

## Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ.

И. Л. Пташицкаго.

1. Настоящая статья посвящается слѣдующему вопросу:

„Пусть функція  $y$  связана съ переменною  $x$  алгебраическимъ уравненіемъ; требуется выразить интегралъ  $\int y dx$  черезъ алгебраическую функцію отъ  $x$  или доказать, что значеніе предложеннаго интеграла не можетъ быть представлено алгебраическою функціею“.

Этотъ вопросъ въ первый разъ вполне рѣшилъ *Лиувиль* (Journal de l'Ecole polytechnique, XXII cahier; Journal de mathématiques, t. III). Онъ основывался въ своемъ рѣшеніи на слѣдующей теоремѣ *Абеля*: если интегралъ  $\int y dx$  выражается алгебраически, то величина его можетъ быть представлена функціею, составленною рационально изъ  $x$  и  $y$ .

Вопросомъ объ алгебраическомъ интегрированіи занимались еще и другіе математики. Я укажу на *Briot et Bouquet* (Théorie des fonctions elliptiques), гг. *Zeuthen* (Comptes rendus, 1880), *Raffy* (Annales de l'Ecole Normale, 1883, 1885), *Humbert* (Acta mathematica, 1887).

Не входя въ подробное разсмотрѣніе предложенныхъ до настоящаго времени рѣшеній занимающаго насъ вопроса, я замѣчу только, что всѣ они сводятъ вопросъ на отысканіе нѣсколькихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффициентовъ.

Въ настоящей статьѣ я желаю указать на одну теорему, которая позволяетъ рѣшить вопросъ инымъ путемъ. Эта же теорема даетъ возможность рѣшить вопросъ и съ помощью способа неопредѣленныхъ коэффициентовъ, на основаніи новыхъ соображеній.

2. Теорема. Пусть  $P$  есть цѣлая функція отъ  $x$ ;  $z$  — функція, опредѣляемая неприводимымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффициентами



$$z^n + \varphi_1(x) z^{n-1} + \varphi_2(x) z^{n-2} + \dots = 0;$$

$z_1, z_2, \dots, z_n$  — значения, принимаемые функцией  $z$  для каждого значения  $x$ . Пусть  $\Delta$  есть дискриминант уравнения с  $z$  и

$$\Delta = D^2 . E,$$

где  $D, E$  суть целые полиномы относительно  $x$ , причем полином  $E$  не содержит линейных кратных множителей.

Если интегралъ

$$\int \frac{z}{P} dx$$

выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

где  $Y, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  — целые функции от  $x$ , определенные следующим образом:

1<sup>o</sup> Полиномъ  $Y$  равенъ произведенію изъ полинома  $D$  на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P, \quad \frac{dP}{dx}.$$

2<sup>0</sup> Полиномы  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  удовлетворяют равенствам:

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}}$$

$$i \partial n \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$



3. Доказательство первой части нашей теоремы основывается главным образом на одномъ предложеніи, къ выводу котораго мы предварительно и обратимся.

Возьмемъ  $n$  выражений

$$X_0 + X_1 z_1 + X_2 z_1^2 + \dots + X_{n-1} z_1^{n-1},$$

$$X_0 + X_1 z_2 + X_2 z_2^2 + \dots + X_{n-1} z_2^{n-1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_0 + X_1 z_n + X_2 z_n^2 + \dots + X_{n-1} z_n^{n-1},$$

въ которыхъ  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  означаютъ цѣлыя функціи отъ  $x$ ;  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — значенія функціи  $z$ , опредѣленной въ предыдущемъ  $n^0$ .

Пусть  $x - a$  представляетъ двучленъ, не дѣлящій всѣхъ полиномовъ  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ , и содержащійся во всѣхъ  $n$  нашихъ выраженіяхъ съ показателями больше нуля <sup>1)</sup>. Пусть  $\alpha$  есть наименьшій изъ этихъ показателей.

