

ГЛАВА IX

ВОЗМУЩЕНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ

170. Значение возмущений. В главе I было показано, что если два сферических тела движутся под влиянием их взаимных притяжений, то каждое из них по отношению к другому описывает коническое сечение, фокус которого находится в центре другого тела. Обратная теорема также верна, т. е. если имеет место закон площадей и если орбита одного тела есть коническое сечение, фокус которого находится в другом теле, тогда если сила зависит лишь от расстояния, то она изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния (см. также § 58).

Если имеется сопротивляющаяся среда, или каждое из тел сплюснуто, или существует третье тело, притягивающее два рассматриваемых, или имеется иная сила, действующая на тела, кроме их взаимного притяжения, то их орбиты уже не будут точными коническими сечениями. Предположим, что координаты и составляющие скорости даны в определенный момент t_0 ; тогда если бы условия задачи двух тел были точно удовлетворены, то орбиты были бы определенными коническими сечениями, по которым стали бы двигаться тела согласно закону площадей. Различия между координатами и составляющими скорости в действительных орбитах и в тех, по которым тела двигались бы, если бы движение не возмущалось, называются *возмущениями*.

Исходя из разных точек зрения было предложено несколько методов для вычисления возмущений. Наиболее часто употребляются следующие два метода.

171. Вариация координат. Наиболее простым и непосредственным способом учета возмущающих сил является вычисление возмущений координат. Пусть, например, планета подвергается притяжению Солнца и другой планеты. Если бы второй планеты не было, то первая двигалась бы вокруг Солнца по коническому сечению. Возмущающее действие второй планеты изменяет координаты и составляющие скорости в этом движении, и эти различия вычисляются соответствующими способами. При помощи этого метода уравнения действительной кривой получить весьма затруднительно, так что неизвестно, что происходит в течение долгого промежутка времени. Этот метод применяется только к кометам и малым планетам.

172. Вариация элементов. Этот метод носит разные названия: вариация элементов, вариация параметров и вариация произвольных постоянных интегрирования. Согласно идее этого метода мы можем считать, что тело, подчиняясь закону тяготения, всегда движется по коническому сечению, но по такому, которое меняется каждый момент. Изменяющееся

коническое сечение касается действительной орбиты в каждой ее точке и, кроме того, если тело движется без возмущений по любому из касательных конических сечений, то оно будет иметь такую же скорость в точке касания, какую оно имеет в действительной орбите в этой же точке. Говорят, что это коническое сечение *оскулирует* (соприкасается) с действительной орбитой в точке контакта. Возмущения — это различия между элементами орбиты в начале движения и элементами оскулирующего конического сечения в любое время. Очевидное преимущество этого метода заключается в том, что элементы изменяются очень медленно, так как в большинстве случаев, действительно имеющих место в солнечной системе, возмущающие силы весьма малы. Но если бы возмущения были очень большими, как в некоторых кратных звездных системах, то этот метод утратил бы свои относительные преимущества.

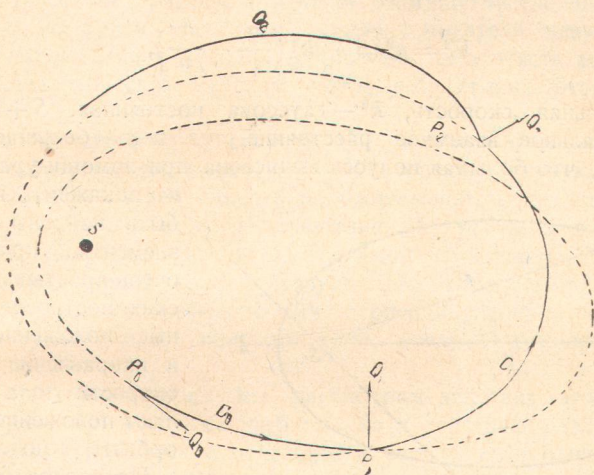


Рис. 43.

Понятие о возмущениях как о вариациях элементов естественно возникает при рассмотрении параметров, определяющих элементы орбиты. В главе V показано, что начальные положения двух тел и направления начальной скорости определяют плоскость орбиты, что начальные положения и скорости определяют длину большой оси и что начальные условия, включающие направление скорости, определяют эксцентриситет и линию апсид.

