

У С Т А В Ъ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ПРИ ЦАРСТВУЮЩЕМЪ ХАРЬ- КОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

Составленъ министромъ народнаго просвѣщенія графомъ Давыдовымъ. Издана
въ Харьковѣ 1873 года.

§ 1. Математическое общество при харьковскомъ универси-
тетѣ имѣетъ целью содѣйствовать **II.** работѣ какъ чисто-науч-
ной, такъ и педагогическихъ вопросовъ изъ области матема-
тической науки.

§ 2. Членами математическаго общества являться право счи-
таться, безъ избранія,凡лически и бывшіе профессеры и дру-
гіе преподаватели чистой и прикладной математики въ харь-
ковскомъ университетѣ и въ другихъ могущихъ открыться въ
Харьковѣ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ.凡лически и бывшіе
преподаватели математическихъ наукъ въ гимназіяхъ, реаль-
ныхъ училищахъ и другихъ учебныхъ заведеніяхъ равной сто-
янки въ харьковской учебной округѣ, а также лица, не
преподававшіе изъ этихъ заведеній, но вслѣдствіе занятій
своихъ или другой отрасли математической науки, могущіе
быть избраны въ члены математическаго общества, причис-
леніе къ которому должно производиться тайнымъ большинствомъ голосовъ.

У С Т А В Ъ

МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА ПРИ ИМПЕРАТОРСКОМЪ ХАРЬКОВСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

Утвержденъ министромъ народнаго просвѣщенія графомъ Дмитріемъ Толстымъ
28 апрѣля 1879 года.

§ 1. Математическое общество при харьковскомъ университетѣ имѣетъ цѣлю содѣйствовать разработкѣ какъ чисто-научныхъ, такъ и педагогическихъ вопросовъ изъ области математическихъ наукъ.

§ 2. Членами математическаго общества имѣютъ право считаться, безъ избранія, наличные и бывшіе профессора и другіе преподаватели чистой и прикладной математики въ харьковскомъ университетѣ и въ другихъ могущихъ открыться въ Харьковѣ высшихъ учебныхъ заведеніяхъ. Наличные и бывшіе преподаватели математическихъ наукъ въ гимназіяхъ, реальныхъ училищахъ и другихъ учебныхъ заведеніяхъ равной степени въ харьковскомъ учебномъ округѣ, а также лица, не принадлежащія къ этимъ категоріямъ, но спеціально занимающіяся тою или другою отраслью математическихъ наукъ, могутъ быть избираемы въ члены математическаго общества, причемъ избраніе это должно производиться закрытою подачею голосовъ.

§ 3. Студенты высшихъ курсовъ отдѣленій математическихъ и физико-химическихъ наукъ физико - математического факультета харьковского университета и другихъ высшихъ учебныхъ заведеній, а также постороннія лица, интересующіяся предметами занятій математического общества, допускаются, съ разрѣшеніемъ предсѣдателя общества, къ участию въ его бесѣдахъ или въ качествѣ референтовъ, или въ качествѣ слушателей.

§ 4. Члены математического общества изъ наличныхъ и бывшихъ профессоровъ и преподавателей харьковского университета и другихъ высшихъ учебныхъ заведеній избираютъ изъ среды себя ежегодно предсѣдателя, двухъ его товарищей и секретаря, составляющихъ изъ себя распорядительный комитетъ, въ который обращаются всѣ письменныя сообщенія, адресуемыя въ математическое общество.

§ 5. Засѣданія общества производятся періодически, въ ранѣе назначенные сроки. Предсѣдатель или, за его отсутствіемъ, одинъ изъ его товарищей открываетъ и закрываетъ засѣданія и наблюдаетъ за исполненіемъ устава. Протоколы этихъ засѣданій ведутся секретаремъ.

§ 6. Въ каждомъ засѣданіи общества: а) слушается и подписывается протоколъ предыдущаго засѣданія; б) слушаются и обсуждаются сообщенія членовъ о собственныхъ научныхъ изслѣдованіяхъ и выводахъ въ области высшей и элементарной математики, а также сообщенія объ усовершенствованіяхъ или даже видоизмѣненіяхъ приѣмовъ полученія научныхъ выводовъ; в) слушаются сообщенія изъ области математической литературы какъ научной, такъ и педагогической; д) обсуждаются вопросы, относящіеся къ преподаванію математическихъ наукъ; е) опредѣляются время и предметы занятій слѣдующаго засѣданія.

§ 7. Члены общества, намѣревающіеся сдѣлать сообщеніе, но не заявившіе о томъ въ предыдущемъ засѣданіи общества, извѣщаютъ комитетъ, который и вноситъ ихъ заявленіе въ очередь предметовъ занятій слѣдующаго засѣданія.

§ 8. Постороннія лица, желающія сдѣлать сообщеніе обществу, представляютъ эти сообщенія въ рукописи, или въ напечатанномъ экземплярѣ, въ распорядительный комитетъ, который, ознакомившись съ этимъ сообщеніемъ, большинствомъ голосовъ своихъ членовъ рѣшаетъ о принятіи или непринятіи сообщенія въ докладу обществу; принятое комитетомъ сообщеніе посторонняго лица докладывается или самимъ авторомъ, или, въ случаѣ его отсутствія, однимъ изъ членовъ комитета общества.

§ 9. Опредѣленныхъ денежныхъ взносовъ отъ членовъ общества не требуется. Матеріальныя средства общества могутъ состояться изъ добровольныхъ пожертвованій какъ самихъ членовъ, такъ и постороннихъ лицъ. На эти средства, въ случаѣ ихъ образованія, по возможности, издаются труды общества. Протоколы засѣданій общества печатаются въ Запискахъ харьковскаго университета.

§ 10. Общество можетъ просить объ измѣненіи своего устава, сообразно съ указаніемъ опыта, о чемъ и должно представить черезъ попечителя харьковскаго учебнаго округа на утвержденіе министра народнаго просвѣщенія.

§ 1. Ввиду общности, присущей всем системам, координат, в которых они применяются, и ввиду того, что каждая из них имеет свои особенности, в которых она отличается от других, в настоящей работе мы рассмотрим только те системы, которые применяются в настоящее время в астрономии.

§ 2. Координаты, применяемые в астрономии, можно разделить на две группы: географические и астрономические. Географические координаты применяются для обозначения местоположения точек на поверхности Земли, а астрономические — для обозначения местоположения звезд и других небесных тел. Географические координаты состоят из широты и долготы, а астрономические — из склонения и прямого восхождения. Широта и долгота измеряются в градусах, а склонение и прямое восхождение — в градусах и минутах.

§ 3. Географические координаты применяются для обозначения местоположения точек на поверхности Земли. Широта — это угол, который составляет нормаль к горизонту с осью вращения Земли. Долгота — это угол, который составляет меридиан с осью вращения Земли. Географические координаты применяются для обозначения местоположения городов, стран, морей и других географических объектов.

