НКО — ВСЕУКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК — УСРР
ЕЛЕКТРОЗВАРНИЙ КОМІТЕТ

Volkskommissariat für Aufklärung — ALLUKRAINISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN — Ukrainische Sozialistische Räte-Republik
KOMITEE FÜR ELEKTROSCHWEISSUNG

Пролетарі всіх країн, єднайтеся!
Proletarier aller Länder, vereinigt euch!

Проф. О. А. УМАНСЬКИЙ

СТАТИКА Й КІНЕМАТИКА
РАМНИХ КОНСТРУКЦІЙ
Ч. I

STATIK UND KINEMATIK
DER RAHMENWERKE

von Prof. A. UMANSKY

I. Teil

У КИЄВІ — 1932 — KYJIW

533

Ціна 1 крб. 80 к.

ПРАЦІ ЕЛЕКТРОЗВАРНОГО КОМІТЕТУ при ВУАН

ВИЙШЛИ З ДРУКУ

1. П. Буштедт — Вібраційна машина. Київ, 1932 . . . . 80 коп.
2. Акад. Є. Патон і Г. Шульте — Зварені опорні частини мостів. Київ, 1932 . . . . 80 „
3. Акад. Є. Патон, М. Козловський і В. Шеверницький — Вишукання раціонального методу підсилювати зварний стик аркушів. Київ, 1932 . . . . 80 „
4. Акад. Є. Патон і Л. Новоборський — Вишукання раціонального типу стрижнів, зварених із двох кутівок. Київ, 1932 . . . . 80 „
5. Акад. Є. Патон — Таблиці для проєктування дерев'яних і стальних мостів. Перше (восьме) видання. Змінене й доповнене. Київ, 1932 . . . . 6 крб.
6. Акад. Є. Патон і В. Шеверницький — Підсилення нютованих трямів наварюванням аркушів. Київ, 1932 . . . . 50 коп.
7. Б. Горбунов — Додаткові напруги поземого згину в поясах мостових зв'язнів. Київ, 1932 . . . . 60 коп.
8. Акад. Є. Патон і П. Гребельник—Міцність електрозварних швів. Київ, 1932 . . . . 40 „
9. Акад. Є. Патон і В. Шеверницький—Як впливає довжина бокових швів на їх міцність. Київ, 1932 . . . . 40 „
10. Акад. Є. Патон і В. Шеверницький — Підсилення нютованих злук боковими швами. Київ, 1932 . . . . 40 „
11. Акад. Є. Патон, Л. Паславський, Г. Варавка і М. Петров — Спрощені випробні машини місцевого виробництва. Київ, 1932 40 „
12. Б. Горбунов — Про наближений спосіб досліджувати стійкість стрижнів. Київ, 1932 . . . . 1 крб.
13. Акад. Є. Патон і Б. Горбунов — Електрозварні конструкції в промисловому будівництві. Київ, 1933 . . . . 3 „
14. Акад. Є. Патон і В. Шеверницький—Як впливає порядок зварювання на міцність стиків двотетуватих трямів. Київ, 1933 . . . 75 коп.
15. О. Уманський — Статика й кінематика рамних конструкцій 1 крб. 80 к.

ДРУКУЮТЬСЯ

16. Акад. Є. Патон і М. Козловський—Альбом електрозварних к[illegible]й.
17. Акад. Є. Патон і В. Шеверницький — Сумісна робота боко[illegible]ових швів.
18. Є. Патон, П. Буштедт, В. Чудновський — Порівняння міцнос[illegible]о-зварних нютованих конструкцій.

НКО ВСЕУКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ НАУК УСРР
ЕЛЕКТРОЗВАРНИЙ КОМІТЕТ

Volkskommissariat für Aufklärung ALLUKRAINISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN Ukrainische Sozialistische Räte-Republik
KOMITEE FÜR ELEKTROSCHWEISSUNG

Пролетарі всіх країн, єднайтеся!
Proletarier aller Länder, vereinigt euch!

Проф. О. А. УМАНСЬКИЙ

СТАТИКА Й КІНЕМАТИКА
РАМНИХ КОНСТРУКЦІЙ
Ч. I

STATIK UND KINEMATIK
DER RAHMENWERKE

von Prof. A. UMANSKY

I. Teil

У КИЄВІ — 1932 — KYJIW

Бібліографічний опис цього видання вміщено в „Літопису Українського Друку“, „Картковому репертуарі“ та інших покажчиках Української Книжкової Палати.

Літредактор П. Іванець
Техредактор С. Скомський
Коректор Є. Біганівська
Здано до друкарні 4/IX 1932 р.
Підписано до друку 1/XI 1932 р.

Дозволяється випустити в світ.
Неодмінний Секретар ВУАН акад. *О. Корчак-Чепурківський*

Київський Обліт № 232. 1932.
З друкарні Всеукраїнської Академії Наук (Цитаделя 9).
Зам. № 1283—3000.

ПЕРЕДМОВА.

Ця праця має на меті обґрунтувати теорію рамних конструкцій на базі векторіяльного уявлення про малі переміщення твердого тіла й найпростіших тверджень кінематики замкненого стрижневого контуру.

Уперше систематично виклав теорію замкненого контуру стосовно до задач будівельної механіки O. Mohr[1]), що вбачав був у цій теорії універсальний спосіб, щоб розв'язувати задачі статики й кінематики споруд. Алеж, завдяки штучній інтерпретації подовжень, відмінній від уживаної в кінематиці нескінченно малих переміщень, Морова теорія не зробилася за те знаряддя розрахунку, яким вона могла б бути, зважаючи на закладені в ній можливості. Морова теорія не виявила цілого ряду аналогій, що природно завершують метод фіктивних тягарів і дають такий самий засіб для наочного уявлення про напружений стан плоского бруса, як і фіктивні тягарі для уявлення про деформацію.

Цю працю поділено на дві частини: в першій розглянено основи кінематики замкненого контуру і на базі розширених кінематично-статичних аналогій — роботу простої рами й однопрогінного тряма змінної цупкости. Другу частину присвячено узагальненню теорії замкненої рами, теорії інфлюент і питанням систематизації методів розрахунку рамних конструкцій.

---

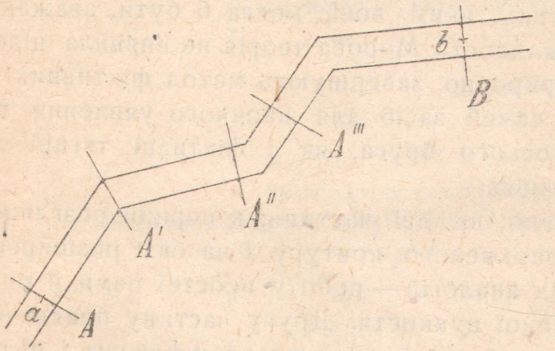
[1]) O. Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Der Eisenbau 1910, S. 2 u. 93. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. III Aufl. 1928. Abh. XIII u. XIII-a.

РОЗДІЛ I.

КІНЕМАТИКА ЗАМКНЕНОГО КОНТУРУ.

§ 1. Зв'язок між умовами замкнености просторового стрижневого контуру й умовами рівноваги твердого тіла.

Уявімо ламаний або криволінійний просторовий брус (фіг. 1) і відзначімо на ньому два перекрої A і B, що в окремому випадку можуть бути початковим і кінцевим перекроєм бруса. Нехай бруса розрізано в A і ціла частина праворуч A дістає дуже малого переміщення щодо лівого перекрою в розрізі A. Зафіксуймо якусь точку a, що належить перекроєві A. У найзагальнішому випадку це відносне переміщення правого перекрою A можна звести до поступного переміщення λ_a точки a і до обертання на малий кут θ_a навколо якоїсь осі, що проходить через a. Переміщення перекрою A, а разом із ним усього тіла AB зображують двома векторами, що мають початок в a і дорівнюють λ_a і θ_a. Вектора θ_a відкладаємо вздовж осі обертання в такий бік, що, дивлячися з нього, побачимо обертання частини AB за годинниковою стрілкою. Вектор λ_a збігається величиною і напрямом з поступним переміщенням точки a.



Фіг. 1.

Нехай треба визначити переміщення перекрою B, що його спричиняють переміщення λ_a і θ_a. Оберімо якусь точку b, що належить перекроєві B. На підставі найелементарніших геометричних міркувань ми висновуємо, що поступне переміщення δ_b точки b дорівнює геометричній сумі двох векторів: 1) вектора λ_a і 2) вектора, що дорівнює моментові вектора θ_a щодо полюса b. Кут повертання φ_b перекрою B дорівнює векторові θ_a.

Нехай такі самі відносні переміщення між суміжними перекроями в розрізі A будуть у цілому ряді розрізів A', A'', A'''... Взаємні переміщення суміжних перекроїв так само зображатимемо векторами θ і λ. А що переміщення мають бути дуже малі, порівнюючи з розмірами бруса, то можна застосувати принцип складання нескінченно малих переміщень, аналогічний до принципу складання чину сил. Перекрій B бере участь у русі цілого ряду тіл AB, $A'B$, $A''B$... Припускаємо, що розміри цих тіл незмінні. Через те повне переміщення перекрою B становитиме суму часткових переміщень, визначених, припускаючи, що чин переміщень в A', A'', A'''... послідовно накладається.

Вислідні вектори δ_b і φ_b, що зображають переміщення перекрою B, дорівнюють геометричним сумам часткових вартостей, визначених за зазначеним вище правилом для випадку λ_a і θ_a.

Нагадаємо, що вислідне поступне переміщення δ_b відкладається як вектор-момент у точці b. Стрілка цього вектора напрямляється в такий бік, щоб, дивлячися з неї, спостережник побачив вісь вектора, як її обертає вектор θ за годинниковою стрілкою.

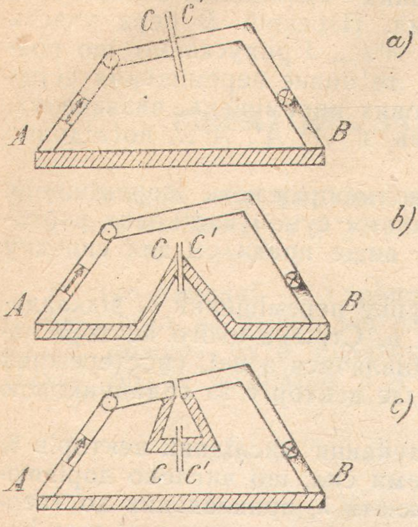
Ми бачимо, що задача розшукання вислідних векторів δ_b і φ_b еквівалентна зведенню системи сил, що числово дорівнюють θ, і пар, які числово дорівнюють λ, прикладених до твердого тіла,— до полюса b. Вислідна системи сил дорівнює повертові перекрою θ_b, а головний момент дорівнює поступному переміщенню δ_b. Через те відносні кути повертання називатимемо фіктивними силами, а відносні лінійні (поступні) переміщення суміжних перекроїв — фіктивними парами або моментами.

Цілком аналогічно з тим, як вислідну і головний момент можна представити їх компонентами по трьох координатних осях, вислідний поверт можна представити, як сукупність обертань навколо трьох осей, а вислідне поступне переміщення,— як суму переміщень (проєкцій) вздовж трьох координатних осей. Щоб цілком визначити переміщення перекрою b, треба завдати шість координат.

Розгляньмо тепер той випадок, коли початок бруса зливається з A, кінець з B і вислідне переміщення B щодо A дорівнює нулеві, тобто одночасно $\delta_b = 0$ і $\varphi_b = 0$. Кожна з цих умов дає три рівняння, які виражають, що проєкції поступного переміщення й обертання навколо трьох координатних осей дорівнюють нулеві, а всього маємо шість рівнянь.

Очевидно, умови взаємної нерухомости A і B збігаються з умовами рівноваги сил, прикладених до твердого тіла, отже, взаємна нерухомість початку й кінця бруса еквівалентна рівновазі фіктивного обтяження.

Складаючи рівняння рівноваги твердого тіла, ми можемо вибрати початок координат і орієнтування координатних осей довільно. Очевидно, те саме маємо і складаючи рівняння взаємної нерухомости. Насамперед зауважимо, що взаємно нерухомі перекрої A і B можна злучити абсолютно цупким бруском (фіг. 2-a), а як початковий і кінцевий перекрій узяти які завгодно два суміжні перекрої замкненого бруса, наприклад, C і C'. Крім того, можна зробити, як показано на фіг. 2-b і 2-c.



Фіг. 2.

Отже, умови взаємної нерухомости кінців незамкненого бруса можна розглядати, як частковий випадок умов замкнености. Так само, як і для умов рівноваги твердого тіла, існує нескінченна кількість груп шістьох рівнянь, що зв'язують завдані взаємні деформації λ і θ і виражають замкненість однозв'язного контуру. Раціонально вибираючи координатні осі, так само полегшуємо кінематичні розрахунки, як і розрахунки статичні.

Твердження цього параграфа резюмуємо в такій формі: контур, що суміжні його перекрої зазнають невеликих взаємних переміщень, залишається замкнений, коли фіктивне обтяження, що відповідає цим переміщенням і прикладене до твердого тіла, перебуває в стані рівноваги[1]).

§ 2. Плоский замкнений контур.

Надалі ми обмежимося на тому, що розглянемо плоский брус, який деформується в своїй площині. Фіктивні сили (зміни кутів між суміжними перекроями, що числово дорівнюють змінам кутів між суміжними дотичними) уважатимемо за додатні, коли дальша частина обертається щодо попередньої проти годинникової стрілки. Щоб установити поняття „дальший" і „попередній", умовмося обходити контур завсіди за годинниковою стрілкою. Отже, ми приписуємо знак (+) збільшенням внутрішніх кутів многокутника. Ідучи за встановленими попереду правилами зображати вектори, додатні θ відкладатимемо за рисунок і зображатимемо кружком з хрестиком (перо стрілки), а від'ємні від рисунка до спостережника і зображатимемо кружком з точкою (вістря). Припускаючи, що площа рисунка позема, називатимемо іноді фіктивні сили фіктивними тягарами.

[1]) Кажучи про замкненість, ми вилучаємо ті перекрої, де завдаємо розриви (скоки) і переломи осі контуру.

Фіктивні пари (лінійні відносні переміщення суміжних перекроїв λ) зображаються векторами, що зливаються з самим лінійним переміщенням, ідучи за напрямом переміщення при обході контуру (фіг. 2).

Фіктивне обтяження може бути як зосереджене, так і розподілене. За приклад розподіленої кутової деформації може бути викривлення осі пружного стрижня підо впливом нерівномірного нагрівання або згину. Далі це питання розглянемо докладніше. За приклад розподіленого фіктивного моментного обтяження править температурне видовження стрижня, видовження підо впливом повздовжньої сили, або розподілена вздовж стрижня деформація зсову, яку спричиняють дотичні напруги.

Усяке групове, або розподілене фіктивне обтяження можна в рівняннях рівноваги замінити на його вислідну, через те, не порушуючи загальности, ми в цьому параграфі оперуватимемо тільки зосередженими величинами λ і θ. Умови замкнености плоского контуру, як умови рівноваги рівнобіжних фіктивних сил у просторі, зводимо до трьох рівнянь:

1) Проєкція фіктивного обтяження на вісь, нормальну до площини контуру, дорівнює нулеві:

$$\sum \theta = 0 \qquad (1)$$

До рівняння (1) лінійні переміщення (фіктивні пари), очевидно, не увіходять.

2) Момент фіктивного обтяження щодо довільної осі I — I, яка лежить у площині контуру, дорівнює нулеві:

$$\sum \theta \cdot r_1 + \sum \lambda \cos(\lambda, \mathrm{I}) = 0 \qquad (2)$$

Момент усього фіктивного обтяження дорівнює сумі моментів фіктивних тягарів, складеній з сумою проєкцій подовжень (фіктивних вектор-моментів) на ту саму вісь.

3) Момент фіктивного обтяження щодо другої осі II—II, яка лежить у площині контуру і не рівнобіжна з першою, дорівнює нулеві:

$$\sum \theta \cdot r_2 + \sum \lambda \cos(\lambda, \mathrm{II}) = 0 \qquad (3)$$

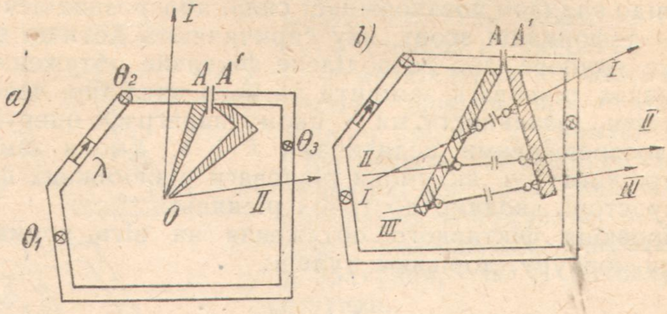
Як відомо, замість рівняння проекцій (1) можна скористуватися третім рівнянням моментів навколо довільної осі III—III, що лежить у площині контуру, але не проходить через точку перетину осей I і II. Вісь III може бути рівнобіжна з однією з осей I або II.

$$\sum \theta \cdot r_3 + \sum \lambda \cos(\lambda, \mathrm{III}) = 0 \qquad (4)$$

А що рівняння проєкцій (1) можна теж розглядати як рівняння моментів, але навколо нескінченно віддаленої осі, то остаточно три умови замкнености для плоского контуру найпростіш можна зформулювати так:

Щоб контур залишився замкнений, конче треба і досить, щоб моменти фіктивного обтяження навколо трьох осей, які не перетинаються в одній точці, дорівнювали нулеві.

Простежмо ще раз на конкретному прикладі геометричне розуміння кожного з трьох рівнянь рівноваги. Нехай кути замкненого n-кутника набувають малих збільшень θ, а боки видовжуються на $\Delta l = \lambda$ (фіг. 3-*a*). Проведемо осі I — I і II—II. Рівняння (1) визначає, що сума внутрішніх кутів n-кутника



Фіг. 3.

залишається незмінна. Це збігається з відомим твердженням геометрії. Одночасно це рівняння каже, що кут взаємного поверту яких завгодно двох суміжних перекроїв[1]) дорівнює нулеві. Провівши розріз *A*, прилучимо до оголених перекроїв два нескінченно-цупкі бруски і зведемо їх кінці в *O*. Можна сказати, що (1) визначає, що суміжні перекрої в *O* взаємно не повертаються. Рівняння (2) і (3) визначають, що проекції повного відносного переміщення спільної точки перекроїв у *O* на осі I — I і II — II дорівнюють нулеві. Отже, перекрої *O* не можуть ні взаємно повернутися, ні розійтися. Ця модель показує так само, чому осі I — I і II — II не можна взяти рівнобіжні.

Умови замкнености в формі (2), (3), (4) легко інтерпретувати за допомогою моделю на фіг. 3-*b*. Два тверді тіла, що продовжують відокремлені розрізом перекрої в *A*, злучимо трьома стрижнями, які не перетинаються в одній точці. Розріжемо стрижні і виразимо, що після деформації проекції переміщень відокремлених розрізом перекроїв на напрям стрижнів дорівнюють нулеві, інакше кажучи, що три стрижні не подовжуються. Прийдемо до рівнянь (2), (3), (4). А що три стрижні, які незмінно злучають два тверді тіла, не мають проходити через одну точку, то й осі I, II і III не перетинатимуться в одній точці, хоч дві з них і можуть бути рівнобіжні[2]).

[1]) Кутові перекрої, де змінюється кут, вилучаємо. Деякі кути n-кутника можуть бути і 180°.

[2]) Як ми бачили, рівняння (1) — (4) є безпосередній наслідок основних тверджень кінематики твердого тіла. Можна дати елементарне геометричне тлума-

§ 3. Кінематика кістяка рамної конструкції.

Замкнений контур з n суставами при заданій деформації своїх боків являє собою систему $n-3$ рази змінну щодо своєї форми (тобто конфіґурації суставів). Контур з трьома суставами є незмінний і статично визначний. Коли число суставів менше як три — тоді дістаємо систему статично невизначну. На цьому ґрунтується спосіб визначати степінь статичної невизначности довільної рамної конструкції; степінь дорівнює тому числу суставів, яке треба вставити, щоб у кожному замкненому контурі було по три сустави. Зауважимо, що за сустав уважають злуку, що припускає вільне взаємне повертання двох брусків. Коли на спільну вісь насадити m брусків, то число суставів у такій злуці дорівнює $m-1$.

Так само, з'ясовуючи число степенів волі змінної системи, конче треба підрахувати число суставів, які треба знищити, щоб у кожному замкненому контурі було по три сустави.

Розраховуючи рамні конструкції, оперують з якоюсь іншою конструкцією, що відрізняється від завданої числом пов'язей. Цю конструкцію звуть основною системою. Задача зводиться до того, що розраховують основну систему і з'ясовують ті додаткові впливи на неї, якими робота завданої конструкції відрізняється від роботи основної системи. Основну систему можна вибрати статично визначну, статично невизначну і змінну. Останню мають тоді, коли пов'язей знищують більше, ніж це потрібно для статичної визначности й незмінности. Систему, що її дістають, увівши наскрізні сустави в усіх вузлах рамної конструкції, умовмося називати кістяком конструкції. Звичайно кістяк є змінна система. Вибір величин, що характеризують зміни форми кістяка, залежить від методу розрахунку.

Найчастіше доводиться встановлювати зв'язок між подовженням боків λ, змінами кутів θ, кутами перекосу стрижнів ψ і величинами лінійних зсовів вузлів $\delta = \psi l$ (фіг. 4).

1. Визначення залежности між подовженнями стрижнів і змінами кутів зводиться до того, що складають три умови

чення кожній з цих формул, або вивести їх безпосередньо, — користуючися принципом можливих переміщень. Для цього досить узяти фіктивний стан у вигляді моделю на фіг. 3-a або 3-b, припускаючи, що кути контуру і подовжувані стрижні ствердли. Щоб вивести, напр., формулу (2), розріжемо три стрижні моделю 3-b і обтяжимо кінці стрижня I — I зусиллям $S=1$. У контурі постануть згинні моменти $M=1 \cdot r$, повздовжні сили $N = 1 \cdot \cos(l, \mathrm{I})$ і поперечні сили $Q = 1 \cdot \sin(l, \mathrm{I})$.

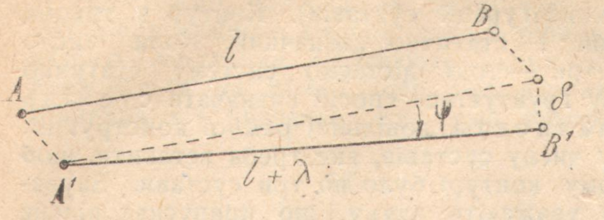
Складаючи рівняння робіт і беручи на увагу, що деформації зсову немає (зсов завсіди можна інтерпретувати як подовження спеціяльно уведеного стрижня), знайдемо, що взаємне переміщення кінців, або подовження розрізаного стрижня, дорівнює

$$\delta_{\mathrm{I}} = \Sigma\, \theta \cdot r_{\mathrm{I}} + \Sigma\, \lambda \cos(\lambda, \mathrm{I}) \qquad (5)$$

Прирівнюючи його нулеві, дістанемо (2). Аналогічно можна вивести й рівняння (1). Тут за обтяження фіктивного стану будуть два однакові й взаємно-протилежні моменти $M=1$ у розрізі O (фіг. 3-a).

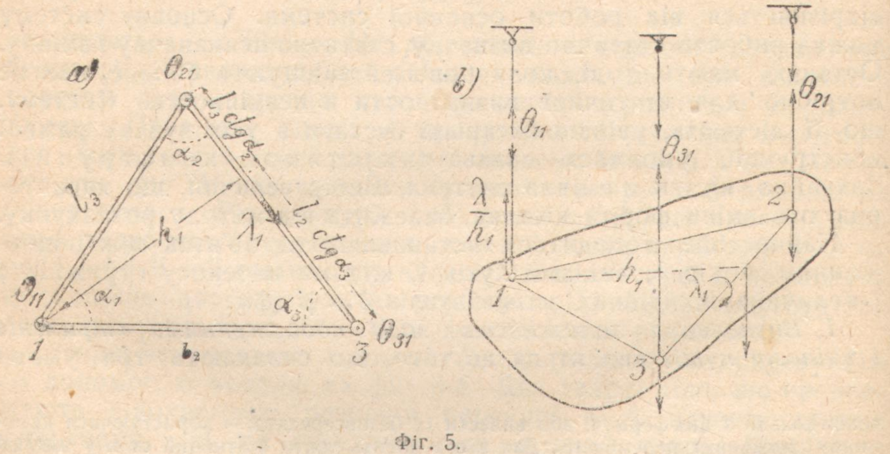
замкнености для кожного замкненого контуру, який увіходить до кістяка рами. Розгляньмо ряд прикладів.

