2<C$, найдемъ: $\sin S_1=-\sin S_2$. Если $S_2>\frac{1}{2}C$, то сдѣлавъ $S_2=\frac{1}{2}C+S_3$, гдѣ $S_3<\frac{1}{2}C$, получимъ $\sin S_2=\cos S_3$. Наконецъ, если бы было $S_3>\frac{1}{4}C$, то положивъ $S_3=\frac{1}{2}C-S_4$, гдѣ $S_4<\frac{1}{4}C$, имѣли бы: $\cos S_3=\sin S_4$. И такъ $\sin S=-\sin S_4$.

Такимъ же образомъ и прочія тригонометрическія линіи дуги S легко могутъ быть сведены на тригонометрическія линіи дуги S_4.

Если бы данная дуга S была отрицательная, то прежде всего, по формуламъ (2) § 14, мы свели бы опредѣленіе соотвѣтствующихъ ей тригонометрическихъ линій на пріисканіе тригонометрическихъ линій равной ей дуги положительной, съ которою потомъ поступили бы по вышесказанному.

§ 18. Зная тригонометрическія линіи двухъ какихъ-нибудь дугъ, легко можно найти тригонометрическія линіи суммы этихъ дугъ и разности.

Пусть будутъ a и b данныя дуги, и предположивъ, что ихъ синусы и косинусы извѣстны, будемъ искать синусы и косинусы ихъ суммы и разности. Положимъ, что $a=AM$ (Чер. 7) и $b=MN=MN_1$ такъ что $a+b=AN$ и $a-b=AN_1$. Опустивъ изъ точекъ M, N и N_1 на радіусъ OA перпендикуляры MP, NP_1, N_1P_2 будемъ имѣть: $MP=\sin a$, $NP_1=\sin(a+b)$, $N_1P_2=\sin(a-b)$, $OP=\cos a$, $OP_1=\cos(a+b)$, $OP_2=\cos(a-b)$. Если же проведемъ радіусъ OM, раздѣляющій дугу NMN_1, а слѣдовательно и стягивающую ее хорду NN_1 на двѣ равныя части, и по этому перпендикулярный къ сей послѣдней, то будетъ $NB=\sin b$, $OB=\cos b$. И такъ задача состоитъ въ томъ, чтобы линіи NP_1, N_1P_2, OP_1 и OP_2 выразить посредствомъ линій MP, OP, NB, OB, и радіуса OA или OM, который мы означимъ черезъ R. Для сего изъ точки B опустимъ на линіи OA и NP_1 перпендикуляры BC и BD, и изъ точки N_1 на линію BC перпендикуляръ N_1E. Такимъ образомъ будетъ:

$NP_1 = ND + DP_1 = ND + BC$, ибо, очевидно, $DP_1 = BC$;

$N_1P_2 = BC - BE = BC - ND$, потому что треугольники BEN_1 и NDB, очевидно, равны, и слѣд. $BE = ND$;

$OP_1 = OC - CP_1 = OC - BD$, ибо $CP_1 = BD$;

$OP_2 = OC + CP_2 = OC + BD$, ибо $CP_2 = EN_1 = BD$.

Но изъ подобныхъ треугольниковъ NDB и MPO, коихъ стороны взаимно перпендикулярны, имѣемъ:

$$ND : NB = OP : OM$$
$$DB : NB = MP : OM,$$

откуда

$$ND = \frac{NB \,.\, OP}{OM},\ DB = \frac{NB \,.\, MP}{OM}.$$

Равнымъ образомъ подобные же треугольники MPO и BCO доставляютъ:

$$OC : OB = OP : OM$$
$$BC : OB = MP : OM,$$

откуда

$$OC = \frac{OB \,.\, OP}{OM},\ BC = \frac{OB \,.\, MP}{OM};$$

и такъ:

$$NP_1 = \frac{NB \,.\, OP}{OM} + \frac{OB \,.\, MP}{OM}$$

$$N_1P_2 = \frac{OB \,.\, MP}{OM} - \frac{NB \,.\, OB}{OM}$$

$$OP_1 = \frac{OB \,.\, OP}{OM} - \frac{NB \,.\, MP}{OM}$$

$$OP_2 = \frac{OB \,.\, OP}{OM} + \frac{NB \,.\, MP}{OM}.$$

Подставивъ въ этихъ равенствахъ вмѣсто всѣхъ линій ихъ значенія, получимъ:

$$(1)\ \sin(a+b)=\frac{\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b}{R}$$

$$(2)\ \sin(a-b)=\frac{\sin a\ \cos b-\cos a\ \sin b}{R}$$

$$(3)\ \cos(a+b)=\frac{\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b}{R}$$

$$(4)\ \cos(a-b)=\frac{\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b}{R}$$

— отношенія, кои и рѣшаютъ задачу, которую мы себѣ предложили.

Хотя эти отношенія выведены нами изъ чертежа, въ которомъ не только каждая изъ дугъ a и b порознь, но и сумма ихъ предположена меньше четверти окружности; но не трудно увѣриться, что они даютъ вѣрные результаты и при всякой длинѣ дугъ. Въ самомъ дѣлѣ, положимъ, что $a+b={}^1/_2\,C+\alpha+\beta$, гдѣ $\alpha+\beta<{}^1/_2\,C$. На основаніи формулъ § 16 будемъ имѣть: $\sin(a+b)=\sin({}^1/_2\,C+\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$, слѣд. должно быть: $\sin(a+b)=\frac{\cos.\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}{R}$.

Но положивъ $a={}^1/_2\,C+\alpha$, $b=\beta$ и замѣчая, что $\sin({}^1/_2\ C+\alpha)=\cos\alpha$, $\cos({}^1/_2\ C+\alpha)=-\sin\alpha$, посредствомъ перваго изъ приведенныхъ выше равенствъ найдемъ:

$$\sin(a+b)=\frac{\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}{R}$$ — результатъ совершенно согласный съ предъидущимъ.

Такимъ же образомъ справедливость каждаго изъ равенствъ (1) (2) (3) и (4) легко можетъ быть подтверждена, какія бы величины дугамъ a и b ни были приписаны, и будутъ ли онѣ положительныя или отрицательныя. Не останавливаясь далѣе на этомъ предметѣ, мы покажемъ замѣчательнѣйшія изъ многоразличныхъ слѣдствій, какія изъ этихъ равенствъ могутъ быть выведены.

§ 19. Если положимъ $b = a$, то изъ равенствъ (1) и (3) получимъ:

(5) $\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{R}$

(6) $\cos 2a = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{R}$ — равенства, по которымъ синусъ и косинусъ двойной дуги выражаются посредствомъ синуса и косинуса простой дуги.

Сдѣлавъ $b = 2a$, изъ тѣхъ же равенствъ (1) и (3) получимъ:

$$\sin 3a = \frac{\sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a}{R}$$

$$\operatorname{Cos} 3a = \frac{\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a}{R}.$$

Если въ этихъ выраженіяхъ вмѣсто $\sin 2a$ и $\cos 2a$ подставимъ найденныя для нихъ величины, то сдѣлавъ, при помощи равенства $\sin^2 a + \cos^2 a = R^2$, надлежащія сокращенія, найдемъ.