Предположим, что тело m брошено из P_0 (рис. 43) в направлении Q_0 со скоростью V_0 и что кроме притяжения тела S не имеется сил, действующих на него, тогда согласно результатам задачи двух тел следует, что оно будет двигаться по коническому сечению C_0 , элементы которого однозначно определены начальными условиями. Предположим, что когда m приходит в P_1 , то оно подвергается мгновенному импульсу с напряжением f_1 в направлении P_1Q_1 ; это положение, новая скорость и направление движения определяют новое коническое сечение C_1 , по которому

будет двигаться тело, пока оно снова не будет возмущено какой-нибудь внешней силой. Предположим, что когда оно приходит в P_2 , оно подвергается действию импульса f_2 в направлении P_2Q_2 , тогда оно будет двигаться по новому коническому сечению C_2 . Можно предположить, что это будет продолжаться до бесконечности. Тело будет двигаться по коническим сечениям, время от времени изменяющимся под влиянием возмущающих импульсов. Предположим, что мгновенные импульсы становятся очень малыми и что интервалы времени между ними делаются все меньше и меньше. Общий характер движения останется тем же самым. В пределе импульсы переходят в непрерывную возмущающую силу, и орбита становится коническим сечением, все элементы которого непрерывно изменяются.

173. Определение элементов из графического построения. В § 89 было показано, что большая полуось дается очень простым уравнением:

$$V^2 = k^2(S+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (1)$$

где V — начальная скорость, k^2 — гауссова постоянная, $S+m$ — сумма масс, r — начальное взаимное расстояние тел и a — большая полуось. Предположим, что большая полуось вычислена при помощи уравнения (1),

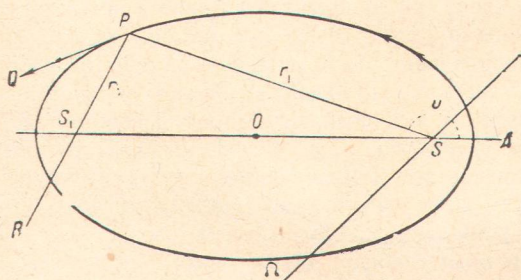


Рис. 44.

и покажем, как могут быть найдены остальные элементы при помощи очень простых геометрических построений. Начальные положения S и m и направление начальной скорости тела m определяют положение плоскости орбиты, а поэтому Ω и i .

Предположим, что в начальный момент t находится в точке P

(рис. 44) и что оно брошено в направлении PQ со скоростью V . Солнце S находится в одном из фокусов. Из свойств конических сечений известно, что прямые, проведенные из P к двум фокусам, образуют равные углы с касательной PQ . Проведем линию PR , образующую такой же угол с касательной, как и PS . Пусть r_1 обозначает расстояние от S до P и r_2 — расстояние от P до второго фокуса. Тогда $r_1 + r_2 = 2a$, откуда $r_2 = 2a - r_1$, что определяет положение S_1 . Обозначим через O среднюю точку отрезка SS_1 ; тогда $\epsilon = \frac{SO}{a}$. Предположим, что $S\Omega\Omega$ есть линия узлов, тогда угол $\Omega SA = \omega$ и $\pi = \omega + \Omega$.

Остается определить еще один элемент — время прохождения через перигелий. Угол ASP , считаемый в направлении движения, есть v . Эксцентрическая аномалия дается уравнением (§ 98):

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}. \quad (2)$$

После того как найдено E , время прохождения через перигелий определяется из уравнения Кеплера (§ 93):

$$n(t - T) = E - e \sin E. \quad (3)$$

174. Разложение возмущающей силы. Для нахождения действия возмущающей силы на элементы ее удобно разложить на три прямоугольных составляющих. Это можно сделать несколькими способами, каждый из которых имеет преимущества для особых целей. Один из них, принятый здесь, вообще ведет наиболее просто к определению изменений элементов, когда рассматриваемое тело находится под влиянием произвольной возмущающей силы. Выражения для скорости изменения элементов можно вывести без больших трудностей из геометрических рассуждений для любых возмущающих сил, но предметом этой главы является объяснение природы и причин возмущений различных видов, и поэтому мы не будем рассеивать внимания читателя ненужными отступлениями, касающимися методов вычисления. Эта часть естественно относится к аналитическим методам, которые будут рассмотрены в следующей главе.

Разложим возмущающую силу на три прямоугольных составляющих: а) *ортогональную составляющую* ¹⁾ S , перпендикулярную к плоскости орбиты и которую будем считать положительной, когда она направлена в сторону северного полюса эклиптики, б) *тангенциальную составляющую* T , направленную по касательной и которую будем считать положительной, когда она действует по направлению движения, и с) *нормальную составляющую* N , перпендикулярную к касательной и которую будем считать положительной, когда она направлена внутрь орбиты.