§ 4. Астрономические координаты применяются для обозначения местоположения звезд и других небесных тел. Склонение — это угол, который составляет нормаль к эклиптике с осью вращения Земли. Прямое восхождение — это угол, который составляет меридиан с осью вращения Земли. Астрономические координаты применяются для обозначения местоположения звезд, планет, комет и других небесных тел.

§ 5. В астрономии применяются также и другие системы координат, такие как эклиптические координаты, галактические координаты и др. Однако в настоящей работе мы рассмотрим только географические и астрономические координаты, так как они являются основными для астрономии.

КУРСЪ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ.

ОТДѢЛЪ ПЕРВЫЙ.

ГЛАВА I.

ОБЩЕЕ ПОНЯТІЕ О РАЗЛИЧНЫХЪ ВИДАХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ
УРАВНЕНІЙ И ИХЪ ПРОИСХОЖДЕНІИ.

1. Всякое уравненіе, выражающее отношеніе между переменными независимыми, нѣкоторыми ихъ функціями и производными этихъ функцій, носитъ названіе *дифференціального уравненія*. Въ частныхъ случаяхъ независимыя переменныя и ихъ функціи могутъ и не входить непосредственно въ дифференціальное уравненіе, но производныя этихъ функцій составляютъ необходимый элементъ для образованія такихъ уравненій. Такъ, напримеръ, если имѣемъ независимое переменное x и его функцію y , то формула

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\frac{dy}{dx} + 7 = 0$$

будетъ представлять дифференціальное уравненіе, хотя x и y въ него непосредственно не входятъ.

2. Смотря по числу независимыхъ переменныхъ, отъ которыхъ зависятъ функціи, входящія въ составъ дифференціальныхъ уравненій, эти послѣднія раздѣляются на уравненія, за-

висяція отъ одного независимаго перемѣннаго, и на такія, которыя зависятъ отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ. Такъ, формула

$$2y \frac{d^2y}{dx^2} - x^2 + 1 = 0,$$

гдѣ x перемѣнное независимое, а y его функція, представляетъ дифференціальное уравненіе, зависящее отъ одного независимаго перемѣннаго; напротивъ, формула

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3y \frac{\partial z}{\partial y} + 2x^2 + yz - 1 = 0,$$

гдѣ x, y независимыя перемѣнныя, а z ихъ функція, представляетъ дифференціальное уравненіе, зависящее отъ двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Общая форма дифференціальныхъ уравненій, зависящихъ отъ одного независимаго перемѣннаго, такова:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

гдѣ f означаетъ ту или другую совокупность аналитическихъ дѣйствій. Уравненія этого вида называются часто *обыкновенными дифференціальными уравненіями*.

Дифференціальныя уравненія, зависяція отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, бываютъ двухъ родовъ. Съ одной стороны, они могутъ представлять отношенія между независимыми перемѣнными, функціями ихъ и частными производными тѣхъ или другихъ порядковъ этихъ функцій: такія уравненія называются *уравненіями въ частныхъ производныхъ*. Съ другой стороны, дифференціальныя уравненія, зависяція отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, представляются въ видѣ отношеній между перемѣнными независимыми, функціями ихъ и полными дифференціалами этихъ функцій: такія уравненія именуются *уравненіями въ полныхъ дифференціалахъ*.

3. Дифференціальныя уравненія, зависящія какъ отъ одного, такъ и отъ нѣсколькихъ переменныхъ, распредѣляются по *порядкамъ и степенямъ*. Порядокъ дифференціального уравненія опредѣляется порядкомъ наивысшей изъ входящихъ въ него производныхъ зависимыхъ переменныхъ, а степень — наивысшею степенью этой производной. Въ виду этого, уравненіе

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a \frac{dy}{dx} - b = 0$$

представляетъ обыкновенное дифференціальное уравненіе перваго порядка, но второй степени, а уравненіе

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy \frac{\partial z}{\partial y} - x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + by = 0$$

представляетъ уравненіе въ частныхъ производныхъ втораго порядка, но первой степени.

О происхожденіи обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій.

4. Рѣшить дифференціальное уравненіе значитъ найти для функцій, въ него входящихъ, такія выраженія, которыя, будучи подставлены въ это уравненіе, обратили бы его въ тождество. Такъ, если имѣемъ уравненіе

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

и найдемъ какимъ бы то ни было образомъ, что значеніе

$$y = \Phi(x)$$

тождественно ему удовлетворяетъ, то $y = \Phi(x)$ будетъ рѣшеніемъ этого дифференціального уравненія.

Нужно замѣтить, что одна и та-же функція можетъ быть рѣшеніемъ множества дифференціальныхъ уравненій. Въ самомъ дѣлѣ, пусть имѣемъ

$$y = F(x).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = F'(x).$$

Сочетая эти два равенства различнымъ образомъ между собою, будемъ получать различныя дифференціальныя уравненія перваго порядка, которыя всё обратились бы въ тождества, еслибы въ нихъ y замѣнили чрезъ $F(x)$. Составивъ еще выраженіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F''(x)$$

и сочетая его съ выраженіями y и $\frac{dy}{dx}$, получали бы различныя дифференціальныя уравненія втораго порядка, которыя опять удовлетворялись бы тождественно значеніемъ $y = F(x)$. Точно такъ-же и далѣе.

Пусть, напримѣръ, имѣемъ

$$y = e^{2x}; \text{ въ такомъ случаѣ } \frac{dy}{dx} = 2e^{2x}$$

и сочетая эти равенства между собою, находимъ послѣдовательно:

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} + y - 3e^{2x} = 0,$$

$$y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5ye^{2x} = 0, \text{ и т. д.}$$

Если въ этихъ уравненіяхъ разсматривать y какъ неизвѣстное, то всё они будутъ имѣть общее рѣшеніе $y = e^{2x}$; но каждое изъ нихъ, кромѣ этого, можетъ имѣть, и дѣйствительно имѣть, множество другихъ рѣшеній.

5. Изъ предыдущаго видно, что вопросъ — по данной функціи найти дифференціальное уравненіе того или другаго порядка, которому она удовлетворяла бы, имѣть, вообще, неопредѣленный характеръ и допускаетъ множество рѣшеній. Неопредѣленность эта исчезаетъ только въ томъ случаѣ, когда вве-

демъ достаточное число новыхъ условий, опредѣляющихъ какое именно изъ рѣшеній имѣется въ виду. Такъ, на примѣръ, можно искать дифференціальное уравненіе, которому данная функція удовлетворяла бы тождественно и которое, въ то-же время, не содержало бы тѣхъ или другихъ количествъ — радикаловъ, экспонентныхъ функцій и т. п., входящихъ въ данную функцію. Если нужно исключить одно количество, то придемъ къ опредѣленному дифференціальному уравненію перваго порядка, если два, то получимъ опредѣленное дифференціальное уравненіе втораго порядка, и т. д.

