Къ вопросу объ устойчивости движенія.

А. М. Ляпунова.

Предлагаемая замѣтка заключаетъ въ себѣ небольшое дополненіе къ сочиненію „*Общая задача объ устойчивости движенія*" (Харьковъ, 1892; изданіе Харьк. Матем. Общества).

Въ этомъ сочиненіи, предполагая, что въ дифференціальныхъ уравненіяхъ возмущеннаго движенія, приведенныхъ къ нормальному виду, вторыя части представлены рядами, расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ неизвѣстныхъ функцій, и дѣлая еще нѣкоторыя общія предположенія (о которыхъ будетъ сказано ниже), я указываю условіе, при которомъ рѣшеніе вопроса объ устойчивости не зависитъ отъ членовъ выше перваго измѣренія въ названныхъ рядахъ; но при этомъ доказываю только его достаточность. Здѣсь я намѣренъ показать, какимъ образомъ можетъ быть доказана необходимость этого условія.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть величины, по отношенію къ которымъ изслѣдуется устойчивость, и которыя въ дифференціальныхъ уравненіяхъ возмущеннаго движенія должны играть роль неизвѣстныхъ функцій времени t.

Величины эти суть нѣкоторыя данныя функціи координатъ и скоростей разсматриваемой матерьяльной системы, выраженія которыхъ могутъ зависѣть явнымъ образомъ и отъ времени.

Я предполагаю, что функціи эти выбраны такъ, чтобы для движенія, устойчивость котораго изслѣдуется, и которое называю невозмущеннымъ, онѣ всѣ дѣлались нулями, и что для движеній возмущенныхъ онѣ удовлетворяютъ дифференціальнымъ уравненіямъ вида:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+p_{s2}x_2+\ldots+p_{sn}x_n+X_s\,,\\ (s=1,2,\ldots,n)\end{array}\right\}\qquad(1)$$

гдѣ $p_{s\sigma}$ $(s, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$ суть нѣкоторыя вещественныя постоянныя, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нѣкоторыя извѣстныя функціи величинъ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и t, представляемыя при достаточно малыхъ $|x_s|$ рядами

$$X_s = \sum P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}, \quad (m_1 + m_2 + \ldots + m_n > 1)$$

расположенными по цѣлымъ положительнымъ степенямъ величинъ x_s и несодержащими членовъ ниже второго измѣренія относительно послѣднихъ. Я предполагаю при томъ, что коэффиціенты $P_s^{(\ldots)}$ въ этихъ рядахъ, представляющіе или вещественныя постоянныя, или непрерывныя вещественныя функціи времени, таковы, что возможно найти такія положительныя постоянныя M и A, при которыхъ выполнялись-бы неравенства вида

$$\left| P_s^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)} \right| < \frac{M}{A^{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}}$$

для всѣхъ значеній t, превосходящихъ то его значеніе, которое мы приняли за начальное.

Задача объ устойчивости по отношенію къ величинамъ x_s приводится къ рѣшенію вопроса о возможности для всякаго даннаго положительнаго числа l выбирать другое положительное число ε такъ, чтобы всякій разъ, когда въ начальный моментъ времени функціямъ x_s даются вещественныя значенія, удовлетворяющія условіямъ

$$|x_1| \leqq \varepsilon, \quad |x_2| \leqq \varepsilon, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqq \varepsilon,$$

во все послѣдующее время движенія выполнялись неравенства

$$|x_1| < l, \quad |x_2| < l, \quad \ldots, \quad |x_n| < l.$$

Когда этотъ вопросъ разрѣшается въ утвердительномъ смыслѣ, невозмущенное движеніе по отношенію къ величинамъ x_s устойчиво; въ противномъ случаѣ—неустойчиво.

Въ упомянутомъ выше сочиненіи указывается условіе, которому должны удовлетворять постоянныя $p_{s\sigma}$, для того, чтобы рѣшеніе этого вопроса не зависѣло отъ какихъ либо частныхъ предположеній относительно функцій X_s.

Условіе это относится къ корнямъ уравненія

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\varkappa & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\varkappa & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}-\varkappa \end{vmatrix} = 0,$$

и если

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \dots, \quad \lambda_n \tag{2}$$

суть взятыя со знакомъ минусъ вещественныя части этихъ корней, выражается такъ: *наименьшее изъ чиселъ* (2) *не должно быть нулемъ.*

Достаточность этого условія обнаруживается тѣмъ, что для случаевъ, когда наименьшее изъ чиселъ (2) положительно, доказывается устойчивость невозмущеннаго движенія, а для случаевъ, когда число это отрицательно,—неустойчивость, при чемъ принимаются въ разсчетъ только тѣ общія предположенія относительно функцій X_s, которыя высказаны выше *).

Чтобы доказать необходимость того же условія, я долженъ доказать теперь слѣдующее:

Каковы-бы ни были постоянныя $p_{s\sigma}$, *но если только они таковы, что наименьшее изъ чиселъ* (2) *есть нуль, функціи* X_s *всегда можно подбирать такъ, чтобы имѣла мѣсто устойчивость или неустойчивость, по желанію.*

Что въ этомъ предположеніи названныя функціи всегда можно выбирать такъ, чтобы имѣла мѣсто неустойчивость, это выводится уже изъ нѣкоторыхъ результатовъ, находящихся въ моемъ сочиненіи, при томъ и непосредственно доказывается весьма легко. Мнѣ остается поэтому только показать, что если наименьшее изъ чиселъ (2) есть нуль, то всегда возможенъ и такой выборъ функцій X_s, при которомъ невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

Я разсмотрю сначала два частныхъ случая, для которыхъ числа (2) всѣ будутъ нулями.