(7) $\sin 3a = 3 \sin a - \frac{4 \sin^3 a}{R^2}$

(8) $\cos 3a = \frac{4 \cos^3 a}{R^2} - 3 \cos a.$

Полагая попремѣнно $b = 3a, = 4a, = 5a$ и т. д.—подобнымъ же образомъ найдемъ выраженія для синусовъ и косинусовъ четверныхъ, пятерныхъ и т. д. дугъ посредствомъ синусовъ и косинусовъ простыхъ дугъ [1]

---

[1] Весьма легко дать общія формулы, по которымъ можно получать выраженія для синуса и косинуса какой угодно кратной дуги, не имѣя надобности отыскивать выраженій для синусовъ и косинусовъ меньшихъ дугъ. Для этого возьмемъ мнимое выраженіе $\cos a + \sqrt{-1} \sin a$ и будемъ возвышать его попремѣнно во 2-ю, 3-ю и т. д. степени. Возвысивъ во 2-ю степень, будемъ имѣть:

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^2 = \cos^2 a + 2 \cos a \sin a \sqrt{-1} - \sin^2 a.$$

§ 20. Равенства (5) (6) (7) и (8) равно какъ и тѣ, кои получаются для $\sin 4a$, $\cos 4a$, $\sin 5a$, $\cos 5a$, и пр. могутъ служить и для опредѣленія синусовъ и косинусовъ половины, трети, четверти и т. д. дуги, по даннымъ синусу и косинусу цѣлой дуги.

Чтобы найти синусъ и косинусъ половины дуги, положимъ $2a = p$, и слѣд. $a = \frac{1}{2}p$; изъ равенства (6) получимъ:

$$\cos p = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} p - \sin^2 \frac{1}{2} p}{R},$$

откуда, при помощи равенства $\sin^2 \frac{1}{2} p + \cos^2 \frac{1}{2} p = R^2$, найдемъ:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} p = \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{2} R \cos p$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} p = \tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R \cos p,$$

Но какъ $\cos^2 a - \sin^2 a = R \cos 2a$, $2 \cos a \sin a = R \sin 2a$, гдѣ R есть радіусъ, коимъ описана дуга a, то по этому будетъ:

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^2 = R (\cos 2a + \sqrt{-1} \sin 2a).$$

Помноживъ обѣ части этого равенства на $\cos a + \sqrt{-1} \sin a$, получимъ:

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^3 = R \{\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a + \sqrt{-1} (\sin 2a \cos a + \cos 2a \sin a)\},$$

откуда, замѣчая, что $\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a = R \cos 3a$, $\sin 2a \cos a + \cos 3a \sin a = R \sin 3a$, находимъ:

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^3 = R^2 (\cos 3a + \sqrt{-1} \sin 3a).$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, легко увѣримся, что вообще будетъ:

$$(\alpha) \ldots (\cos a + \sqrt{-1} \sin a)^n = R^{n-1} (\cos na + \sqrt{-1} \sin na),$$

гдѣ n есть какое угодно цѣлое число.

Теперь замѣтимъ, что два мнимыя выраженія вида: $A + B\sqrt{-1}$ и $P + Q\sqrt{-1}$ гдѣ A, B, P и Q суть величины вещественныя, тогда только могутъ быть равны между собою, когда $A = P$ и $B = Q$. По этому, если развернемъ первую часть равенства (α) по формулѣ бинома, и представимъ ее въ видѣ:

$$\cos^n a - \frac{n.\,n-1}{1.\,2} \cos^{n-2} a \sin^2 a + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\,2.\,3.\,4} \cos^{n-4} a \sin^4 a - \text{etc}$$

и по извлеченіи квадратныхъ корней, будемъ имѣть:

$$(9)\quad \cos \tfrac{1}{2} p = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{2} R \cos p.}$$

$$(10)\quad \sin \tfrac{1}{2} p = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2} R^2 - \tfrac{1}{2} R \cos p.}$$

Эти формулы служатъ для опредѣленія синуса и косинуса дуги $\frac{1}{2}$ p по данному косинусу дуги p. Онѣ доставляютъ по двѣ равныя и противуположныя величины какъ для sin $\frac{1}{2}$ p, такъ и для cos $\frac{1}{2}$ p, что дѣйствительно и должно быть. Ибо мы предполагаемъ даннымъ косинусъ дуги p, а не самую дугу. Извѣстно же, что одинъ и тотъ же косинусъ, не принимая въ разсчетъ дугъ, бо́льшихъ окружности, можетъ приличествовать четыремъ дугамъ, двумъ положительнымъ и двумъ отрицательнымъ. Означимъ чрезъ к данную численную величину косинуса и чрезъ с положительную дугу, меньшую окружности, коей косинусъ равенъ числу к; тотъже косинусъ будутъ имѣть и дуги — с, 2C — с и — (2C — с), такъ что будетъ: к = cos. с = cos (— с) = cos (2C — с) =

$$+\sqrt{-1}\left\{ n \cos^{n-1} a \sin a - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cos^{n-3} a \sin^3 a + \text{etc.} \right\},$$

то должно быть:

$$R^{n-1} \cos na = \cos^n a - \frac{n.n-1}{1.2} \cos^{n-2} a \sin^2 a + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \cos^{n-4} a \sin^4 a - \text{etc.}$$

$$R^{n-1} \sin na = n \cos^{n-1} a \sin a - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cos^{n-3} a \sin^3 a + \text{etc.}$$

откуда

$$(\beta) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \text{Cos}\, na = \dfrac{1}{R^{n-1}} \left\{ \cos^n a - \dfrac{n.n-1}{1.2} \cos^{n-2} a \sin^2 a + \dfrac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \right. \\ \qquad\qquad \left. \cos^{n-4} a \sin^4 a - \text{etc.} \right\} \\ \text{Sin}\, na = \dfrac{1}{R^{n-1}} \left\{ n \cos^{n-1} a \sin a - \dfrac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cos^{n-3} a \sin^3 a - \text{etc} \right\} \end{array} \right.$$

Эти формулы и служатъ для выраженія синуса и косинуса кратной дуги na посредствомъ синуса и косинуса дуги a. Ихъ можно представлять въ различныхъ видахъ, выключая изъ вторыхъ частей степени косинуса или синуса посредствомъ равенства $\sin^2 a + \cos^2 a = R^2$.