В следующих параграфах мы рассмотрим действия этих составляющих на различные элементы орбиты. Хотя действия различных составляющих рассматриваются в отдельности, все же если одновременно действуют две из них или больше, то иногда необходимо тщательно оценить величину отдельных возмущений для определения характера их совместных действий.

ДЕЙСТВИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

175. Возмущающие действия ортогональной составляющей. Для определенности и краткости изложения предположим, что возмущаемое тело — Луна,двигающаяся вокруг Земли. Возмущения, возникающие от возмущающего действия Солнца, очень велики и представляют много особенностей исключительного интереса. Кроме того, это случай, который рассматривал Ньютон по существу такими же методами, как и те, которые мы будем применять здесь ²⁾. Мы рассмотрим здесь характер возмущений, возникающих от одних положительных составляющих; отрицательные составляющие изменяют элементы в обратную сторону.

¹⁾ Такая терминология введена Дж. Гершелем в «Очерках астрономии».

²⁾ «Начала» кн. I, отд. 11 и книга III, предложения XXII — XXXV.

Очевидно, что ортогональная составляющая не изменяет a, e, T и ω , если ω считается от неподвижной линии в плоскости орбиты. Но обычно ω считается от восходящего узла орбиты, поэтому если отрицательную скорость возрастания долготы узла Ω умножить на $\cos i$, то результат даст скорость возрастания ω вследствие изменения начала, от которого оно отсчитывается. Следовательно, при рассмотрении возмущений, вызываемых ортогональной составляющей, достаточно рассмотреть изменения в Ω и i .

Пусть AB (рис. 45) лежит в плоскости эклиптики, P_0Q_0 — в плоскости невозмущенной орбиты; обозначим через Ω_0 и i_0 соответствующие узел и наклонность. Предположим, что когда Луна находится в P_0 ,

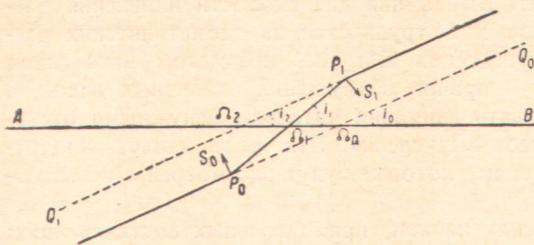


Рис. 45.

происходит мгновенный импульс P_0S_0 ; тогда она будет двигаться по направлению P_0P_1 и новые узел и наклонность будут Ω_1 и i_1 . Сразу очевидно, что $i_1 > i_0$ и $\Omega_1 < \Omega_0$. Предположим, что когда Луна приходит в P_1 , имеет место новый мгновенный импульс P_1S_1 . Обозначим новый

узел и наклонность через Ω_2 и i_2 , и очевидно, что $i_2 < i_1$ и $\Omega_2 < \Omega_1$. Если $P_0\Omega_1 = \Omega_1P_1$, $P_0S_0 = P_1S_1$ и скорость Луны в P_0 равняется скорости в P_1 , то $i_0 = i_2$. Общий результат — обратное движение узла и неизменная наклонность.

Из соответствующего рисунка для нисходящего узла видно, что отрицательное S перед прохождением через узел и симметрично противоположное положительное S после прохождения через узел дадут такие же результаты, как были найдены у восходящего узла. Поэтому положительное S заставляет узлы двигаться вперед, если Луна находится в первом или втором квадранте, и назад, если она находится в третьем или четвертом квадранте; положительное S увеличивает наклонность, если Луна находится в первом или четвертом квадранте, и уменьшает, если она — во втором или третьем квадранте.

Заметим следующие количественные результаты: скорость изменения как Ω , так и i пропорциональна S . Скорость изменения Ω тем больше, чем меньше i ; для $i=0$, очевидно, Ω не определен, но в этом случае в задачах, подобных теории Луны, S исчезает. Для данного i скорость изменения Ω тем больше, чем ближе точка, в которой происходит возмущение, к полпути между двумя узлами. Скорость, с которой изменяется i , тем больше, чем ближе к узлу точка, в которой происходит возмущение.

176. Действия тангенциальной составляющей на большую ось. Вместо того чтобы вывести все заключения непосредственно из геометрических построений, используем некоторые из простых уравнений, найденные в главе V. При желании теоремы, содержащиеся в этих уравнениях, можно вывести из геометрических рассмотрений, как это было сделано Ньютоном в «Началах», но это потребовало бы значительного труда и не прибавило бы ничего к пониманию предмета.