Пусть, на примѣръ,

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (1)$$

и требуется составить дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяла бы эта функція, но которое не содержало бы радикала $\sqrt{1 - x^2}$. Продифференцировавъ данную функцію, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (2)$$

а исключивъ между уравненіями (1) и (2) радикалъ $\sqrt{1 - x^2}$, найдемъ:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1 - x^2},$$

т. е. совершенно опредѣленное дифференціальное уравненіе перваго порядка.

Еслибы требовалось исключить не одно, а два различныхъ между собою количества, то пришли бы уже къ дифференціальному уравненію не перваго, а втораго порядка. Пусть, на примѣръ, требуется составить дифференціальное уравненіе, которому удовлетворяла бы функція

$$y = e^x - \sqrt{x} \quad (3)$$

и которое не содержало бы ни e^x , ни $\sqrt{x}$. Составляемъ выраженія:

$$\frac{dy}{dx} = e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x + \frac{1}{x\sqrt{x}}. \quad (5)$$

Исключение между уравнениями (3), (4) и (5) количествъ e^x и $\sqrt{x}$ доставитъ теперь уравненіе

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y^2 + \frac{2x-1}{2\left(\frac{dy}{dx} - y\right)} + 2 \frac{\left(\frac{dy}{dx} - y\right)}{2x^2 - x}.$$

которое представляетъ совершенно опредѣленное дифференціальное уравненіе втораго порядка.

6. Изъ предыдущаго видно, что одна и та-же функція можетъ удовлетворять не одному, а множеству различныхъ дифференціальныхъ уравненій. Теперь постараемся доказать, что каждое дифференціальное уравненіе имѣетъ множество рѣшеній. Имѣя это въ виду, мы въ то-же время изслѣдуемъ и самый способъ происхожденія дифференціальныхъ уравненій.

Пусть имѣемъ какое бы то ни было уравненіе вида

$$F(x, y, c) = 0, \quad (1)$$

гдѣ c постоянное количество. Уравненіе это опредѣляетъ y какъ функцію x и c , такъ что, сообщая c различныя численныя значенія, мы будемъ получать для y различныя между собою функціи независимаго переменнаго x . Всѣ эти различныя функціональныя значенія y будутъ опредѣляться уравненіемъ (1), когда постоянное количество c примемъ въ немъ за произвольную величину.

Каково бы ни было значеніе постояннаго c , дифференцирование формулы (1) доставляетъ:

$$\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2)$$

а исключеніе c между уравненіями (1) и (2) приводитъ къ

уравненію, зависящому отъ x , y и $\frac{dy}{dx}$, т. е. къ дифференціальному уравненію перваго порядка, вовсе не содержащому c . Уравненіе это, будучи неминувемымъ слѣдствіемъ уравненія (1), непремѣнно будетъ тождественно удовлетворяться всѣми значеніями y , опредѣляемыми этимъ послѣднимъ.

Нужно замѣтить при этомъ, что можно различными путями переходить отъ уравненія (1) къ дифференціальному уравненію перваго порядка, не содержащому c и удовлетворяемому тождественно всѣми значеніями y изъ уравненія (1). Можно, напри- мѣръ, рѣшить уравненіе (1) относительно c и привести его та- кимъ образомъ къ формѣ

$$\Phi(x, y) = c;$$

послѣ этого дифференцированіе прямо доставитъ дифференціаль- ное уравненіе

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

не содержащее уже постояннаго c . Можно, точно такъ-же, уравне- нію (1) дать предварительно какую-либо иную форму и потомъ уже продифференцировать его и исключить c . Это указываетъ на большое разнообразіе приемовъ вычисленія, служащихъ для вывода дифференціальнаго уравненія, соотвѣтствующаго данному уравненію (1); но можно доказать, что это разнообразіе прие- мовъ не имѣетъ никакого вліянія на конечный результатъ, т. е. что во всѣхъ случаяхъ дифференціальное уравненіе получается одно и то-же.

Въ самомъ дѣлѣ, когда имѣемъ уравненіе

$$F(x, y, c) = 0,$$

гдѣ c неопредѣленная величина, тогда можно по произволу вы- брать значеніе x и значеніе y ; но послѣ этого изъ уравненія (1) для c получимъ совершенно опредѣленное значеніе, соот- вѣтствующее выбраннымъ значеніямъ x , y . Съ другой стороны, y

представляется, вообще, въ видѣ опредѣленной функціи x и c ; поэтому, въ настоящемъ случаѣ, когда c опредѣлилось, y выразится опредѣленнымъ образомъ въ x ; слѣдовательно и значеніе производной $\frac{dy}{dx}$ также будетъ совершенно опредѣленное. Зна-

чить, $\frac{dy}{dx}$ получаетъ совершенно опредѣленное значеніе, когда x и y въ уравненіи (1) сообщимъ опредѣленные значенія; а если такъ, то $\frac{dy}{dx}$ должно представлять опредѣленную функцію двухъ этихъ количествъ и между x , y , $\frac{dy}{dx}$ должно существовать одно уравненіе, опредѣляющее эту функцію. Уравненіе это во всякомъ случаѣ должно оставаться однимъ и тѣмъ-же и не можетъ измѣняться отъ измѣненія пріемовъ его разысканія.

И такъ, каждому уравненію вида

$$F(x, y, c) = 0, \quad (1)$$

гдѣ c произвольное постоянное количество, можетъ соответствовать только одно дифференціальное уравненіе

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

удовлетворяемое всѣми значеніями y изъ уравненія (1). Это дифференціальное уравненіе можемъ разсматривать какъ выраженіе условія, которому подчинены всѣ функціональныя значенія y , опредѣляемыя уравненіемъ (1).

Уравненіе (1), по отношенію къ выводимому изъ него дифференціальному уравненію перваго порядка, носитъ названіе *полнаго первообразнаго уравненія* или *полнаго интеграла*.

7. Когда уравненіе, зависящее отъ двухъ переменныхъ x , y , содержитъ нѣсколько произвольныхъ постоянныхъ, тогда исключеніе ихъ приводитъ точно такъ-же къ опредѣленному дифференціальному уравненію порядка равнаго числу произвольныхъ постоянныхъ количествъ, входящихъ въ данное уравненіе.