$\cos\{-(2C-c)\}$, слѣдовательно можно положить $p=c$, или $p=-c$, или $p=2C-c$, или наконецъ $p=-(2C-c)$. Такъ какъ не сказано, какой изъ сихъ дугъ соотвѣтствуетъ данная величина к косинуса, то мы и должны получить для $\cos {}^1/_2\, p$ и $\sin {}^1/_2\, p$ величины, кои соотвѣтствуютъ показаннымъ выше значеніямъ дуги p, именно: для $\cos {}^1/_2\, p$ должны получиться величины равныя $\cos \frac{c}{2}$, $\cos\left(-\frac{c}{2}\right)$, $\cos\left(C-\frac{c}{2}\right)$, $\cos\left\{-\left(C-\frac{c}{2}\right)\right\}$, для $\sin {}^1/_2\, p$ величины равныя $\sin\frac{c}{2}$, $\sin\left(-\frac{c}{2}\right)$, $\sin\left(C-\frac{c}{2}\right)$, $\sin\left\{-\left(C-\frac{c}{2}\right)\right\}$. Но $\cos\left(-\frac{c}{2}\right)=\cos\frac{c}{2}$, $\cos\left(C-\frac{c}{2}\right)=\cos\left\{-\left(C-\frac{c}{2}\right)\right\}=-\cos\frac{c}{2}$, $\sin\left(-\frac{c}{2}\right)=-\sin\frac{c}{2}$, $\sin\left(C-\frac{c}{2}\right)=\sin\frac{c}{2}$, $\sin\left\{-\left(C-\frac{c}{2}\right)\right\}=-\sin\frac{c}{2}$; посему будетъ: $\cos {}^1/_2\, p=\pm\cos\frac{c}{2}$. $\sin {}^1/_2\, p=\pm\sin\frac{c}{2}$, откуда и видимъ, что какъ $\cos {}^1/_2\, p$, такъ и $\text{Sin}\, {}^1/_2\, p$ могутъ имѣть по двѣ равныя величины съ противными знаками.

Если бы требовалось найти синусъ и косинусъ половины дуги по данной величинѣ синуса цѣлой дуги, то изъ равенства (5), замѣнивъ въ немъ 2a чрезъ p и a чрезъ ${}^1/_2\, p$, получили бы:

$$\sin p=\frac{2\sin {}^1/_2\, p.\ \cos {}^1/_2\, p}{R},$$

или

$$2\sin {}^1/_2\, p.\ \cos {}^1/_2\, p=R\ \sin p.$$

Отсюда при помощи равенства: $\sin^2 {}^1/_2\, p+\cos^2 {}^1/_2\, p=R^2$, нашли бы:

$$(\sin {}^1/_2\, p+\cos {}^1/_2\, p)^2=R^2+R\ \sin p$$
$$(\sin {}^1/_2\, p-\cos {}^1/_2\, p)^2=R^2-R\ \sin p$$

и, по извлеченіи квадратныхъ корней,

$$\sin {}^1\!/_2\, p + \cos {}^1\!/_2\, p = \pm \sqrt{R^2 + R \sin p}$$
$$\sin {}^1\!/_2\, p - \cos {}^1\!/_2\, p = \pm \sqrt{R^2 - R \sin p},$$

откуда наконецъ:

$$(11) \quad \sin {}^1\!/_2\, p = \pm {}^1\!/_2 \sqrt{R^2 + R \sin p} \pm {}^1\!/_2 \sqrt{R^2 - R \sin p}$$
$$(12) \quad \cos {}^1\!/_2\, p = \pm {}^1\!/_2 \sqrt{R^2 + R \sin p} \mp {}^1\!/_2 \sqrt{R^2 - R \sin p}.$$

Такимъ образомъ въ настоящемъ случаѣ для $\sin {}^1\!/_2\, p$ и $\cos {}^1\!/_2\, p$ получаемъ по четыре величины, что легко объясняется подобно предъидущему.

Если положимъ $3a = p$ и $\sin {}^1\!/_3\, p = z$, а $\sin p = m$, то равенство (7) приметъ видъ:

$$(13) \quad m = 3z - \frac{4}{R^2} z^3.$$

Положивъ же $\cos p = n$ и $\cos {}^1\!/_3\, p = y$, изъ равенства (8) получимъ:

$$(14) \quad n = \frac{4}{R^2} y^3 - 3y.$$

Разрѣшивъ эти уравненія 3-ей степени, найдемъ z и y, т. е. $\sin {}^1\!/_3\, p$ и $\cos {}^1\!/_3\, p$, выраженными посредствомъ m и n, т. е. посредствомъ $\cos p$ и $\sin p$.

Если бы требовалось опредѣлить $\cos {}^1\!/_4\, p$ или $\sin {}^1\!/_4\, p$ по даннымъ $\cos p$ или $\sin p$, то нужно было бы рѣшить уравненіе 4-й степени. Опредѣленіе $\cos {}^1\!/_5\, p$ и $\sin {}^1\!/_5\, p$ посредствомъ $\cos p$ и $\sin p$ привело бы къ рѣшенію уравненія 5-й степени и т. д.

§ 21. Сказанное о синусахъ и косинусахъ легко можетъ быть распространено и на прочія тригонометрическія линіи. Мы ограничимся выводомъ нѣсколькихъ замѣчательнѣйшихъ формулъ касательно тангенсовъ.

Если равенства (1) и (3) раздѣлимъ одно на другое, то получимъ:

$$\frac{\sin (a+b)}{\cos (a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Но $\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\tan g\,(a+b)}{R}$, посему будетъ:

$$\tan g\,(a+b) = R\,\frac{\sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b}{\cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b}.$$

Раздѣливъ числителя и знаменателя второй части послѣдняго равенства на $\cos a\ \cos b$, и замѣчая, что $\frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\tan g\, a}{R}$, $\frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\tan g\, b}{R}$, будемъ имѣть:

$$(15 \qquad \tan g\,(a+b) = \frac{R^2\,(\tan g\, a + \tan g\, b)}{R^2 - \tan g\, a\ \tan g\, b}$$

—формулу, дающую тангенсъ суммы двухъ дугъ посредствомъ тангенсовъ каждой изъ нихъ.

Точно такимъ-же образомъ изъ равенствъ (2) и (4) получимъ:

$$(16) \qquad \tan g\,(a-b) = \frac{R^2\,(\tan g\, a - \tan g\, b)}{R^2 + \tan g\, a\ \tan g\, b}.$$

Если положимъ $b=a$, то равенство (15) превратится въ слѣдующее:

$$(17) \qquad \tan g\, 2a = \frac{2\ R^2\ \tan g\, a}{R^2 - \tan g^2 a}.$$

Если же сдѣлаемъ $b=2a$, то изъ того-же равенства (15) получимъ:

$$\tan g 3a = \frac{R^2\ (\tan g\, a + \tan g 2a)}{R^2 - \tan g\, a\ \tan g 2a},$$

откуда, подставивъ вмѣсто $\tan g 2a$ найденное выше выраженіе, найдемъ:

$$(18) \qquad \tan g 3a = \frac{3\ R^2 \tan g\, a - \tan g^3 a}{R^2 - 3\tan g^2 a}.$$

Равенства (17) и (18) служатъ для опредѣленія тангенса двойной и тройной дуги посредствомъ тангенса простой дуги. Они также могутъ служить и для опредѣленія тангенса половины и трети дуги по данному тангенсу цѣлой дуги. Это приводитъ къ разрѣшенію уравненій 2-й и 3-й степени.