а) Трикутній кістяк (фіг. 5-a). Завдано подовження трьох боків λ_1, λ_2, λ_3 (індекси тут визначають протилежні кути) і треба визначити збільшення трьох кутів θ_1, θ_2, θ_3. А що цей кістяк незмінний, то число рівнянь відповідає числу невідомих, — задача має одну розв'язку.



Фіг. 4.

Досить з'ясувати, як впливає одне подовження, наприклад λ_1 на три кути, вплив інших подовжень легко знайдемо круговим підставленням. Фіктивне обтяження твердого тіла, еквівалентного замкненому контурові, складається з відомого моменту, що його вектор λ_1 напрямлений по лінії 2 — 3, і трьох невідомих сил θ_{11}, θ_{21} і θ_{31}. А що фіктивне обтяження перебуває в рівновазі, то задача нічим не відрізняється від розшукання трьох зусиль, які спричинив у почепках момент λ_1 (фіг. 5-b).



Фіг. 5.

Замінімо момент λ_1 парою з раменом h_1. Лівий компонент пари напрямлений вздовж почепки 1, через те безпосередньо

$$\theta_{11} = \frac{\lambda_1}{h_1}$$

Правого компонента розкладаємо за законом важеля на напрями 2 і 3.

$$\theta_{21} = -\frac{\lambda_1}{h_1} \cdot \frac{l_2 \operatorname{ctg} \alpha_3}{l_1}; \quad \theta_{31} = -\frac{\lambda_1}{h_1} \cdot \frac{l_3 \operatorname{ctg} \alpha_2}{l_1}$$

Зробивши кругове підставлення, знайдемо аналогічні вирази для θ_{12} і θ_{13}. Повна зміна кута θ_1 буде

$$\theta_1 = \theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13} = \frac{\lambda_1}{h_1} - \frac{\lambda_2}{h_2} \cdot \frac{l_1 \operatorname{ctg} \alpha_3}{l_2} - \frac{\lambda_3}{h_3} \cdot \frac{l_1 \operatorname{ctg} \alpha_2}{l_3}$$

Звичайно зміни кутів трикутника виражають через відносні подовження

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{l_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\lambda_2}{l_2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{\lambda_3}{l_3}$$

Беручи на увагу, що $\frac{\lambda_1}{h_1} = \varepsilon_1 \frac{l_1}{h_1} = \varepsilon_1 (\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3)$, знайдемо

$$\theta_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \alpha_3 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \operatorname{ctg} \alpha_2 \tag{6}$$

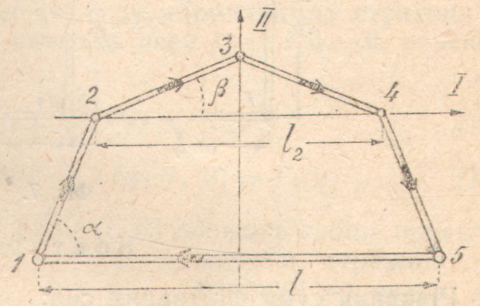
Так само дістанемо

$$\theta_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \operatorname{ctg} \alpha_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \operatorname{ctg} \alpha_3 \tag{7}$$

$$\theta_3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \operatorname{ctg} \alpha_2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \alpha_1 \tag{8}$$

Цей самий наслідок легко дістати, склавши рівняння моментів фіктивного обтяження навколо осей 2 — 3, 1 — 3 і 1 — 2. А що кожна вісь перетинає дві невідомі сили, то рівняння моментів міститимуть по одній невідомій θ_1, θ_2 або θ_3.

b) Симетричний п'ятикутній кістяк (фіг. 6)[1]. Три рівняння замкнености зв'язують п'ять збільшень кутів і стільки ж подовжень боків. Рівняння суми фіктивних сил буде



1

Фіг. 6.

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0 \tag{9}$$

Рівняння моментів навколо осі I

$$\theta_3 f - (\theta_1 + \theta_5) h + (\lambda_{1-2} + \lambda_{4-5}) \cos \alpha + (\lambda_{2-3} + \lambda_{3-4}) \cos \beta - \lambda_{5-1} = 0 \tag{10}$$

Рівняння моментів навколо осі II

$$(\theta_1 - \theta_5) \frac{l_1}{2} + (\theta_2 - \theta_4) \frac{l_2}{2} + (\lambda_{1-2} - \lambda_{4-5}) \sin \alpha +$$
$$+ (\lambda_{2-3} - \lambda_{3-4}) \sin \beta = 0 \tag{11}$$

[1]) На фіг. 6 пропущено розміри рамен f і h вузлів 3 і 1,5 відносно осі I.

c) Двопрогінний кістяк (фіг. 7). Нехай подовжуються тільки ріґелі 2 — 3 і 7 — 8.

Контур *A*.

Рівняння суми фіктивних сил:

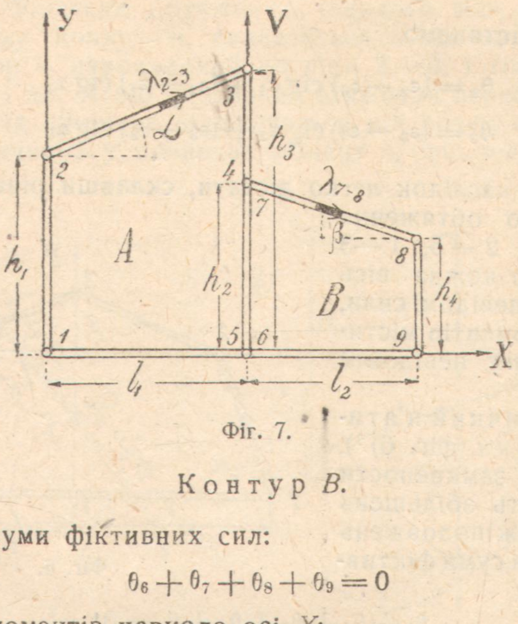
$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 0 \tag{12}$$

Рівняння моментів навколо осі X:

$$\theta_2 h_1 + \theta_3 h_3 + \theta_4 h_2 + \lambda_{2-3} \cos \alpha = 0 \tag{13}$$

Рівняння моментів навколо осі Y:

$$-(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5)\, l_1 + \lambda_{2-3} \sin \alpha = 0 \tag{14}$$



Фіг. 7.

Контур *B*.

Рівняння суми фіктивних сил:

$$\theta_6 + \theta_7 + \theta_8 + \theta_9 = 0 \tag{15}$$

Рівняння моментів навколо осі X:

$$\theta_7 h_2 + \theta_8 h_4 + \lambda_{7-8} \cos \beta = 0 \tag{16}$$

Рівняння моментів навколо осі V:

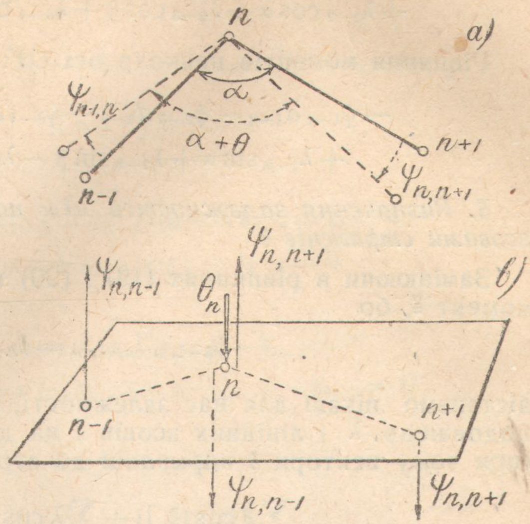
$$-(\theta_8 + \theta_9)\, l_2 - \lambda_{7-8} \sin \beta = 0 \tag{17}$$

2. Визначення залежностей між подовженнями і кутами перекосу стрижнів.

Кути ψ перекосу стрижнів уважають за додатні, коли стрижень обертається за годинниковою стрілкою. Між кутами перекосу ψ і змінами кутів θ є така очевидна залежність (фіг. 8-*а*):

$$\theta_n = -(\psi_{n,n+1} - \psi_{n-1,n}) \tag{18}$$

З погляду статики фіктивних сил рівність (18) відповідає заміні зосередженої сили θ компонентами ψ двох пар (фіг. 8-b). Коли виразити всі кути θ замкненого контуру через ψ і підставити до рівняння (1), то легко пересвідчитися, що воно справджується тотожно. Тому, щоб установити зв'язок між величинами λ і ψ, можна скористуватися тільки двома рівняннями моментів (2) і (3) щодо нерівнобіжних осей. Але одночасно одна з величин ψ в конкретних випадках розрахунку буває відома — а саме дорівнює нулеві або наперед завданій величині для стрижня, зв'язаного з землею.



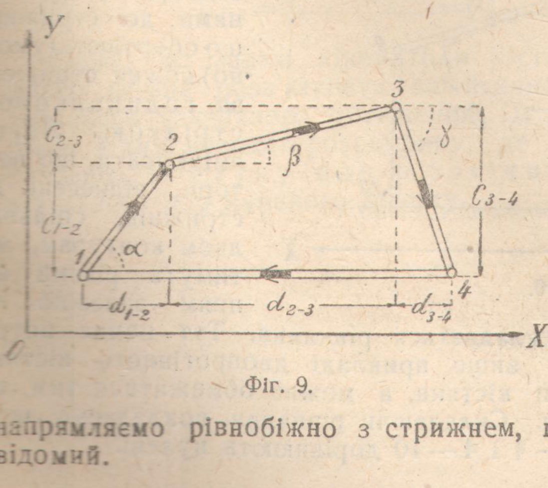
Фіг. 8.

Пари ψl можна замінити на вектор-моменти, що лежать у площині контуру, нормальні до стрижнів l. Рівняння моментів (2) і (3) навколо осей I — I і II — II перепишуться так:

$$\sum \psi l \sin(l, \mathrm{I}) + \sum \lambda \cos(\lambda, \mathrm{I}) = 0 \qquad (19)$$

$$\sum \psi l \sin(l, \mathrm{II}) + \sum \lambda \cos(\lambda, \mathrm{II}) = 0 \qquad (20)$$

Зауважимо, що $l \sin(l, \mathrm{I})$ і $l \sin(l, \mathrm{II})$ являють собою проекції довжин стрижнів на напрями нормальні до осей I — I і II — II, або, що те саме, різниці рамен кінців стрижня щодо осі. Отже, тут відіграє ролю тільки похил координатних осей, а розміщення їх щодо контуру не має значення.



Фіг. 9.

Чотирикутній кістяк (фіг. 9). Вибираємо прямокутні осі, при чому вісь OX напрямляємо рівнобіжно з стрижнем, що кут його перекосу відомий.

Рівняння моментів навколо осі OX:

$$\psi_{1-2}\, c_{1-2} + \psi_{2-3}\, c_{2-3} - \psi_{3-4}\, c_{3-4} +$$

$$+ \lambda_{1-2} \cos \alpha + \lambda_{2-3} \cos \beta + \lambda_{3-4} \cos \gamma - \lambda_{4-1} = 0 \qquad (21)$$

Рівняння моментів навколо осі OY:

$$- \psi_{1-2}\, d_{1-2} - \psi_{2-3}\, d_{2-3} - \psi_{3-4}\, d_{3-4} + \psi_{4-1}\, l +$$

$$+ \lambda_{1-2} \sin \alpha + \lambda_{2-3} \sin \beta - \lambda_{3-4} \sin \gamma = 0 \qquad (22)$$

3. Визначення залежностей між подовженнями і лінійними зсовами стрижнів δ.

Замінюючи в рівняннях (19) і (20) момент пари ψl на вектор-момент δ, бо

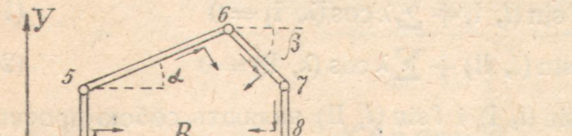
$$\psi_{n-1,\, n}\, l_{n-1,\, n} = \delta_{n-1,\, n}, \qquad (23)$$

дістанемо цікаві для нас залежності, як два рівняння проекцій подовжень λ і лінійних зсовів δ на дві осі, що перетинаються (при чому вектори δ нормальні до стрижнів l)

$$\sum \delta \cos (\delta, \mathrm{I}) + \sum \lambda \cos (\lambda, \mathrm{I}) = 0 \qquad (24)$$

$$\sum \delta \cos (\delta, \mathrm{II}) + \sum \lambda \cos (\lambda, \mathrm{II}) = 0 \qquad (25)$$

Як приклад, розглянемо кістяк складної рами (фіг. 10). Подовження стрижнів зображено векторами, що йдуть вздовж стрижнів, коли обходити контур за годинниковою стрілкою. Лінійні переміщення вузлів — векторами, нормальними до стрижнів, що обертають (умовно) кожен стрижень за годинниковою стрілкою. Легко зміркувати, що вектори, віднесені до стрижнів, спільних двом контурам, матимуть різний напрям залежно від контуру, для якого складається рівняння. Тут немає потреби, як у наведеному вище прикладі двопрогінного кістяка, нумерувати всі кути кістяка, а можна обмежитися тим, що понумерувати вузли. Складаючи рівняння, покладаємо, що δ і λ для „стрижнів“ 1 — 4 і 4 — 10 дорівнюють нулеві.



Фіг. 10.

Контур *A*.

Вісь OX:

$$\delta_{1-2} - \delta_{3-4} + \lambda_{2-3} = 0 \tag{26}$$

Вісь OY:

$$-\delta_{2-3} + \lambda_{1-2} - \lambda_{3-4} = 0 \tag{27}$$

Контур *B*.

Вісь OX:

$$\begin{aligned} &\delta_{2-5} + \delta_{5-6}\sin\alpha - \delta_{6-7}\sin\beta - \delta_{7-8} - \delta_{8-3} + \\ &+ \lambda_{5-6}\cos\alpha + \lambda_{6-7}\cos\beta - \lambda_{3-2} = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

Вісь OY:

$$\begin{aligned} &-\delta_{5-6}\cos\alpha - \delta_{6-7}\cos\beta + \delta_{3-2} + \\ &+ \lambda_{2-5} + \lambda_{5-6}\sin\alpha - \lambda_{6-7}\sin\beta - \lambda_{7-8} - \lambda_{8-3} = 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Контур *C*.

Вісь OX:

$$\delta_{4-3} + \delta_{3-8} - \delta_{8-9}\sin\gamma - \delta_{9-10} + \lambda_{8-9}\cos\gamma = 0 \tag{30}$$

Вісь OY:

$$-\delta_{8-9}\cos\gamma + \lambda_{4-3} + \lambda_{3-8} - \lambda_{8-9}\sin\gamma - \lambda_{9-10} = 0 \tag{31}$$

Користуючися цими рівняннями, слід узяти на увагу, що величини δ і λ з однаковими, але переставленими індексами одна одній дорівнюють, тобто

$$\delta_{2-3} = \delta_{3-2} \qquad \delta_{3-8} = \delta_{8-3} \qquad \delta_{3-4} = \delta_{4-3}$$

$$\lambda_{2-3} = \lambda_{3-2} \qquad \lambda_{3-8} = \lambda_{8-3} \qquad \lambda_{3-4} = \lambda_{4-3}$$

Отже, всі задачі кінематики кістяків рамних конструкцій легко можна розв'язувати аналітично за допомогою рівнянь рівноваги фіктивного обтяження. Ці задачі відіграють значну ролю в тих методах розрахунку, де рамну конструкцію розглядають як з л у к у о д н о п р о г і н н и х с т р и ж н і в простолінійного або ламаного обводу.

РОЗДІЛ II.

ПРОСТА РАМА.

§ 4. Статично визначна рама.

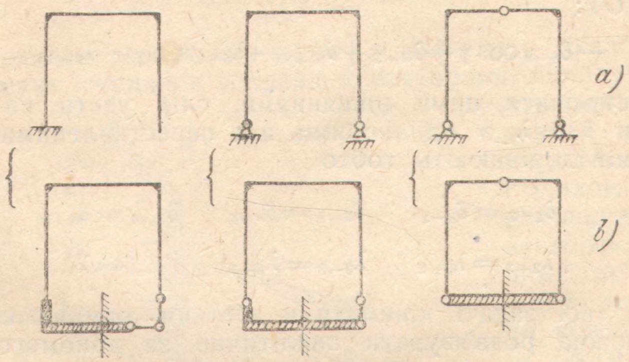
Найпростішу статично визначну раму, що складається з одного контуру, завсіди можна залічити до одного з трьох типів:

1) типу ламаної, або криволінійної консолі, заправленої одним кінцем,

2) типу тряма на двох опорах,

3) типу трисуставної рами (луку).

Зауважимо, що, заміняючи землю на абсолютно цупкий брусок і уводячи неробочі або опорні стрижні, перші два типи завсіди можна звести до основної схеми — замкненого трисуставного контуру (фіг. 11). Складніші багатопрогінні



Фіг. 11.

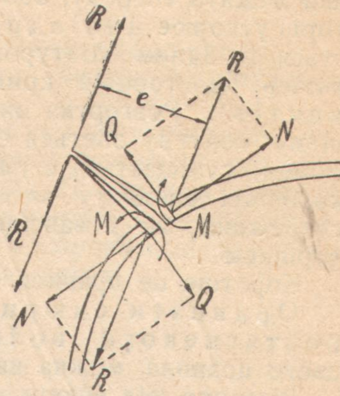
і багатоосадові статично визначні рами зводяться до комбінації основних типів. Їх теж можна представити як систему трисуставних контурів.

Першочергове завдання розрахунку рамної конструкції є визначити внутрішні сили в усіх перекроях — згинні моменти M, поперечні сили Q і нормальні сили N.

Згинний момент, або момент усіх сил, які лежать по один бік від розглядуваного перекрою, узятий навколо центра ваги цього перекрою, уважають за додатний, коли він обертає дальшу (ту, що лежить попереду) частину контуру за годинниковою стрілкою (отже ту, яка лежить ззаду, проти годинникової стрілки). Коли маємо пружні стрижні, тоді додатний момент спричиняє на внутрішньому боці контуру подовження волокна, на зовнішньому — вкорочення.

Поперечною силою звуть проекцію всіх сил, що лежать по один бік виділеного перекрою, на напрям зовнішньої нормалі до осі елементу. Поперечну силу можна розглядати як сукупність двох сил, що з них одна зсуває перекрій, який лежить спереду, в напрямі зовнішньої нормалі, а друга зсуває перекрій, що лежить ззаду, в тому самому розрізі, в бік унутрішньої нормалі.

Нормальна сила — це проекція всіх сил, що лежать по один бік, на вісь елементу, уважаючи, що вісь напрямлена вздовж контуру. Нормальна сила теж є сукупність двох сил: одна зсуває перекрій, що лежить спереду, в напрямі контуру, друга — перекрій, який лежить ззаду, проти напряму контуру. Додатна нормальна сила спричиняє в елементі стиск. З погляду механіки визначення величин M, Q і N для різних перекроїв еквівалентне зведенню системи сил, які лежать по один бік від перекрою до центра ваги перекрою, як до полюса, і координатних осей, напрямлених по дотичній і нормалі до перекрою. Маючи M, Q і N в якомусь перекрої, можна визначити вислідну однобічних (або внутрішніх) сил (фіг. 12):



Фіг. 12.

$$R = \sqrt{Q^2 + N^2} \tag{32}$$

Рамено вислідної щодо центра ваги перекрою

$$e = \frac{M}{R} \tag{33}$$

Щоб визначити M, Q, N в якомусь перекрої B, конче треба мати вислідну внутрішніх сил в якомусь іншому перекрої A, що його звуть початковим. Цю вислідну R_A теж можна завдати через M_A, Q_A і N_A. Прилучаючи до впливу R_A на даний перекрій ще й вплив місцевого обтяження дільниці AB, дістанемо всі потрібні дані, щоб визначити M_B, Q_B, N_B.

Маючи статично визначну раму, знаходити початкові M, Q, N не важко. У випадку консолі за початковий перекрій уважають вільний кінець, де M, Q, N дорівнюють нулеві, чи наперед завданим величинам (їх визначають з навантажень кінця). У випадку трама на двох опорах момент над опорою дорівнює нулеві, чи наперед завданій величині, компоненти опорної реакції легко визначити з умов статики. У випадку трисуставної рами згинний момент у суставі дорівнює нулеві, або наперед завданій величині. Q і N можна визначити з умов статики.

Зміна внутрішніх сил від перекрою до перекрою інтерпретується графічно за допомогою епюр; побудування епюр M, Q, N і визначення внутрішніх сил становить по суті ту саму задачу.

Відкладімо в кожному перекрої, як вектор, нормальний до площини контуру, момент, що впливає на частину контуру, яка лежить спереду, або згинний момент. Сукупність усіх векторів утворює циліндричну поверхню з твірною, що зливається з даним контуром. Кінці векторів-моментів лежать на якійсь просторовій кривій, що її називатимемо кривою моментів[1]. Розгортка циліндричної моментної поверхні на площину контуру зветься епюрою моментів. Кожен вектор-момент суміщається з площиною контуру через обертання навколо осі елементу за годинниковою стрілкою. При тому спостережник, як і завсіди, обходить контур за годинниковою стрілкою.

Коротше це правило можна зформулювати так:

Ординати епюри моментів слід відкладати від розтягненого волокна. Коли раз-у-раз додержувати цього правила, можна на епюрах моментів знака не ставити.

Відмінно від епюри моментів, епюру поперечних сил дістають безпосередньо в площині рисунка, коли в кожному перекрої відкласти від осі контуру величину поперечної сили. Згідно з правилом знаків додатні Q відкладають уздовж зовнішньої нормалі, а від'ємні — вздовж унутрішньої.

Щоб зручніш зображати, ординати епюри нормальних сил відкладають не в напрямі самих нормальних сил, а нормально до осі елементу контуру, тобто так само, як і поперечні сили. Маючи M, Q, N в кожному перекрої, можна перевірити міцність рами, а так само визначити її деформацію.

Вивчаючи деформацію, елементи рами розглядають як однорідні пружні бруси малої кривини, що до них можна застосувати всі твердження теорії трямів, які працюють у границях пружности й стійкости. Щоб визначити деформацію рами або переміщення центра ваги перекроїв δ, а так само їх поверти φ (див. § 1), конче треба найперше встановити фіктивне обтяження контуру. Маючи фіктивне обтяження, можна визначити переміщення якогось одного перекрою, що його вважають за початковий, а далі й переміщення якого завгодно іншого перекрою за правилами, поданими в § 1.

Фіктивне обтяження рами може бути трьох категорій.

1) Незалежні наперед завдані зосереджені фіктивні тягарі θ (зміни кутів), місцеві подовження λ_N і зсови λ_Q. З ними

---

[1]) Зауважимо, що додатні θ і додатні M зображають векторами, напрямленими в протилежні боки. Це виходить з правила знаків для θ й M. Робота додатного моменту на додатній зміні кута є величина від'ємна.

доводиться мати діло, ураховуючи неточне виготовлення конструкції, осідання опор, а так само, як побачимо далі, будуючи інфлюенти.

2) Коли температура осі рами змінюється на t°, тоді відносне подовження, або інтенсивність розподіленого вздовж осі фіктивного моментного обтяження буде:

$$\frac{d\lambda_N^{(t)}}{ds}=\alpha t, \tag{34}$$

де α — сучинник лінійного розширення матеріялу конструкції.

Коли зовнішня і внутрішня поверхня контуру нагріваються неоднаково, тоді вісь скривлюється.