Пусть система (1) имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1, \\ \frac{dx_i}{dt} &= x_{i-1} + X_i. \\ &(i = 2, 3, \dots, n) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

*) *„Общая задача объ устойчивости движенія“*, стр. 86.

Разумѣя подъ $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ функціи, опредѣляемыя послѣдовательно (для $s = n,\ n-1,\ \ldots,\ 2,\ 1$) изъ уравненій вида

$$\varphi_s = x_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условіи

$$\varphi_{n+1} = 0,$$

нетрудно убѣдиться, что если

$$X_s = -2x_{s+1}\varphi_{s+1}, \quad {\scriptstyle (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)}$$

то функція φ_1 будетъ интеграломъ системы (3).

Но функція эта (непрерывная и однозначная) такова, что для вещественныхъ x_s можетъ обращаться въ нуль не иначе, какъ при

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Поэтому при указанномъ выборѣ функцій X_s невозмущенное движеніе несомнѣнно будетъ устойчивымъ.

Я допускаю теперь, что система (1) есть четнаго порядка $n=2m$ и имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\mu y_1 + X_1, & \frac{dy_1}{dt} &= \mu x_1 + Y_1, \\ \frac{dx_i}{dt} &= -\mu y_i + x_{i-1} + X_i, & \frac{dy_i}{dt} &= \mu x_i + y_{i-1} + Y_i, \\ & & {\scriptstyle (i=2,\ 3,\ \ldots,\ m)} & \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

гдѣ y_s, Y_s суть новыя обозначенія величинъ x_{m+s}, X_{m+s}.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ суть функціи, опредѣляемыя послѣдовательно уравненіями вида

$$\varphi_s = x_s^2 + y_s^2 + \varphi_{s+1}^2$$

при условіи

$$\varphi_{m+1} = 0.$$

Тогда, если

$$X_s = -2x_{s+1}\varphi_{s+1}, \quad Y_s = -2y_{s+1}\varphi_{s+1}, \quad {\scriptstyle (s=1,\ 2,\ \ldots,\ m)}$$

то функція φ_1 будетъ, какъ легко въ томъ убѣдиться, интеграломъ системы (4). А такъ какъ функція эта при вещественныхъ x_s, y_s можетъ уничтожаться только для

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0,$$

то подобно предыдущему должно заключить, что при указанномъ выборѣ функцій X_s, Y_s невозмущенное движеніе будетъ устойчивымъ.

Обращаясь теперь къ общему случаю, я замѣчаю, что, каковы-бы ни были постоянныя $p_{s\sigma}$, всегда найдется линейная подстановка съ постоянными вещественными коэффиціентами, преобразовывающая систему (1) въ такую, которая распадется на группы уравненій, принадлежащія къ одному изъ двухъ слѣдующихъ типовъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\lambda y_1 + Y_1, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda y_i + y_{i-1} + Y_i, \\ &(i=2,\ 3,\ \ldots,\ k) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

или

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -\lambda y_1 - \mu z_1 + Y_1, & \frac{dz_1}{dt} &= \mu y_1 - \lambda z_1 + Z_1, \\ \frac{dy_i}{dt} &= -\lambda y_i - \mu z_i + z_{i-1} + Y_i, & \frac{dz_i}{dt} &= \mu y_i - \lambda z_i + z_{i-1} + Z_i, \\ && (i&=2,\ 3,\ \ldots,\ k) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

гдѣ Y_s, Z_s означаютъ совокупности членовъ выше перваго измѣренія относительно неизвѣстныхъ функцій.

Здѣсь не исключается и случай $k = 1$, когда группа вида (5) приводится къ одному первому уравненію, а группа вида (6) къ двумъ уравненіямъ первой строки.

Въ этихъ уравненіяхъ λ представляетъ одно изъ чиселъ (2).

Поэтому, если между послѣдними не находится отрицательныхъ, то чтобы невозмущенное движеніе сдѣлать устойчивымъ, стоитъ только во всѣхъ группахъ, для которыхъ $\lambda > 0$, а также въ тѣхъ, для которыхъ $k = 1$, положить $Y_s = Z_s = 0$, и въ группахъ, для которыхъ $\lambda = 0$, $k > 1$, совокупности членовъ выше перваго измѣренія выбрать, какъ было показано въ двухъ разсмотрѣнныхъ сейчасъ частныхъ случаяхъ.

Необходимость указаннаго выше условія можетъ считаться поэтому доказанной.

Но условіе это, разумѣется, необходимо, только пока разсматриваются всякія системы вида (1.) Если же желательно разсматривать лишь системы какого либо опредѣленнаго типа, то, оставаясь конечно достаточнымъ, оно можетъ не дѣлаться болѣе необходимымъ.

Такъ, напр., если разсматривать только каноническія системы съ постоянными коэффиціентами, то условіе это навѣрно не будетъ необходимымъ.