Замѣчательны по своей простотѣ выраженія тангенса половины дуги посредствомъ синуса и косинуса цѣлой дуги.

Онѣ получаются изъ равенствъ (9) и (10). По раздѣленіи этихъ равенствъ одного на другое, получаемъ:

$$(19) \qquad \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} p}{R} = \sqrt{\frac{R - \cos p}{R + \cos p}}.$$

Если въ найденномъ сей-часъ выраженіи числителя и знаменателя подкоренной величины умножимъ на $R + \cos p$ и вмѣсто $R^2 - \cos^2 p$ подставимъ $\sin^2 p$, то получимъ:

$$(20) \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2} p = \frac{R \sin p}{R + \cos p}.$$

Если же числителя и знаменателя второй части послѣдняго равенства умножимъ на $R - \cos p$, то найдемъ:

$$(21) \qquad \operatorname{tang} \frac{1}{2} p = \frac{R\ (R - \cos p)}{\sin p}.$$

Равенства (19) (20) и (21) и суть тѣ выраженія для $\operatorname{tang} \frac{1}{2} p$, кои мы хотѣли показать.

§ 22. Въ заключеніе этой статьи приведемъ еще нѣсколько формулъ, кои непосредственно вытекаютъ изъ равенствъ (1) (2) (3) и (4) и кои могутъ быть полезны во многихъ случаяхъ.

Чрезъ сложеніе и вычитаніе означенныхъ формулъ получаемъ:

$$\frac{2 \sin a \cos b}{R} = \sin (a + b) + \sin (a - b)$$

$$\frac{2 \cos a \sin b}{R} = \sin (a + b) - \sin (a - b)$$

$$\frac{2 \cos a \cos b}{R} = \cos (a - b) + \cos (a + b)$$

$$\frac{2 \sin a \sin b}{R} = \cos (a - b) - \cos (a + b).$$

Положимъ $a + b = p$ и $a - b = q$, откуда $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$.

Подставивъ эти величины вмѣсто a и b въ предъидущихъ равенствахъ, получимъ:

$$\sin p + \sin q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (p+q) \cos \frac{1}{2} (p-q)}{R}$$

$$\sin p - \sin q = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\cos p + \cos q = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{R}$$

$$\cos q - \cos p = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q).}{R}$$

Эти формулы служатъ къ тому, чтобы замѣнить сумму или разпость синусовъ или косинусовъ произведенiемъ, что весьма часто бываетъ необходимо.

Чрезъ раздѣленiе ихъ одной на другую находимъ:

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{1}{R} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{1}{R} \cot \frac{1}{2}(p-q)$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{1}{R} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)$$

$$\frac{\sin p - \sin q}{\cos q + \cos p} = \frac{1}{R} \cot \frac{1}{2}(p+q)$$

$$\frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cot \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)}$$

—формулы, изъ которыхъ каждая составляетъ замѣчательную теорему.

VI

Объ отношенiяхъ между тригонометрическими линiями дугъ, составляющихъ одинакiя части окружности, но описанныхъ разными радiусами. Составленiе и употребленiе тригонометрическихъ таблицъ.

§ 23. Опишемъ изъ какой-ни-есть точки O радiусами $OA = K$, $OA_1 = K_1$, $OA_2 = K_2$ и т. д. произвольное число окружностей, и отложимъ на нихъ отъ точекъ A, A_1, A_2 и пр., находящихся на продолженіи одного и того-же радіуса, дуги $AM = a$, $A_1 M_1 = a_1$, $A_2 M_2 = a_2$ и пр., оканчивающіяся въ точкахъ M, M_1, M_2 и пр., лежащихъ также на одномъ и томъ-же радіусѣ. Всѣ эти дуги, очевидно, составляютъ одинакія части окружностей, къ которымъ онѣ относятся. Построимъ для каждой изъ нихъ всѣ тригонометрическія линіи. Въ слѣдствіе подобія треугольниковъ MPO, $M_1 P_1 O$, $M_2 P_2 O$ и пр., будемъ имѣть:

$$MP : M_1P_1 : M_2P_2 : \ldots = MO : M_1O : M_2O : \ldots$$

$$OP : O P_1 : O P_2 : \ldots = MO : M_1O : M_2O : \ldots$$

т. е.

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sin a : \sin a_1 : \sin a_2 : \ldots = R : R_1 : R_2 : \ldots \\ \cos a : \cos a_1 : \cos a_2 : \ldots = R : R_1 : R_2 : \ldots \end{array} \right.$$

Равнымъ образомъ подобные треугольники TAO, T_1A_1O, T_2A_2O и пр. доставятъ:

$$AT : A_1T_1 : A_2T_2 : \ldots = OA : OA_1 : OA_2 : \ldots$$

$$OT : O T_1 : O T_2 : \ldots = OA : OA_1 : OA_2 : \ldots$$

т. е.

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} a : \operatorname{tang} a_1 : \operatorname{tang} a_2 : \ldots = R : R_1 : R_2 : \ldots \\ \sec a : \sec a_1 : \sec a_2 : \ldots = R : R_1 : R_2 : \ldots \end{array} \right.$$

Наконецъ изъ треугольниковъ OBS, OB_1S_1, OB_2S_2 и пр., которые, очевидно, также подобны между собою, получимъ:

$$BS : B_1S_1 : B_2S_2 : \ldots = BO : B_1O : B_2O : \ldots$$

$$OS : O S_1 : O S_2 : \ldots = BO : B_1O : B_2O : \ldots$$

т. е.

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \cot a : \cot a_1 : \cot a_2 : \ldots = R : R_1 : R_2 : \ldots \\ \operatorname{cosec} a : \operatorname{cosec} a_1 : \operatorname{cosec} a_2 : \ldots = R : R_2 : R_2 : \ldots \end{array} \right.$$

Полученныя пропорціи имѣютъ мѣсто, какова бы ни была длина дугъ a, a_1, a_2 и пр., т. е. какія бы части окружностей онѣ ни составляли. Ибо гдѣ бы концы ихъ M, M_1, M_2 и пр. на данныхъ окружностяхъ ни падали, помѣщаясь впрочемъ на одномъ и томъ-же радіусѣ, соотвѣтствующія имъ тригонометрическія линіи всегда будутъ образовать такіе-же подобные треугольники, изъ какихъ выведены пропорціи (1) (2) и (3), въ чемъ легко убѣдиться построеніемъ.