Позначімо: t_u — збільшення температури внутрішнього волокна рами, t_0 — зовнішнього, h — ширину елементу, рахуючи за фасадом рами, нормально до її осі. Приймаючи лінійний закон поширення температури в нормальному перекрої, дістанемо для збільшення кута між двома перекроями, віддаленими на ds (елементарного фіктивного тягара) вираз:

$$d\theta^{(t)}=\frac{\alpha(t_u-t_0)\,ds}{h}$$

Звідси інтенсивність кутової деформації, або силове розподілене фіктивне обтяження буде

$$\frac{d\theta^{(t)}}{ds}=\frac{\alpha(t_u-t_0)}{h} \tag{35}$$

3) Фіктивне обтяження, що його спричиняє робота рами, як пружної системи підо впливом завданого обтяження, легко можна здобути з епюр M, Q, N на підставі відомих формул опору матеріялів. Згинний момент M на протязі елементу ds дає елементарний фіктивний тягар $\frac{M\,ds}{EI}$, що його вектор напрямлено протилежно до вектора M. Поперечна сила Q дає елементарний зсов перекрою, що лежить спереду, у середину контуру на величину $\frac{Q\,ds}{\gamma G\omega}$, вектор-момент напрямлений проти Q. Нормальна сила N дає на протязі ds повздовжнє переміщення перекрою, що лежить спереду, вектор-момент якого $\frac{N\,ds}{EF}$ напрямлений в бік, протилежний до чину N.

Звідси:

а) Інтенсивність силового фіктивного обтяження (кутової деформації):

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{M}{EI} \tag{36}$$

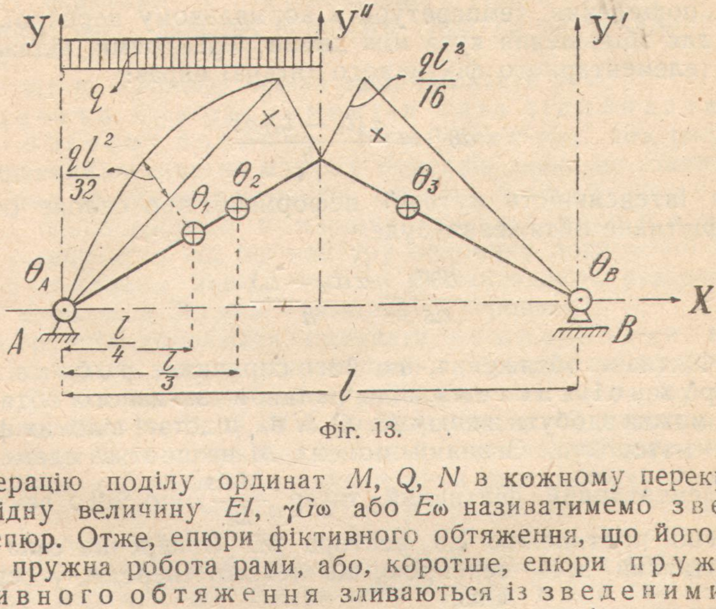
b) Відносне вкорочення елементів (інтенсивність фіктивного моментного обтяження, вектор-моменти проти напряму стрижнів):

$$\frac{d\lambda_N}{ds} = \frac{N}{E\omega} \tag{37}$$

c) Відносний зсов (інтенсивність фіктивного моментного обтяження, вектор-моменти нормальні до осі стрижнів):

$$\frac{d\lambda_Q}{ds} = \frac{Q}{\gamma G\omega} \tag{38}$$

У формулах (36) — (38) позначені E — модуль пружности при розтягу і стиску, G — модуль пружности при зсові, ω — площа, I — момент інерції поперечного перекрою, γ — числовий сучинник, що залежить від форми площі.



Фіг. 13.

Операцію поділу ординат M, Q, N в кожному перекрої на відповідну величину EI, $\gamma G\omega$ або $E\omega$ називатимемо зведенням епюр. Отже, епюри фіктивного обтяження, що його спричиняє пружна робота рами, або, коротше, епюри пружного фіктивного обтяження зливаються із зведеними епюрами M, Q, N. Та при тому завсіди треба пам'ятати, що фіктивне силове обтяження впливає нормально до площини контуру, моментне — в площині контуру.

Замінивши розподілене фіктивне обтяження на висліді фіктивні сили й моменти, зводимо задачу визначення переміщень до найпростіших операцій статики твердого тіла. Питання про визначення переміщень далі, в зв'язку з будуванням інфлюент, розглянемо докладніше, а тут обмежимося на найпростішому прикладі.

Приклад. Визначимо переміщення правої опори і прогин хребта ламаного тряма, обтяженого однобічним, рівномірно розподіленим обтяженням (фіг. 13). Деформацією від впливу повздовжніх і поперечних сил нехтуємо. Щодо цупкости стрижнів, то припускаємо, що вона стала. Висоту хребта зазначімо через h.

Насамперед будуємо епюру моментів, яку тут, щоб не затемнити рисунка, відкладаємо від стиснутого, а не розтягненого волокна.

Епюра моментів лівої частини розпадається на трикутню з ординатою у хребті $\frac{ql^2}{16}$ і параболічну з середньою ординатою $\frac{ql^2}{32}$. Праворуч маємо тільки трикутню епюру. Вислідні фіктивні тягарі, що дорівнюють площам епюр моментів, поділеним на EI, будуть:

$$\theta_1 = \frac{2}{3} s \cdot \frac{ql^2}{32} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{ql^2 s}{48\,EI}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} s \cdot \frac{ql^2}{16} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{ql^2 s}{32\,EI}$$

$$\theta_3 = \theta_2 = \frac{ql^2 s}{32\,EI}$$

Відшукуване переміщення правої опори дорівнює моментові фіктивного обтяження навколо осі AB. А що ця вісь перетинає невідомі фіктивні сили (збільшення кутів) θ_A і θ_B, то до виразу моменту вони не увійдуть, і ми знайдемо:

$$\Delta_B = \theta_1 \cdot \frac{h}{2} + \theta_2 \cdot \frac{2}{3} h + \theta_3 \cdot \frac{2}{3} h = \frac{ql^2 sh}{96\,EI} + \frac{ql^2 sh}{24\,EI} = \frac{5\,ql^2 sh}{96\,EI}$$

Прогин у хребті дорівнює моментові однобічних фіктивних сил навколо сторчової осі, що проходить через хребет. Конче треба попереду знайти початковий фіктивний тягар θ_A. Щоб його визначити, користуються умовою, що прогин сустава B дорівнює нулеві. Складаємо рівняння моментів навколо сторчової осі, що проходить через B:

$$\theta_A l + \theta_1 \cdot \frac{3}{4} l + \theta_2 \cdot \frac{2}{3} l + \theta_3 \cdot \frac{1}{3} l = 0,$$

звідки

$$\theta_A = -\frac{1}{l} \left(\theta_1 \frac{3}{4} l + \theta_2 \frac{2}{3} l + \theta_3 \frac{1}{3} l \right)$$

Зробивши підставлення, знайдемо

$$\theta_A = -\frac{3}{64} \frac{ql^2 s}{EI}$$

Складаємо момент навколо осі Y''.

$$\delta = \theta_A \cdot \frac{l}{2} + \theta_1 \cdot \frac{l}{4} + \theta_2 \cdot \frac{l}{6} = -\frac{5}{384}\frac{ql^2s}{EI}$$

Знак (—) показує, що прогин δ напрямлений в бік протилежний осі Y, тобто вниз.

Цю саму задачу можна трактувати, виходячи з поняття про замкнений контур. Доповнимо конструкцію стрижнем AB, причому припустимо, що він може змінити свою довжину на невідому величину λ. Крім того, в A і B маємо невідомі збільшення кутів θ_A і θ_B. Задача зводиться до визначення моменту λ фіктивної пари і двох фіктивних сил θ_A і θ_B, що врівноважують активне фіктивне обтяження θ_1, θ_2 і θ_3. Як і в статиці твердого тіла, де визначення вислідної системи сил можна звести до визначення зрівноважної, так і тут обчислення переміщень незамкненого контуру зводиться до визначення тих деформацій, за яких контур залишається замкнений. Коли контур статично визначний, незмінний, тоді задача визначення переміщень, подібно до задачі визначення реакцій твердого тіла, має одну розв'язку.

§ 5. Початкова моментна площина та її властивості.

Розгляньмо з загальнішого погляду питання про побудування епюри моментів замкненої рами.

На підставі принципу складання чину сил, згинний момент у кожному перекрої B рами можна представити, як суму двох моментів: 1) згинного моменту, що його спричинили початкові умови, тобто величини M_A, Q_A, N_A в якомусь попередньому перекрої A; 2) згинного моменту, спричиненого місцевим (або зовнішнім) обтяженням дільниці AB і підрахованого, припустивши, що $M_A = Q_A = N_A = 0$. Для рами в цілому епюру моментів можна розглядати як суму двох епюр: епюри моментів, спричинених початковими умовами, і епюри моментів від місцевого обтяження.

Визначаємо моменти від місцевого обтяження, будуємо циліндричну поверхню моментів, розгортаючи її далі на площину контуру, — за правилами для консолі з вільним кінцем A. Сустави на увагу не беруть і цілий брус розглядають, як цупкий. Щоб визначати початкові величини M_A, Q_A, N_A, користуються трьома умовами статики. Отож, напр., коли контур трисуставний, то, виразивши кожен з моментів у суставі, як суму моменту від місцевого обтяження і моменту, спричиненого трьома невідомими початковими умовами, і прирівнявши його нулеві, матимемо три рівняння з трьома невідомими для визначення M_A, Q_A, N_A [1]). Виразимо аналітично згинні моменти, що залежать

[1]) Цей спосіб по суті є частковий випадок методу замінювання стрижнів, що його застосовують, розраховуючи зв'язні (ферми) складного утворення.

від початкових умов M_A, Q_A, N_A. Умістімо початок координат у точці A, вісь U напрямімо вздовж елементу (дотичної), ідучи вздовж контуру, вісь V вздовж зовнішньої нормалі, вісь M або Z нормально до контуру, стрілкою до спостережника (фіг. 14).

Рівняння кривої моментів уздовж незавантаженої дільниці буде:

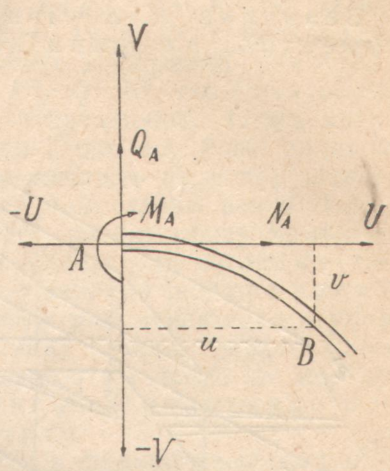
$$M_{u,v} = M_A + Q_A u - N_A v, \quad (39)$$

де u, v — координати точок осі даного контуру. Очевидно, крива моментів лежить цілком у площині, що її визначає рівняння (39). Цю площину умовмося називати **початковою моментною площиною**.

Відтинок, що його відтинає початкова площина на осі Z, дорівнює M_A.

Похил початкової площини вздовж осі U, або обертання навколо осі V за годинниковою стрілкою:

$$\frac{\partial M}{\partial u} = Q_A \quad (40)$$



Фіг. 14.

Похил початкової площини вздовж осі V, або обертання навколо осі U проти годинникової стрілки

$$\frac{\partial M}{\partial v} = -N_A \quad (41)$$

(Похил площини вздовж даної осі ми вважаємо за додатний, коли під час руху вздовж осі ординати площини зростають).

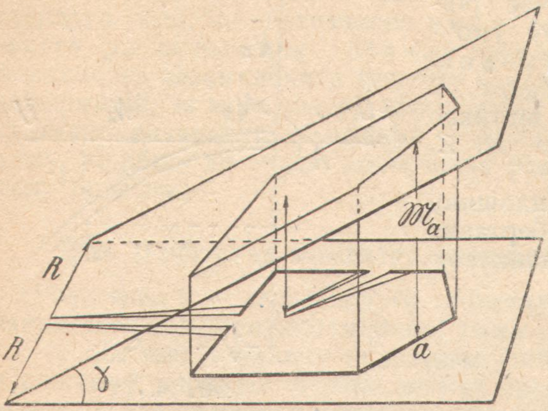
Очевидно, що який завгодно перекрій контуру можна взяти за початковий, і через те, коли є моментна площина, то крім моменту M, змірюваного ординатою площини, можна визначити Q і N в цьому перекрої, як похил площини вздовж осі елементу і похил вздовж **унутрішньої** нормалі. (Як для цього скористуватися епюрою моментів, це буде зазначено далі).

Зауважимо, що ордината точки початкової площини, що лежить **поза контуром**, теж має цілком конкретну вартість: вона дорівнює моментові в точці **петлі**, прилученої до яких завгодно двох суміжних перекроїв, відділених розрізом (фіг. 15). Змірявши похил уздовж елементу петлі і нормально до нього, знайдемо Q і N для цього елементу.

Маючи початкову моментну площину, можна дуже просто визначити за величиною і положенням спільну для цілого контуру **в и с л і д н у в н у т р і ш н і х с и л** R. Очевидно, в точках, де R перетинає вісь контуру, згинний момент дорівнює нулеві. Через те лінія чину R зливається із слідом початкової площини на площині контуру (фіг. 15). Позначімо через r рамена точок контуру щодо R. Тоді рівняння початкової площини буде

$$M_r = Rr \tag{42}$$

В е л и ч и н а R д о р і в н ю є н а й б і л ь ш о м у п о х и л о в і м о м е н т н о ї п л о щ и н и д о п л о щ и н и к о н т у р у. Напрям вислідної визначимо з умови, що додатному моментові відповідає обертання дальшої частини контуру за годинниковою стрілкою.



Фіг. 15.

Легко бачити, що розглянена попереду задача визначення величин M_A, Q_A, N_A з умов розміщення суставів, еквівалентна п р о в е д е н н ю п о ч а т к о в о ї п л о щ и н и ч е р е з т р и з а в д а н і т о ч к и. У пляні ці точки зливаються з суставами, їх вишина над площиною контуру дорівнює моментам у суставах від місцевого (зовнішнього) обтяження. На підставі принципу однозначности розв'язок статики, не важко зробити загальніший висновок: згинні моменти в статично визначному замкненому контурі можна визначити нескінченним числом способів. Досить знайти їх для якої завгодно іншої статично визначної рами, що має форму завданої і обтяжена тими самими зовнішніми силами, але відрізняється тим, що сустави (або взагалі опорні закріплення) інакше розміщені; далі слід провести п о ч а т к о в у площину так, щоб задовольнити три умови статики, які дає дійсне розміщення суставів. Ординати кривої моментів, відлічені від початкової площини, і дадуть остаточні величини моментів.

§ 6. Статично невизначна замкнена рама.

Безсуставний замкнений контур являє собою систему тричі статично невизначну. Кожен сустав зменшує степінь статичної невизначности на одиницю. Отже, односуставний контур двічі, а двосуставний контур один раз статично невизначний. Задачу статичного розрахунку ставлять так: дано місцеве обтяження і місцеву вимушену деформацію рами (наприклад, температурну, або через неточне збирання) і треба визначити M, Q, N в усіх перекроях, а в деяких випадках і переміщення усіх перекроїв.

Почнімо з безсуставної рами, бо, як побачимо далі, дво- і односуставну раму можна розглядати, як частковий випадок односуставної. Розріжемо раму в якомусь перекрої A, перетворивши її на систему статично визначну як незамкнений цупкий брус. Для цієї системи, яку звемо основною, визначимо згинні моменти M^0, поперечні сили Q^0 і повздовжні сили N^0, а так само з'ясуємо елементи деформації — як пружної, тобто такої, що залежить від M^0, Q^0, N^0, так і вимушеної (температурної і наперед завданої зосередженої). Отже, матимемо активне фіктивне обтяження, що під його впливом суміжні перекрої A розійдуться і замкненість буде порушено.

У дійсності в перекрої A буде прикладено невідомі M_A, Q_A, N_A, що дадуть свою додаткову плоску криву моментів, додаткові поперечні й повздовжні сили, і, як наслідок — так само й фіктивне обтяження, що його назвемо реактивним.

Щоб визначити невідомі, в цьому разі немає досить умов статики, як при статично визначній рамі, і конче треба використати умови деформації. Вони полягають у тому, що контур залишається замкнений. Отже, активне й реактивне обтяження мають зрівноважитися.

Визначивши реактивне обтяження в функції невідомих M_A, Q_A і N_A і склавши три рівняння рівноваги, визначимо M_A, Q_A і N_A. Задачу можна розв'язати нескінченним числом способів. Насамперед, визначаючи активне фіктивне обтяження, можна взяти як основну систему — яку завгодно статично визначну раму, яку здобувають з даного контуру, знищуючи три по-в'язі. Початкову моментну площину можна завдати якими завгодно трьома параметрами, що характеризують її положення, а не тільки величинами M_A, Q_A, N_A. Складаючи рівняння рівноваги фіктивного обтяження, можна скористуватися довільними координатними осями (див. § 3).

Обираючи основну систему, слід намагатися, щоб активне фіктивне обтяження, що залежить від епюр M^0, Q^0, N^0, можна було б визначити якнайпростіш. Три невідомі параметри і координатні осі бажано вибрати так, щоб у рівняннях рівноваги невідомі поділилися. Так чи так, остаточна вартість внутрішніх сил для кожного перекрою становитиме суму двох доданків: одного, що відбиває роботу основної статично визначної системи, і другого, який залежить від невідомих.

$$M_{x,y} = M^0_{x,y} + \mathfrak{M}_{x,y} \tag{43}$$

$$Q_{x,y} = Q^0_{x,y} + \mathfrak{Q}_{x,y} \tag{44}$$

$$N_{x,y} = N^0_{x,y} + \mathfrak{N}_{x,y} \tag{45}$$

Тут x, y — координати точок контуру щодо якоїсь, покищо невизначеної, системи координат.

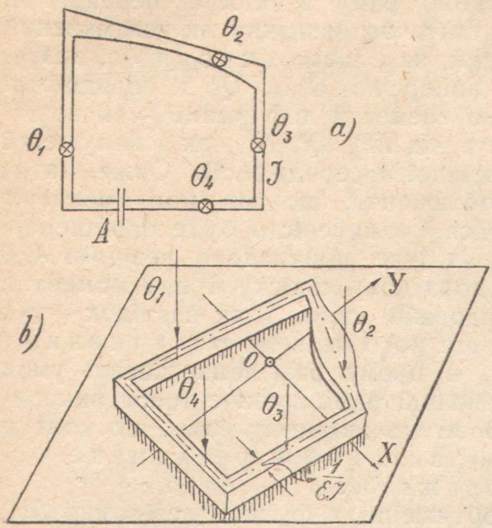
Обмежимося тут розрахунком, що ґрунтується на справджуваному в переважній більшості випадків засновку, що деформація від повздовжніх і поперечних сил мала і що нею можна нехтувати, порівнюючи з деформацією згину, отже, реактивне фіктивне обтяження є функція тільки згинних моментів $\mathfrak{M}$.

Цей засновок у зв'язку з тим, що кінці вектор-моментів $\mathfrak{M}$ лежать у площині, дає змогу дати розв'язку в дуже зручній, щоб застосовувати на практиці, формі.

Задача, як ми бачили, зводиться до визначення площини $\mathfrak{M}$ з умови, щоб розподілене по осі реактивне фіктивне обтяження подовжинної інтенсивности

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\mathfrak{M}}{EI} \tag{46}$$

зрівноважило завдане активне фіктивне обтяження.



Фіг. 16.

Щоб розв'язати задачу, скористуємося з аналогії з опору матеріялів. Уявімо абсолютно цупку позему раму, що має в пляні форму осі розраховуваної рами і спирається на пружну основу своєю нижньою поверхнею (фіг. 16). Цю раму, додержуючи деяких умов, що за них говоритимемо далі, називатимемо взаємною із завданою. Нехай змінна ширина опорної постелі в кожному перекрої дорівнює b, сучинник пружної основи k_0, осід, вимірюваний за віссю контуру, z. Обтяження й осід цієї рами уважаємо за додатні, коли вони напрямлені зверху вниз.

Подовжинна інтенсивність розподіленого вздовж осі взаємної рами реактивного обтяження, очевидно, буде

$$\frac{dP}{ds} = -z \cdot (k_0 b) \tag{47}$$

Знак (—) показує, що коли осід додатний, реакція напрямлена знизу вгору. Епюра осідів, що, як припускаємо, дуже малі, являє собою площину. Положення цієї площини визначаємо з умов рівноваги дійсного активного й реактивного обтяження.

Зіставляючи умови замкнености й умови рівноваги завданої і взаємної рами, а так само формули (46) і (47), висновуємо, що коли фіктивне обтяження першої числово дорівнює справжньому обтяженню другої, і крім того в кожному перекрої додержано умови, що подовжинна інтенсивність реакції на одиницю осіду дорівнює величині оберненої цупкости, тобто

$$k_0 b = \frac{1}{EI}, \tag{48}$$

то моменти $\mathfrak{M}$ числово дорівнюють, а щодо знака протилежні осідам z, тобто

$$\mathfrak{M} = -z \tag{49}$$

Щоб визначити осіди z, можна скористуватися формулами позацентрового стиску. Коли $k_0 = 1$, осід по осі числово дорівнює стискній напрузі n в тій самій точці на поверхні пружної основи.

Отже, коли за (44) зробити так, щоб ширина взаємної рами в кожному перекрої числово дорівнювала величині оберненої цупкости

$$b = \frac{1}{EI}, \tag{50}$$

то моменти $\mathfrak{M}$ можна обчислити, як напруги по осі постелі стрижнів взаємної рами:

$$\mathfrak{M} = -n \tag{51}$$

За додатні вважаємо тут стискні напруги.

Пляна постелі взаємного тряма на підставі (45) називатимемо епюрою обернених цупкостей. Інтеґрал

$$F = \int^{s} \frac{ds}{EI} \tag{52}$$

умовмося називати площею епюри обернених цупкостей. Центр ваги O епюри обернених цупкостей назвемо пружним центром. Визначимо за відомими правилами головні осі O_X і O_Y і головні центральні моменти інерції епюри обернених цупкостей

$$J_X = \int^{s} \frac{y^2\,ds}{EI} \tag{53}$$

$$J_Y = \int^{s} \frac{x^2\,ds}{EI} \tag{54}$$

Зауважимо, що хоч епюру обернених цупкостей ми інтерпретуємо як площу, але за розумінням аналогії, відбитим безпосередньо у формулах (52), (53), (54), обчислюють величину F, визначають центр ваги і величини J_X і J_Y за правилами для **важкої лінії**, що має подовжинну вагу $b = \frac{1}{EI}$, а не для площі. Можна цілком користуватися уявленням про площу, коли уважати, що ширина b нескінченно мала. Тоді моменти інерції елементу $b\,ds$ щодо його повздовжньої осі ds, як нескінченно малі другого порядку, обертаються в нуль, як і моменти інерції елементу важкої лінії щодо тієї самої осі.

Коли один із стрижнів, що увіходять до складу замкненого контуру, є абсолютно цупкий (напр., „земля" у рамі з заправленими п'ятами), то епюра обернених цупкостей матиме на протязі цього стрижня дільницю з нульовим подовжинним сучинником основи, або, умовно, з нульовою шириною. Через те, напр., рамі з заправленими п'ятами відповідає як взаємний абсолютно цупкий ламаний брус з вільними кінцями[1]).

Суму активних фіктивних обтяжень, або вислідний фіктивний тягар, назвемо θ, моменти фіктивного обтяження навколо головних осей $M_{X\theta}$ і $M_{Y\theta}$. Позначімо через x_θ і y_θ координати вислідного фіктивного тягара. Очевидно, коли $\theta \neq 0$,

$$M_{X\theta} = \theta y_\theta; \quad M_{Y\theta} = -\theta x_\theta \tag{55}$$

Виражаючи $\mathfrak{M}_{x,y}$, як напругу в точці x, y від позацентрового стиску епюри обернених цупкостей фіктивним обтяженням, дістанемо

$$\mathfrak{M}_{x,y} = -\left[\frac{\theta}{F} + \frac{M_{X\theta}}{J_X} y - \frac{M_{Y\theta}}{J_Y} x\right] = -\theta\left[\frac{1}{F} + \frac{y_\theta y}{J_X} + \frac{x_\theta x}{J_Y}\right] \tag{56}$$

Друга форма придатна тільки тоді, коли $\theta \neq 0$. Отже, задачу визначення моменту $\mathfrak{M}$ в якому завгодно перекрої безсуставного замкненого контуру розв'язано.

Формулу (56), що дає момент від невідомих у точці безсуставної рами (фіг. 17-a), можна легко поширити й на випадок односуставного й двосуставного контуру. Сустав можна представити, як **перекрій, що має нескінченно малу цупкість** EI, отже, епюра оберненої цупкости матиме в цьому перекрої **нескінченно велику, хоч і зосереджену на нескінченно малому елементі площу.**

Через те, коли в контурі є сустав (фіг. 17-b),

$$F = \infty \tag{57}$$

Щодо пружного центра (центра ваги епюри оберненої цупкости), то він зливається з суставом. Головні центральні мо-

---

[1]) Зауважимо також, що детальне вивчення властивостей взаємної рами приводить до потреби умістити в місцях опор основної рами — сустави, що їх вісь зливається з напрямом опорних стрижнів. З цими суставами доводиться мати діло, інтерпретуючи епюру прогинів замкненої рами, як епюру моментів рами взаємної.