Большая полуось определяется по начальному расстоянию и начальной скорости уравнением (1), т. е.

$$V^2 = k^2 (E + m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad E \text{ — масса}$$

В эллиптической орбите a положительно, следовательно, так как положительное T увеличивает V^2 и не меняет мгновенно r , то *положительное T увеличивает большую полуось, когда Луна находится в любой части своей орбиты*. Из этого уравнения также следует, что данное T сильнее изменяет a , когда V имеет наибольшее значение или когда Луна находится в перигее, и что скорость изменяется тем быстрее, чем больше a .

Зависимость a от T , выраженная через частные производные, дается уравнением:

$$\frac{\partial a}{\partial T} = \frac{\partial a}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{2a^2 V}{k^2 (E + m)} \frac{\partial V}{\partial T}.$$

177. Действие тангенциальной составляющей на линию апсид. Тангенциальная составляющая увеличивает или уменьшает скорость, но не изменяет направления движения. Фокус E , конечно, не изменяется, r_1 остается постоянным, и, согласно результатам последнего параграфа, a увеличивается. Так как $r_2 = 2a - r_1$ в то время, как направление r_2 остается неизменным, то фокус E_1 передвигается вперед к E_1' (рис. 46). Линия апсид вращается вперед от AB к $A'B'$. Поэтому нетрудно видеть, что *положительная тангенциальная составляющая заставляет линию апсид вращаться вперед в течение первой половины обращения и назад в течение второй половины обращения*.

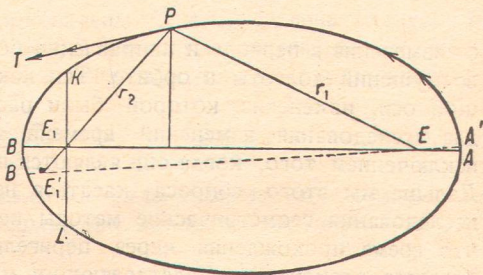


Рис. 46.

Мгновенные действия одинаковы для точек, симметричных относительно большой оси. Когда Луна находится в K или L , то все смещение второго фокуса перпендикулярно к линии апсид, и в этих точках скорость вращения апсид максимальная для данного изменения большой оси. Но большая ось изменяется сильнее всего, когда Луна находится в перигее; поэтому место, где линия апсид вращается наиболее быстро, находится вблизи K и L и между этими точками и перигеем. Скорость вращения линии апсид обращается в нуль, когда Луна находится в перигее или апогее. Надо помнить, что вся задача усложнена тем, что величина T зависит от расстояний как Солнца, так и Луны и эти расстояния непрерывно изменяются.

178. Действия тангенциальной составляющей на эксцентриситет. Эксцентриситет дается формулой $e = \frac{EE_1}{2a}$ (рис. 46). Когда Луна находится в перигее, то EE_1 и $2a$ увеличиваются на одну и ту же величину. Так как EE_1 меньше, чем $2a$, то эксцентриситет в этой точке увеличи-

вается. Когда Луна находится в апогее, тогда $2a$ увеличивается, в то время как EE_1 настолько же уменьшается, поэтому эксцентриситет уменьшается. Следовательно, существует место между перигеем и апогеем, где эксцентриситет не изменяется; нетрудно показать, что это место находится у конца малой оси. Пусть $2\Delta a$ обозначает мгновенное увеличение $2a$, когда Луна находится в C или D (рис. 47). Тогда r_2 увеличивается на $2\Delta a$ и EE_1 — на ΔE . Если θ есть угол CE_1E , то

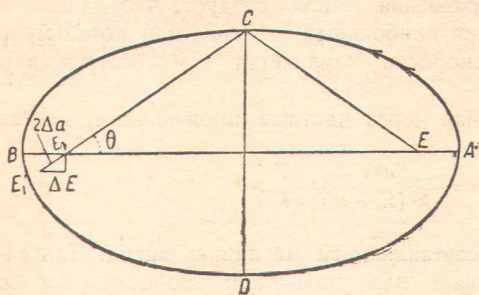


Рис. 47.

$\cos \theta = \frac{EE_1}{2a} = \frac{2ae}{2a} = e$, и, кроме того, $\Delta E = 2\Delta a \cos \theta = 2e\Delta a$. Поэтому

$$e' = \frac{EE_1 + \Delta E}{2a + 2\Delta a} = \frac{2ae + e\Delta a}{2a + 2\Delta a} = e,$$

т. е. эксцентриситет не изменяется тангенциальной составляющей, если Луна находится на конце малой оси орбиты.