Эти пропорціи, представленныя въ видѣ:

$$\frac{\sin a}{R} = \frac{\sin a_1}{R_1} = \frac{\sin a_2}{R_2} = \dots$$

$$\frac{\cos a}{R} = \frac{\cos a_1}{R_1} = \frac{\cos a_2}{R_2} = \dots$$

$$\frac{\text{tang}\, a}{R} = \frac{\text{tang}\, a_1}{R_1} = \frac{\text{tang}\, a_2}{R_2} = \dots$$

$$\frac{\sec a}{R} = \frac{\sec a_1}{R_1} = \frac{\sec a_2}{R_2} = \dots$$

$$\frac{\text{cosec}\, a}{R} = \frac{\text{cosec}\, a_1}{R_1} = \frac{\text{cosec}\, a_2}{R_2} = \dots$$

показываютъ, что отношенія тригонометрическихъ линій къ радіусу для всѣхъ дугъ, составляющихъ одинакія части окружностей, какимъ бы радіусомъ сіи послѣднія ни были описаны, одинаковы, такъ что если вычислить эти отношенія для всѣхъ возможныхъ, или по крайней мѣрѣ, какъ можно для большаго числа дугъ, принадлежащихъ одной и тойже окружности, то по нимъ можно будетъ опредѣлять длину тригонометрическихъ линій, соотвѣствующихъ дугамъ различныхъ окружностей, точно такъ-же, какъ по найденному отношенію окружности къ діаметру опредѣляется длина окружности, описанной на данномъ діаметрѣ. Ибо, если найдено:

$$\frac{\sin a}{R} = \frac{\sin a_1}{R_1} = \frac{\sin a_2}{R_2} = \dots \lambda$$

$$\frac{\cos a}{R} = \frac{\cos a_1}{R_1} = \frac{\cos a_2}{R_2} = \dots \mu$$

$$\frac{\text{tang}\, a}{R} = \frac{\text{tang}\, a_1}{R_1} = \frac{\text{tang}\, a_2}{R_2} = \dots \nu$$

гдѣ λ, μ, ν суть извѣстныя числа, то будетъ:

$\sin a = R\lambda$, $\sin a_1 = R_1\lambda$, $\sin a_2 = R_2\lambda$ и пр.

$\cos a = R\mu$, $\cos a_1 = R_1\mu$, $\cos a_2 = R_2\mu$ и пр.

$\text{tang}\, a = R\nu$, $\text{tang}\, a_1 = R_1\nu$, $\text{tang}\, a_2 = R_2\nu$ и пр.;

откуда видимъ, что стоитъ только найденныя отношенія λ, μ, ν и пр. умножить на радіусъ, чтобы получить величины синуса, косинуса, тангенса и пр. описанной этимъ радіусомъ дуги.

§ 24. Для опредѣленія помянутыхъ отношеній всего проще брать дуги на окружности, описанной радіусомъ, равнымъ единицѣ, т. е. той длинѣ, которая принята за мѣру линій, какова бы впрочемъ ни была эта мѣра, т. е. аршинъ ли, или сажень, или футъ и т. п. Искомыя отношенія будутъ ничто другое, какъ синусы, косинусы, тангенсы и пр. взятыхъ дугъ. Ибо, если положимъ, что дуга a принадлежитъ къ такой окружности, и слѣд. радіусъ R равенъ единицѣ, то будетъ:

$$\lambda = \sin a, \ \mu = \cos a, \ \nu = \operatorname{tang} a \text{ и пр.}$$

Замѣтимъ при этомъ, что длина дуги a можетъ быть выражена числомъ $\frac{n}{m} 2\pi$, гдѣ 2π есть отношеніе окружности къ радіусу, или, что то-же, длина окружности, описанной радіусомъ, равнымъ единицѣ, а дробь $\frac{n}{m}$ показываетъ, какую часть цѣлой окружности дуга a составляетъ. Такъ, если $\frac{n}{m} = {}^1/_4$, т. е. если дуга a составляетъ четверть окружности, то длина ея выразится числомъ $\frac{\pi}{2}$; если $\frac{n}{m} = {}^1/_6$, т. е. дуга a равняется одной шестой части окружности, то длина ея будетъ $\frac{\pi}{3}$ и т. д.

§ 25. Чтобы имѣть понятіе о томъ, какимъ образомъ можно опредѣлить длину тригонометрическихъ линій для какого угодно числа дугъ, взятыхъ на окружности, описанной радіусомъ равнымъ единицѣ, достаточно припомнить формулы, приведенныя въ статьяхъ IV и V. Такъ какъ эти формулы имѣютъ мѣсто для какого угодно радіуса, то, очевидно, онѣ должны имѣть мѣсто и тогда, когда радіусъ будетъ равенъ единицѣ. Въ этомъ случаѣ онѣ представляются въ простѣйшемъ видѣ. Такъ формулы (1) и (2) (§ 8) принимаютъ видъ.

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\sin^2 a+\cos^2 a=1,\ \operatorname{tang} a=\dfrac{\sin a}{\cos a},\ \cot a=\dfrac{\cos a}{\sin a},\\ \sec a=\dfrac{1}{\cos a},\ \operatorname{cosec} a=\dfrac{1}{\sin a}\end{array}\right.$$

Формулы (1), (2), (3) и (4) (§ 18) превращаются въ слѣдующія:

$$(2)\left\{\begin{array}{l}\sin(a+b)=\sin a\ \cos b+\cos a\ \sin b.\\ \sin(a-b)=\sin a\ \cos b-\cos a\ \sin b.\\ \cos(a+b)=\cos a\ \cos b-\sin a\ \sin b.\\ \cos(a-b)=\cos a\ \cos b+\sin a\ \sin b.\end{array}\right.$$

Формулы §§ 19 и 20 дѣлаются:

$$(3)\left\{\begin{array}{l}\sin 2a=2\ \sin a\ \cos a,\ \ \cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a.\\ \sin {}^1/_2\, a=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}},\ \ \cos {}^1/_2\, a=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}\ \text{и т. д.}\end{array}\right.$$

Изъ формулъ (1) усматриваемъ, что когда извѣстна будетъ величина синуса или косинуса какой-ни-есть дуги, то найдутся величины и прочихъ тригонометрическихъ линій той-же дуги; а формулы (2) и (3) показываютъ, что по извѣстной величинѣ синуса и косинуса одной какой-ни-есть дуги могутъ быть найдены синусы и косинусы какого угодно числа различныхъ дугъ. Такимъ образомъ все дѣло сводится на то, чтобы знать величину синуса или косинуса одной какой-ни-есть дуги.

Но есть нѣсколько дугъ, коихъ синусы и косинусы извѣстны, или легко могутъ быть найдены. Такъ наприм. изъ самаго понятія синуса и косинуса непосредственно слѣдуетъ, что для дуги, равной четверти окружности, первый равенъ радіусу, а второй нулю. Изъ того, что синусъ какой-нибудь дуги есть половина хорды, стягивающей дугу вдвое бо́льшую, какъ это легко видѣть изъ построенія, заключаемъ, что дуга, составляющая $1/_{12}$ часть окружности, имѣетъ синусъ равный половинѣ радіуса; ибо хорда, стягивающая дугу, равную $1/_6$ части окружности, составляя сторону правильнаго вписаннаго въ окружности шестиугольника, равна цѣлому радіусу, какъ извѣстно изъ Геометріи, и т. д.