менти інерції відмінні від нуля, бо площа, зосереджена на осі, на момент інерції не впливає.

Для односуставної рами формула (56) набуває вигляду:

$$\mathfrak{M}_{x,\,y} = -\left[\frac{M_{X_\theta}}{J_X}\cdot y - \frac{M_{Y_\theta}}{J_Y}\cdot x\right] \tag{58}$$

Очевидно, площина $\mathfrak{M}$ перетинає площину рами в суставі.

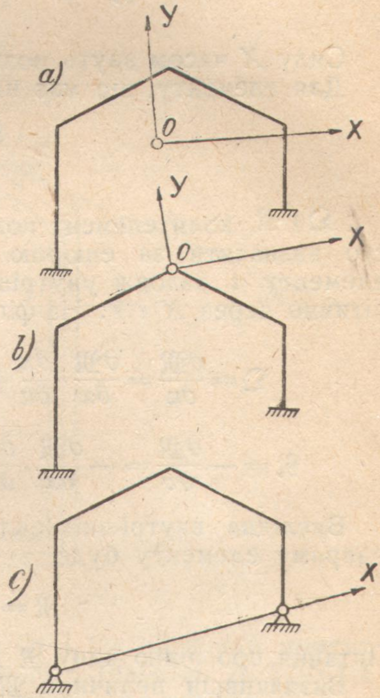
Коли рама має два сустави (фіг. 17-c), то $F=\infty$, пружний центр займає невизначене положення на прямій, що сполучає сустави. Ця вісь одночасно є одна з двох головних осей — саме вісь мінімальних моментів інерції, бо момент інерції навколо всякої іншої осі дорівнює безконечності. Візьмімо вісь, що сполучає сустави, за вісь Ox. Тоді

$$F = J_Y = \infty\,;\; J_X \neq \infty \tag{59}$$

$$\mathfrak{M}_{x,\,y} = -\frac{M_{X_\theta}}{J_X}\cdot y \tag{60}$$

Початкова площина $\mathfrak{M}$ перетинає обидва сустави.

Легко бачити, що ми дістанемо такі самі наслідки, коли, розглядаючи рівновагу взаємної абсолютно цупкої рами на пружній основі, припустимо в місцях суставів нерухомі опори. У рамі з суставами активне фіктивне обтяження врівноважується одночасно і *розподіленим* вздовж контуру і *зосередженим* у суставах реактивним обтяженням.



Фіг. 17.

Формула (56) є, отже, *універсальна* для визначення згинних моментів, спричинених впливом зайвих закріплень у статично невизначній замкненій рамі (звісно, в межах припущення, що деформації від повздовжніх і поперечних сил такі невеликі, що їми можна нехтувати).

Перейдімо до визначення поперечних і повздовжніх сил.

Величини $\mathfrak{Q}$ і $\mathfrak{N}$ дорівнюють проєкціям вислідної внутрішніх сил $\mathfrak{R}$ на нормалю й дотичну до елементу (фіг. 18) [1]. Величина $\mathfrak{Q}$ і $\mathfrak{N}$ залежить тільки від того, як похилений елемент до координатних осей. Для всіх елементів, рівнобіжних і однаково напрямлених з віссю Ox, назвемо поперечну й повздовжню силу

[1]) На фіг. 18 пропущено стрілочки векторів $\mathfrak{Q}$ і літеру O — зазначення пружного центра.

відповідно через Y і X, виражаючи цим, що $\mathfrak{Q}$ і $\mathfrak{N}$ дорівнює проекціям $\mathfrak{R}$ на координатні осі Oy і Ox. Y дорівнює похилові площини $\mathfrak{M}$ вздовж осі Ox, X — похилові вздовж осі — Oy. Диференціюючи (56), знайдемо:

$$\mathfrak{Q}=Y=\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}=\frac{M_{Y\theta}}{J_Y}=-\frac{\theta y_\theta}{J_Y} \tag{61}$$

$$\mathfrak{N}=X=-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}=\frac{M_{X\theta}}{J_X}=\frac{\theta x_\theta}{J_X} \tag{62}$$

Силу X часом звуть розпором рами.

Для елементу, що має напрям і течію осі Y, буде:

$$\mathfrak{Q}=-X \tag{61'}$$

$$\mathfrak{N}=Y \tag{62'}$$

$\mathfrak{Q}$ і $\mathfrak{N}$, коли елемент похилений довільно, можна дуже просто визначити за епюрою $\mathfrak{M}$, як похил площини вздовж осі елементу і вздовж унутрішньої нормалі. Виразимо $\mathfrak{Q}$ і $\mathfrak{N}$ аналітично через X і Y. На фіг. 18 кут α від'ємний.

$$\mathfrak{Q}=\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial u}=\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{du}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{du}=Y\cos\alpha-X\sin\alpha \tag{63}$$

$$\mathfrak{N}=-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial v}=-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dv}-\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dv}=Y\sin\alpha+X\cos\alpha \tag{64}$$

Вислідна внутрішніх сил для цілого контуру незалежно від напряму елементу буде

$$\mathfrak{R}=\mp\sqrt{X^2+Y^2} \tag{65}$$

Питання про лінію чину $\mathfrak{R}$ докладніше розглядаємо в § 8.

Визначивши величини $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{N}$ в усіх перекроях, остаточну величину внутрішніх сил знайдемо за формулами (43) — (45).

Ми дістали розв'язку (56), виходячи з аналогії умов рівноваги твердого тіла на пружній основі й умов замкнености пружного контуру. Цей спосіб дуже добрий в усіх випадках, коли треба виразити внутрішні сили в функції завданих деформацій, а з цим особливо часто доводиться мати діло, розраховуючи рами за так званим методом деформацій.

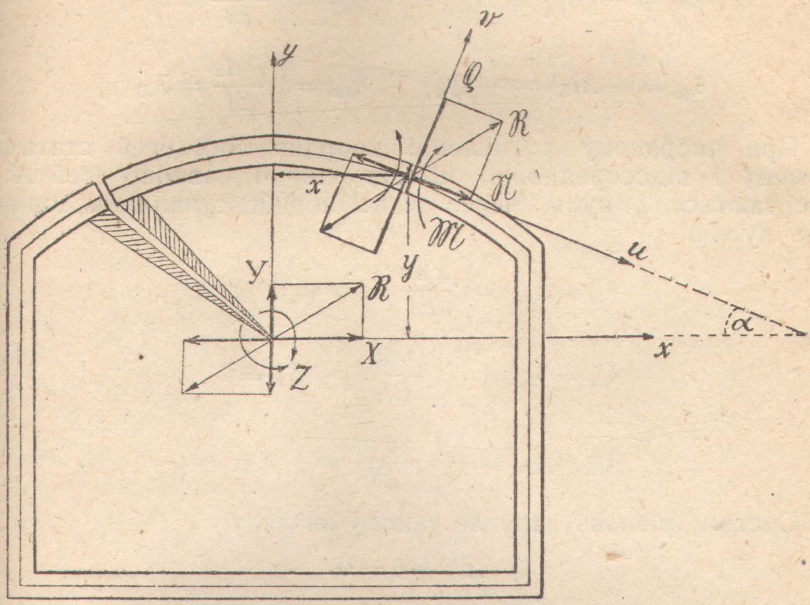
Залишається ще підкреслити фізичне розуміння сучинників, що увіходять до формули (56), і зв'язати її з загальновживаним методом визначення зайвих невідомих. Позначімо ординату моментної площини $\mathfrak{M}$ у пружному центрі через Z. Покладаючи в (56) $x=y=0$, знайдемо

$$\mathfrak{M}_{0,0}=-\frac{\theta}{F}=Z \tag{66}$$

Беручи на увагу (61) і (62), перепишемо (56) в такому вигляді

$$\mathfrak{M}_{x,y} = Z + Yx - Xy \tag{67}$$

Уявімо, що раму розрізано, і прилучимо до розрізу два абсолютно цупкі стрижні, що їх кінці зведемо в пружний центр (фіг. 18). Очевидно, Z являє собою згинний момент у перекрої петлі, що зливається з пружним центром, Y і X проекції сили



Фіг. 18.

взаємочину між перекроями на осі Oy і Ox. Згинний момент від Z, Y і X виражається формулою (67). Візьмімо Z, Y, X за зайві невідомі. Система канонічних рівнянь має вигляд:

$$1)\ Z\delta_{zz} + Y\delta_{zy} + X\delta_{zx} + \delta_{z0} = 0$$

$$2)\ Z\delta_{yz} + Y\delta_{yy} + X\delta_{yx} + \delta_{y0} = 0$$

$$3)\ Z\delta_{xz} + Y\delta_{xy} + X\delta_{xx} + \delta_{x0} = 0$$

Щоб обчислити сучинники, скористуємося з поданого тут способу. Взаємний поверт перекроїв у пружному центрі визначимо як суму фіктивних обтяжень вздовж цілого контуру, проекцію взаємного переміщення вздовж Y або X, як суму моментів фіктивних тягарів навколо цих сил. Спочатку знайдемо головні вільні члени і сучинники, а тоді побічні сучинники.

Момент $Z = 1$ спричиняє в усіх перекроях згинний момент $\mathfrak{M} = 1$; сила $Y = 1$ дає момент $\mathfrak{M} = 1 \cdot x$; сила $X = 1$ дає момент, що дорівнює $\mathfrak{M} = -1 \cdot y$. Інтенсивність фіктивного обтяження буде відповідно $\frac{1}{EI}, \frac{x}{EI}, -\frac{y}{EI}$. Тому:

$$\delta_{z0} = \theta \qquad \delta_{zz} = \int \frac{ds}{EI} = F$$

$$\delta_{y0} = -M_{Y\theta} = \theta x_\theta \qquad \delta_{yy} = \int \frac{x^2\,ds}{EI} = J_Y;$$

$$\delta_{x0} = -M_X\theta = -\theta y_\theta \qquad \delta_{xx} = \int \frac{y^2\,ds}{EI} = J_X$$

При вибраному розміщенні координатних осей статичний момент і відосередковий момент інерції навколо осей X і Y обертаються в нуль. Через те всі побічні сучинники дорівнюють нулеві.

$$\delta_{zy} = \delta_{yz} = \int \frac{x\,ds}{EI} = S_Y = 0$$

$$\delta_{zx} = \delta_{xz} = -\int \frac{y\,ds}{EI} = -S_X = 0$$

$$\delta_{xy} = \delta_{yz} = -\int \frac{xy\,ds}{EI} = -J_{XY} = 0$$

Система рівнянь набуває такого вигляду:

$$1)\quad ZF + \theta = 0$$

$$2)\quad YJ_Y - M_{Y\theta} = 0$$

$$3)\quad XJ_X - M_{X\theta} = 0$$

звідки:

$$Z = -\frac{\theta}{F};\quad Y = \frac{M_{Y\theta}}{J_Y};\quad X = \frac{M_{X\theta}}{J_X},$$

що збігається з (66), (61) і (62).

Підставляючи ці вартості до (67), дістанемо (56).

§ 7. Робота рами з заправленими п'ятами від обтяження, місцевої деформації і переміщень опор.

Як приклад застосування теорії замкненої рами, що приводить до основних формул так званого методу деформацій, розглянемо таку задачу.

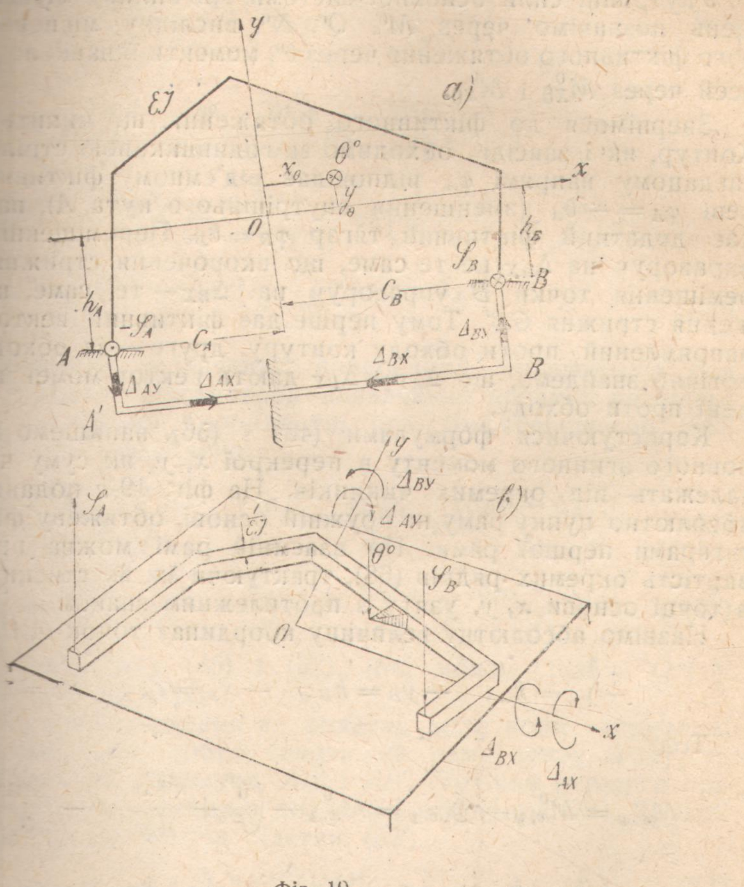
Рама із заправленими п'ятами (фіг. 19*a*) перебуває під чином завданого обтяження і місцевої вимушеної деформації (температурної чи іншої) і, крім того, п'ятові перекрої A і B

набувають вимушених переміщень (що не залежать від роботи рами на місцеве обтяження), а саме:

1) Вимушені поверти на невеликі кути φ_A і φ_B за годинниковою стрілкою.

2) Лінійні зсови Δ_{AX} і Δ_{BX} в напрямі головної осі $+X$ епюри обернених цупкостей.

3) Лінійні зсови Δ_{AY} і Δ_{BY} в напрямі головної осі $-Y$ (тобто зниз).



Фіг. 19.

(Коли є лінійні зсови п'ят у довільному напрямі, їх, очевидно, можна замінити на компоненти по осях X і $-Y$).

Треба дати розгорнену загальну формулу згинного моменту, поперечної й повздовжньої сили в якому завгодно перекрої в функції вимушених переміщень п'ят, а так само формули для опорних моментів M_A і M_B і опорних реакцій Y_A, Y_B, X_A і X_B.

Припускаємо, що напрям головних осей епюри обернених цупкостей визначено заздалегідь. Замінімо землю на абсолютно цупкий брусок, укріплений нерухомо в точці G (фіг. 19-a).

Цьому брускові надамо форми $BB'A'A$, при тому $BB' \parallel AA' \parallel Oy$, $A'B' \parallel Ox$. Цим ми зведемо систему до виду замкненого контуру.

За основну статично визначну систему можна взяти консолю (розріз у точці B), дві консолі (розріз у ключі C), трисуставний лук (сустави в точках A, B і C) і трям на двох опорах (сустави в A, B і B'). Найчастіш беруть трям на двох опорах. (На фіг. 19*a* пропущено літери C, G та штрих при B).

Унутрішні сили основної системи від впливу місцевих обтяжень позначімо через M^0, Q^0, N^0, вислідну місцевого активного фіктивного обтяження через θ^0, моменти її навколо головних осей через $M^0_{X\theta}$ і $M^0_{Y\theta}$.

Звернімося до фіктивного обтяження, що чинить в A і B. Контур, як і завсіди, обходимо за годинниковою стрілкою. При завданому напрямі φ_A відповідає від'ємному фіктивному тягареві $\varphi_A = -\theta_A$ (зменшення внутрішнього кута A), навпаки, φ_B дає додатний фіктивний тягар $\varphi_B = \theta_B$. Переміщення точки A вправоруч на Δ_{AX} це те саме, що вкорочення стрижня $A'G$; переміщення точки B управоруч на Δ_{BX} — те саме, що подовження стрижня GB'. Тому перше дає фіктивний вектор-момент, напрямлений проти обходу контуру, друге — за обходом. Аналогічно знайдемо, що Δ_{AY} і Δ_{BY} дають вектор-моменти, напрямлені проти обходу.

Користуючися формулами (43) і (56), напишемо вираз для повного згинного моменту в перекрої x, y, як суму членів, що залежать від окремих чинників. На фіг. 19-*b* подано взаємну абсолютно цупку раму на пружній основі, обтяжену фіктивними тягарами першої рами. По взаємній рамі можна простежити вартість окремих рядків (68), трактуючи їх, як стискну напругу в точці основи x, y, узяту з протилежним знаком.

Назвімо абсолютну величину координат точок A і B так:

$$-y_A = h_A; \quad -y_B = h_B; \quad -x_A = c_A; \quad x_B = c_B$$

Тоді:

$$M_{x,y} = M^0_{x,y} + \mathfrak{M}_{x,y} = M^0_{x,y} - \left(\frac{\theta^0}{F} + \frac{M_{X\theta}}{J_X} \cdot y - \frac{M^0_{Y\theta}}{J_Y} \cdot x\right) +$$

$$+ \varphi_A\left(\frac{1}{F} - \frac{h_A}{J_X} \cdot y - \frac{c_A}{J_Y} \cdot x\right) - \varphi_B\left(\frac{1}{F} - \frac{h_B}{J_X} \cdot y + \frac{c_B}{J_Y} \cdot x\right) +$$

$$+ \frac{(\Delta_{BX} - \Delta_{AX})}{J_X} \cdot y + \frac{(\Delta_{BY} - \Delta_{AY})}{J_Y} \cdot x \qquad (68)$$

Щоб дістати формули для опорних моментів, досить в (68) підставити замість x, y — координати центрів ваги перекроїв A і B. Коли за основну систему взято трям на двох опорах, то $M^0_A = M^0_B = 0$.

Отже:

$$M_A = -\left(\frac{\theta^0}{F} - \frac{M^0_{X\theta}}{J_X} h_A + \frac{M^0_{Y\theta}}{J_Y} c_A\right) +$$

$$+ \varphi_A\left(\frac{1}{F} + \frac{h_A^2}{J_X} + \frac{c_A^2}{J_Y}\right) - \varphi_B\left(\frac{1}{F} + \frac{h_B h_A}{J_X} - \frac{c_A c_B}{J_Y}\right) -$$

$$- \frac{(\Delta_{BX} - \Delta_{AX})}{J_X} h_A - \frac{(\Delta_{BY} - \Delta_{AY})}{J_Y} c_A \tag{69}$$

Так само:

$$M_B = -\left(\frac{\theta^0}{F} - \frac{M^0_{X\theta}}{J_X} h_B - \frac{M^0_{Y\theta}}{J_Y} c_B\right) +$$

$$+ \varphi_A\left(\frac{1}{F} + \frac{h_A h_B}{J_X} - \frac{c_A c_B}{J_Y}\right) - \varphi_B\left(\frac{1}{F} + \frac{h_B^2}{J_X} + \frac{c_B^2}{J_Y}\right) -$$

$$- \frac{(\Delta_{BX} - \Delta_{AX})}{J_X} h_B + \frac{(\Delta_{BY} - \Delta_{AY})}{J_Y} c_B \tag{70}$$

Переходимо до визначення поперечних, повздовжніх сил і опорних реакцій. Насамперед визначаємо проєкції вислідної внутрішніх сил $\mathfrak{R}$ на координатні осі. Диференціюючи (68), згідно з (61) і (62), знайдемо:

$$Y = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} = \frac{M^0{}_{Y\theta}}{J_Y} - \frac{\varphi_A c_A}{J_Y} - \frac{\varphi_B c_B}{J_Y} + \frac{(\Delta_{BY} - \Delta_{AY})}{J_Y} \tag{71}$$

$$X = -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} = \frac{M^0_{X\theta}}{J_X} + \frac{\varphi_A h_A}{J_X} - \frac{\varphi_B h_B}{J_X} - \frac{(\Delta_{BX} - \Delta_{AX})}{J_X} \tag{72}$$

За формулами (44), (45) і (63), (64) можна знайти Q і N в якому завгодно перекрої.

Реакції Y_A і Y_B вважаємо за додатні, коли вони напрямлені в бік додатних y-ів, тобто чинять на раму знизу вгору, як стискне зусилля в стрижнях AA' і BB'. Течіння першого при обході контуру зливається з додатним напрямом Oy. Другий тече протилежно до Oy. На підставі (62′)

$$Y_A = Y_A^0 + Y \tag{73}$$

$$Y_B = Y_B^0 - Y \tag{74}$$

Реакції X_A і X_B уважаємо за додатні, коли вони чинять на раму в напрямі осі Ox. X_A — відповідає розтяжному (від'ємному) зусиллю в $A'G$; X_B — стискному в GB'. А що при обході контуру течіння стрижнів протилежне до осі Ox, то з (62) випливає:

$$X_A = X_A^0 + X \tag{75}$$

$$X_B = X_B^0 - X \tag{76}$$

Підставляючи до (73) — (76) вартості (71) — (72), знайдемо остаточно

$$Y_A = Y_A^0 + \frac{M_{Y\theta}^0}{J_Y} - \frac{\varphi_A c_A}{J_Y} - \frac{\varphi_B c_B}{J_Y} + \frac{(\Delta_{BY} - \Delta_{AY})}{J_Y} \tag{77}$$

$$Y_B = Y_B^0 - \frac{M_{Y\theta}^0}{J_Y} + \frac{\varphi_A c_A}{J_Y} + \frac{\varphi_B c_B}{J_Y} - \frac{(\Delta_{BY} - \Delta_{AY})}{J_Y} \tag{78}$$

$$X_A = X_A^0 + \frac{M_{X\theta}^0}{J_X} + \frac{\varphi_A h_A}{J_X} - \frac{\varphi_B h_B}{J_X} - \frac{(\Delta_{BX} - \Delta_{AX})}{J_X} \tag{79}$$

$$X_B = X_B^0 - \frac{M_{X\theta}^0}{J_X} - \frac{\varphi_A h_A}{J_X} + \frac{\varphi_B h_B}{J_X} + \frac{(\Delta_{BX} - \Delta_{AX})}{J_X} \tag{80}$$

Коли за основну систему взято трям на двох опорах, то $X_B^0 = 0$.

Відзначімо деякі особливості розрахунку симетричної рами. У цьому випадку

$$h_A = h_B = h_0; \quad c_A = c_B = \frac{l}{2}$$

Рівномірне нагрівання на t° впливає так само як і вимушене переміщення опори B з правого боку наліво на величину

$$\Delta_{BX} = -\alpha t l,$$

де l прогін між A і B.

§ 8. Поверхня впливу моментів $\mathfrak{M}$ і ядро рами.

Як ми бачили, моменти $\mathfrak{M}$ обчисляють за тричленною формулою (56). Обчислення можна спростити, коли попереду знайти слід площини $\mathfrak{M}$ та її похил до площини контуру, а рамена точок, що для них розшукують $\mathfrak{M}$, визначити безпосередньо вимірявши за рисунком. Напрям сліду, або так звана невтральна лінія, як установлено в § 5, зливається з напрямом вислідної внутрішніх сил $\mathfrak{R}$, а величина похилу $\operatorname{tg}\gamma = \mathfrak{R}$.

Рівняння невтральної лінії знайдемо, прирівнюючи праву частину (56) нулеві

$$\frac{\theta}{F} + \frac{M_{X\theta}}{J_X} \cdot y - \frac{M_{Y\theta}}{J_X} \cdot x = 0 \tag{81}$$

Коли $\theta \neq 0$, то рівнянню (81) можна на підставі (55) надати іншої форми

$$\frac{1}{F} + \frac{y_\theta}{J_X} \cdot y + \frac{x_\theta}{J_Y} \cdot x = 0 \tag{81'}$$

або

$$1 + \frac{y_\theta}{i_X^2} \cdot y + \frac{x_\theta}{i_Y^2} \cdot x = 0 \tag{81''}$$

Тут i_Y і i_X — головні радіюси інерції епюри обернених щупостей.

Користуючися одним з рівнянь (81) — (81′), можна збудувати невтральну лінію за відтинками на осях або іншим способом.