Займемся разсмотрѣніемъ двучлена  $x - a$  и показателя  $\alpha$ .

Мы сказали, что не всѣ полиномы  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  дѣлятся на  $x - a$ ; положимъ  $X_k$  есть полиномъ взаимно простой съ  $x - a$ . Называя рассматриваемыя нами выраженія соотвѣтственно черезъ

$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n,$$

мы имѣемъ равенство

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{k-1}, \bar{z}_1, z_1^{k+1}, \dots, z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \dots, z_2^{k-1}, \bar{z}_2, z_2^{k+1}, \dots, z_2^{n-1} \\ \dots \dots \dots \\ 1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{k-1}, \bar{z}_n, z_n^{k+1}, \dots, z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

въ которомъ  $\Delta$  есть цѣлая функція отъ  $x$ , равная дискриминанту уравненія съ  $z$ . Легко видѣть, что опредѣлитель, входящій въ полученное равенство, содержитъ  $x - a$  съ показателемъ не меньше  $\alpha$ .

Отсюда, въ силу вышепредположеннаго относительно  $X_k$ , сейчасъ получаемъ предложеніе, которое имѣли въ виду вывести: двучленъ

<sup>1)</sup> Мы будемъ говорить, что функція содержитъ множитель  $(x - a)$  съ показателемъ  $\mu$ , если въ разложеніи функціи, по восходящимъ степенямъ двучлена  $x - a$ , первый членъ содержитъ  $(x - a)^\mu$ . Число  $\mu$  можетъ быть цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ.



$x - a$  дѣлитъ дискриминантъ  $\Delta$  и притомъ показатель  $\alpha$  не превосходитъ показателя, съ которымъ  $x - a$  содержится въ радикалъ  $\sqrt{\Delta}$ .

4. Основываясь на выведенномъ нами предложеніи, не трудно теперь убѣдиться въ справедливости первой части нашей теоремы ( $n^02$ ).

Пусть

$$\int \frac{z}{P} dx$$

есть интеграль, выражающійся алгебраически.

На основаніи теоремы Абеля, цитированной въ  $n^01$ , будемъ имѣть равенство

$$\int \frac{z}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

въ которомъ  $Y, X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  означаютъ цѣлыя функціи отъ  $x$ , которыя, очевидно, можемъ предполагать взаимно простыми. Замѣтимъ, что это равенство, какъ показалъ Абель, остается справедливымъ, если на мѣсто  $z$  подставить какое угодно изъ  $n$  значеній:  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

Предложимъ себѣ теперь изслѣдовать, какіе простые множители могутъ входить въ полиномъ  $Y$ , и въ какихъ степеняхъ.

Назовемъ черезъ  $x - a$  одинъ изъ простыхъ множителей полинома  $Y$  и черезъ

$$\delta, \alpha, p$$

показатели, съ которыми двучленъ  $x - a$  содержится соответственно въ функціяхъ

$$Y, X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}, P.$$

Между этими показателями, какъ легко убѣдиться, существуетъ весьма простая зависимость.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая вышенаписанное равенство, мы видимъ, что производная первой части содержитъ  $x - a$  съ показателемъ не меньше  $-p$ , производная второй части содержитъ этотъ множитель, если только  $\delta$  не равно  $\alpha$ , съ показателемъ равнымъ  $\alpha - \delta - 1$ ; такъ что, если  $\delta$  не равно  $\alpha$ , то навѣрное

$$-p \leq \alpha - \delta - 1.$$



Слѣдовательно,  $\delta$  — показатель множителя  $(x-a)$  у полинома  $Y$  опредѣляется одною изъ формулъ

$$\delta = \alpha, \quad \delta \leq \alpha + p - 1.$$

Предположимъ теперь, и это по вышесказанному всегда возможно, что въ нашемъ равенствѣ  $z$  означаетъ то изъ  $n$  значеній  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , при которомъ показатель  $\alpha$  имѣетъ наименьшую величину. Если, при этомъ предположеніи, число  $\alpha$  не равно нулю, то ( $n^{\circ}3$ ) навѣрно  $x-a$  будетъ дѣлителемъ дискриминанта  $\Delta$  и само  $\alpha$  не будетъ превосходить показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ  $\sqrt{\Delta}$ .