Возьмемъ первую изъ помянутыхъ дугъ, т. е. четверть окружности. Такъ какъ длина цѣлой окружности, описанной радіусомъ равнымъ единицѣ, есть 2π, гдѣ $\pi = 3,1415926535....$, то длина взятой нами дуги будетъ $\frac{\pi}{2}$, и какъ радіусъ равенъ единицѣ, то будетъ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Отсюда по формуламъ $\sin 1/_2\, a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$, $\cos 1/_2\, a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$, подставляя въ нихъ $\frac{\pi}{2}$ вмѣсто a, найдемъ:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Изъ двухъ знаковъ + и — мы взяли первый потому, что синусы и косинусы дугъ, меньшихъ четверти окружности, положительные.

Подставивъ въ тѣхъ-же формулахъ $\frac{\pi}{4}$ вмѣсто a и замѣнивъ $\sin\frac{\pi}{4}$ и $\cos\frac{\pi}{4}$ найденными для нихъ величинами, будемъ имѣть:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}},\ \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}.$$

Продолжая такимъ образомъ далѣе, найдемъ постепенно синусы и косинусы дугъ, равныхъ $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{32}$, $\frac{\pi}{64}$ и т. д.

Дойдя до весьма малой дуги $\frac{\pi}{2^n}$, гдѣ n есть большое число, можемъ по формуламъ $\sin(a+b)=\sin a \cos b+\cos a \sin b$, $\cos(a+b)=\cos a \cos b-\sin a \sin b$, полагая $a=\frac{\pi}{2^n}$ и подставляя вмѣсто b поперемѣнно $\frac{\pi}{2^{n-1}}$, $\frac{\pi}{2^{n-2}}$ и т. д. найти величины синусовъ и косинусовъ для $\frac{3\pi}{2^n}$, $\frac{5\pi}{2^n}$, $\frac{7\pi}{2^n}$ и т. д. Такимъ образомъ опредѣлятся синусы и косинусы всѣхъ дугъ, заключающихся въ ряду $\frac{\pi}{2^n}$, $\frac{2\pi}{2^n}$, $\frac{3\pi}{2^n}$ и т. д., который, очевидно, будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше дуга $\frac{\pi}{2^n}$.

Зная величины синусовъ и косинусовъ, безъ труда найдемъ величины и прочихъ тригонометрическихъ линій по формуламъ (1).

Замѣтимъ, что величину синуса очень малой дуги можно найти и не переходя къ ней по формуламъ $\sin \frac{1}{2} a=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$, $\cos \frac{1}{2} a=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$ отъ какой ни есть дуги a, коей синусъ или косинусъ извѣстенъ, но прямо, на основанiи слѣдующихъ весьма простыхъ соображенiй:

Всякая дуга, меньшая четверти окружности, больше соотвѣтствующаго ей синуса и меньше тангенса. Ибо, если данную дугу AB продолжимъ до точки C такъ, чтобы было BC=AB, и проведемъ хорду AC, то, очевидно, эта хорда будетъ меньше дуги ABC, а слѣдовательно и половина ея, т. е. линiя AP или CP меньше дуги AB или BC, составляющей половину дуги ABC. А какъ линiя AP=PC есть синусъ дуги AB=CB, то и слѣдуетъ отсюда, что синусъ меньше дуги. Ломаная линiя ATC, въ коей AT=CT= tang AB=tang BC, очевидно, болѣе дуги ABC, и слѣдовательно также линiя AT, т. е. tang AB больше дуги AB.

Если будемъ постепенно уменьшать дугу AB, то тангенсъ и синусъ ея будутъ приближаться къ равенству между собою; ибо предполагая радіусъ OA равнымъ единицѣ, изъ формулы $\operatorname{tang} AB = \frac{\sin AB}{\cos AB}$ находимъ:

$$\frac{\operatorname{tang} AB}{\sin AB} = \frac{1}{\cos AB},$$

и такъ какъ $\cos AB$, по мѣрѣ уменьшенія дуги AB, приближается къ единицѣ, то поэтому и дробь $\frac{1}{\cos AB}$, а слѣд. и равное ей отношеніе $\frac{\operatorname{tang} AB}{\sin AB}$ должно также приближаться къ единицѣ. Тѣмъ болѣе слѣдовательно синусъ долженъ приближаться къ равенству съ дугою, которая меньше тангенса, такъ что когда послѣдняя будетъ составлять очень малую часть окружности, то число, выражающее величину ея, и можно принять за величину синуса. Такъ напр. если $AB = \frac{\pi}{64800}$, то и можно принять $\sin AB = \frac{\pi}{64800} = 0{,}000048481368\ldots$

Чтобы видѣть, какъ велика можетъ быть погрѣшность, которую дѣлаемъ, принимая дугу за ея синусъ, можемъ поступить слѣдующимъ образомъ: мы знаемъ, что $\operatorname{tang} AB = \frac{\sin AB}{\cos AB}$ больше AB; посему $\sin AB > AB \cos AB$ и тѣмъ болѣе $\sin AB > AB \cos^2 AB$, потому что $\cos AB$ есть дробь, и слѣд. $\cos AB > \cos^2 AB$. Съ другой стороны $\cos^2 AB = 1 - \sin^2 AB > 1 - AB^2$, потому что $AB > \sin AB$; посему $\sin AB > AB - AB^3$. Примѣняя это къ приведенному выше примѣру, находимъ, что настоящая величина синуса дуги $\frac{\pi}{64800}$ разнится отъ самой дуги меньше, нежели на $\{0{,}000048481368\}^3$, или взявъ вмѣсто $0{,}000048481368$ число $0{,}00005$, — меньше нежели на $0{,}000000000000125$ [1].

[1] Есть формулы, посредствомъ коихъ величина синуса и косинуса какой угодно дуги можетъ быть вычислена гораздо легче, нежели какъ показано въ § 25; эти формулы суть слѣдующія:

§ 26. Сказаннаго совершенно достаточно для того, чтобы понять, какимъ образомъ могли быть составлены тригонометрическія таблицы, въ которыхъ величина тригонометрическихъ линій дана для весьма большаго числа различныхъ дугъ.

Обыкновенно въ этихъ таблицахъ приводятся не самыя числа, выражающія длину тригонометрическихъ линій, и называемыя *натуральными синусами*, *косинусами* и проч., но ихъ логариѳмы, потому что чрезъ это облегчаются вычисленія, и при томъ всякій разъ, когда величина какой ни есть тригонометрической линіи меньше единицы, и слѣд.

$$(\alpha)\ldots\begin{cases}\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \dfrac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\\[2mm] \sin x = x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.,}\end{cases}$$

гдѣ x можетъ означать какую угодно дугу, описанную радіусомъ, равнымъ единицѣ.