Похил площини $\mathfrak{M}$ до площини контуру:

$$\operatorname{tg}\gamma = \mathfrak{R} = \mp\sqrt{X^2 + Y^2} = \mp\sqrt{\left(\frac{M_{X\theta}}{J_X}\right)^2 + \left(\frac{M_{Y\theta}}{J_Y}\right)^2} \tag{82}$$

Зауважимо, що коли невтральну лінію вже збудовано, тоді, щоб визначити похил, досить виміряти довжину нормалі r_0, спущеної на неї з пружного центра. А що ордината $\mathfrak{M}$ в пружному центрі

$$\mathfrak{M}_0 = -\frac{\theta}{F},$$

то

$$\operatorname{tg}\gamma = \mathfrak{R} = -\frac{\theta}{Fr_0} \tag{83}$$

Умовмося приписувати похилові $\operatorname{tg}\gamma$ той самий знак, який має ордината $\mathfrak{M}_0$ (ф-ла 73) в пружному центрі; коли θ^0 додатне, похил має знак (—). Рамена r_0 різних точок a контуру щодо невтральної лінії уважаємо за додатні, коли точка і пружний центр лежать по один бік від невтральної лінії.

Момент у точці a буде

$$\mathfrak{M}_a = r_a \operatorname{tg}\gamma = -\frac{\theta}{F}\cdot\frac{r_a}{r_0} \tag{84}$$

Геометричне розуміння (84) очевидне без пояснень.

Зауважимо, що похил площини $\mathfrak{M}$ можна визначити так само поділивши момент обтяження навколо невтральної осі на момент інерції площі щодо тієї самої невтральної лінії.

Окремо розглянемо випадок $\theta = 0$, тобто коли фіктивне обтяження зводиться до пари або увіходить у розрахунок, як фіктивний вектор-момент певного напряму. Наприклад, коли якийсь стрижень набуває температурного подовження αlt, то це однаково, коли б чинив фіктивний вектор-момент, напрямлений вздовж стрижня, що дорівнює αtl. Випадок $\theta = 0$ еквівалентний, очевидно, не позацентровому стискові, а косому згинові. Невтральна вісь проходить через пружний центр.

Рівняння невтральної лінії з (81)

$$\frac{M_{X\theta}}{J_X}\cdot y - \frac{M_{Y\theta}}{J_Y}\cdot x = 0 \tag{85}$$

Похил $\operatorname{tg}\gamma = \mathfrak{R}$ обчисляють за формулою (82). Моменти обчисляють за середнім членом формули (84). Щоб як слід урахувати знак, слід у думці замінити фіктивний момент на нескінченно малий нескінченно віддалений фіктивний тягар θ.

Коли треба дослідити, як впливають не одна певна, а кілька комбінацій фіктивного обтяження на згинні моменти $\mathfrak{M}$ у цілому ряді точок рами (напр., в кутах), то доцільно побудувати поверхні впливу моменту для кожної з цих точок.

Нехай фіктивний тягар $\theta_a = 1$ чинить у певній точці $a\ (x_a, y_a)$. Момент $\mathfrak{M}_{ba}$ в точці $b\,(x_b, y_b)$ буде:

$$\mathfrak{M}_{ba} = -\left(\frac{1}{F} + \frac{y_a y_b}{J_X} + \frac{x_a x_b}{J_Y}\right) \tag{86}$$

Формула (86) цілком симетрична щодо координат точок a і b. Отже, момент в b від $\theta_a = 1$ дорівнює моментові в a від $\theta_b = 1$, або

$$\mathfrak{M}_{ba} = \mathfrak{M}_{ab} \tag{87}$$

Рівність (87) є частковий випадок теореми взаємности реакцій пружних пов'язей, аналогічної з теоремою про взаємність пружних переміщень. Пригадуючи залежність, яка є між моментами $\mathfrak{M}$ і осідами z (див. § 7) ми бачимо, що (87) одночасно відображає першу теорему для замкненої пружної рами і другу для абсолютно цупкої рами на пружній основі.

З (87) виходить також, що площина $\mathfrak{M}_{ba}$ від $\theta_a = 1$ являє собою поверхню впливу для моменту в точці a від впливу фіктивного обтяження.

Рівняння невтральної лінії A дістанемо з (81′) або (81″), підставивши $x_\theta = x_a$, $y_\theta = y_a$. Похил на підставі (68), коли $\theta_a = 1$, буде

$$\operatorname{tg}\gamma_A = -\sqrt{\left(\frac{y_a}{J_X}\right)^2 + \left(\frac{x_a}{J_Y}\right)^2} \tag{88}$$

Вплив довільного фіктивного обтяження виражається сумою добутків з фіктивних тягарів на ординати поверхні впливу:

$$\mathfrak{M}_a = \sum \theta_b\, \mathfrak{M}_{ba} \tag{89}$$

Позначімо через r_{Ab} рамено точки b щодо невтральної лінії A площини впливу для моменту в точці a. Очевидно,

$$\mathfrak{M}_{ba} = r_{Ab} \cdot \operatorname{tg}\gamma_A,$$

отже,

$$\mathfrak{M}_A = \operatorname{tg}\gamma_A \sum \theta_b r_{Ab} = \operatorname{tg}\gamma_A\, M_{A\theta}\,, \tag{89′}$$

тобто $\mathfrak{M}_a$ дорівнює моментові фіктивного обтяження навколо невтральної лінії A, помноженому на $\operatorname{tg}\gamma_A$. За формулою (89′) безпосередньо визначаємо і вплив фіктивного обтяження, що зводиться до пари. $M_{A\theta}$ дорівнює проекції вектор-моменту пари на напрям невтральної лінії. Нагадаємо, що $\operatorname{tg}\gamma_A$ — величина від'ємна.

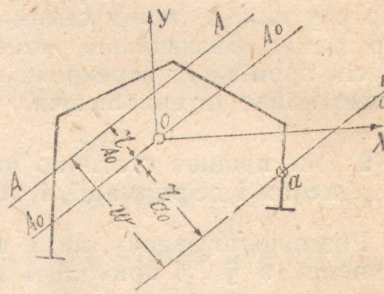
Зазначимо ще кілька інших форм для визначення $\mathfrak{M}_a$. У формулі (88) під коренем стоять величини протилежні до моментів опору для точки a.

Позначімо

$$W_a = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{W_{Xa}^2} + \frac{1}{W_{Ya}^2}}} \tag{90}$$

Величину W_a називатимемо повним моментом опору для точки a. W_a зв'язане з моментом інерції J_A^0 для центральної осі A^0, рівнобіжної з A, співвідношенням

$$W_a = \frac{J_A^0}{r_{a0}} \tag{91}$$



Фіг. 20.

Тут r_{a0} — довжина нормалі, спущеної з точки a на вісь A_0, або що те саме, віддаль від пружного центра до осі $aa' \parallel A$ (фіг. 20).

Крім того, з (83) виходить, що

$$\operatorname{tg}\gamma_A = -\frac{1}{Fr_{A0}}, \tag{92}$$

де r_{A0} рамено пружного центра щодо осі A. Беручи ці позначення, дістанемо для $\mathfrak{M}_a$ такі форми:

$$\mathfrak{M}_a = \operatorname{tg}\gamma_A M_{A\theta} = -\frac{M_{A\theta}}{W_a} = -\frac{M_{A\theta}}{J_A^0}\cdot r_{a0} = -\frac{M_{A\theta}}{Fr_{A0}} \tag{93}$$

При тому, за основну для обчислень залишається формула (82). Виведемо ще формулу для віддалі w між точкою a і віссю A. З (93) випливає, що

$$r_{A0}\cdot r_{a0} = FJ_A^0 \tag{94}$$

Звідси

$$w = r_{A0} + r_{a0} = \frac{J_A^0 + Fr_{A0}^2}{Fr_{A0}} = \frac{J_A^0 + Fr_{A0}^2}{Fr_{A0}} = \frac{J_A}{S_A} = \frac{J_a}{S_a} \tag{95}$$

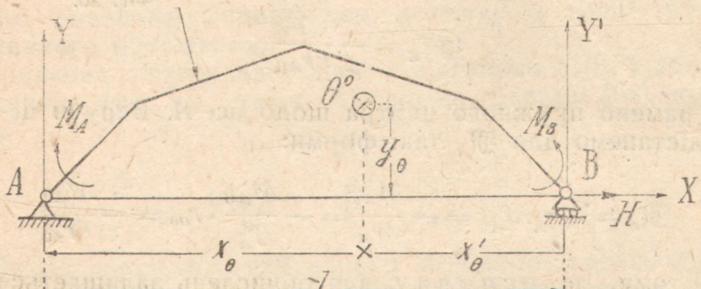
Тут J_A і S_A момент інерції і статичний момент епюри обернених цупкостей щодо невтральної лінії A, J_a і S_a — те саме для осі, що проходить через a рівнобіжно з A. Коли точка a лежить на одній з головних осей, тоді визначити w простіше, бо відомий напрям A, — вона рівнобіжна з іншою головною віссю.

Точка прикладення фіктивного тягара a і невтральна лінія A (тобто лінія чину вислідної) мають взаємні властивості полюса і поляри. Коли перенести фіктивний тягар на пряму A, то відповідна $\mathfrak{R}$ проходитиме через точку a. Коли θ пробігає прямолінійний стрижень A, то $\mathfrak{R}$ обертається навколо точки a. Точка перетину двох поляр є полюс для прямої, що сполучає полюси цих поляр.

Невтральні лінії, збудовані для всіх точок контуру рами, огинають замкнену криву, яку, зважаючи на цілковиту аналогію з ядром перекрою, можна назвати ядром епюри обернених цупкостей. Щоб визначити моменти $\mathfrak{M}$ рами з прямолінійними стрижнями, досить мати невтральні лінії, що відповідають вершкам. Ядро в цьому разі являє собою замкнений многокутник з таким самим числом боків і вершків, як і контур рами. Визначивши моменти $\mathfrak{M}$ в кутах рами, моменти в усіх проміжних перекроях прямолінійних стрижнів знаходять прямолінійно інтерполюючи.

§ 9. Як працює статично визначна рама від місцевого обтяження і деформації, і обтяження опорних перекроїв.

Розгляньмо задачу, що є певною мірою протилежна до розгляненої в § 7 і приводить до основних формул, застосовуваних, як розраховують за так званою теоремою чотирьох моментів.



Фіг. 21.

Криволінійний або ламаний трям на двох опорах (фіг. 21) витримує якесь місцеве обтяження, що спричиняє в ньому внутрішні сили M^0, Q^0 і N^0 і зазнає місцевої деформації, пружної і непружної. Крім того, в опорних перекроях прикладено моменти M_A і M_B і силу H, напрямлену по прямій AB (назовні контуру); завдані так само осіди опорних точок Δ_A, Δ_B в напрямі, нормальному до AB і поземі переміщення лівої опори Δ_{HA} (праворуч). Треба визначити переміщення Δ_{BH} правої опори і величини протилежні щодо знака фіктивним тягарам у суставах A і B, або так звані фіктивні реакції τ_A і τ_B.

Відзначімо мимохідь зв'язок між величинами θ, φ, τ. Усі вони являють собою зміни кутів, але позначено їх різно через різне правило знаків. Фіктивні сили (тягарі) θ уважають за додатні, коли внутрішні кути контуру збільшуються; фіктивні реакції τ — навпаки, коли внутрішні кути зменшуються; величини φ — кути поверту перекроїв уважають за додатні, коли обертання відбувається за годинниковою стрілкою. Тому ми могли б написати

$$\tau_A = -\theta_A = \varphi_A$$

$$\tau_B = -\theta_B = -\varphi_B$$

Вислідну місцевого фіктивного обтяження назвемо θ^0, моменти її навколо осей X, Y і Y' відповідно $M_{H\theta}$, $M_{A\theta}$, $M_{B\theta}$. Очевидно

$$M^0_{H\theta} = \theta^0 y_\theta \tag{96}$$

$$M^0_{A\theta} = -\theta^0 x_\theta \tag{97}$$

$$M^0_{B\theta} = \theta^0 (l - x_\theta) = \theta x'_\theta \tag{98}$$

Знайдемо фіктивне обтяження, спричинене обтяженням опорних перекроїв M_A, M_B, H.

Згинний момент у перекрої x, y (як момент реакцій лівої опори):

$$\mathfrak{M} = M_A - \frac{M_A}{l} \cdot x + \frac{M_B}{l} \cdot x + H \cdot y = M_A \frac{l-x}{l} + M_B \frac{x}{l} + Hy \tag{99}$$

Інтенсивність розподіленого вздовж контуру фіктивного обтяження

$$\frac{d\overline{\theta}}{ds} = \frac{\mathfrak{M}}{EI} = \frac{M_A}{l} \cdot \frac{l-x}{EI} + \frac{M_B}{l} \cdot \frac{x}{EI} + \frac{H \cdot y}{EI} \tag{100}$$

Вислідна цього фіктивного обтяження

$$\theta = \int \frac{\mathfrak{M}\, ds}{EI} = M_A \cdot \frac{S_B}{l} + M_B \cdot \frac{S_A}{l} + H \cdot S_H \tag{101}$$

Тут S_B, S_A, S_H — статичні моменти епюри обернених цупкостей (не беручи на увагу сустави) навколо осей Y', Y і X.

Момент фіктивного обтяження навколо осі X

$$\overline{M}_{H\theta} = \int \frac{\mathfrak{M} y\, ds}{EI} = \frac{M_A}{l} \cdot J_{HB} + \frac{M_B}{l} \; J_{HA} + H \cdot J_H \tag{102}$$

Тут J_{HB} — відосередковий момент інерції епюри обернених цупкостей навколо осей X і Y', J_{HA} те саме для осей X і Y і J_H — момент інерції для осі X.

Момент фіктивного обтяження навколо осі Y:

$$\overline{M}_{A\theta} = -\int \frac{\mathfrak{M} x\, ds}{EI} = -\left(\frac{M_A}{l} J_{AB} + \frac{M_B}{l} J_A + HJ_{AH}\right) \tag{103}$$

Момент фіктивного обтяження навколо осі Y':

$$\overline{M}_{B\theta} = \int \frac{\mathfrak{M} x' \, ds}{EI} = \frac{M_A}{l} J_B + \frac{M_B}{l} J_{BA} + H J_{BH} \tag{104}$$

Тут $\int \frac{xx' \, ds}{EI}$ позначено $J_{AB} = J_{BA}$ за аналогією з відосередковим моментом інерції, дарма що осі Y і Y' рівнобіжні [1]).

Складаємо три рівняння замкнености контуру для осей X, Y і Y'. При цьому до кожного рівняння увійде одна невідома.

Вісь X:

$$M^0_{H\theta} + \overline{M}_{H\theta} + \Delta_{AH} - \Delta_{BH} = 0 \tag{105}$$

Вісь Y:

$$M^0_{A\theta} + \overline{M}_{A\theta} - \Delta_A + \Delta_B + \tau_B l = 0 \tag{106}$$

Вісь Y':

$$M^0_{B\theta} + \overline{M}_{B\theta} - \Delta_A + \Delta_B - \tau_A l = 0 \tag{107}$$

Позначімо через τ^0_A і τ^0_B фіктивні реакції, що залежать від місцевого обтяження і місцевої деформації

$$\frac{M^0_{B\theta}}{l} = \frac{\theta^0 x'_\theta}{l} = \tau^0_A; \qquad \frac{-M^0_{A\theta}}{l} = \frac{\theta^0 x_\theta}{l} = \tau^0_A \tag{108}$$

Збільшення прогону назвемо Δ_H

$$\Delta_H = \Delta_{BH} - \Delta_{AH} \tag{109}$$

Розв'язуючи кожне з рівнянь (105) — (107) щодо його невідомої, знайдемо:

$$\Delta_H = M^0_{H\theta} + H J_H + M_A \frac{J_{HB}}{l} + M_B \frac{J_{HA}}{l} \tag{110}$$

$$\tau_B = \tau^0_B + M_B \frac{J_A}{l^2} + M_A \frac{J_{AB}}{l^2} + H \frac{J_{AH}}{l} \tag{111}$$

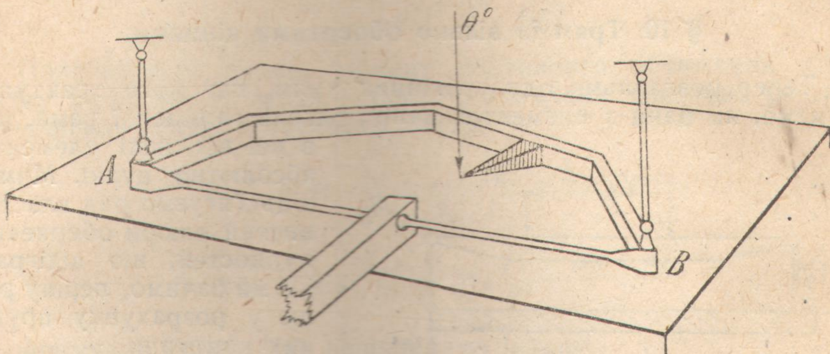
$$\tau_A = \tau^0_A + M_A \frac{J_B}{l^2} + M_B \frac{J_{BA}}{l^2} + H \frac{J_{BH}}{l} \tag{112}$$

За допомогою формул (110) — (112) можна розв'язати ряд питань, що стосуються до переміщень кінцевих перекроїв і статично невизначних рам. Нехай, напр., перекрій B заправлений і треба визначити τ_A. У цьому разі величини τ_B, Δ_H, M_A зав-

[1]) Зауважимо, що коли поняття про відосередковий момент трактувати узагальнено, для якого завгодно кута між осями, зберігаючи тільки вимогу, щоб рамена були нормальні до осей, то й моменти інерції $J_A = J_{AA}$; $J_B = J_{BB}$; $J_H = J_{HH}$ є часткові випадки відосередкових моментів, але для збіжних осей.

дані. Виразивши M_B і H з (110) і (111) через завдані величини і підставивши до (112), знайдемо τ_A. Але формули (110) — (112) застосовують найбільше, як уже зазначено, розраховуючи рами за теоремою чотирьох моментів.

Розв'язку розгляненої задачі дуже просто інтерпретують за допомогою взаємної абсолютно цупкої рами на пружній основі. Уявімо собі, що ця рама, крім пружної основи (фіг. 22), спирається ще на нерухомі опори в точках A і B і має закріплення, що може розвинути момент, якого вектор напрямлений по AB (напр., як стрижень, що цупко зв'язаний з рамою і ставить опір скручуванню). Взаємна рама підпадає підо вплив міс-



Фіг. 22.

цевого фіктивного обтяження, вимушених осідів, опорних точок на M_A і M_B і вимушеного поверту навколо AB на Δ_H. Наслідком вимушених переміщень основа вгинається, розвивається фіктивне обтяження, що дає додаткові реакції опор. Остаточна вартість реакцій в A і B і закрутного моменту в стрижні AB і дає вартості τ_A, τ_B, Δ_H.

Сучинники при H, M_A, M_B являють собою переміщення від одиничних сил і одночасно реакції від вимушених одиничних переміщень. А що:

$$J_{AH} = J_{HA}\,; \qquad J_{BH} = J_{HB}\,; \qquad J_{AB} = J_{BA}\,,$$

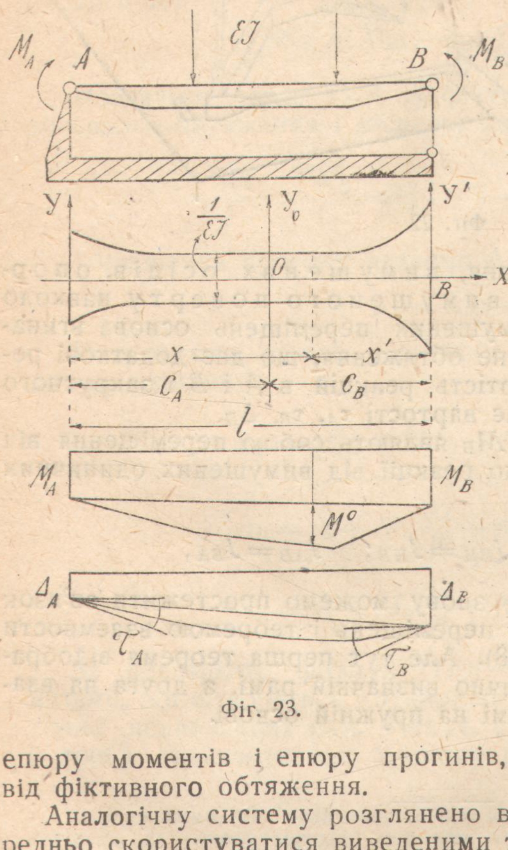
то на цьому прикладі ми знову можемо простежити зв'язок між теоремою взаємности переміщень і теоремою взаємности реакцій пов'язей (див. § 8). Але тут перша теорема відображається на пружній статично визначній рамі, а друга на взаємній абсолютно цупкій рамі на пружній основі.

РОЗДІЛ III.

ОДНОПРОГІННИЙ ТРЯМ ЗМІННОЇ І СТАЛОЇ ЦУПКОСТИ.

§ 10. Трям із вільно обпертими кінцями.

Тепер розгляньмо однопрогінний трям, що його трактуватимемо, як один з елементів, напр., ригель замкненої рами, що в неї всі інші елементи абсолютно цупкі. Мимохідь з'ясуємо ряд властивостей епюри обернених цупкостей, що відіграє, як ми бачимо, першу ролю у розрахунку пружних контурів.



Фіг. 23.

Трям (фіг. 23) підпадає підо вплив 1) місцевого обтяження, що спричиняє в ньому згинні моменти M^0 і поперечні сили Q^0, 2) місцевого фіктивного обтяження, що дає вислідний фіктивний тягар θ^0 і фіктивні моменти навколо осей Y і Y', які дорівнюють $M^0_{A\theta} = -\theta^0 x_\theta$ і $M^0_{B\theta} = \theta^0 x'_\theta$ і, крім того, підо вплив 3) опорних моментів M_A і M_B і 4) осідів опорних точок Δ_A і Δ_B. На фіг. 23 подано послідовно трям, епюру обернених цупкостей, епюру моментів і епюру прогинів, що є за епюру моментів від фіктивного обтяження.

Аналогічну систему розглянено в § 9 і ми можемо безпосередньо скористуватися виведеними там формулами, покладаючи $H = 0$ і беручи на увагу, що ординати $y = 0$. Епюра обернених цупкостей тут витягується вздовж осі X.

Повний згинний момент у перекрої x:

$$M_x = M_x^0 + M_A \frac{l - x}{l} + M_B \frac{x}{l} \tag{113}$$

Поперечна сила

$$Q_x = Q_x^0 - \frac{M_A}{l} + \frac{M_B}{l} \tag{114}$$

Інтенсивність фіктивного обтяження, спричиненого моментами M_A і M_B

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_A(l - x)}{lEI} + \frac{M_B x}{lEI} \tag{115}$$

Прирівнюючи нулеві момент фіктивного обтяження спочатку щодо осі Y, а далі осі Y', знайдемо фіктивні реакції (зменшення кутів) у суставах A і B.

$$\tau_A = \tau_A^0 + M_A \frac{J_B}{l^2} + M_B \frac{J_{BA}}{l^2} + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l} \tag{116}$$

$$\tau_B = \tau_B^0 + M_A \frac{J_{AB}}{l^2} + M_B \frac{J_A}{l^2} - \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l} \tag{117}$$

Формули (116) і (117) перепишемо інакше:

$$\tau_A = \tau_A^0 + M_A \, \tau_{AA} + M_B \, \tau_{AB} + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l} \tag{116'}$$

$$\tau_B = \tau_B^0 + M_A \, \tau_{BA} + M_B \, \tau_{BB} - \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l}. \tag{117'}$$

Тут, як і в § 9 через τ_A^0 і τ_B^0 позначено реакції від місцевого фіктивного обтяження θ^0. Сучинники τ_{AA}, τ_{BB} і $\tau_{AB} = \tau_{BA}$ при M_A і M_B, або фіктивні реакції, спричинені моментами $M_A = 1$ і $M_B = 1$, дуже просто можна визначити через площу F і центральний момент інерції епюри обернених цупкостей J. Віддалі пружного центра від кінців A і B назвемо c_A і c_B.

$$\tau_{AA} = \frac{1}{l^2} J_B = \frac{1}{l^2} (F c_B^2 + J) \tag{118}$$

$$\tau_{BB} = \frac{1}{l^2} J_A = \frac{1}{l^2} (F c_A^2 + J) \tag{119}$$

$$\tau_{AB} = \frac{1}{l^2} J_{AB} = \frac{1}{l^2} J_{BA} = \frac{1}{l^2} \int \frac{x(l - x)\, dx}{EI} =$$

$$= \frac{1}{l^2} (l S_A - J_A) = \frac{1}{l^2} (l S_B - J_B) = \frac{1}{l^2} (F c_A c_B - J) \tag{120}$$

Тут S_A і S_B статичні моменти епюри обернених цупкостей щодо осей Y і Y'.