Изменение во времени прохождения через перигелий зависит от изменения в периоде и направлении большой оси, так же, как от прямых возмущений долготы в орбите. Так как период зависит от одной большой оси, изменения которой были рассмотрены, то этим даны основы для исследования изменений времени прохождения через перигелий, за исключением того, когда они являются прямыми возмущениями в долготе. Дальше мы этого вопроса касаться не будем, потому что для такого исследования геометрические методы недостаточно подходящи и потому что время прохождения через перигелий для настоящего исследования является элементом, представляющим мало интереса.

179. Действия нормальной составляющей на большую ось. Из уравнения (1) следует, что большая ось зависит от скорости в данной точке, а не от направления движения.

Так как нормальная составляющая действует по перпендикуляру к касательной, то она не меняет мгновенной скорости и поэтому оставляет большую ось неизменной.

180. Действия нормальной составляющей на линию апсид. Рассмотрим действие мгновенной нормальной составляющей, когда Луна находится в P (рис. 48). Пусть PT изображает касательную к орбите. Действием нормальной составляющей она изменяется в PT' . Так как радиусы к двум фокусам образуют равные углы с касательной, то радиус r_2 изменится в r_2' ; и так как нормальная составляющая не влияет на длину большой оси, то r_2 и r_2' будут равной длины. Следовательно, если Луна находится в области LAK , то положительная нормальная составляющая будет вращать линию апсид вперед, а если она находится в области KBL , то назад. В точках K и L нормальная составляющая не изменяет направления линии апсид.

В практических вычислениях возмущений Луны важно определить относительные действия данной нормальной силы на изменение линии

апсид, когда Луна находится в двух положениях A и B . Если Луна находится в одной из этих двух точек, то второй фокус E_1 смещается вдоль линии KL . Сила изменяет направление движения тела обратно пропорционально скорости, с которой оно движется; но по закону площадей скорости A и B обратно пропорциональны их расстояниям от E . Пусть E_A и E_B обозначают действие данной силы в изменении направления движения соответственно в A и B , и пусть V_A и V_B обозначают скорости в тех же точках. Тогда

$$\begin{aligned} E_A : E_B &= V_B : V_A = \\ &= a(1-e) : a(1+e). \end{aligned}$$

Вращение линии апсид прямо пропорционально смещению E_1 вдоль линии KL . Смещение вдоль KL прямо пропорционально произведению длины радиусов от A и B до E_1 на углы, через которые они вращаются. Но углы пропорциональны E_A и E_B , а длина радиусов E_1 пропорциональна $a(1+e)$ и $a(1-e)$. Поэтому, полагая, что R_A и R_B обозначают вращение линии апсид в этих двух точках, мы получим:

$$R_A : R_B = a(1+e) E_A : a(1-e) E_B = 1 : 1,$$

т. е. равные мгновенные нормальные силы производят равные, но противоположно направленные вращения линии апсид, когда Луна находится в апогее или перигее.

Предположим, что силы действуют непрерывно в пределах малых дуг. Так как линейные скорости обратно пропорциональны радиусам, то действие в изменении направления линии апсид постоянной силы, действующей на малой дуге в A , относится к таковому равной силы, действующей на равной дуге в B , как $a(1-e) : a(1+e)$. В действительности возмущающие силы не мгновенны, а действуют непрерывно; их величина зависит от положений тел. Следовательно, если нормальная составляющая в апогее не меньше, чем в перигее, то общее вращение линии апсид, вызываемое малой составляющей, имеющей всегда один и тот же знак, происходит в направлении вращения, когда Луна в апогее.

181. Действия нормальной составляющей на эксцентриситет. Если $2a$ — большая ось, то эксцентриситет дается формулой:

$$e = \frac{EE_1}{2a}.$$

После действия нормальной составляющей эксцентриситет становится равным:

$$e' = \frac{EE_1'}{2a},$$

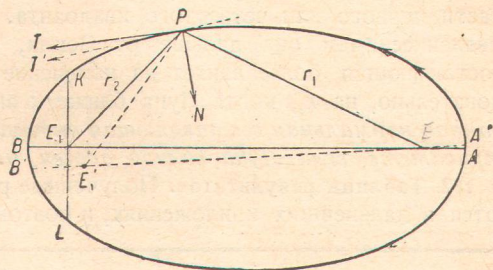


Рис. 48.

так как большая ось не изменяется. Из рис. 48 видно, что *положительная нормальная сила уменьшает эксцентриситет в течение первой половины обращения и увеличивает его в течение второй половины*, EE_1' меньше, чем EE_1 , в первом случае и больше во втором. Мгновенное изменение в эксцентриситете исчезает, когда Луна находится в A или B .