Для доказательства ихъ возьмемъ выведенныя въ примѣчаніи къ § 19 формулы (β), положивъ въ нихъ $R = 1$,

$$\cos na = \cos^n a - \frac{n.n\text{-}1}{1.2}\cos^{n-2} a \sin^2 a + \frac{n.n\text{-}1.\,n\text{-}2.\,n\text{-}3}{1.2.3.4}\cos^{n-4} a \sin^4 a - \text{etc.}$$

$$\sin na = n \cos^{n-1} a \sin a - \frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2}{1.2.3}\cos^{n-3} a \sin^3 a + \text{etc.}$$

Такъ какъ $\sin a = \cos a \operatorname{tang} a$, то можно представить эти формулы въ слѣдующемъ видѣ:

$$\cos na = \cos^n a \left\{1 - \frac{n.\,n\text{-}1}{1.2}\operatorname{tang}^2 a + \frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2.\,n\text{-}3}{1.2.3.4}\operatorname{tang}^4 a - \text{etc.}\right\}$$

$$\sin na = \cos^n a \left\{n \operatorname{tang} a - \frac{n.\,n\text{-}1.\,n\text{-}2}{1.2.3}\operatorname{tang}^3 a + \text{etc.}\right\}$$

Положивъ $na = x$, откуда $n = \frac{x}{a}$, будемъ имѣть:

$$(\beta)\ldots\begin{cases}\cos x = \cos^{\frac{x}{a}} a \left\{1 - \dfrac{x\,(x\text{-}a)}{1.2}\,\dfrac{\operatorname{tang}^2 a}{a^2} + \dfrac{x(x\text{-}a)\,(x\text{-}2a)\,(x\text{-}3a)}{1.2.3.4}\,\dfrac{\operatorname{tang}^4 a}{a^4} - \text{etc.}\right\}\\[3mm] \sin x = \cos^{\frac{x}{a}} a \left\{x\,\dfrac{\operatorname{tang} a}{a} - \dfrac{x\,(x\text{-}a)\,(x\text{-}2a)}{1.2.3}\,\dfrac{\operatorname{tang}^3 a}{a^3} + \text{etc.}\right\}\end{cases}$$

настоящій логариѳмъ долженъ быть отрицательный, этотъ логариѳмъ увеличивается 10-ю единицами. Такъ для $\sin \frac{\pi}{6}$, котораго настоящая величина есть $1/2$, и слѣд. настоящій логариѳмъ былъ бы $-0{,}301300$, мы найдемъ въ таблицахъ число $9{,}698700$. Въ концѣ вычисленія, въ которомъ входятъ логариѳмы тригонометрическихъ линій, прибавочные десятки отбрасываются, при чемъ никогда нельзя опасаться погрѣшности, потому что лишній десятокъ въ логариѳмѣ числа не можетъ остаться незамѣченнымъ.

Во всѣхъ таблицахъ помѣщаются только логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ; о секансахъ же

Дуга a можетъ быть какая угодно, и хотя она соединена съ дугою x равенствомъ $na = x$, но какъ и число n есть также произвольное, то при одной и той-же величинѣ дуги x можно измѣнять величину дуги a произвольнымъ образомъ. Положимъ $a = o$; легко убѣдиться, что при этомъ предположеніи отношеніе $\frac{\text{tang}\, a}{a}$ равно единицѣ. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли (§ 25), что тангенсъ дуги, меньшей четверти окружности, больше самой дуги, а синусъ меньше, и слѣдовательно $\frac{\text{tang}\, a}{a} > 1$ и $\frac{\text{tang}\, a}{a} < \frac{\text{tang}\, a}{\sin a} = \frac{1}{\cos a}$, такъ что величина отношенія $\frac{\text{tang}\, a}{a}$ заключается между 1 и $\frac{1}{\cos a}$. Но когда $a = o$, то $\cos a = 1$, и $\frac{1}{\cos a} = 1$, а слѣдовательно и отношеніе $\frac{\text{tang}\, a}{a}$ по необходимости должно быть также равно единицѣ. Множитель $\cos^{\frac{x}{a}} a$ равенъ также единицѣ, хотя показатель степени $\frac{x}{a}$ и обращается въ безконечность. Чтобы увѣриться въ этомъ, замѣтимъ, что по § 11, будетъ: $\cos a = (1 + \text{tang}^2 a)^{-1/2}$ откуда
$$\cos^{\frac{x}{a}} a = (1 + \text{tang}^2 a)^{-\frac{x}{2a}} = 1 - \frac{x}{2} a \frac{\text{tang}^2 a}{a^2} + \frac{x\,(x+2a)}{2.4} a^2 \frac{\text{tang}^4 a}{a^4} - \text{etc.}$$
Если $a = o$, то каждый изъ членовъ $\frac{x}{2} a \frac{\text{tang}^2 a}{a^2}$, $\frac{x\,(x+2a)}{2.4} a^2 \frac{\text{tang}^4 a}{a^4}$ и проч., очевидно, дѣлается равнымъ нулю, и слѣд. $\cos^{\frac{x}{a}} a = 1$.

Такимъ образомъ формулы (β), при $a = o$, превращаются въ формулы (α), которыя мы и предполагали вывесть.

и косекансахъ вовсе не упоминается частію потому, что логариѳмы ихъ весьма легко получаются изъ логариѳмовъ синусовъ и косинусовъ, частію же потому, что эти линіи весьма рѣдко употребляются.

Величина дугъ означается не числами, выражающими длину ихъ, каковы суть: $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ и т. д., но числомъ особенныхъ частей окружности, называемыхъ *градусами, минутами* и *секундами*.

Градусъ есть 360ая часть окружности, *минута* 60ая часть градуса и *секунда* 60ая часть минуты. Секунду дѣлятъ еще на 60 частей, называемыхъ *терціями*, но сіи послѣднія рѣдко употребляются при вычисленіяхъ. Части дугъ, меньшія секунды, обыкновенно выражаются десятичными дробями оной, а не терціями.

Примѣчаніе. Французскіе ученые предлагали дѣлить окружность на 400 градусовъ, градусъ на 100 минутъ и минуту на 100 секундъ, но это дѣленіе не вошло въ употребленіе, хотя и представляетъ многія выгоды.

Числа градусовъ, минутъ и секундъ различаются знаками: $^\circ$, $'$, $''$, кои ставятся надъ ними съ правой стороны. Такъ выраженіе: $15^\circ\,32'\,44'',5$ означаетъ дугу въ 15 градусовъ, 32 минуты и 44,5 секунды.