Дамо так само і протилежну залежність; розв'язуючи разом (118), (119) і (120) і беручи на увагу, що $c_A + c_B = l$, знайдемо:

$$F = \frac{1}{l^2}(J_A + 2J_{AB} + J_B) = \tau_{BB} + 2\tau_{AB} + \tau_{AA} \tag{121}$$

$$J = \frac{J_A J_B - J_{AB}^2}{J_A + 2J_{AB} + J_B} = \frac{\tau_{BB} \cdot \tau_{AA} - \tau_{AB}^2}{\tau_{BB} + 2\tau_{AB} + \tau_{AA}} l^2 \tag{122}$$

$$c_A = \frac{J_A + J_{AB}}{J_A + 2J_{AB} + J_B} l = \frac{\tau_{BB} + \tau_{AB}}{\tau_{BB} + 2\tau_{AB} + \tau_{AA}} l \tag{123}$$

$$c_B = \frac{J_B + J_{AB}}{J_A + 2J_{AB} + J_B} l = \frac{\tau_{BB} + \tau_{AB}}{\tau_{BB} + 2\tau_{AB} + \tau_{AA}} l \tag{124}$$

При симетричній епюрі обернених цупкостей

$$c_A = c_B = \frac{l}{2}; \qquad J_A = J_B; \qquad \tau_{AA} = \tau_{BB}$$

Звідси:

$$F = \frac{2}{l^2}(J_A + J_{AB}) = 2(\tau_{AA} + \tau_{AB}) \tag{121'}$$

$$J = \frac{J_A - J_{AB}}{2} = \frac{l^2}{2}(\tau_{AA} - \tau_{AB}) \tag{122'}$$

Розв'язуючи різноманітні задачі, доводиться обчислювати детермінант з сучинників при M_A і M_B у рівняннях (116) і (117)

$$D = \frac{1}{l^4}(J_A \cdot J_B - J_{AB} \cdot J_{BA}) = \tau_{BB} \cdot \tau_{AA} - \tau_{AB} \cdot \tau_{BA} \tag{125}$$

Перемноживши (121) і (122), дістанемо D в дуже зручній, щоб обчислювати, формі:

$$D = \frac{JF}{l^2} \tag{125'}$$

Для тряма сталої цупкости епюра обернених цупкостей має вигляд прямокутника завдовжки l і завширшки EI.

$$F = \frac{l}{EI}; \quad J = \frac{l^3}{12EI}; \; J_A = J_B = \frac{l^3}{3EI}; \quad J_{AB} = \frac{l^3}{6EI} \quad (121''), (122'')$$

$$\tau_{AA} = \tau_{BB} = \frac{l}{3EI}; \quad \tau_{AB} = \frac{l}{6EI}$$

Формули (116) — (117) набувають вигляду:

$$\tau_A = \tau_A^0 + M_A \frac{l}{3EI} + M_B \frac{l}{6EI} + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l} \tag{126}$$

$$\tau_B = \tau_B^0 + M_A \frac{l}{6EI} + M_B \frac{l}{3EI} - \frac{\Delta_B - \Delta_A}{l} \tag{127}$$

Активний фіктивний тягар, що залежить від обтяження, дорівнює площі епюри M^0, поділеній на $EI = \text{const}$.

$$\theta^0 = \frac{\Omega}{EI} \tag{128}$$

Фіктивний тягар від різниці температур спіднього й горішнього волокна

$$\theta_t^0 = \frac{\alpha(t_u - t_0)l}{h} \tag{129}$$

Фіктивні реакції визначають за правилом важеля.

У деяких випадках доводиться переходити від фіктивних реакцій до вислідного фіктивного тягара.

$$\theta^0 = \tau_A^0 + \tau_B^0 \tag{130}$$

Абсциса θ^0 щодо пружного центра

$$x_\theta = \frac{\tau_B^0 c_B - \tau_A^0 c_A}{\tau_A^0 + \tau_B^0} \tag{131}$$

Очевидно формули (130) і (131) придатні незалежно від виду епюри обернених цупкостей.

§ 11. Трям із заправленими кінцями.

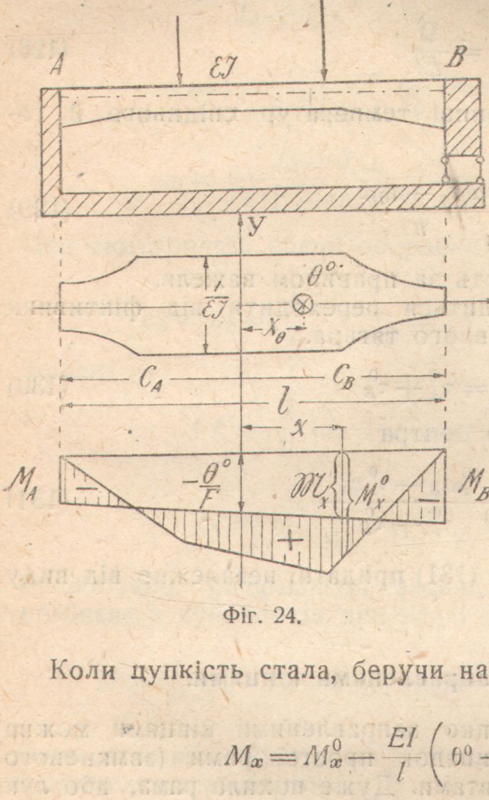
Однопрогінний трям з цупко заправленими кінцями можна розглядати, як частковий випадок простої рами (замкненого контуру) із заправленими п'ятами. Дуже похила рама, або лук у границі перетворюється на трям. Вісь епюри обернених цупкостей витягується в пряму, $J_X = 0$ і незалежно від виду обтяження $M_{X\theta}^0 = 0$. Розпір X набуває неозначеної вартости і його можна знайти тільки на підставі додаткових умов. Ми обмежимося випадком, коли опорні закріплення зроблено так, що вони не перешкоджають кінцям зближатися, отже $X = 0$ (фіг. 24). Коли це припустити, задача стає двічі статично невизначна.

Безпосередньо з (43) і (56) дістаємо загальну формулу згинного моменту в перекрої з абсцисою x, рахуючи від пружного центра.

$$M_x = M_x^0 + \mathfrak{M}_x = M_x^0 - \left(\frac{\theta^0}{F} - \frac{M_{Y\theta}^0 x}{J}\right) =$$

$$= M_x^0 - \theta^0\left(\frac{1}{F} + \frac{x_\theta x}{J}\right) \qquad (132)$$

Епюру $\mathfrak{M}$ інтерпретувати тут дуже просто, а саме як прямолінійну епюру осідів (напруг) при позацентровому стиску взаємного абсолютно цупкого т р я м а фіктивним обтяженням у площині осі X. Повну епюру моментів дістають сумуючи (альґебрично) епюру M^0 з епюрою $\mathfrak{M}$ (фіг. 24 внизу).



Фіг. 24.

Диференціюючи (132), знайдемо загальний вираз для поперечної сили

$$Q_x = \frac{dM}{dx} = Q_x^0 + \mathfrak{Q}_x =$$

$$= Q_x^0 + \frac{M_{Y\theta}^0}{J} =$$

$$= Q_x^0 - \frac{\theta^0 x_\theta}{J} \qquad (133)$$

Другий член має сталу вартість.

Коли цупкість стала, беручи на увагу (121″), дістанемо:

$$M_x = M_x^0 - \frac{EI}{l}\left(\theta^0 - \frac{12 M_{Y\theta}^0 x}{l^2}\right) =$$

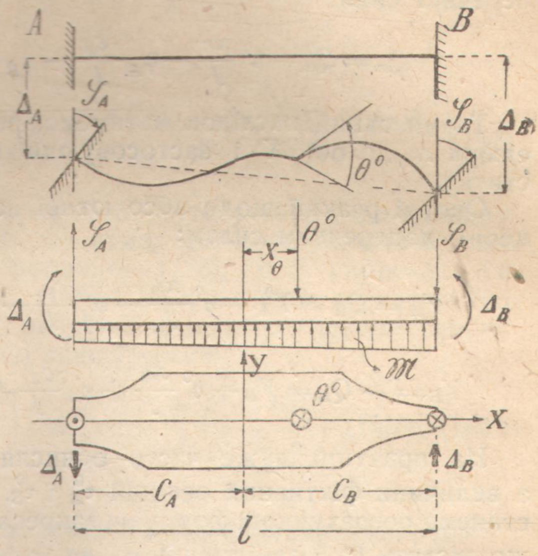
$$= M_x^0 - \frac{EI\theta^0}{l}\left(1 + \frac{12 x_\theta x}{l^2}\right) \qquad (134)$$

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{12EI}{l^3} M_{Y\theta}^0 = Q_x^0 - \frac{12EI\theta^0 x_\theta}{l^3} \qquad (135)$$

Розраховуючи трям із заправленими кінцями, основну систему можна взяти як консолю, дві консолі, або трям, вільно обпертий по кінцях. Далі, як основну систему, вживатимемо тільки трям на двох опорах.

Дамо за аналогією з рамою, розгляненою в § 7, розгорнуті формули для моментів і поперечних сил від чину, крім місцевого обтяження (вислідний фіктивний тягар θ^0), ще й вимушених повертів кінцевих перекроїв на кути φ_A і φ_B за годинниковою стрілкою і вимушених осідів на Δ_A і Δ_B (фіг. 25).

Вимушений поверт φ_A еквівалентний зменшенню внутрішнього кута A замкненого контуру (контур подано на фіг. 24) і дає через те від'ємний фіктивний тягар (кружок з точкою на епюрі обернених цупкостей), поверт φ_B, навпаки, — додатний фіктивний тягар, бо відповідає збільшенню внутрішнього кута B. Осіди дають фіктивні опорні моменти. Ідучи за обходом контуру, висновуємо, що Δ_A і Δ_B відповідають укороченням опорних стрижнів і дають: перше—від'ємний вектор-момент, напрямлений проти осі Y (у пляні епюри обернених цупкостей), друге — додатний вектор-момент. Узагалі зауважимо, що осіди опор відповідають додатним згинним опорним моментам взаємного тряма. Як впливають місцеве й додаткове фіктивне обтяження кінцевих перекроїв на взаємний трям, подано на фіг. 25. З (132), беручи на увагу, що $x_A = c_A$; $x_B = c_B$, дістанемо:



Фіг. 25.

$$M_x = M_x^0 - \theta^0\left(\frac{1}{F} + \frac{x_\theta x}{J}\right) + \varphi_A\left(\frac{1}{F} - \frac{c_A x}{J}\right) -$$

$$-\varphi_B\left(\frac{1}{F} + \frac{c_B x}{J}\right) + \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J}x \qquad (136)$$

Для опорних моментів, покладаючи послідовно $x = -c_A$ і $x = c_B$, знайдемо

$$M_A = -\theta^0\left(\frac{1}{F} - \frac{x_\theta c_A}{J}\right) + \varphi_A\left(\frac{1}{F} + \frac{c_A^2}{J}\right) -$$

$$-\varphi_B\left(\frac{1}{F} - \frac{c_A c_B}{J}\right) - \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J}\cdot c_A \qquad (137)$$

$$M_B = -\theta^0\left(\frac{1}{F} + \frac{x_\theta c_B}{J}\right) + \varphi_A\left(\frac{1}{F} - \frac{c_A c_B}{J}\right) -$$

$$- \varphi_B\left(\frac{1}{F} + \frac{c_A c_B}{J}\right) + \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J} \cdot c_B \qquad (138)$$

Диференціюючи (136), дістанемо розгорнутий вираз для поперечної сили:

$$Q_x = Q_x^0 - \theta^0 \frac{x_\theta}{J} - \varphi_A \frac{c_A}{J} - \varphi_B \frac{c_B}{J} + \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J} \qquad (139)$$

Такий самий наслідок матимемо, розглядаючи Q, як похил епюри M до осі X і застосовуючи формули позацентрового стиску.

Опорні реакції щодо абсолютної величини дорівнюють кінцевим поперечним силам:

$$Y_A = Q_A = Y_A^0 - \theta^0 \frac{x_\theta}{J} - \varphi_A \frac{c_A}{J} - \varphi_B \frac{c_B}{J} + \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J} \qquad (140)$$

$$Y_Б = -Q_B = Y_B^0 + \theta^0 \frac{x_\theta}{J} + \varphi_A \frac{c_A}{J} + \varphi_B \frac{c_B}{J} - \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J} \qquad (141)$$

На практиці дуже часто обчисляють не θ^0 і x_θ або $M_{Y\theta}^0$, а величини фіктивних реакцій τ_A^0 і τ_B^0. Для цього випадку дістанемо розрахункові формули, закресливши в (136)—(141) члени, що містять θ^0, і замінивши φ_A на $(\varphi_A - \tau_A^0)$ і φ_B на $(\varphi_B + \tau_B^0)$.

Зауважимо, що сучинникам при φ_A і φ_B в (137) і (138) можна надати іншого вигляду; звівши дроби до спільного знаменника і взявши на увагу (118)—(120), дістанемо:

$$M_A = (\varphi_A - \tau_A^0)\frac{J_A}{FJ} + (\varphi_B + \tau_B^0)\frac{J_{AB}}{FJ} - \frac{\Delta_B - \Delta_A}{J} c_A \qquad (142)$$

$$M_B = -(\varphi_A - \tau_A^0)\frac{J_{AB}}{FJ} - (\varphi_B + \tau_B^0)\frac{J_B}{FJ} + \frac{\Delta_B - \Delta_A}{J} c_B \qquad (143)$$

Коли треба виразити геометричні елементи епюри обернених цупкостей через τ_{AA}, τ_{BB}, τ_{AB}, то найпростіше скористуватися формулами (121)—(124).

Для тряма сталої цупкости розрахункові формули, коли підставити геометричні елементи епюри обернених цупкостей (121″), (122″), набувають вигляду:

$$M_x = M_x^0 - \frac{EI}{l}\theta^0\left(1 + \frac{12x_\theta x}{l^2}\right) + \frac{EI}{l}\varphi_A\left(1 - \frac{6x}{l}\right) -$$

$$- \frac{EI}{l}\varphi_B\left(1 + \frac{6x}{l}\right) + \frac{12EI}{l^3}(\Delta_B - \Delta_A) \cdot x \qquad (144)$$

Вирази для опорних моментів:

$$M_A = -\frac{EI\theta^0}{l}\left(1 - \frac{6x_\theta}{l}\right) + \frac{4EI}{l}\varphi_A + \frac{2EI}{l}\varphi_B - \frac{6EI}{l^2}(\Delta_B - \Delta_A) \qquad (145)$$

$$M_B = -\frac{EI\theta^0}{l}\left(1 + \frac{6x_\theta}{l}\right) - \frac{4EI}{l}\varphi_B - \frac{2EI}{l}\varphi_A + \frac{6EI}{l^2}(\Delta_B - \Delta_A) \qquad (146)$$

Поперечна сила:

$$Q_x = Q_x^0 - \frac{12EI\theta^0 x_\theta}{l^3} - \frac{6EI\varphi_A}{l^2} - \frac{6EI\varphi_B}{l^2} + \frac{12EI(\Delta_B - \Delta_A)}{l^3} \qquad (147)$$

Сказане про заміну θ^0 через τ_A^0 і τ_B^0 стосується й до випадку сталої цупкости. Зауважимо так само, що, коли замість θ^0 підставити його вартість за формулою (128), то EI скорочується і перший член у формулах (145) і (146) набуває характерного вигляду формули краєвих напруг при позацентровому стиску прямокутнього перекрою, що завширшки $= 1$.

$$M_A = -\frac{\Omega}{l}\left(1 - \frac{6x_\theta}{l}\right); \quad M_B = -\frac{\Omega}{l}\left(1 + \frac{6x_\theta}{l}\right) \quad (145'), \ (146')$$

§ 12. Трям з одним заправленим і іншим вільно обпертим кінцем.

Трям (фіг. 26) несе місцеве справжнє й фіктивне обтяження і зазнає впливу осідів опорних точок на Δ_A і Δ_B. Крім того, перекрій в суставі обтяжений зовнішнім моментом M_A, а заправлений перекрій зазнає вимушеного поверту на кут φ_B. Спочатку визначимо згинні моменти і поперечні сили, скористувавшися для цього розв'язкою для тряма із заправленими кінцями; далі знайдемо фіктивну реакцію в суставі A, ґрунтуючися на формулах для тряма з вільними кінцями.

Як установлено (див. § 7), пружний центр зливається з суставом, еквівалентним зосередженій дільниці епюри обернених цупкостей з безконечно великою площею. Тому й повна площа епюри $F' = \infty$. Крім того, $c_A' = 0$; $c_B' = l$; $J' = J_A$.

Основні формули (132) і (133) для M і Q наберуть вигляду:

$$M_x = M_x^0 + \frac{M_{A\theta}^0 x}{J_A} = M_x^0 - \frac{\theta^0 x_\theta x}{J_A} \qquad (148)$$

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_{A\theta}^0}{J_A} = M_x^0 - \frac{\theta^0 x_\theta}{J_A} \qquad (149)$$

Вилучимо активне фіктивне обтяження, спричинене моментом M_A. За основну систему беремо трям на двох опорах.

Додатковий момент у перекрої x:

$$\overline{M}_x = M_A \frac{l-x}{l}$$

Інтенсивність фіктивного обтяження:

$$\frac{\overline{d\theta}}{dx} = \frac{M_A(l-x)}{l\,EI}$$

Фіктивний тягар:

$$\overline{\theta} = \int \frac{M_A(l-x)\,dx}{l\,EI} =$$

$$= M_A \frac{S_B}{l}; \qquad (150)$$

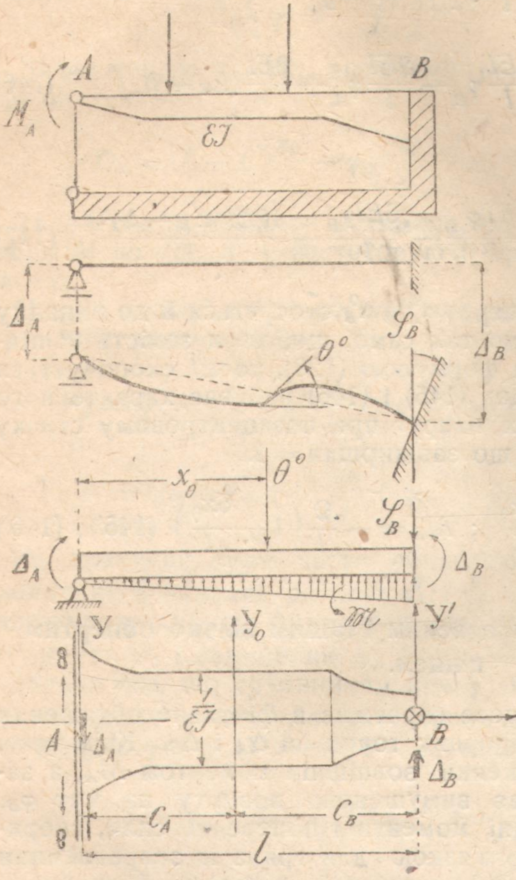
де S_B статичний момент епюри обернених цупкостей щодо осі Y'.

Фіктивний момент навколо Y:

$$\overline{M}_{A\theta} = -\int \frac{M_A(l-x)x\,dx}{l\,EI} =$$

$$= -M_A \frac{J_{AB}}{l} =$$

$$= -M_A \tau_{AB} l \qquad (151)$$



Фіг. 26.

Фіктивний момент навколо Y':

$$\overline{M}_{B\theta} = \int \frac{M_A(l-x)^2\,dx}{l\,EI} = M_A \frac{J_B}{l} = M_A \tau_A l \qquad (152)$$

Беручи на увагу додаткове фіктивне обтяження, розгортаємо формулу (148):

$$M_x = M_x^0 + \frac{M_{A\theta}^0}{J_A} x + M_A\left(\frac{l-x}{l} - \frac{J_{AB}}{J_A}\frac{x}{l}\right) -$$

$$- \varphi_B \frac{l}{J_A} x + \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J_A} x \qquad (153)$$

[1]) Усі величини J, F, S тут беремо, не зважаючи на сустав A, тобто як для трама із заправленими кінцями. На фіг. 26 в пляні пропущено фікт. тягар θ^0.

Опорний момент знайдемо, поклавши $x = l$.

$$M_B = \frac{M^0_{A\theta} l}{J_A} - M_A \frac{J_{AB}}{J_A} - \varphi_B \frac{l^2}{J_A} + \frac{(\Delta_B - \Delta_A) l}{J_A} \qquad (154)$$

Нагадаємо, що

$$M^0_{A\theta} = -\theta^0 x_\theta = -\tau^0_B l \qquad (155)$$

Поперечна сила в перекрої x:

$$Q_x = Q^0_x + \frac{M^0_{A\theta}}{J_A} - \frac{M_A}{l}\left(1 + \frac{J_{AB}}{J_A}\right) - \varphi_B \frac{l}{J_A} + \frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{J_A} \qquad (156)$$

Маючи M_B, знайдемо фіктивну реакцію за формулою (116)

$$\tau_A = \tau^0_A + M_A \frac{J_B}{l^2} + \left[-\frac{\tau^0_B l^2}{J_A} - \frac{M_A J_{AB}}{J_A} - \varphi_B \frac{l^2}{J_A} + \frac{(\Delta_B - \Delta_A) l}{J_A}\right] \frac{J_{AB}}{l^2}$$

Поробивши деякі перетворення та узявши на увагу (122) і (123), дістанемо

$$\tau_A = \tau^0_A + M_A \frac{JF}{J_A} - (\tau^0_B + \varphi_B) \frac{J_{AB}}{J_A} + (\Delta_B - \Delta_A) \frac{F}{J_A} c_A \qquad (157)$$

Розв'язки (154) і (157) для M_B і τ_A можна здобути й іншими способами. Замінюючи в (117) τ_B на $(-\varphi_B)$ і розв'язуючи здобуте рівняння, знайдемо M_B. Так само, покладаючи в (142), $\varphi_A = \tau_A$ і розв'язуючи рівняння, знайдемо τ_A.

Узагалі ж розв'язки для трьох розглянених типів трямів являють собою не що інше, як різні форми застосовування умов замкнености, щоб визначати початкові внутрішні сили або початкові деформації.

Коли цупкість стала, формули відповідно спрощуються. Підставивши вартості (121″), дістанемо

$$M_x = M^0_x + M_A \left(\frac{l - x}{l} - \frac{x}{2l}\right) - \frac{3EI}{l^2} \tau^0_B x -$$

$$- \frac{3EI}{l^2} \varphi_B x + \frac{3EI}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A) x \qquad (158)$$

Опорний момент:

$$M_B = -\frac{M_A}{2} - \frac{3EI\tau^0_B}{l} - \frac{3EI\varphi_B}{l} + \frac{3EI(\Delta_B - \Delta_A)}{l^2} \qquad (159)$$

Поперечна сила в перекрої x:

$$Q_x = Q^0_x - \frac{3}{2} \frac{M_A}{l} - \frac{3EI}{l^2} \tau^0_B - \frac{3EI\varphi_B}{l^2} + \frac{3EI}{l^3} (\Delta_B - \Delta_A) \qquad (160)$$

Фіктивна реакція (поверт перекрою A за годинниковою стрілкою):

$$\tau_A = \tau_A^0 + \frac{M_A l}{4EI} - \frac{\tau_B^0}{2} - \frac{\varphi_B}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{(\Delta_B - \Delta_A)}{l} \tag{161}$$

§ 13. Епюри й інфлюенти $\mathfrak{M}$ для тряма із заправленими кінцями від чину фіктивного обтяження.