Въ силу этого изъ полученныхъ нами формулъ для  $\delta$  сейчасъ можемъ заключить, что всѣ простые множители полинома  $Y$  найдутся между простыми множителями полиномовъ

$$P, \Delta.$$

Затѣмъ, изъ тѣхъ же формулъ для  $\delta$  легко опредѣлить показатели, съ которыми простые множители полиномовъ  $P, \Delta$  войдутъ въ полиномъ  $Y$ .

Разсмотримъ сначала двучленъ  $x-a$ , недѣлящій полинома  $P$ . Изъ нашихъ формулъ, полагая  $p=0$ , заключаемъ, что показатель  $\delta$ , съ которымъ  $x-a$  входитъ въ полиномъ  $Y$ , не превзойдетъ числа  $\alpha$ , а потому не превзойдетъ и показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ  $\sqrt{\Delta}$ . Но у насъ  $\sqrt{\Delta} = D\sqrt{E}$ , гдѣ радикалъ  $\sqrt{E}$  не имѣетъ раціональных множителей; число же  $\delta$ , очевидно, должно быть цѣлымъ. Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ  $(x-a)^\delta$  будетъ дѣлить полиномъ  $D$ .

Возьмемъ, во вторыхъ, двучленъ  $x-a$ , дѣлящій полиномъ  $P$ . Изъ формулъ для  $\delta$  заключаемъ, что показатель  $\delta$  у множителя  $(x-a)$  въ полиномѣ  $Y$  не больше числа  $\alpha + p - 1$ . Здѣсь  $p$  означаетъ кратность множителя  $(x-a)$  въ полиномѣ  $P$ , а потому  $p-1$  есть кратность того же множителя у общаго наибольшаго дѣлителя полинома  $P$  и производной  $\frac{dP}{dx}$ ; число  $\alpha$  не больше показателя, съ которымъ  $x-a$  входитъ въ радикалъ  $\sqrt{\Delta} = D\sqrt{E}$ . Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ  $(x-a)^\delta$  будетъ дѣлить произведеніе изъ полинома  $D$  на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ  $P, \frac{dP}{dx}$ .

И такъ, первая часть теоремы доказана.

5. Изъ равенства предыдущаго  $n^{\circ}$  получаемъ  $n$  уравненій:



$$\int \frac{z_1}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z_1 + X_2 z_1^2 + \dots + X_{n-1} z_1^{n-1}}{Y},$$

$$\int \frac{z_2}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z_2 + X_2 z_2^2 + \dots + X_{n-1} z_2^{n-1}}{Y},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int \frac{z_n}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z_n + X_2 z_n^2 + \dots + X_{n-1} z_n^{n-1}}{Y}.$$

Рѣшая эти уравненія относительно  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ , получаемъ формулы, составляющія вторую часть доказываемой теоремы.

6. Изъ теоремы  $n^{\circ}2$  непосредственно вытекаетъ слѣдующій способъ для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи даннаго алгебраическаго дифференціала  $y dx$ .

Приводимъ функцію  $y$  къ виду

$$\frac{z}{P}$$

и дискриминантъ уравненія съ  $z$  къ виду

$$\Delta = D^2 \cdot E.$$

Составляемъ произведеніе изъ полинома  $D$  на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ  $P, \frac{dP}{dx}$ ; это произведеніе даетъ намъ полиномъ  $Y$ .