Впрочемъ нѣтъ ничего легче, какъ по извѣстному числу градусовъ, минутъ и секундъ, заключающихся въ дугѣ, найти длину ея, и обратно. Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ приведенную выше дугу въ $15^\circ\,32'\,44'',5$. Приведя градусы и минуты въ секунды, найдемъ, что она содержитъ въ себѣ 55964,5 секунды, а какъ въ цѣлой окружности заключается 1296000 секундъ, то дробь $\frac{559645}{12960000}$ будетъ выражать отношеніе нашей дуги къ окружности. Помноживъ это отношеніе на число 2π, мы получимъ для искомой длины дуги слѣдующее выраженіе:

$\frac{559645}{12960000} 2\pi = 0,27132$. На оборотъ, если дано число $\frac{n}{m} 2\pi$, выражающее длину дуги, то раздѣливъ это число на 2π, получимъ дробь $\frac{n}{m}$, показывающую отношенiе ея къ окружности. Помноживъ эту дробь на 360 и исключивъ цѣлое число, найдемъ число заключающихся въ ней градусовъ; по превращенiи оставшейся дроби въ минуты, и по исключенiи цѣлаго числа, получимъ число минутъ и т. д. Такъ напр., если $\frac{n}{m} = \frac{3}{17}$, то выражаемая числомъ $\frac{3}{17} 2\pi$ дуга будетъ заключать въ себѣ $63^0\ 31'\ 45''$, 82.

Число дугъ, для коихъ найдены логариѳмы синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ, въ различныхъ таблицахъ различно; въ однѣхъ они даны для всѣхъ дугъ, увеличивающихся отъ 0^0 до 45^0 одною минутою; въ другихъ для всѣхъ дугъ, увеличивающихся отъ 0^0 до 45^0 десятью секундами, и есть таблицы, идущiя только до 5^0, гдѣ дуги увеличиваются одною секундою.

Далѣе 45^0 никакiя таблицы не простираются, потому что синусы и тангенсы дугъ, большихъ 45^0, равны косинусамъ и котангенсамъ дугъ, меньшихъ 45^0, которыя служатъ имъ дополненiями до четверти окружности, а косинусы и котангенсы первыхъ дугъ равны синусамъ и тангенсамъ послѣднихъ. Такъ если бы дана была дуга равная 60^0, то имѣли бы $\sin 60 = \cos (90^0 - 60^0) = \cos 30^0$. Въ таблицахъ для каждой дуги показано и ея дополненiе.

Противъ логариѳмовъ синусовъ, тангенсовъ и косинусовъ во всѣхъ таблицахъ помѣщаются числа, показывающiя разности между каждыми двумя послѣдовательными логариѳмами (разности для котангенсовъ одинаковы съ разностями для тангенсовъ). Это дѣлается для того, чтобы облегчить прiисканiе логариѳмовъ синусовъ, косинусовъ и пр. для данныхъ дугъ, и на оборотъ дугъ, соотвѣтствующихъ даннымъ логариѳмамъ синусовъ, косинусовъ и пр. въ тѣхъ случаяхъ, когда данныя дуги или данные логариѳмы не находятся въ таблицахъ. Такъ напр. положимъ, что требуется найти логариѳмъ синуса дуги въ $6^0\ 32'\ 37''$ по таблицамъ, въ коихъ дуги идутъ чрезъ одну минуту, и логариѳмы отысканы до пяти десятичныхъ знаковъ. Ясно, что такой дуги нѣтъ въ таблицахъ; ближайшія къ ней изъ находящихся въ таблицахъ дуги суть: $6^0\ 32$ и $6^0\ 33'$. Для логариѳма синуса первой изъ нихъ находимъ: 9,05607, второй—9,05717. Такъ какъ величина данной дуги заключается между сими двумя дугами, то, очевидно, и логариѳмъ соотвѣтствующаго ей синуса долженъ заключаться между двумя показанными логариѳмами. Чтобы найти его, предполагаютъ, что разности логариѳмовъ пропорціональны разностямъ самыхъ дугъ, и хотя такое предположеніе въ сущности невѣрно, но доставляетъ довольно приближенные результаты. На основаніи этого предположенія, означивъ чрезъ x разность искомаго логариѳма съ логариѳмомъ дуги $6^0\ 32'$, будемъ имѣть слѣдующую пропорцію: $x : 110 = 37 : 60$, гдѣ 110 есть данная въ таблицахъ разность между логариѳмами синусовъ дугъ $6^0\ 33'$ и $6^0\ 32'$, а число 60 есть разность самыхъ дугъ. Отсюда получимъ: $x = \frac{11.37}{6} = 67,8$. Приложивъ это число къ логарѳому 9,05607, наблюдая притомъ, что такъ какъ разность 110 означаетъ собственно стотысячныя доли, то и число 67, 8 должно означать такія-же доли, и получимъ: $\log. \sin 6^0\ 32'\ 37'' = 9,056748$, или ограничиваясь только пятью десятичными знаками, и слѣд. отбросивъ послѣднюю цыфру 8, и такъ какъ она больше 5, то увеличивъ единицею предпослѣднiй знакъ,

$$\log. \sin 6^0\ 32\ 37'' = 9,05675.$$

Положимъ теперь, что данъ логариѳмъ синуса неизвѣстной дуги x, именно: $\log \sin x = 9{,}26097$, и нужно найти величину x. Изъ находящихся въ таблицахъ логариѳмовъ синусовъ ближе всего подходитъ къ данному логариѳмъ синуса дуги въ $10^\circ\,30'$, который есть 9,26063. Разность его съ слѣдующимъ, показанная въ таблицахъ, есть 68, а съ даннымъ 34. И такъ, если означимъ чрезъ z число секундъ, которыя должно придать къ дугѣ $10^\circ\,30'$, чтобы получить данную, то для опредѣленія этого числа будемъ имѣть слѣдующую пропорцію: $z : 60 = 34 : 68$, откуда $z = 60.\frac{34}{68} = 30$, и искомая дуга $x = 10^\circ\,30'\,30''$.

§ 27. Для большаго ознакомленія съ употребленіемъ тригонометрическихъ таблицъ предлагаемъ для рѣшенія слѣдующіе примѣры:

1. Найти логариѳмъ синуса дуги, равной $20^\circ\,35'\,15''$.
2. Найти логариѳмъ косинуса дуги, равной $83^\circ\,27'\,22''$.
3. Найти логариѳмъ тангенса дуги въ $8^\circ\,13'\,25''$.
4. Найти дугу, коей логариѳмъ синуса $= 9{,}80674$.
5. Найти дугу, коей логариѳмъ косинуса $= 9{,}98336$.
6. Найти дугу, коей логариѳмъ тангенса $= 9{,}98215$.

Для повѣрки рѣшеній присовокупляемъ и отвѣты на всѣ означенные вопросы, именно:

$$\begin{array}{l} \log.\sin 20^\circ 35' 15'' = 9{,}54610 \\ \log.\cos 83^\circ 27' 22'' = 9{,}05677 \\ \log.\operatorname{tang} 8^\circ 13' 25'' = 9{,}15993 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arc.}\log\sin(9{,}80674) = 39^\circ 51' 12''. \\ \operatorname{arc.}\log\cos(9{,}98336) = 15^\circ 45' 30''. \\ \operatorname{arc.}\log\operatorname{tang}(9{,}98215) = 43^\circ 49' 22''. \end{array} \right.$$