Як ми бачили, епюра моментів $\mathfrak{M}$, спричинених реакціями зайвих закріплень тряма із заправленими кінцями, являє собою пряму лінію. Точку, в якій епюра $\mathfrak{M}$ перетинає вісь, називатимемо **нульовою точкою**, за аналогією з нульовою або невтральною лінією замкненого пружного контуру. Положення нульової точки безпосередньо залежить від фіктивного обтяження. Щоб знайти абсцису x_n нульової точки, прирівняємо вираз для моменту $\mathfrak{M}$ (тобто рівняння епюри $\mathfrak{M}$) нулеві

$$-\left(\frac{\theta^0}{F} - \frac{M^0_{Y\theta}}{J}\,x_n\right) = 0 \tag{162}$$

Звідки

$$x_n = \frac{\theta^0}{M^0_{Y\theta}} \cdot \frac{J}{F} = -\frac{\rho^2}{x_\theta} = -\frac{J}{F x_\theta} \tag{163}$$

Знак (—) показує, що θ^0 і точка n розміщені по різні боки пружного центра.

Коли $\theta^0 = 0$, нульова точка має стале положення, що зливається з пружним центром. Цей випадок відповідає чистому згинові основи взаємного абсолютно цупкого тряма. Коли $M_{Y\theta} = x_\theta = 0$, нульова точка віддаляється на безконечність. Епюра $\mathfrak{M}$ рівнобіжна з віссю, як епюра напруг при центральному стиску. Похил епюри $\mathfrak{M}$ до осі, що дорівнює вислідній внутрішніх сил $\mathfrak{R}$ і одночасно поперечній силі $\mathfrak{Q}$, можна визначити різними способами

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{M_{Y\theta}}{J} = -\frac{\theta^0 x_\theta}{J} = \frac{\theta^0}{F x_n} \tag{164}$$

Знаючи положення нульової точки і похил, легко знайти $\mathfrak{M}_x$ в якому завгодно перекрої з абсцисою x

$$\mathfrak{M}_x = w \operatorname{tg}\gamma, \tag{165}$$

де $w = x - x_n$ є віддаль від нульової точки до досліджуваного перекрою.

Цілком аналогічно з поверхнею впливу для моменту $\mathfrak{M}$ в точці a контуру, можна обґрунтувати і поняття інфлюенти моменту $\mathfrak{M}$ в перекрої з абсцисою x_a тряма із заправленими шнями. Нехай фіктивний тягар $\theta^0=1$ чинить у перекрої з абсцисою x. Момент в a буде:

$$\mathfrak{M}_{ax}=-\frac{1}{F}-\frac{xx_a}{J} \tag{166}$$

Той самий вираз ми дістанемо для моменту в x від фіктивного тягара в a.

$$\mathfrak{M}_{xa}=-\frac{1}{F}-\frac{x_a x}{J} \tag{167}$$

Отже,

$$\mathfrak{M}_{ax}=\mathfrak{M}_{xa}, \tag{168}$$

тобто інфлюента для моменту $\mathfrak{M}_a$ зливається з епюрою, збудованою від обтяження $\theta^0=1$, прикладеного в a.

Отже, всяка епюра $\mathfrak{M}$, збудована від якогось фіктивного тягара θ^0, одночасно являє собою інфлюенту (з ординатами, збільшеними в θ^0 разів) для моменту $\mathfrak{M}$ в перекрої, де чинить фіктивний тягар θ^0. Нульову точку інфлюенти $\mathfrak{M}_a$ визначають за формулою (163), беручи $x_\theta=x_a$. Похил знайдемо з (164), покладаючи $\theta^0=1$, $x_\theta=x_a$.

Щоб знайти $\mathfrak{M}_a$ від якого завгодно фіктивного обтяження за інфлюентою, досить узяти момент фіктивного обтяження навколо нульової точки n і помножити на $\operatorname{tg}\gamma$, або, що те саме, поділити на момент опору епюри обернених цупкостей щодо точки a.

$$\mathfrak{M}_a=\theta_x^0\cdot\mathfrak{M}_{ax}=\theta_x^0 r_n\cdot\operatorname{tg}\gamma_a=M_{n\theta}^0\cdot\operatorname{tg}\gamma_A=-\frac{M_{n\theta}^0}{W_a}, \tag{169}$$

де

$$W_a=\frac{J}{x_a} \tag{170}$$

Відзначимо цілковиту аналогію з **визначенням нормальних напруг за ядровими моментами.**

З'ясуємо деякі властивості епюр-інфлюент, конче потрібні для дальшого викладу.

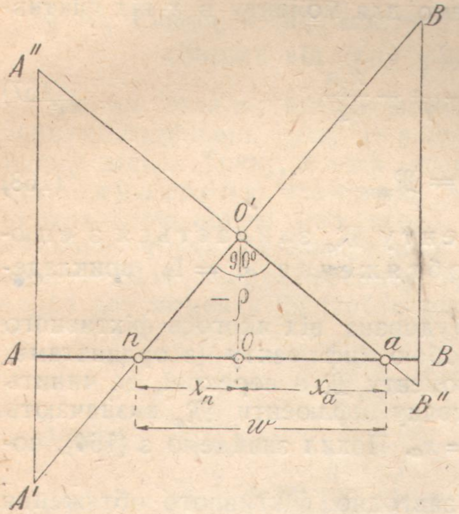
1. Усі інфлюенти мають спільну ординату в пружному центрі

$$\mathfrak{M}_0=-\frac{1}{F} \tag{171}$$

2. Нульова точка епюри, побудованої від $\theta^0=1$ в точці n, зливається з точкою a. Це безпосередньо виходить з симетрії формули (163) щодо абсцис:

$$x_a\, x_n=-\varrho^2 \tag{172}$$

На залежностях (171) і (172) ґрунтується просте графічне визначення нульових точок і побудування самих інфлюент. Відкладаємо (фіг. 27) в пружному центрі ординату $OO' = -\rho$. Сполучаємо O' з точкою a і проводимо через O' пряму під кутом 90° до $O'a$. Ця пряма перетне вісь у нульовій точці n.



Фіг. 27.

Коли вибрати маштаб так, щоб $OO' = -\frac{1}{F}$, то пряма $A'B'$ буде інфлюентою $\mathfrak{M}_a$, а пряма $A''B''$ — інфлюентою $\mathfrak{M}_n$.

3. Знайдемо віддаль між точкою a і нульовою точкою, що їй відповідає.

$$w = x_a - x_n = x_a + \frac{J}{Fx_a} =$$

$$= \frac{Fx_a^2 + J}{Fx_a} = \frac{J_a}{S_a} \qquad (173)$$

Отже w дорівнює моментові інерції епюри обернених цупкостей щодо осі Y_a, поділеному на статичний момент для тієї самої осі. Очевидно,

$$w = \frac{J_a}{S_a} = \frac{J_n}{S_n} \qquad (174)$$

Формулу (173) можна здобути й безпосередньо з суто статичних міркувань. Прирівнюємо нулеві суму моментів активного і реактивного фіктивного обтяження навколо осі, проведеної через n. Знайдемо:

$$J_n \cdot \operatorname{tg} \gamma_a + 1 \cdot w = 0 \qquad (175)$$

Підставляючи $\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{1}{Fx_n}$, прийдемо до формули (173). З другого боку можна прирівняти нулеві момент фіктивного обтяження навколо осі Y_a.

$$J_{an} \operatorname{tg} \gamma = 0 \qquad (176)$$

Тут, обчисляючи J_{an} згідно з формулою (120), коли $l = w$, знайдемо:

$$wS_a - J_a = wS_n - J_n = 0 \qquad (177)$$

Звідси теж виходить (173) і (174).

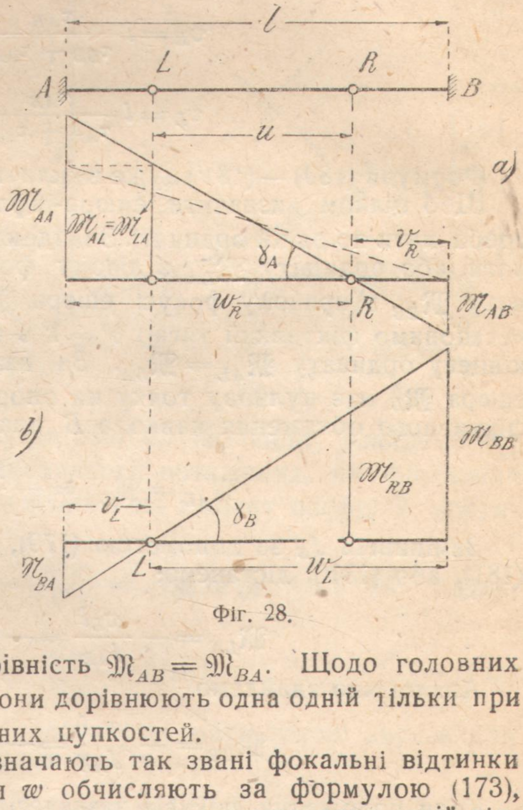
4. Зауважимо, що центр ваги реактивного фіктивного обтяження зливається з точкою прикладення активного фіктивного

тягара $\theta_a = 1$. Через те нульова точка n одночасно є центр ваги реактивного фіктивного обтяження, що зрівноважує $\theta_n = 1$.

Взаємно нульові точки можна визначити так само, як точки, що для них момент інерції J_{an} навколо рівнобіжних осей Y_a і Y_n обертається в нуль.

§ 14. Фокальні властивості тряма з заправленими кінцями.

Найбільше практичне значення мають інфлюенти для моментів $\mathfrak{M}$ по кінцях тряма. При основній системі у вигляді вільно обпертого тряма $M_A^0 = M_B^0 = 0$, повні моменти M у перекроях A і B дорівнюють моментам $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$. Нульову точку епюри-інфлюенти $\mathfrak{M}_A$ називатимемо правим фокусом і позначатимемо через R. Нульову точку епюри-інфлюенти $\mathfrak{M}_B$ — лівим фокусом і позначатимемо L. Фіктивний тягар, що чинить в L, дає $\mathfrak{M}_B = 0$, тягар в R дає $\mathfrak{M}_A = 0$. Фокуси відіграють ролю, яка точно відповідає ядровим точкам перекрою, що зазнає позацентрового стиску. Інфлюенти $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$ подано на фіг. 28.



Фіг. 28.

Відзначимо характерну рівність $\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{BA}$. Щодо головних ординат $\mathfrak{M}_{AA}$ і $\mathfrak{M}_{BB}$, то вони дорівнюють одна одній тільки при симетричній епюрі обернених цупкостей.

Положення фокусів визначають так звані фокальні відтинки w_R і v_R, w_L і v_L. Відтинки w обчисляють за формулою (173), як віддаль між нульовими точками, що взаємно одна одній відповідають:

$$w_R = \frac{J_A}{S_A} \tag{178}$$

$$w_L = \frac{J_B}{S_B} \tag{179}$$

Наприклад, для тряма сталої цупкости

$$w_L = w_R = \frac{l^3}{3EI} : \frac{l^2}{2EI} = \frac{2}{3} l$$

Відтинки v знайдемо, як додаток w до довжини прогону l.

$$v_R = l - w_R = \frac{S_A l - J_A}{S_A} = l \frac{J_{AB}}{J_A + J_{AB}} \tag{180}$$

$$v_L = l - w_L = \frac{S_B l - J_B}{S_B} = l \frac{J_{AB}}{J_B + J_{AB}} \tag{181}$$

Замість величин J_A, J_B, J_{AB} дуже часто доводиться користуватися вартостями τ. Тоді, на підставі (118) — (120),

$$v_R = l \frac{\tau_{AB}}{\tau_{BB} + \tau_{AB}} \tag{180'}$$

$$v_L = l \frac{\tau_{AB}}{\tau_{AA} + \tau_{AB}} \tag{181'}$$

Формули (180) — (181′) дуже важливі для методу фокусів.

Щоб цілком визначити епюри-інфлюенти $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$, конче треба мати по одній ординаті. Знайдемо так звані фокальні ординати, або ординату $\mathfrak{M}_{LA}$ в лівому фокусі епюри $\mathfrak{M}_A$ і ординату $\mathfrak{M}_{RB}$ в правому фокусі епюри $\mathfrak{M}_B$. Замість шукати $\mathfrak{M}_{LA}$, встановимо фіктивний тягар $\theta^0 = 1$ в точці L і знайдемо ліву кінцеву ординату $\mathfrak{M}_{AL} = \mathfrak{M}_{LA}$. За властивістю лівого фокуса епюра $\mathfrak{M}_L$ має нульову точку на опорі B. З рівняння моментів фіктивного обтяження навколо B, знайдемо:

$$\mathfrak{M}_{AL} = \mathfrak{M}_{LA} = -\frac{1 \cdot w_L l}{J_B} \tag{182}$$

Замінивши J_B за допомогою (179), а далі S_B за допомогою (181), або (181′), дістанемо:

$$\mathfrak{M}_{LA} = -\frac{v_L l}{J_{AB}} = -\frac{1}{\tau_{AB}} \cdot \frac{v_L}{l} \tag{183}$$

Аналогічно знайдемо

$$\mathfrak{M}_{RB} = -\frac{v_R l}{J_{AB}} = -\frac{1}{\tau_{AB}} \cdot \frac{v_R}{l} \tag{184}$$

Коли положення фокусів заздалегідь визначено, то інфлюенти $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$ можна збудувати графічно (фіг. 29). Щоб збудувати $\mathfrak{M}_A$, відкладаємо на опорі B сторчовий відтинок $BG = -\frac{1}{\tau_{AB}}$ і сполучаємо точку G з A. Ордината $LL' = \mathfrak{M}_{LA}$. Через L' і фокус R креслимо пряму $A'B'$. Це й буде інфлюента $\mathfrak{M}_A$. Щоб збудувати $\mathfrak{M}_B$, відкладаємо той самий відтинок $-\frac{1}{\tau_{AB}}$ на опорі A. Провівши EB і поставивши нормалю в R, знайдемо $RR' = \mathfrak{M}_{RB}$. Накресливши $R'L$, дістанемо інфлюенту $\mathfrak{M}_B(A''B'')$.

На фіг. 29 крапчаком позначені так само інфлюенти $\mathfrak{M}_L$ і $\mathfrak{M}_R$. Усі чотири інфлюенти-епюри перетинаються на вертикалі пружного центра.

Маючи фокальні ординати, визначимо похил епюр-інфлюент $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$ (фіг. 28), або величини, обернені моментам опору епюри обернених цупкостей для точок A і B.

$$\operatorname{tg}\gamma_A = -\frac{1}{W_A} = \frac{\mathfrak{M}_{LA}}{u} =$$

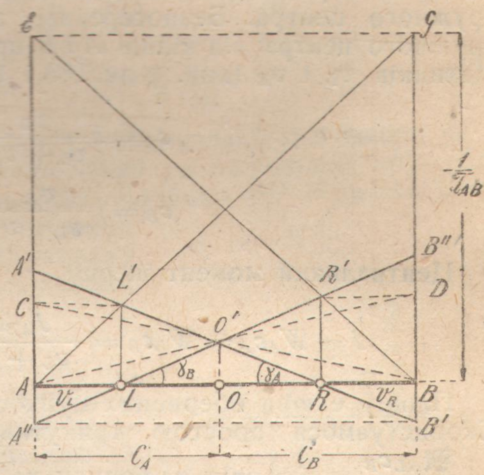
$$= -\frac{v_L l}{J_{AB} u} = -\frac{v_L}{\tau_{AB} u l} \qquad (185)$$

$$\operatorname{tg}\gamma_B = -\frac{1}{W_B} =$$

$$= -\frac{v_R l}{J_{AB} u} = -\frac{v_R}{\tau_{AB} u l} \qquad (186)$$

Тут через u позначено віддаль між фокусами

$$u = -v_L + l - v_R \qquad (187)$$



Фіг. 29.

Знаючи положення фокусів і похил інфлюент, знайдемо $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$ від якого завгодно фіктивного обтяження, як фіктивний момент навколо фокуса, поділений на момент опору, з протилежним знаком.

$$\mathfrak{M}_A = -\frac{M_{R\theta}}{W_A} = M_{R\theta} \operatorname{tg}\gamma_A \qquad (188)$$

$$\mathfrak{M}_B = -\frac{M_{L\theta}}{W_B} = M_{L\theta} \operatorname{tg}\gamma_B \qquad (189)$$

Для різних застосувань треба буває мати готові вирази для кінцевих ординат епюр-інфлюент. Очевидно:

$$\mathfrak{M}_{AA} = w_R \operatorname{tg}\gamma_A = -\frac{w_R v_L l}{J_{AB} u} = -\frac{w_R v_L}{\tau_{AB} u l} \qquad (190)$$

$$\mathfrak{M}_{BB} = w_L \operatorname{tg}\gamma_B = -\frac{w_L v_R l}{J_{AB} u} = -\frac{w_L v_R}{\tau_{AB} u l} \qquad (191)$$

$$\mathfrak{M}_{AB} = \mathfrak{M}_{BA} = -v_R \operatorname{tg}\gamma_A = -v_L \operatorname{tg}\gamma_B =$$

$$= \frac{v_L v_R l}{J_{AB} u} = \frac{v_L v_R}{\tau_{AB} u l} \qquad (192)$$

Маючи кінцеві ординати, можна визначити $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$ від якого завгодно фіктивного обтяження, коли попереду знайти фіктивні реакції $\overset{0}{\tau}_A$ і $\overset{0}{\tau}_B$.

Ми. бачимо, що всі потрібні для розрахунку величини виражаються через J_{AB} або τ_{AB} і фокальні відтинки v і w. Покажемо, як перейти від цих величин до J і F і знайти положення пружного центра. Безпосередньо з фіг. 29 видно, що віддалі пружного центра від кінців A і B пропорціональні до фокальних відтинків v_L і v_R (див. ф-ли 183 і 184). Через те

$$c_A = l\frac{v_L}{v_L + v_R} \tag{193}$$

$$c_B = l\frac{v_R}{v_L + v_R} \tag{194}$$

Центральний момент інерції

$$J = W_A c_A = W_B c_B = \frac{J_{AB} u}{v_L + v_R} = \tau_{AB}\, l^2 \frac{u}{v_L + v_R} \tag{195}$$

Площу епюри обернених цупкостей знайдемо з умови (171). Скористуємося простою трикутньою епюрою $\mathfrak{M}_L$ (фіг. 28) $-\frac{\mathfrak{M}_{AL} c_B}{l} = \frac{1}{F}$, звідки, беручи на увагу (183) і (194), дістанемо

$$F = \frac{J_{AB}}{l}\,\frac{(v_L + v_R)}{v_L v_R} = l\,\frac{\tau_{AB}(v_L + v_R)}{v_L v_R} \tag{196}$$

Пружний центр можна розглядати так само, як фокус епюри $\mathfrak{M}$, збудованої для випадку, коли чинить не фіктивний тягар, а фіктивний момент $M_{Y\theta}$. Коли $M_{Y\theta} = 1$, ця епюра є одночасно інфлюента для похилу епюри $\mathfrak{M}$ або поперечної сили $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}$ (див. формулу 164). Похил цієї інфлюенти

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{1}{J} = -\frac{v_L + v_R}{J_{AB}\, u} = -\frac{(v_L + v_R)}{\tau_{AB}\, l^2 u} \tag{197}$$

Кінцеві ординати:

$$\mathfrak{Q}_{AA} = -c_A \operatorname{tg}\beta = \frac{l v_L}{J_{AB} u} = \frac{1}{\tau_{AB}} \cdot \frac{v_L}{ul} = -\operatorname{tg}\gamma_A \tag{198}$$

$$\mathfrak{Q}_{BA} = c_B \operatorname{tg}\beta = -\frac{l v_R}{J_{AB} u} = -\frac{1}{\tau_{AB}} \cdot \frac{v_R}{ul} = \operatorname{tg}\gamma_B \tag{199}$$

Звернімо увагу на те, що ці ординати дорівнюють похилам епюр $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$ (фіг. 28).

Абсциси фокусів, беручи пружний центр за початок координат:

$$x_R = c_B - v_R = \frac{u v_R}{v_L + v_R}$$

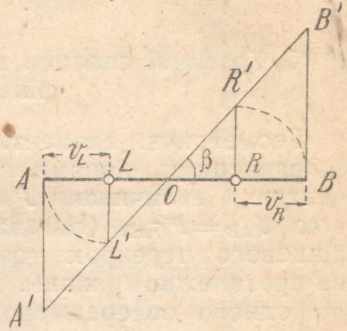
$$x_L = -(c_A - v_L) = -\frac{u v_L}{v_L + v_R}$$

Фокальні ординати:

$$\mathfrak{Q}_R = \operatorname{tg}\beta \cdot x_R = -\frac{v_R}{J_{AB}} = -\frac{v_R}{l^2 \tau_{AB}} \tag{200}$$

$$\mathfrak{Q}_L = \operatorname{tg}\beta \cdot x_L = \frac{v_L}{J_{AB}} = \frac{v_L}{l^2 \tau_{AB}} \tag{201}$$

На фіг. 30 подано графічне побудування цієї епюри $\mathfrak{M}$ — інфлюенти $\mathfrak{Q}$ одночасно з визначенням положення пружного центра. Коли відкласти у фокусах відтинки $RR' = v_R$ і $LL' = v_L$, то пряма $R'L'$ пройде через пружний центр і становитиме відшукувану епюру з ординатами, збільшеними в $J_{AB} = l^2 \tau_{AB}$ разів.



Фіг. 30.

Наприкінці дамо формули для кінцевих моментів і опорних реакцій від чину місцевого фіктивного обтяження, вимушених повертів опорних перекроїв за годинниковою стрілкою на кути φ_A та φ_B і осідів опор — лівої на Δ_A, правої на Δ_B (див. формули 137, 138, 139).

Усе активне фіктивне обтяження замінено компонентами по кінцях. Місцеве фіктивне обтяження дає компоненти $\overset{0}{\tau}_A$ і $\overset{0}{\tau}_B$, що числово дорівнюють фіктивним реакціям. Вимушені поверти дають фіктивні тягарі $\theta_A = -\varphi_A$; $\theta_B = \varphi_B$.

Перекіс на $\Delta_B - \Delta_A = \delta$ (фіктивний момент) можна замінити на два рівні протилежні вимушені кути поверту (фіктивні тягарі) $\theta_A = \frac{\delta}{l}$, $\theta_B = -\frac{\delta}{l}$ (компоненти фіктивної пари). Далі скористуємося формулами (190) — (192).

$$M_A = \mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}_{AA} \sum \theta_A + \mathfrak{M}_{AB} \sum \theta_B =$$

$$= -\frac{w_R}{\tau_{AB}} \frac{v_L}{ul} \left(\overset{0}{\tau}_A - \varphi_A + \frac{\delta}{l} \right) + \frac{v_L v_R}{\tau_{AB} ul} \left(\overset{0}{\tau}_B + \varphi_B - \frac{\delta}{l} \right) =$$

$$= -\frac{v_L}{\tau_{AB} ul} \left[(\overset{0}{\tau}_A - \varphi_A) w_R - (\overset{0}{\tau}_B + \varphi_B) v_R + \delta \right] \tag{202}$$

$$M_B = \mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_{BB} \sum \theta_B + \mathfrak{M}_{BA} \sum \theta_A =$$

$$= -\frac{v_R}{\tau_{AB} ul} \left[(\overset{0}{\tau}_B + \varphi_B) w_L - (\overset{0}{\tau}_A - \varphi_A) v_L - \delta \right] \tag{203}$$

Опорні реакції знайдемо за формулами (198) і (198′).

$$Y_A = Y_A^0 + \mathfrak{Q}_A = Y_A^0 + \mathfrak{Q}_{AA} \sum \theta_A + \mathfrak{Q}_{AB} \sum \theta_B =$$

$$= Y_A^0 + \frac{v_L}{\tau_{AB}\, ul}\left(\tau_A^0 - \varphi_A + \frac{\delta}{l}\right) - \frac{v_R}{\tau_{AB}\, ul}\left(\tau_B^0 + \varphi_B - \frac{\delta}{l}\right) =$$

$$= Y_A^0 + \frac{1}{\tau_{AB}\, ul}\left[(\tau_A^0 - \varphi_A)\, v_L - (\tau_B^0 + \varphi_B)\, v_R + \delta\right] \tag{204}$$

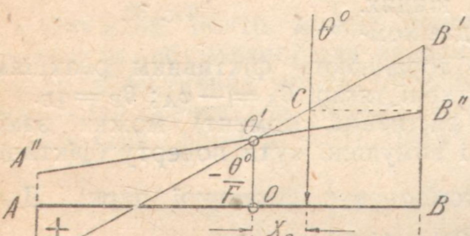
Аналогічно знайдемо:

$$Y_B = Y_B^0 - \mathfrak{Q}_B =$$

$$= Y_B^0 - \frac{1}{\tau_{AB}\, ul}\left[(\tau_A^0 - \varphi_A)\, v_L - (\tau_B^0 + \varphi_B)\, v_R + \delta\right] \tag{205}$$

§ 15. Графічні способи побудування епюри $\mathfrak{M}$ при довільному фіктивному обтяженні.