Из рис. 48 следует, что данное изменение в направлении r_2 производит большее изменение в эксцентриситете, когда Луна находится во втором или третьем квадранте, чем когда она находится в соответствующей части первого или четвертого квадранта. Кроме того, Луна движется тем медленнее, чем она дальше от Земли, и поэтому данная нормальная составляющая более влияет на изменение направления движения, а следовательно, на r_2 , когда Луна ближе к апогею, чем к перигею. Поэтому *данная нормальная составляющая вызывает большие изменения в эксцентриситете, если Луна вблизи апогея, чем если она вблизи перигея*.

182. Таблица результатов. Полученные результаты постоянно употребляются в дальнейших приложениях, и поэтому удобно собрать их в таблицу.

Составляющая	S	T	N
Узлы	Движение вперед в первом и втором квадрантах; движение назад в третьем и четвертом квадрантах	0	0
Наклонность	Увеличивается в первом и четвертом квадрантах; уменьшается во втором и третьем квадрантах	0	0
Большая ось	0	Всегда увеличивается	
Линия апсид	Никакого действия, если считать ω от неподвижной точки, а не от Ω	В интервале ABC вперед; в интервале BDA назад	В интервале LAK вперед; в интервале KBL назад
Эксцентриситет	0	В интервале DAC увеличивается; в интервале CBD уменьшается	В интервале ABC уменьшается; в интервале BDA увеличивается

Результаты даны лишь для положительных значений составляющих возмущающей силы; для отрицательных составляющих они в каждом случае противоположны. Напомним, что:

Ортогональная составляющая S положительна, когда она направлена к северному полюсу эклиптики.

Тангенциальная составляющая T положительна, когда она направлена в сторону движения.

Нормальная составляющая N положительна, когда она направлена внутрь эллипса.

183. Возмущающие действия сопротивляющейся среды. Простейшее возмущение эллиптического движения возникает от сопротивляющейся среды. В этом случае единственной возмущающей силой является отрицательная тангенциальная составляющая, имеющая одно и то же значение в точках, симметрично расположенных по отношению к большой оси. Поэтому из таблицы видно, что 1) Ω и i не изменяются, 2) a непрерывно уменьшается, 3) линия апсид подвергается периодическим изменениям, вращаясь назад в течение первой половины обращения и настолько же вперед в течение второй половины, 4) эксцентриситет уменьшается, когда тело движется в интервале DAC , и увеличивается в продолжение остального обращения. Для движения тела по дуге CBD требуется больше времени, чем по дуге DAC ; но, с другой стороны, если сопротивление зависит от высших степеней скорости, что, как показывает опыт, имеет место для больших скоростей, то изменение значительно больше в перигее, чем в апогее, и все действие в течение обращения заключается в уменьшении эксцентриситета. Применение этих результатов к кометам, планетам или спутникам, испытывающим сопротивление метеоритного вещества или, возможно, эфира, очевидно.

184. Возмущения, возникающие от сплюснутости центрального тела. Рассмотрим случай обращения спутника вокруг сплюснутой планеты в плоскости ее экватора. В уравнениях (30) § 78 было показано, что притяжение при таких обстоятельствах всегда больше притяжения концентрического шара равной массы, но что оба притяжения приближаются к равенству по мере удаления спутника. Избыток притяжения сфероида по сравнению с притяжением равной сферы рассмотрим как возмущающую силу, которая, как нетрудно видеть, действует по радиусу-вектору и всегда направлена в сторону планеты. Поэтому нормальная составляющая всегда положительна и имеет одинаковые значения в точках, симметрично расположенных

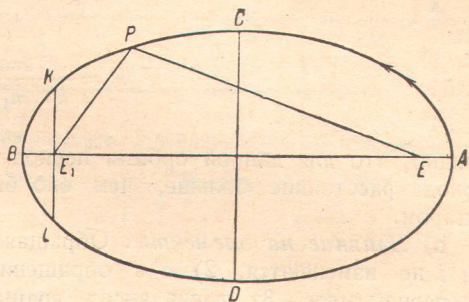


Рис. 49.

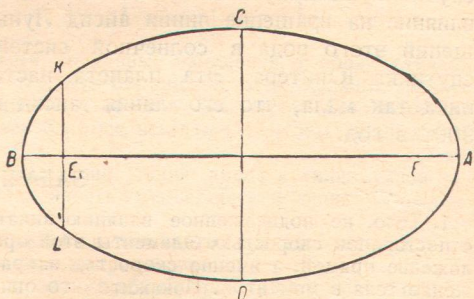


Рис. 50.