Для большей определенности суждений возьмемъ уравненіе

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0, \quad (1)$$

содержащее три постоянныхъ. Дифференцированіе этого уравненія доставляетъ послѣдовательно

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \frac{dy}{dx} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 \\ + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{dx} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d^3 y}{dx^3} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь имѣемъ четыре уравненія, существующихъ совместно, а потому и можемъ исключить между ними всѣ три количества c_1, c_2, c_3 ; въ результатѣ получится одно уравненіе между $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ и $\frac{d^3 y}{dx^3}$, т. е. дифференціальное уравненіе третьяго порядка. При этомъ, однако, самый способъ исключенія произвольныхъ постоянныхъ можетъ разнообразиться до-нельзя, потому что уравненію (1) и каждому изъ послѣдующихъ уравненій до дифференцированія можемъ давать ту или иную форму; слѣдовательно нужно еще показать, что всѣ способы исключенія всегда приводятъ къ одному и тому-же конечному дифференціальному уравненію.

Такъ-какъ уравненія (1), (2) и (3), въ какой бы формѣ они ни были представлены, всегда содержатъ $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ и постоянныя c_1, c_2, c_3 , то можемъ по произволу выбрать значенія $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$; но послѣ этого c_1, c_2, c_3 тотчасъ же опредѣлятся. Въ такомъ случаѣ изъ уравненія (1) для y получится совершенно опредѣленное выраженіе въ x , а слѣдовательно и $\frac{d^3 y}{dx^3}$

также совершенно опредѣлится. Значитъ, $\frac{d^3y}{dx^3}$ вполне опредѣляется, когда x , y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ сообщаются опредѣленные значенія, т. е. $\frac{d^3y}{dx^3}$ представляет опредѣленную функцію x , y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; но если такъ, то отношеніе, связывающее $\frac{d^3y}{dx^3}$ съ x , y , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, не должно заключать въ себѣ ничего произвольнаго и должно оставаться однимъ и тѣмъ-же, какимъ бы путемъ ни пришли къ нему.

И такъ, видимъ, что уравненіе

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0,$$

содержащее три постоянныхъ произвольныхъ количества, приводитъ всегда къ опредѣленному дифференціальному уравненію третьяго порядка, удовлетворяемому всѣми значеніями y , опредѣляемыми даннымъ уравненіемъ.

Къ подобному же выводу мы пришли бы и въ случаѣ, еслибы взяли уравненіе, содержащее вообще n постоянныхъ количествъ.

8. Для поясненія высказаннаго въ двухъ послѣднихъ нумерахъ возьмемъ примѣры.

1) Пусть дано уравненіе

$$y = cx + \frac{m}{c}, \quad (1)$$

гдѣ c постоянное произвольное; отсюда

$$\frac{dy}{dx} = c. \quad (2)$$

Для исключенія c въ уравненіе (1) подставляемъ вмѣсто c его выраженіе изъ уравненія (2); получаемъ:

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{m}{\frac{dy}{dx}},$$

или

$$x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - y \frac{dy}{dx} + m = 0,$$

т. е. искомое дифференціальное уравненіе.

2) Возьмемъ уравненіе

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0, \quad (1)$$

гдѣ a, b произвольныя постоянныя. Дифференцірованіе доставитъ:

$$(x-a) + (y-b) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (y-b) \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad (3)$$

Изъ уравненія (3) найдемъ:

$$y-b = - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad (4)$$

и подставивъ это выраженіе въ уравненіе (2), получимъ:

$$x-a = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (5)$$

Внеся наконецъ въ уравненіе (3) вмѣсто $(x-a)$ и $(y-b)$ ихъ выраженія изъ формулъ (4) и (5), придемъ окончательно къ дифференціальному уравненію втораго порядка

$$r = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

О происхожденіи уравненій въ частныхъ производныхъ

9. Возьмемъ уравненіе

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad (1)$$

зависящее отъ трехъ переменныхъ x, y, z и содержащее двѣ произвольныхъ постоянныхъ количества a, b . Это уравненіе опредѣляетъ z какъ функцію независимыхъ переменныхъ x, y и постоянныхъ a, b . Сообщая въ выраженіи z обоимъ постояннымъ различнымъ численнымъ значеніямъ, получали бы различныя функціи x, y .

Дифференцированіе уравненія (1) доставляетъ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Изъ этихъ уравненій и уравненія (1) всегда можно исключить оба постоянныя a, b ; въ результатѣ получается, очевидно, уравненіе между $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, т. е. уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, вида

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Еслибы мы имѣли уравненіе вида

$$F(x, y, z, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = 0,$$

содержащее пять произвольныхъ постоянныхъ, то для исключенія ихъ пришлось бы воспользоваться не только двумя уравненіями

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

но еще и слѣдующими тремя:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

въ результатѣ получилось бы, очевидно, уравненіе вида

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

т. е. уравненіе въ частныхъ производныхъ второго порядка.

Еслибы въ исходномъ уравненіи содержалось девять произвольныхъ постоянныхъ количествъ, то исключеніе ихъ привело бы къ уравненію въ частныхъ производныхъ третьяго порядка, и т. д.

10. Дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ обладаютъ тою особенностію, что могутъ быть выводимы изъ уравненій, содержащихъ не только произвольныя постоянныя количества, но и произвольныя функции.

Пусть дано уравненіе

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad (1)$$

исключеніе изъ котораго произвольныхъ постоянныхъ a, b приводитъ, какъ мы видѣли, къ уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Допустимъ теперь, что a не постоянное, а переменное количество, и что $b = \Phi(a)$, гдѣ Φ произвольная совокупность дѣйствій; уравненіе (1) приметъ видъ:

$$F(x, y, z, a, \Phi(a)) = 0. \quad (2)$$

Если допустить, сверхъ того, что

$$\frac{dF(x, y, z, a, \Phi(a))}{da} = 0, \quad (3)$$

то легко будетъ показать, что исключеніе a между уравненіями (2) и (3) приведетъ къ результату, изъ котораго уже можно будетъ всегда вывести то-же уравненіе въ частныхъ производ-

ныхъ, къ которому приходятъ чрезъ исключеніе a, b изъ уравненія (1).

Въ самомъ дѣлѣ, опредѣливъ a изъ уравненія (3), мы нашли бы для этого количества нѣкоторую функцію x, y, z . Если бы затѣмъ это выраженіе a подставили въ уравненіе (2) и результатъ продифференцировали, то получили бы:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} = 0;$$

но, въ силу (3), $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$, а потому эти послѣднія уравненія сведутся на

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Эти два уравненія и уравненіе (1) дадутъ возможность исключить функціональныя количества a и $\Phi(a)$ и получить въ результатѣ опредѣленное уравненіе между $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Что это уравненіе будетъ тождественно съ тѣмъ, которое выводится изъ уравненія (1), очевидно само собою, такъ-какъ уравненія (2) и (4) отличаются отъ уравненія (1) и тѣхъ двухъ, которыя изъ него выводятся, только тѣмъ, что въ нихъ вмѣсто b стоитъ $\Phi(a)$, а вмѣсто постояннаго a стоитъ переменное количество.