Затѣмъ, разлагаемъ въ ряды, по нисходящимъ степенямъ  $x$ ,  $n$  выраженій

$$\frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{i-1}, \int \frac{z_1}{P} dx, z_1^{i+1}, \dots, z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \dots, z_2^{i-1}, \int \frac{z_2}{P} dx, z_2^{i+1}, \dots, z_2^{n-1} \\ \dots \dots \dots \\ 1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{i-1}, \int \frac{z_n}{P} dx, z_n^{i+1}, \dots, z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

въ которыхъ  $z_1, z_2, \dots, z_n$  означаютъ всѣ корни уравненія съ  $z$  и



$$\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \dots, z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \dots, z_2^{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1, z_n, z_n^2, \dots, z_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Цѣлыя части разложеній дадутъ соотвѣтственно полиномы

$$X_0, X_1, \dots, X_{n-1}.$$

Коэффициенты этихъ полиномовъ будутъ содержать, вообще, линейнымъ образомъ  $n$  неизвѣстныхъ постоянныхъ  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ;  $c_i$  есть постоянная произвольная интеграла  $\int \frac{z_i}{P} dx$ .

Одну изъ постоянныхъ можно назначить произвольно; остальные опредѣляемъ изъ условія, что равенство

$$\frac{d}{dx} \left[ \int \frac{z}{P} dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y} \right] = 0$$

должно обращаться въ тождество.

Когда постоянныя  $c_1, c_2, \dots, c_n$  будутъ опредѣлены, тогда функція

$$\frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \dots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}$$

представить величину предложеннаго интеграла

$$\int \frac{z}{P} dx.$$

Если же постоянныя  $c_1, \dots, c_n$ , не могутъ быть опредѣлены согласно нашему условію, тогда заключимъ, что предложенный интеграль не выражается алгебраически.

Замѣчаніе. Иногда невозможность алгебраическаго интегрированія можемъ обнаружить, не доводя до конца нашихъ дѣйствій. Мы заключимъ, что интеграль  $\int \frac{z}{P} dx$  не выражается алгебраически:  $1^\circ$  если разложеніе одной изъ функцій  $\frac{z_i}{P}$  будетъ содержать членъ съ  $x^{-1}$  (такъ



какъ тогда разложеніе интеграла  $\int \frac{z_i}{P} dx$  будетъ содержать членъ съ  $\log x$  и, слѣдовательно, этотъ интегралъ не равняется алгебраической функціи); 2° если въ разложеніи выраженія, которое должно дать одинъ изъ полиномовъ  $X_i$ , члены съ дробными положительными степенями  $x$  не могутъ быть уничтожены ни при какомъ выборѣ постоянныхъ  $c_1, c_2, \dots, c_n$  <sup>1)</sup>).

7. Вторая часть теоремы  $n^0$  позволяетъ опредѣлить полиномы  $X^0, X_1, \dots, X_{n-1}$  еще слѣдующимъ образомъ.

Пользуясь формулами второй части теоремы, вычисляемъ высшіе предѣлы степеней полиномовъ  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ ; затѣмъ опредѣляемъ коэффициенты этихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффициентовъ изъ условія, чтобы равенство предыдущаго  $n^0$  обратилось въ тождество.

Замѣчаніе. Легко убѣдиться, что, слѣдуя этому второму пути при отысканіи полиномовъ  $X_i$ , для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи дифференціала  $udx$  придется выполнять только арифметическія дѣйствія.

8. Примѣнимъ наши правила къ тремъ примѣрамъ; два первые заимствованы у Брю и Буке.

Примѣръ I. Разсмотримъ интегралъ

$$\int z dx,$$

гдѣ  $z$  удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^3 - 3z + 2x = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\Delta = 108 - 108x^2,$$

такъ что

$$D = 1.$$

Находимъ

$$Y = 1.$$

<sup>1)</sup> Способъ, данный въ этомъ  $n^0$ , былъ уже мною предложенъ для одного частнаго случая въ Прибавленіи къ разсужденію „Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ ирраціональныхъ дифференціаловъ“ (Спб., 1881).