по отношению к большой оси. Если эксцентриситет орбиты невелик, то тангенциальная составляющая относительно мала, будучи отрицательной в интервале ACB и положительной в BDA .

а) *Влияние на период обращения.* Это влияние проще всего вывести для круговой орбиты. Притяжение постоянно и больше, чем оно было бы, если бы планета была шаром. Это равносильно увеличению k^2 , ускорения на единицу массы на единице расстояния, поэтому из уравнения

$$P = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k \sqrt{m_1 + m_2}}$$

видно, что для данной орбиты период будет короче и для данного периода расстояние больше, чем оно было бы, если бы планета была шаром.

б) *Влияние на элементы.* Обращаясь к таблице, видим, что 1) δ и i не изменяются, 2) a в обращении уменьшается и увеличивается в равной мере, 3) линия апсид вращается вперед в течение немного больше чем половины обращения, и в это время возмущающая сила имеет наибольшее напряжение и 4) в течение всего обращения эксцентриситет изменяется одинаково в противоположных направлениях, т. е. δ и i абсолютно не изменяются; a и e подвергаются периодическим изменениям, которые завершают свой период в обращении, и линия апсид колеблется, но в общем подвигается вперед.

Влияние тем больше, чем сильнее сплюснута планета и чем ближе спутник. Сплюснутость Земли так мала, что она оказывает очень малое влияние на вращение линии апсид Луны. Наиболее яркий пример возмущений этого рода в солнечной системе мы находим в орбите пятого спутника Юпитера. Эта планета настолько сплюснута и орбита спутника так мала, что его линия апсид продвигается приблизительно на 900° в год.

ЗАДАЧИ

1. Тело, не подверженное влиянию никаких сил, движется по прямой линии с постоянной скоростью. Элементы этой орбиты — постоянные, определяющие положение прямой, а именно скорость, направление движения по прямой и положение тела в момент T . Покажите, что они могут быть выражены через шесть независимых постоянных и что в задаче двух тел можно рассматривать одно тело всегда движущимся относительно другого по прямой линии, положение которой постоянно меняется. Найдите выражения этих линейных элементов в функции времени для случая эллиптического движения.

2. Покажите из общих соображений, основанных на задаче 1, что методы вариации координат и вариации параметров по существу одинаковы, различаясь лишь переменными, употребляемыми для определения координат и скоростей тела.

3. Предположим, что Солнце движется в пространстве по линии L , ортогональной к плоскости Π . Возьмем Π за основную плоскость. Пусть точка, в которой планета P , проходит через плоскость Π в направлении движения Солнца, есть восходящий узел, и, начиная от этой точки, разделите орбиту на квадранты по отношению к Солнцу как к центру. Предположим, что эфир и рассеянное метеоритное вещество слегка замедляют Солнце и планеты, но пренебрежем замедлением, возникающим от движения планет по их орбитам вокруг Солнца.

а) Если сопротивление пропорционально массам соответствующих тел, то покажите, что узлы и наклонности их орбит не изменяются.

б) Пусть σ и R представляют плотность и радиус Солнца, а σ_i и R_i — соответствующие величины для планеты P_i . Тогда, если сопротивление пропорционально поверхностям соответствующих тел, покажите, что по отношению к плоскости Π наклонность и линия узлов подвергаются следующим изменениям.

1. Если $\sigma_i R_i < \sigma R$

Квадрант	1	2	3	4
Наклонность	Уменьшается	Увеличивается	Увеличивается	Уменьшается
Линия узлов движется	Назад	Назад	Вперед	Вперед

2. Если $\sigma_i R_i > \sigma R$

Квадрант	1	2	3	4
Наклонность	Увеличивается	Уменьшается	Уменьшается	Увеличивается
Линия узлов движется	Вперед	Вперед	Назад	Назад

с) Если бы орбиты были окружностями, то разные изменения в обоих случаях точно уравновешивали бы друг друга в целом обращении. Как должны лежать линии апсид в обоих случаях по отношению к линии узлов, чтобы для немногих обращений (1) наклонность уменьшалась быстрее всего и (2) чтобы линия узлов двигалась вперед быстрее всего?

д) Возможно ли сделать отношение изменений линии апсид к линии узлов таким, чтобы для немногих обращений наклонность уменьшалась и линия узлов двигалась вперед?

е) Если линия апсид остается неподвижной в плоскости орбиты, то может ли линия узлов вращаться бесконечно в одном направлении?