11. Предыдущія сужденія могутъ быть обобщены. Если возьмемъ уравненіе, содержащее n независимыхъ переменныхъ, функцію этихъ переменныхъ и n постоянныхъ произвольныхъ количествъ, то можно будетъ исключить всѣ n постоянныхъ между даннымъ уравненіемъ и его n первыми частными производными. Такимъ образомъ составимъ дифференціальное уравне-

ніе въ частныхъ производныхъ перваго порядка, удовлетворяемое, независимо отъ значеній постоянныхъ, тою функціею, которая опредѣляется даннымъ уравненіемъ и еще множествомъ другихъ функцій, извѣстнымъ образомъ связанныхъ съ первою.

Пусть дано уравненіе

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, u, c_1, c_2, \dots c_n) = 0. \quad (1)$$

Допустимъ, что между n постоянными $c_1, c_2, \dots c_n$ находится p такихъ, которыя представляютъ произвольныя функціи остальныхъ, обращающихся въ переменныя количества. Если продифференцировать въ такомъ случаѣ уравненіе (1) по-очередно относительно $n - p$ количествъ, сдѣлавшихся переменными, то получится $n - p$ уравненій, по присоединеніи къ которымъ данаго уравненія можно будетъ исключить всѣ эти количества. Результатомъ исключенія будетъ уравненіе между $x_1, x_2, \dots x_n$ и u , опредѣляющее функцію u , которая будетъ удовлетворять тому-же уравненію въ частныхъ производныхъ, къ которому приводитъ исключеніе постоянныхъ изъ уравненія (1).

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, $c_1, c_2, \dots c_p$ представляютъ произвольныя функціи остальныхъ количествъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots c_n$ и про-дифференцируемъ по-очередно относительно каждаго изъ этихъ послѣднихъ уравненіе (1); получимъ $n - p$ уравненій, изъ которыхъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots c_n$ опредѣлятся въ $x_1, x_2, \dots x_n, u$. Подставивъ эти выраженія $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots c_n$ въ уравненіе (1), получимъ уравненіе, зависящее только отъ $u, x_1, x_2, \dots x_n$ и не трудно будетъ видѣть, что выраженія производныхъ $\frac{du}{dx_1},$

$\frac{du}{dx_2}, \dots \frac{du}{dx_n}$ и самой функціи u , получающіяся изъ этого уравненія, будутъ тѣ-же, какъ и въ томъ случаѣ, когда имѣли уравненіе (1), гдѣ $c_1, c_2, \dots c_n$ разсматривались постоянными величинами. Дѣйствительно, если, послѣ замѣны въ уравненіи (1) $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots c_n$ ихъ значеніями, продифференцировать его для

разысканія $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, то нужно будет принять во вниманіе, что $c_1, c_2, \dots, c_p$ означаютъ уже не постоянныя количества, а функціи $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_n$, зависящихъ въ свою очередь отъ $x_1, x_2, \dots, x_n$. Уравненіе, полученное отъ дифференцированія по x_1 , будетъ теперь

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial c_{p+1}} \frac{\partial c_{p+1}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial c_n} \frac{\partial c_n}{\partial x_1} = 0;$$

но, по положенію, выраженія количествъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_n$ въ переменныхъ таковы, что имѣемъ тождественно

$$\frac{\partial F}{\partial c_{p+1}} = 0, \frac{\partial F}{\partial c_{p+2}} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0;$$

поэтому предыдущее уравненіе сведется на

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_1} = 0,$$

точно такъ-же, какъ и въ случаѣ, когда $c_1, c_2, \dots, c_n$ разсматриваются постоянными количествами.

Въ силу этого ясно, что отношенія между $u, x_1, x_2, \dots, x_n$ $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, c_1, c_2, \dots, c_n$ въ обоихъ случаяхъ будутъ одни и тѣ-же, а потому, будутъ ли $c_1, c_2, \dots, c_p$ постоянными количествами или произвольными функціями отъ $c_{p+1}, c_{p+2}, \dots, c_n$ всегда можно исключить ихъ и въ результатѣ получить во всѣхъ случаяхъ одно и то-же уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Высшей степени общности достигнемъ въ томъ случаѣ, когда произвольное число p допустимъ равнымъ $n - 1$.

Пусть, напримѣръ, имѣемъ уравненіе

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 \dots \quad (1)$$

Исключеніе постоянныхъ между этимъ равенствомъ и частными его производными доставить:

$$u = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}, \quad (2)$$

т. е. определенное уравнение въ частныхъ производныхъ первого порядка.

Положимъ теперь

$$c_2 = \varphi(c_1), \quad c_3 = \psi(c_1).$$

Исключивъ c_1 между уравненіями

$$\begin{cases} u = c_1 x_1 + x_2 \varphi(c_1) + x_3 \psi(c_1), \\ 0 = x_1 + x_2 \varphi'(c_1) + x_3 \psi'(c_1), \end{cases} \quad (3)$$

получимъ уравненіе между x_1, x_2, x_3 и u , содержащее двѣ произвольныхъ функціи φ и ψ и притомъ такое, что доставляемое имъ выраженіе u удовлетворяетъ уравненію (2).

Изъ уравненій (3), каковы бы ни были φ и ψ , получится

$$c_1 = F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right);$$

слѣдовательно u представляетъ однородную функцію первой степени, вида

$$u = x_1 \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right),$$

и легко доказать, что она удовлетворяетъ уравненію (2).

12. Изъ высказаннаго въ предыдущихъ нумерахъ слѣдуетъ, что уравненія въ частныхъ производныхъ происходятъ отъ уравненій, содержащихъ или произвольныя постоянныя, или произвольныя функціи; въ томъ и другомъ случаѣ уравненіе въ частныхъ производныхъ выводится чрезъ исключеніе произвольныхъ количествъ. Исключеніе постоянныхъ количествъ, какъ мы уже видѣли, не представляетъ никакихъ теоретическихъ затрудненій, а потому остается только разсмотрѣть еще — какимъ образомъ исключаютъ, вообще, произвольныя функціи.

Пусть имѣемъ уравненіе

$$F(x, y, z, \varphi(u)) = 0, \quad (1)$$

гдѣ u извѣстная функція x, y, z , а φ означаетъ произвольную совокупность дѣйствій. Дифференцированіе уравненій (1) дастъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \phi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \phi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Въ три уравненія, которыя теперь имѣемъ, входитъ всего два произвольныхъ количества $\phi(u)$ и $\phi'(u)$, а потому, по исключеніи ихъ, придемъ къ совершенно опредѣленному уравненію между $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

И такъ, исключеніе одной произвольной функціи приводитъ, вообще, къ уравненію въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Приведемъ примѣръ.