Переходимъ къ опредѣленію полиномовъ  $X_0, X_1, X_2$ . Для этого отыщемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ, по нисходящимъ степенямъ  $x$ , трехъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \int z_1 dx, z_1, z_1^2 \\ \int z_2 dx, z_2, z_2^2 \\ \int z_3 dx, z_3, z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, \int z_1 dx, z_1^2 \\ 1, \int z_2 dx, z_2^2 \\ 1, \int z_3 dx, z_3^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, z_1, \int z_1 dx \\ 1, z_2, \int z_2 dx \\ 1, z_3, \int z_3 dx \end{vmatrix}.$$

Съ помощью уравненія съ  $z$  находимъ

$$z_1 = \alpha_1 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_1} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_1 x^{-\frac{5}{3}} + \dots,$$

$$z_2 = \alpha_2 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_2} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_2 x^{-\frac{5}{3}} + \dots,$$

$$z_3 = \alpha_3 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_3} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_3 x^{-\frac{5}{3}} + \dots;$$

гдѣ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  суть значенія корня  $\sqrt[3]{-2}$ ; величина коэффициентовъ  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  намъ не нужна; отсюда сейчасъ получимъ

$$z_1^2 = \alpha_1^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_1^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_1\beta_1 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

$$z_2^2 = \alpha_2^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_2^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_2\beta_2 x^{-\frac{4}{3}} + \dots,$$

$$z_3^2 = \alpha_3^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_3^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_3\beta_3 x^{-\frac{4}{3}} + \dots;$$

и

$$\int z_1 dx = \frac{3\alpha_1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_1} x^{\frac{2}{3}} + c_1 - \frac{3\beta_1}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$\int z_2 dx = \frac{3\alpha_2}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_2} x^{\frac{2}{3}} + c_2 - \frac{3\beta_2}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots,$$

$$\int z_3 dx = \frac{3\alpha_3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_3} x^{\frac{2}{3}} + c_3 - \frac{3\beta_3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \dots,$$



гдѣ  $c_1, c_2, c_3$  постоянныя интегрированія. Еще находимъ

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-108}} \left( x^{-1} + \frac{1}{2} x^{-3} + \dots \right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0 = \text{пост.}, \quad X_1 = \frac{3}{4} x, \quad X_2 = -\frac{3}{8}.$$

И такъ, если предложенный интегральъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int z dx = \frac{3}{4} xz - \frac{3}{8} z^2.$$

Взявъ производную обѣихъ частей этого равенства, убѣждаемся, что оно дѣйствительно представляетъ величину предложеннаго интеграла.

Примѣръ II. Разсмотримъ интеграль

$$\int z dx,$$

гдѣ  $z$  удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^3 - 3xz + x^3 = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\Delta = -27x^6 + 108x^3,$$

такъ что

$$D = x.$$

Находимъ

$$Y = x.$$

Переходимъ теперь къ отысканію полиномовъ  $X_0, X_1, X_2$ , пользуясь правиломъ  $n^{\circ}7$ . Для этого ищемъ сначала высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ, или, что одно и тоже, выраженій



$$\frac{x}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \int z_1 dx, z_1, z_1^2 \\ \int z_2 dx, z_2, z_2^2 \\ \int z_3 dx, z_3, z_3^2 \end{vmatrix}, \frac{x}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, \int z_1 dx, z_1^2 \\ 1, \int z_2 dx, z_2^2 \\ 1, \int z_3 dx, z_3^2 \end{vmatrix}, \frac{x}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, z_1, \int z_1 dx \\ 1, z_2, \int z_2 dx \\ 1, z_3, \int z_3 dx \end{vmatrix}.$$

Изъ уравненія съ  $z$  видимъ, что  $z_1, z_2, z_3$  суть первой степени; отсюда заключаемъ, что  $z_1^2, z_2^2, z_3^2$  и  $\int z_1 dx, \int z_2 dx, \int z_3 dx$  суть степени второй; замѣтимъ еще что  $\frac{x}{\sqrt{\Delta}}$  есть  $(-2)$ -ой степени.