Геометричні елементи епюри обернених цупкостей тряма із заправленими кінцями завдаються або положенням пружного центра і величинами J і F, або положенням фокусів і величиною $J_{AB} = l^2 \tau_{AB}$. (Нагадаймо, що τ_{AB} являє собою кут поверту кінцевого перекрою тряма на двох опорах від моменту $M = 1$ на протилежному кінці). Активне фіктивне обтяження зводиться до одного зосередженого фіктивного тягара θ^0 (в частковому випадку до одного моменту $M_{Y\theta}^0$) або до двох компонентів θ_A і θ_B по кінцях тряма, що числово дорівнюють фіктивним опорним реакціям τ_A^0 і τ_B^0 [1]). Розгляньмо чотири характерні випадки.



Фіг. 31.

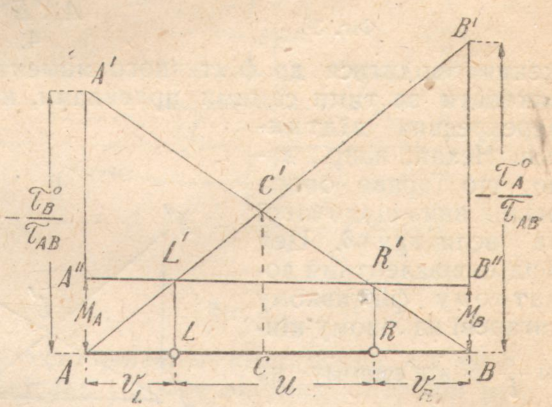
1. Нехай дано пружний центр O, величини J, F і θ^0 (фіг. 31). За відомими правилами будуємо інфлюенту $A'B'$ одного з опорних моментів, напр., $\mathfrak{M}_B$ з ординатами, збільшеними в θ^0 разів. Фіктивний тягар, прикладений в перекрої з абсцисою x_θ, спричинить опорний момент $\mathfrak{M}_B = BB''$. Сполучивши точку B'' і O' і продовживши цю пряму, знайдемо епюру $AA''B''B$.

2. Дано положення фокусів L і R, величину $J_{AB} = l^2 \tau_{AB}$ і компоненти фіктивного тягара τ_A^0 і τ_B^0. На підставі принципу

[1]) Ми позначатимемо їх далі, як реакції τ_A^0 і τ_B^0, але пам'ятатимемо, що мова йде про компоненти активного фіктивного обтяження.

додавання чину сил або малих переміщень повну епюру $\mathfrak{M}$ можна представити, як епюру від $\theta_A=\tau_A^0=1$, з ординатами, збільшеними в τ_A^0 разів, складену з епюрою від $\theta_B=\tau_B^0=1$, з ординатами, збільшеними в τ_L^0. Досить визначити дві ординати сумарної епюри. Найпростіше знайти фокальні ординати, бо ліва фокальна ордината не залежить від θ_B, а права не залежить від θ_A. Щоб визначити фокальні ординати, скористуємося способом уже застосованим для побудування епюр-інфлюент $\mathfrak{M}_A$ і $\mathfrak{M}_B$. На правій кінцевій вертикалі (фіг. 32) відкладаємо відтинок $BB'=-\frac{\tau_A^0}{\tau_{AB}}$, на лівій відтинок $AA'=-\frac{\tau_B^0}{\tau_{AB}}$.

Відтинки BB' і AA' звуться **перехресними**, бо вони пропорціональні до фіктивних реакцій протилежних опор. Проводимо діягоналі AB' і $A'B$ і проєктуємо лівий фокус на діягональ AB', правий на діягональ $A'B$. Відтинки LL' і RR' дорівнюють фокальним ординатам згаданих попереду одиничних епюр, збільшених відповідно в τ_A^0 і τ_B^0 разів. Креслячи пряму $L'R'$, знайдемо **сумарну** епюру $AA''B''B$ моментів $\mathfrak{M}$.



Фіг. 32.

3. Завдано положення фокусів L і R, величину $J_{AB}=l^2\tau_{AB}$ і фіктивний тягар θ^0. Насамперед покажемо, як перейти до θ^0, коли дано τ_A^0 і τ_B^0. Легко пересвідчитися, що вислідний фіктивний тягар, що його компоненти дорівнюють τ_A^0 і τ_B^0 (фіг. 32), проходить через точку C' перетину діягоналей. Справді, з умов рівноваги має бути:

$$\frac{\tau_B^0}{\tau_A^0}=\frac{AC}{CB}$$

Це співвідношення справджується, бо трикутники $AA'C'$ і $C'B'B$ подібні.

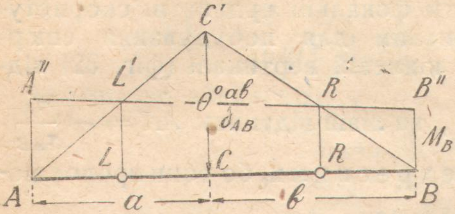
Позначимо віддалі AC і CB вислідного фіктивного тягара від кінців A і B відповідно через a і b. Перехресні відтинки визначаться так:

$$-\frac{\tau_A^0}{\tau_{AB}}=-\frac{\theta^0 b}{l\tau_{AB}}; \qquad -\frac{\tau_B^0}{\tau_{AB}}=-\frac{\theta^0 a}{l\tau_{AB}}$$

Відтинок CC' з подібности трикутників ACC' і $AB'B$:

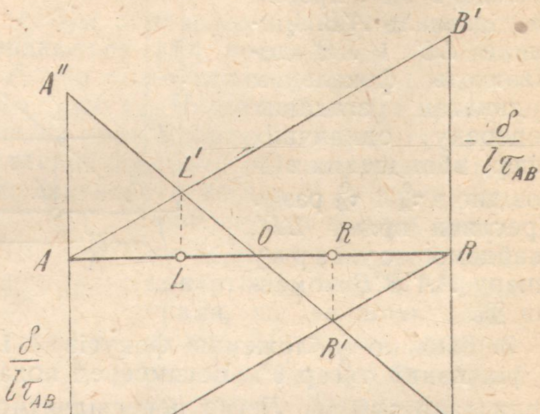
$$CC' = -\frac{\theta^0}{\tau_{AB}} \frac{ab}{l^2} = -\theta^0 \frac{ab}{J_{AB}} \tag{206}$$

Звідси приходимо до такого побудування. У точці прикладення фіктивного тягара C (фіг. 33) відкладаємо ординату CC' (формула 206) і сполучаємо точку C' з кінцями A і B. Через проєкції фокусів L' і R' креслимо пряму аж до перетину з кінцевими вертикалями. Епюра $\mathfrak{M}$ буде $AA''B''B$.



Фіг. 33.

4. Коли фіктивне обтяження зводиться до фіктивного моменту, побудування можна виконати за тими самими правилами, найкраще за допомогою перехресних відтинків. Нехай, напр., дано, що права опора осідає вниз щодо лівої на величину δ. Цей осід еквівалентний додатному фіктивному тягареві на лівому кінці $\frac{\delta}{l}$ і від'ємному на правому $-\frac{\delta}{l}$. Відповідно до цього, відкладаємо на правій опорній вертикалі відтинок $BB' = -\frac{\delta}{l\tau_{AB}}$, на лівій $AA' = \frac{\delta}{l\tau_{AB}}$. Побудування подано на фіг. 34. Мимохідь дістаємо пружний центр O.



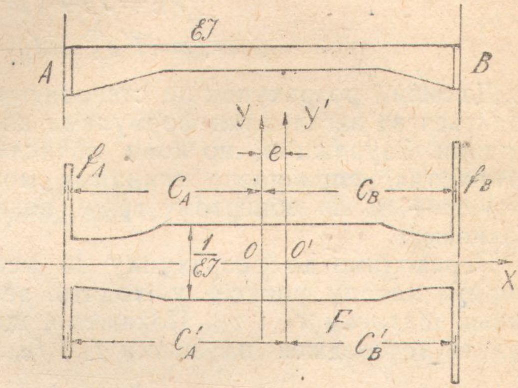
Фіг. 34.

§ 16. Трям із пружно заправленими кінцями.

Тут маємо на увазі трями, що в них заправлення (п'ята) ставить пружний опір повертові п'ятового перекрою. У сторчовому напрямі опори припускаємо цупкими. Пружність заправлення характеризує кут f, що на нього повертається заправлення, коли на нього безпосередньо впливає момент $M = 1$. Трям із пружно заправленими кінцями можна представити, як частковий випадок тряма з цупко заправленими кінцями, що нього найближчі до опор нескінченно малі елементи ds_A і ds_B мають цупкість EI_A і EI_B, яку визначається рівностями

$$\frac{ds_A}{EI_A} = f_A; \quad \frac{ds_B}{EI_B} = f_B \tag{207}$$

Очевидно, епюра обернених цупкостей матиме по кінцях зосереджені елементи, нескінченно малі завдовжки, але вони мають конечну площу f_A і f_B. Схематично епюру обернених цупкостей подано на фіг. 35. Взаємний абсолютно цупкий трям на пружній основі, як і в випадку цупкого заправлення, матиме вільні кінці.



Фіг. 35.

Можна уявити собі взаємну конструкцію й інакше: саме по кінцях основи нескінченно цупкого тряма уявити пружні опори як пружини, що розвивають, коли осід дорівнює 1, зосереджену реакцію f. Алеж уявлення, засноване на аналогії з площею, заслуговує на перевагу для однопрогінної конструкції, бо зводить розрахунок до одноманітних і добре відомих операцій за формулами позацентрового стиску.

З цього погляду трям із вільно обпертими кінцями теж являє частковий випадок цупко заправленого. Та при цьому треба вважати, що зосереджені площі f_A і f_B дорівнюють безконечності.

Моменти і поперечні сили тряма з пружно заправленими кінцями можна визначати за методом пружного центра або за методом фокусів.

Умовмося величини, що стосуються до тряма з пружним заправленням, позначати літерами з рискою, залишаючи літери без рисок для величин, які характеризують трям, в якому кінці заправлені цупко.

Повна площа епюри обернених цупкостей:

$$F' = f_A + F + f_B \tag{208}$$

Віддалі нового пружного центра від кінців A і B:

$$c'_A = \frac{S'_B}{F'} = \frac{S_B + f_A l}{f_A + F + f_B} \tag{209}$$

$$c'_B = \frac{S'_A}{F'} = \frac{S_A + f_B l}{f_A + F + f_B} \tag{210}$$

Визначимо зсунення пружного центра O' щодо O.

$$e = \frac{f_B c_B - f_A c_A}{f_A + F + f_B} \tag{211}$$

Новий центральний момент інерції найпростіш визначається через момент інерції щодо кінця A або B.

$$J'_A = J_A + f_B l^2 \tag{212}$$

$$J'_B = J_B + f_A l^2 \tag{213}$$

$$J' = J'_A - F' c'^2_A = J'_B - F' c'^2_B \tag{214}$$

Дальший розрахунок не становить жадних труднощів і переводиться за загальними формулами для тряма з заправленими кінцями. Зауважимо, що коли обчислювати активне фіктивне обтяження, спричинене згинними моментами M^0 в основній системі — вільно обпертому трямі, величини f_A і f_B на θ^0 не впливають.

Переходимо до розрахунку за методом фокусів. До всіх формул методу фокусів увіходять величини $J_{AB} = l^2 \tau_{AB}$ і фокальні відтинки v_L і v_R. Покажемо, що J_{AB} не змінюється, коли додати зосереджені площинки f_A і f_B, тобто

$$J'_{AB} = J_{AB} \tag{215}$$

Скористуймося залежністю (120) між J_{AB} і J_A, S_A або J_B, S_B.

$$J'_{AB} = S'_A l - J'_A = l(S_A + f_B l) - (J_A + f_B l^2) =$$
$$= S_A l - J_A = J_{AB} \tag{216}$$

Щодо відтинків v'_L і v'_R, то до виразів для них увіходять, крім J_{AB} ще J'_A і J'_B. Обчислювати фокальні відтинки за формулами (180) — (181′) зовсім не важко, але можна зазначити й трохи відмінний спосіб.

Перепишемо формули (180) —(181′) так:

$$v'_R = l \frac{J_{AB}}{J_A + J_{AB} + f_B l^2} = l \frac{\tau_{AB}}{\tau_{BB} + \tau_{AB} + f_B} \tag{217}$$

$$v'_L = l \frac{J_{AB}}{J_B + J_{AB} + f_A l^2} = l \frac{\tau_{AB}}{\tau_{AA} + \tau_{AB} + f_A} \tag{218}$$

Величини обернені до v'_R і v'_L легко визначаються через v_R, v_L, $J_{AB} = l^2 \tau_{AB}$, f_A і f_B.

Очевидно (див. ф-ли 180 — 181′):

$$\frac{1}{v'_R} = \frac{1}{v_R} + \frac{1}{\eta_B} \tag{219}$$

$$\frac{1}{v'_L} = \frac{1}{v_L} + \frac{1}{\eta_A} \tag{220}$$

Тут η_B і η_A це якісь **в і д т и н к и**, що визначаються формулами

$$\eta_B = \frac{J_{AB}}{l f_B} = l \frac{\tau_{AB}}{f_B} \tag{221}$$

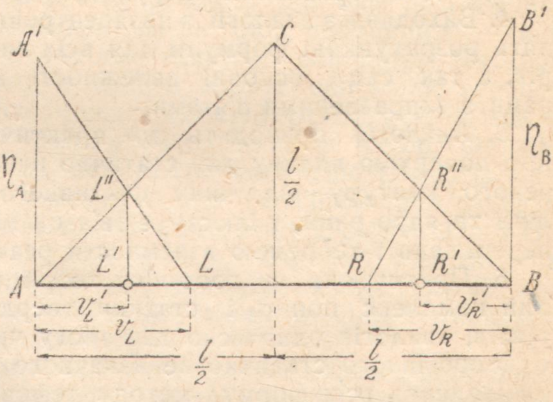
$$\eta_A = \frac{J_{AB}}{l f_A} = l \frac{\tau_{AB}}{f_A} \tag{222}$$

На підставі залежностей (219) і (220) можна дати нескладне графічне побудування, щоб визначати відтинки v'_L і v'_R за відтинками v_L і v_R. Представимо (219), (220) так:

$$\frac{v_R - v'_R}{v'_R} = \frac{v_R}{\eta_B} \tag{219'}$$

$$\frac{v_L - v'_L}{v'_L} = \frac{v_L}{\eta_A} \tag{220'}$$

Нехай фокуси L і R при цупкому заправленні визначено заздалегідь (фіг. 36). Відкладаємо на лівій опорній вертикалі відтинок $AA' = \eta_A$ і сполучаємо точку A' з L. Проводимо пряму AC під кутом 45° до осі і знаходимо точку L'' перетину з $A'L$. Спроєктувавши L'' на вісь, дістанемо лівий фокус L', що ураховує пружне заправлення A. Довід на це випливає з рівности $L'L'' = AL'$ і подібности трикутників $LL'L''$ і LAA', що приводить безпосередньо до (220'). Аналогічно, відкладаючи на правій опорній вертикалі η_B, знайдемо R'', а далі й R'.



Фіг. 36.

Ф о к у с и L **і** R **ц у п к о г о з а п р а в л е н н я** відіграють істотну ролю і в теорії тряма з пружно заправленими кінцями. Коли f_A і f_B зменшуються, фокуси L' і R' наближаються до L і R. Коли заправлення стає не таке цупке, тобто коли f_A і f_B збільшуються, тоді фокуси L' і R' наближаються до опорних перекроїв A і B. Ці останні теж являють собою фокуси, а саме для тряма з кінцями, що вільно повертаються ($f_A = f_B = \infty$).

ВИСНОВКИ.

1. Умови замкнености стрижневого просторового контуру, що зазнає невеликих деформацій, збігаються з умовами рівноваги твердого тіла, яке перебуває підо впливом відповідного (т. зв. фіктивного) обтягу.

2. Усі задачі, що стосуються до кінематики кістяків плоских рамних конструкцій, можна розв'язати в аналітичній формі на підставі умов замкнености — умов рівноваги фіктивного обтягу.

3. Умови замкнености однозв'язного плоского пружного контуру (простої рами) збігаються з умовами рівноваги якоїсь іншої (т. зв. взаємної) абсолютно твердої рами, що лежить на пружній основі і обтяжена активним фіктивним обтягом першої рами. Згинні моменти, спричинені зайвими невідомими в один раз, двічі і тричі статично невизначній рамі, визначають за формулами для нормальних напруг при позацентровому стиску.

4. Виходячи з аналогії з позацентровим стиском, легко виводять розрахункові формули для всіх видів однозв'язних контурів, а так само основні залежності методу деформацій для рами з заправленими п'ятами.

5. Аналогія приводить до практично важливих понять — про поверхню впливу для статично невизначних моментів замкненого контуру від чину фіктивного обтягу, про нульові лінії та ядро рами, і ілюструє зв'язок між теоремою взаємности переміщень і теоремою взаємности реакцій пов'язей.

6. Притягаючи на допомогу теорії рамних конструкцій цілий комплекс понять із статики твердого тіла й опору матеріялів, аналогія одночасно дає змогу чимало спростити теорію однопрогінного статично невизначного тряма змінної цупкости і виведення всіх формул методу деформацій [1]).

7. Теорія фокусів однопрогінного тряма змінної цупкости стає в зв'язок з теорією пружного центра і набуває дальшого розвитку завдяки застосуванню інфлюєнт для статично невизначних моментів від чину фіктивного обтягу.

8. Поглиблення графоаналітичного методу ставить на чергу питання про стандартизацію розрахунків простих рам і трямів змінного перекрою і про складення допоміжних таблиць, збудованих за принципом таблиць нормального сортаменту вальцьованих профілів.

---

[1]) Багатопрогінні трями розглянено з того самого погляду в авторовій праці „Наплавные мосты", Київ, 1931, розд. V. Про пружний трям на пружній основі див. у Журналі Індустріяльно-технічного циклу ВУАН № 2—3 за 1932 р. — „Про деякі узагальнення теорії тряма на пружній основі".

ZUSAMMENFASSUNG.

Auf Grund elementarer kinematisch-statischer Überlegungen wird die von Mohr[1]) stammende grapho-analytische Methode erweitert und zur einheitlichen Entwicklung der Rahmentheorie angewendet. Einen wesentlichen Unterschied von Mohr's Ausführungen bietet hier erstens die Behandlung der gegenseitigen Verschiebungen (bzw. Dehnungen oder Schube), zweitens neue Analogien, die zur anschaulicher Darstellung des Spannungszustandes der Rahmengebilde in hohem Masse geeignet sind.

Im ersten Kapitel wird der grundlegende Satz über die Identität der 6 Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte und Momente, — und den Bedingungen, bei welchen ein räumlicher einfeldriger Stabzug, der kleine Winkeländerungen (fiktive Kräfte) und kleine gegenseitige Verschiebungen (fiktive Momentvektoren) erleidet, geschlossen bleibt, bewiesen (§ 1). Für den ebenen Stabzug treten die fiktiven Kräfte als parallele, zu der Ebene senkrechte Lasten (Drehungsgewichte) hervor, die Dehnungen und Verschiebungen dagegen als in der Ebene liegende Momentvektore. Statt 6 gelten hier 3 Gleichgewichtsbedingungen (1), (2), (3) in § 2. Der Satz wird zur analytischen Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den Knotenverschiebungen δ, oder den Stabdrehwinkeln ψ einiger zwangläufiger Rahmengetriebe angewendet (§ 3).

Im zweiten Kapitel wird zunächst der statisch bestimmte einfeldrige Rahmen (§ 4) und die Eigenschaften der von den Anfangsbedingungen M_A, Q_A, N_A (bzw. Überzähligen) abhängigen räumlichen Biegungsmomentenkurve, die hier als eine ebene Kurve erscheint, besprochen (§ 5). Die Berechnung des statisch unbestimmten Rahmens (§ 6) wird als Ermittelung der Anfangsmomentenebene dargestellt. Die Verbindung der statisch bestimmten Momente M^0 mit den statisch nicht bestimmten $\mathfrak{M}$, deren Vektorspitzen in einer Ebene liegen, äussert den wirklichen Spannungszustand des Rahmens. Die $\mathfrak{M}$-Ebene soll derartig bestimmt werden, dass Gleichgewicht zwischen aktiver (aus M^0, Q^0, N^0) und reaktiver (aus $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{N}$) fiktiver Belastung auftritt. Unter Vernachlässigung der Längs- und Querkräfte führt diese Bedingung sofort zu einer anschaulichen Analogie zwischen dem untersuchten biegsamen Rahmen und einem absolut-starrem Rahmen auf elastischer Unterlage.

---

[1]) O. Mohr, „Beitrag zur Theorie des Fachwerks", Der Eisenbau 1910, S. 2 u. 93. Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. III. Aufl., Abh. XIII u. XIIIa.

Die Sohlenbreite des zweiten, oder reziproken Rahmens beträgt an jedem Punkte den Wert $\frac{1}{EI}$; daher wird die Sohle $\frac{1}{EI}$-Fläche genannt. Diese Fläche wird als ein an der Axe des Rahmens ausgedehntes Gewicht (s. g. „elastisches Gewicht") behandelt; das Trägheitsmoment eines Flächenelementes in Bezug auf seine eigene Axe ist gleich Null. Die unbekannten Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ sind nach dem absoluten Werte den Senkungen (bzw. Bodenpressungen) gleich. Letztere werden nach den Formeln des exzentrischen Drucks berechnet, wobei statt der wirklichen — die aktive fiktive Belastung auftritt, statt der Sohle — die $\frac{1}{EI}$ Fläche. Demnach erhält man die Grundformel (56):

$$\mathfrak{M}_{x,y} = -\left(\frac{\theta}{F} + \frac{M_{X\theta}}{J_X} y - \frac{M_{Y\theta}}{J_Y} x\right)$$

wo:

$$M_{X\theta} = \theta y_\theta; \qquad M_{Y\theta} = -\theta x_\theta$$

$$F = \int \frac{ds}{EI}; \qquad J_X = \int \frac{y^2 ds}{EI}; \qquad J_Y = \int \frac{x^2 ds}{EI}$$

Eine direkte Ausbreitung der Beziehungen auf den Ein- und Zweigelenkrahmen bietet keine Schwierigkeiten [S. (58) — (60)]. Ferner werden die Ausdrücke (63), (64) zur Bestimmung der Quer- und Längskräfte abgeleitet und der Rechnungsgang mit der üblichen Form der Methode des elastischen Schwerpunktes zusammengestellt. Als Folgerung der Analogie und der Grundformeln werden die wichtigsten Beziehungen der Deformationsmethode in anschaulicher Weise festgestellt (§ 7), die Einflussebene für die Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ (aus fiktiver Belastung) bestimmt und der Begriff des Kernes eines Rahmens angemerkt (§ 8). Zuletzt werden geschlossene Formeln für die Verschiebungen der Endquerschnitte eines statisch bestimmten Rahmens angegeben, die bei der Berechnung zusammengesetzter Rahmenwerke mit gebrochenem oder gekrümmtem Riegel nach der Methode des Viermomentensatzes üblich sind (§ 9).

Im dritten Kapitel wird der einfeldrige Träger mit veränderlichem Querschnitt als Rahmenstab behandelt. Auf Grund des entwickelten Verfahrens werden die Beziehungen der Kraft- und Deformationsmethode (§§ 10—13), wie auch die Eigenschaften der Festpunkte (§§ 14—16) in einheitlicher Form abgeleitet. Hier sind ausser früherer Ergebnisse auch manche neue Beziehungen und graphische Konstruktionen angegeben, die die Rechnungsarbeit in mehreren Fällen erheblich vermindern.

Der zweite Teil der Arbeit wird der Verallgemeinerung der Theorie des einfachen Rahmens, den zusammengesetzten Rahmen, dem Verfahren der Einflusslinien und der Zusammenstellung verschiedener Berechnungsmethoden gewidmet werden.

ЗМІСТ

INHALT

Видавн. № 68. Обсяг $4^1/_2$ арк. 50.000 літер в арк. Папір № $6^1/_2$, 607 × 859 мм, 35,43 кг.