Пусть дано уравненіе

$$y - nz = \phi(x - mz),$$

въ которомъ ϕ произвольная функція и которое, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, представляетъ общую форму уравненія цилиндрическихъ поверхностей. Дифференцированіе доставляетъ:

$$-n \frac{\partial z}{\partial x} = \left(1 - m \frac{\partial z}{\partial x} \right) \phi'(x - mz),$$

$$1 - n \frac{\partial z}{\partial y} = -m \frac{\partial z}{\partial y} \phi'(x - mz).$$

Такъ-какъ эти послѣднія уравненія не содержатъ уже ϕ , а входитъ въ нихъ только ϕ' , то остается исключить только это послѣднее количество. Сдѣлавъ это, находимъ:

$$m \frac{\partial z}{\partial x} + n \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

т. е. опредѣленное уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

13. Если возьмемъ уравненіе

$$F(x, y, z, \phi(u), \psi(v)) = 0, \quad (1)$$

содержащее двѣ произвольныхъ функціи ϕ и ψ , то исключеніе ихъ приведетъ насъ къ уравненію въ частныхъ производныхъ втораго порядка. Дѣйствительно, дифференцируя уравненіе (1), получаемъ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \phi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial F}{\partial \psi} \psi'(v) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \phi'(u) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial F}{\partial \psi} \psi'(v) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Эти уравненія содержатъ, кромѣ ϕ , ψ , еще ϕ' , ψ' , а потому нужно исключить четыре количества, чего изъ трехъ уравненій сдѣлать нельзя. Дифференцированіе двухъ послѣднихъ уравненій доставитъ еще три уравненія, но введетъ и два произвольныхъ количества ϕ'' , ψ'' ; уравненій и подлежащихъ исключенію количествъ будетъ, слѣдовательно, по шести. Исключеніе произвольныхъ функцій вообще еще невозможно; но при выводѣ производныхъ уравненій третьаго порядка число уравненій всегда сдѣлается уже болѣе числа подлежащихъ исключенію количествъ.

14. Для поясненія только-что сказаннаго рассмотримъ нѣсколько примѣровъ.

1) Пусть имѣемъ уравненіе коническихъ поверхностей

$$\frac{y-b}{z-c} = \phi\left(\frac{x-a}{z-c}\right), \quad (\alpha) \psi = \frac{y-b}{z-c}$$

гдѣ ϕ произвольная функція. Дифференцируя его, находимъ:

$$-\frac{(y-b) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z-c)^2} = \phi' \left(\frac{x-a}{z-c} \right) \left(\frac{(z-c) - (x-a) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z-c)^2} \right),$$

$$\frac{(z-c) - (y-b) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-c)^2} = \phi' \left(\frac{x-a}{z-c} \right) \left(\frac{-(x-a) \frac{\partial z}{\partial y}}{(z-c)^2} \right), \quad \text{сдѣлато}$$

а по раздѣленіи одного изъ этихъ равенствъ на другое получимъ:

$$\frac{(y-b) \frac{\partial z}{\partial x}}{(z-c) - (y-b) \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{(z-c) - (x-a) \frac{\partial z}{\partial x}}{(x-a) \frac{\partial z}{\partial y}},$$

откуда уже непосредственно найдемъ:

$$(x-a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

2) Пусть имѣемъ уравненіе цилиндровъ

$$z = x\phi(z) + y\psi(z),$$

гдѣ ϕ, ψ произвольныя функціи. Дифференцированіе его представляетъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \phi(z) + x\phi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} + y\psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \psi(z) + y\psi'(z) \frac{\partial z}{\partial y} + x\phi'(z) \frac{\partial z}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x} [1 - x\phi'(z) - y\psi'(z)] = \phi(z),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} [1 - x\phi'(z) - y\psi'(z)] = \psi(z),$$

откуда

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \Phi(z),$$

Продифференцировавъ это послѣднее выраженіе, найдемъ:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \Phi'(z) \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}},$$

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \Phi'(z) \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}},$$

откуда

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3) Пусть имѣемъ уравненіе

$$z = \varphi(x^2 + y^2) \psi(x^2 - y^2),$$

гдѣ φ, ψ произвольныя функціи. Для исключенія ихъ выгодно употребить слѣдующій частный пріемъ.

Взявъ гиперболическій логарифмъ отъ обѣихъ частей даннаго уравненія, получимъ:

$$\log z = \log[\varphi(x^2 + y^2)] + \log[\psi(x^2 - y^2)];$$

но логарифмъ отъ произвольной функціи самъ произвольная функція, а потому послѣднее уравненіе пишемъ еще такъ:

$$\log z = \Phi(x^2 + y^2) + \Psi(x^2 - y^2), \quad (a)$$

гдѣ Φ, Ψ опять произвольныя функціи. Эти послѣднія произвольныя функціи и исключимъ теперь.

Дифференцированіе послѣдней формулы дастъ:

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x [\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)],$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} = 2y [\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)],$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xz [\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)], \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2yz [\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Вторичное дифференцированіе доставитъ теперь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2z [\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)] + 2x \frac{\partial z}{\partial x} [\Phi'(x^2 + y^2) \\ &\quad + \Psi'(x^2 - y^2)] + 4x^2 z [\Phi''(x^2 + y^2) + \Psi''(x^2 - y^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= 2z [\Phi'(x^2 + y^2) + \Psi'(x^2 - y^2)] + 2y \frac{\partial z}{\partial y} [\Phi'(x^2 + y^2) \\ &\quad + \Psi'(x^2 - y^2)] + 4y^2 z [\Phi''(x^2 + y^2) + \Psi''(x^2 - y^2)]. \end{aligned}$$

Исключеніе изъ этихъ формулъ выраженія $\Phi''(x^2 + y^2) - \Psi''(x^2 - y^2)$ приведетъ къ уравненію

$$\Phi'(x^2+y^2) + \Psi'(x^2-y^2) = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} y^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} x^2}{2[z(x^2-y^2) + xy\left[\frac{\partial z}{\partial y}x - \frac{\partial z}{\partial x}y\right]]}$$

а въ то-же время первое изъ уравненій (b) доставить

$$\Phi'(x^2+y^2) + \Psi'(x^2-y^2) = \frac{1}{2xz} \frac{\partial z}{\partial x},$$

слѣдовательно получимъ въ окончательномъ результатѣ

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} y^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} x^2\right)xz + \left(\frac{\partial z}{\partial x}y - \frac{\partial z}{\partial y}x\right)\frac{\partial z}{\partial x}xy = z\frac{\partial z}{\partial x}(x^2-y^2).$$