Слѣдовательно, высшіе предѣлы степеней выписанныхъ выраженій представляются соотвѣтственно числами

$$3, 2, 1.$$

Приступаемъ къ опредѣленію коэффициентовъ полиномовъ  $X_0, X_1, X_2$ .  
Равенство

$$\frac{d}{dx} \left[ \int z dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2}{x} \right] = 0,$$

послѣ подстановки въ немъ на мѣсто производной  $\frac{dz}{dx}$  ея значенія, выраженного чрезъ  $x$  и  $z$ , послѣ уничтоженія дробей и исключенія степеней  $z$  выше второй, представитъ соотношеніе между  $x$  и  $z$ , второй степени относительно  $z$ . Изъ него сейчасъ заключаемъ уравненія

$$x \frac{dX_0}{dx} - X_0 + x^3 \frac{dX_1}{dx} - x^4 = 0,$$

$$2x \frac{dX_1}{dx} - X_1 - x^3 \frac{dX_2}{dx} - x^2 X_2 - 2x^2 = 0,$$

$$x \frac{dX_0}{dx} - X_0 + 2x^2 \frac{dX_2}{dx} = 0,$$

которымъ должны удовлетворять искомыя полиномы. Зная высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ можемъ, по способу неопредѣленныхъ коэффициентовъ, опредѣлить и коэффициенты этихъ полиномовъ. Не безполезно еще замѣтить, что, если полиномъ  $X_1$  не выше второй степени, то, какъ непосредственно видно изъ полученныхъ дифференціаль-



ныхъ уравненій, полиномъ  $X_2$  будетъ не выше нулевой степени, полиномъ  $X_0$  не выше первой степени.

Такимъ образомъ, отысканіе полиномовъ  $X_0$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  не представить никакой трудности; мы находимъ

$$X_0 = bx, \quad X_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad X_2 = -\frac{1}{2},$$

гдѣ  $b$  произвольная постоянная.

И такъ, значеніе предложеннаго интеграла опредѣляется формулою

$$\int z dx = \frac{\frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{2}z^2}{x}.$$

Примѣръ III. Рассмотримъ интеграль

$$\int \frac{z}{x} dx,$$

гдѣ  $z$  удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^2 - 2x^3z + x^6 - x^4 - 1 = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\Delta = 4x^4 + 4,$$

такъ что

$$D = 1.$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ примѣрѣ

$$P = x,$$

то находимъ

$$Y = 1.$$

Переходимъ къ отысканію полиномовъ  $X_0$ ,  $X_1$ . Ищемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} \int \frac{z_1}{x} dx, z_1 \\ \int \frac{z_2}{x} dx, z_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, \int \frac{z_1}{x} dx \\ 1, \int \frac{z_2}{x} dx \end{vmatrix}.$$



Изъ уравненія съ  $z$  получимъ

$$z_1 = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-6} + \dots,$$

$$z_2 = x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{8}x^{-6} + \dots;$$

отсюда находимъ

$$\int \frac{z_1}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 - \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1}{48}x^{-6} + \dots,$$

$$\int \frac{z_2}{x} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_2 + \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1}{48}x^{-6} + \dots,$$

гдѣ  $c_1, c_2$ , постоянныя интегрированія; еще замѣтимъ, что

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = -\frac{1}{2} \left( x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-6} + \dots \right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0 = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad X_1 = \frac{1}{2}.$$

И такъ, если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{x} dx - \left( \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{1}{2}z \right) = 0$$

Но постоянныя  $c_1, c_2$ , не могутъ быть опредѣлены изъ условія, чтобы производная первой части послѣдняго равенства тождественно обращалась въ нуль. Слѣдовательно, нашъ интегралъ не выражается алгебраически.