15. Произвольныя функціи, которыя мы до сихъ поръ искали изъ данныхъ уравненій, непосредственно зависѣли отъ опредѣленныхъ функцій переменныхъ; такъ, имѣя произвольную функцію $\Phi(u)$, мы полагали u извѣстною функціею переменныхъ. Можетъ случиться однако, что данное уравненіе содержитъ произвольныя функціи такихъ количествъ, выраженія которыхъ въ переменныхъ измѣняются съ измѣненіемъ самыхъ произвольныхъ функцій, потому что количества эти опредѣляются уравненіями въ которыя входятъ опять тѣ-же произвольныя функціи и ихъ производныя. Случай этотъ представляется, напримѣръ, уравненіемъ

$$z = (x + \alpha)(y + \Phi(\alpha)),$$

гдѣ $\Phi(\alpha)$ произвольная функція, а количество α само опредѣляется уравненіемъ

$$x + \Phi(\alpha) + (y + \alpha)\Phi'(\alpha) = 0.$$

Здѣсь α дѣлается опредѣленною функціею переменныхъ x, y , только тогда, когда для Φ изберемъ опредѣленную функцію. Если допустимъ $\Phi(\alpha) = \alpha$, то найдемъ

$$\alpha = -\frac{x+y}{2};$$

если, напротивъ, положимъ $\Phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$, то будетъ

$$\alpha = \sqrt{\frac{y}{x}}, \text{ и т. д.}$$

Указанный теперь случай вообще сложнѣе разсмотрѣннаго въ предыдущихъ нумерахъ, потому что произвольными представляются уже не только нѣкоторыя функціи, какъ это было прежде, но и тѣ количества, отъ которыхъ онѣ зависятъ. Такъ, имѣя уравненіе

$$F(x, y, z, \Phi(\alpha)) = 0, \quad (1)$$

гдѣ самое количество α опредѣляется уравненіемъ вида

$$f(x, y, z, \alpha, \Phi(\alpha), \Phi'(\alpha) \dots) = 0,$$

и дифференцируя уравненіе (1) для исключенія изъ него произвольной функціи $\Phi(\alpha)$, мы будемъ получать выраженія, въ которыя войдутъ $\Phi(\alpha)$, производныя этой функціи и производныя количества α . Когда количество α представляло опредѣленную функцію переменныхъ, тогда исключать его производныя не было никакой надобности, но теперь производныя эти сами выраженія неопредѣленныя и потому ихъ также нужно исключить. Слѣдовательно число подлежащихъ исключенію количествъ теперь больше, чѣмъ прежде, и хотя произвести это исключеніе всегда оказывается возможнымъ при помощи уравненія, опредѣляющаго α , но нельзя уже ручаться за то, что окончательное уравненіе въ частныхъ производныхъ будетъ непремѣнно перваго порядка.

Возьмемъ примѣры.

1) Пусть имѣемъ уравненіе

$$z = \frac{[y - \Phi(\alpha)]^2}{\Phi'(\alpha)}, \quad (a)$$

гдѣ Φ произвольная функція, а α опредѣляется уравненіемъ

$$x + \alpha = \frac{y - \Phi(\alpha)}{\Phi'(\alpha)}. \quad (b)$$

Дифференцируя уравненіе (1), находимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-2[y - \Phi(\alpha)]\Phi'(\alpha)^2 - \Phi''(\alpha)[y - \Phi(\alpha)]^2}{\Phi'(\alpha)^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{2[y - \Phi(\alpha)]\left[1 - \Phi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]\Phi'(\alpha) - [y - \Phi(\alpha)]^2\Phi''(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}}{\Phi'(\alpha)^2} \end{aligned} \right\} (c)$$

Изъ формулъ (а), (с) нужно теперь исключить $\Phi(\alpha)$, $\Phi'(\alpha)$, $\Phi''(\alpha)$, $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$. Чтобы исключить $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ и $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ обращаемся къ уравненію (b) и дифференцируемъ его; находимъ:

$$1 + \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{-\Phi'(\alpha)^2 \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \Phi''(\alpha)[y - \Phi(\alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\Phi'(\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\left[1 - \Phi'(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right]\Phi'(\alpha) - \Phi''(\alpha)\frac{\partial \alpha}{\partial y}[y - \Phi(\alpha)]}{\Phi'(\alpha)^2};$$

слѣдовательно

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\Phi'(\alpha)^2}{-2\Phi'(\alpha)^2 + [y - \Phi(\alpha)]\Phi''(\alpha)},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\Phi'(\alpha)}{2\Phi'(\alpha)^2 + (y - \Phi(\alpha))\Phi''(\alpha)}.$$

Подстановка этихъ выраженій въ уравненія (с) даетъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y - \Phi(\alpha), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{y - \Phi(\alpha)}{\Phi'(\alpha)}. \end{aligned} \right\} (d)$$

Теперь изъ уравненій (а) и (d) остается исключить $\Phi(\alpha)$ и $\Phi'(\alpha)$, что доставить

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0,$$

т. е. уравненіе въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

2) Пусть теперь дано уравненіе

$$z = x\Phi(\alpha) + y\psi(\alpha) + \vartheta(\alpha), \quad (a)$$

гдѣ Φ, ψ, ϑ , произвольныя функціи, а количество α определяется уравненіемъ

$$x\Phi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + \vartheta'(\alpha) = 0. \quad (b)$$

Дифференцирование ур. (а) доставляетъ:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(\alpha) + [x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + \vartheta'(\alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \psi(\alpha) + [x\varphi'(\alpha) + y\psi'(\alpha) + \vartheta'(\alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

уравненія, которыя въ виду ур. (b) сводятся на

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(\alpha), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(\alpha).$$

Исключеніе изъ этихъ уравненій α приведетъ къ ур. вида

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \Phi\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad (c)$$

гдѣ Φ произвольная функція. Послѣ этого остается исключить Φ , для чего дифференцируемъ формулу (c); получаемъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \Phi' \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \Phi' \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

откуда уже непосредственно находимъ:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Происхожденіе уравненій въ полныхъ дифференціальныхъ.

16. Если возьмемъ уравненіе

$$F(x, y, z, c) = 0, \quad (1)$$

содержащее произвольное постоянное c и опредѣляющее z какъ функцію независимыхъ переменныхъ x , y и постоянного c , то можно будетъ продифференцировать его сполна и написать:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0, \quad (2)$$

гдѣ dz означаетъ полный дифференціалъ отъ z . Постоянное произвольное c входитъ здѣсь только въ коэффициенты $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$,

$\frac{\partial F}{\partial z}$, а потому, исключивъ это количество при помощи уравненія (1), непременно придемъ къ уравненію вида:

$$P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz = 0, \quad (3)$$

гдѣ P, Q, R опредѣленные функціи x, y, z .

Формула (3) представляетъ отношеніе между дифференціалами независимыхъ переменныхъ и *полнымъ* дифференціаломъ *функции*; поэтому уравненія такого вида получаютъ названіе *уравненій въ полныхъ дифференціалахъ* и притомъ — *перваго* *порядка*. Уравненія эти и по формѣ своей, и по способу своего образованія существенно отличаются отъ выше разсмотрѣнныхъ нами уравненій въ частныхъ производныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, въ то время, какъ уравненія въ частныхъ производныхъ *перваго* *порядка* происходятъ отъ уравненій, содержащихъ не менѣе *двухъ* произвольныхъ постоянныхъ или одной произвольной функціи, уравненія *перваго* *порядка* въ полныхъ дифференціалахъ образуются отъ дифференцированія *сполна* уравненія, содержащаго одно постоянное произвольное количество, которое при этомъ *исключается*. Сверхъ того каждое уравненіе *перваго* *порядка* въ полныхъ дифференціалахъ немедленно опредѣляетъ и частныя производныя *перваго* *порядка* функціи, ему удовлетворяющей. Дѣйствительно, такъ-какъ z функція переменныхъ x, y , то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

почему формула (3) приметъ видъ:

$$\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy = 0;$$

но здѣсь dx, dy , какъ дифференціалы независимыхъ переменныхъ, представляютъ произвольныя величины, а потому, для существованія нашего уравненія, необходимо, чтобы коэффициенты при dx и dy равнялись нулю, т. е. чтобы было

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P}{R}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q}{R}.$$

17. Замѣчательную особенность представляютъ уравненія въ полныхъ дифференціалахъ еще и въ томъ отношеніи, что они не всегда устанавливають функціональную зависимость между переменными, въ нихъ входящими. Не трудно показать, въ самомъ дѣлѣ, что для того, чтобы формула

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad (1)$$

удовлетворялась допущеніемъ z функціею x, y , коэффициенты P, Q, R должны быть подчинены извѣстному, опредѣленному условію. Дѣйствительно, какъ только допустимъ z функціею x, y , непремѣнно будетъ

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

почему уравненіе (1) приметъ видъ

$$\left(P + R \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = 0$$

и приведетъ неминуемо къ равенствамъ

$$-\frac{P}{R} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad -\frac{Q}{R} = \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (2)$$

Продифференцировавъ первое изъ нихъ по y , а второе по x и помня, что P, Q, R зависятъ отъ x, y, z , мы получимъ:

$$\frac{\partial \left(\frac{P}{R}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{P}{R}\right)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

$$\frac{\partial \left(\frac{Q}{R}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{Q}{R}\right)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Въ силу равенствъ (2) и этихъ послѣднихъ равенствъ получимъ:

$$\frac{\partial \left(\frac{P}{R} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{P}{R} \right)}{\partial z} \cdot \frac{Q}{R} = \frac{\partial \left(\frac{Q}{R} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{Q}{R} \right)}{\partial z} \cdot \frac{P}{R},$$

равенство, которое, по совершении дифференцирований, приведем и по перенесении всѣхъ членовъ въ одну сторону, приметъ видъ

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0. \quad (3)$$

Это послѣднее равенство должно имѣть мѣсто для всѣхъ значений x, y, z удовлетворяющихъ уравненію (1). При этомъ могутъ встрѣтиться два случая: или равенство (3) представляетъ тождество — тогда, очевидно, условіе, которому должны быть подчинены количества P, Q, R строго выполняется; или равенство это устанавливаетъ между x, y, z определенное отношеніе — тогда это отношеніе должно доставлять для z какъ-разъ то выраженіе въ x, y , которое тождественно удовлетворяетъ уравненію (1). Еслибы уравненіе (1) не составляло неминувемаго слѣдствія равенства (3), то слѣдовало бы заключить, что уравненіе это не можетъ удовлетворяться никакими значеніями z , представляющими функции x, y .

Пусть, на примѣръ, имѣемъ уравненіе

$$(z - y)dx + xdy + (y - z)dz = 0. \quad (a)$$

Въ этомъ случаѣ равенство (3) сводится на

$$z - x - y = 0, \quad (b)$$

откуда

$$dz = dx + dy. \quad (c)$$

Подстановка значеній z и dz изъ формулъ (b), (c) въ уравненіе (a) обращаетъ его въ тождество; слѣдовательно

$$z = x + y$$

и представляетъ единственное рѣшеніе уравненія (a).

Пусть еще имѣемъ уравненіе

$$zdx - ydy + ydz = 0;$$

условіе (3) сведется въ этомъ случаѣ на

$$-2z = 0$$

и такъ-какъ $z = 0$ не представляетъ рѣшенія даннаго уравненія, то заключаемъ, что уравненіе это не соотвѣтствуетъ никакому опредѣленному отношенію между x, y, z .

18. Предыдущія сужденія могутъ быть обобщены. Имѣя уравненіе:

$$F(x, y, z, u, c) = 0, \quad (1)$$

гдѣ c постоянное произвольное, продифференцировавъ его сполна и исключивъ c , мы получимъ опять уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ вида

$$Pdx + Qdy + Rdz + Sdu = 0. \quad (2)$$

гдѣ P, Q, R, S опредѣленныя функціи x, y, z, u .

Здѣсь опять можно доказать, что уравненіе (2) тогда только предполагаетъ существованіе функціональной зависимости между u, x, y, z , когда коэффициенты P, Q, R, S удовлетворяютъ извѣстнымъ условіямъ. Дѣйствительно, когда u представляетъ функцію отъ x, y, z , тогда

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Подставивъ это выраженіе въ уравненіе (1) и замѣтивъ, что dx, dy, dz величины произвольныя, увидимъ, что уравненіе (1) влечетъ за собою равенства

$$P + S \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad Q + S \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad R + S \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{S}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Q}{S}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{R}{S}.$$

Поступая съ этими равенствами точно такъ, какъ мы поступали съ равенствами (2) предыдущаго нумера, придемъ къ слѣдующимъ тремъ условіямъ:

$$S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + Q \left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial u} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0,$$

$$S \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + R \left(\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial u} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial z} \right) = 0,$$

$$S\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + P\left(\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial u}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial u} - \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0,$$

которыя непремѣнно должны удовлетворяться для того, чтобы уравненіе (1) выражало функціональную зависимость между x, y, z, u .

19. Еслибы мы взяли уравненіе вида

$$F(x, y, z, c_1, c_2) = 0, \quad (1)$$

гдѣ c_1, c_2 произвольныя постоянныя, то, дифференцируя его сполна разъ и другой, получили бы:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} dx dz + \\ + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Исключивъ изъ этихъ формулъ c_1, c_2 мы пришли бы къ уравненію втораго порядка въ полныхъ дифференціалахъ вида

$$\begin{aligned} Ldx^2 + Mdy^2 + Ndz^2 + Pdx dy + Qdx dz + \\ + Rdy dz + Sdz^2 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

въ которомъ L, M, N, P, Q, R, S опредѣленныя функціи x, y, z . Здѣсь опять коэффиціенты должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ, имѣющимъ сходство съ тѣми, которыя мы вели для уравненій 1-го порядка. Выводить здѣсь эти условія считаю однако излишнимъ.