4. Предположим, что орбита кометы проходит вблизи орбиты Юпитера у одного из своих узлов; при каких условиях уменьшится наклонность орбиты кометы? Покажите, что если большая ось остается постоянной, в то время как наклонность уменьшается, то эксцентриситет увеличивается. (Пользуйтесь § 159).

5. Каково влияние постепенного накопления метеоритного вещества планетой на большую ось ее орбиты?

6. Рассмотрите два вязких тела, обращающихся вокруг их общего центра массы и вращающихся в том же направлении с периодами, меньшими их периода обращения. Они вызовут друг у друга приливы, которые будут отставать от вращения. Приливные выступы каждого тела создадут положительную тангенциальную и положительную нормальную составляющую на другое; эти составляющие тем больше, чем тела ближе друг к другу. Кроме того, вращение каждого тела замедлится действием другого на его выступы. Предположим, что тела вначале близки друг к другу и что их орбиты слегка эллиптические; проследите эволюцию всех элементов их орбит.

ТЕОРИЯ ЛУНЫ

185. Геометрическое рассмотрение возмущающих действий третьего тела. Задача возмущения третьим телом значительно труднее, чем задачи, рассмотренные в § 183 и 184, потому что возмущающая сила изменяется очень сложным образом.

Предположим, что S , E и m представляют собой три тела (рис. 51), и будем считать, что S возмущает движение m вокруг E . Рассмотрим два положения тела m , например m_1 и m_2 . Пусть вектор EN представляет по величине и направлению ускорение S на E . Порядок букв показывает направление вектора, представляющего силу, а величина вектора зависит от принятых единиц. В тех же самых единицах пусть mK представляют по направлению и величине ускорение S на m . Так как по закону тяготения силы обратно пропорциональны квадратам соответствующих расстояний, то вектор m_1K_1 больше, чем EN , потому

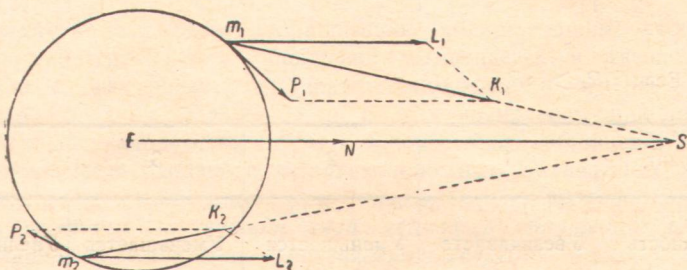


Рис. 51.

что m_1S меньше, чем ES и m_2K_2 меньше EN , потому что m_2S больше, чем ES .

Разложим теперь mK на две составляющих mL и mP так, чтобы mL была равна и параллельна EN . Так как mL и EN равны и параллельны, то эти составляющие не возмущают относительных положений E и m ¹⁾. Следовательно, возмущающее ускорение представляется вектором mP .

Из рис. 51 очевиден важный результат, а именно, что возмущающее ускорение всегда направлено к отрезку, соединяющему E и S , или к продолжению этого отрезка за точку E , если mS больше, чем ES . Подобные соображения, приложенные к материальным точкам, движущимся на поверхности Земли, показывают, почему приливы происходят как на стороне Земли, обращенной к Луне, так и с противоположной стороны.

186. Аналитический вывод возмущающих влияний третьего тела. Возьмем систему прямоугольных осей с началом в центре Земли и с плоскостью xy , совпадающей с плоскостью эклиптики. Пусть в этой системе (x, y, z) и $(X, Y, 0)$ обозначают соответственно координаты Луны и Солнца (рис. 52). Обозначим расстояния Em , mS и ES соответственно через r , ρ и R , и пусть F_x , F_y и F_z обозначают составляющие возмуща-

¹⁾ Все рассуждения справедливы для общих положений тела m_1 , так что под mK , например, надо подразумевать и m_1K_1 и m_2K_2 . Прим. ред.

ющего ускорения, параллельные осям x , y и z . Из уравнений (24) главы VII, § 19 следует, что в принятых обозначениях мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= k^2 S \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xX + yY}{R^3} \right] = k^2 S \left[-\frac{x}{\rho^3} + X \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right], \\ F_y &= k^2 S \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xX + yY}{R^3} \right] = k^2 S \left[-\frac{y}{\rho^3} + Y \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right], \\ F_z &= k^2 S \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xX + yY}{R^3} \right] = k^2 S \left[-\frac{z}{\rho^3} + O \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для получения составляющих возмущающего ускорения в любом другом направлении достаточно спроектировать эти три составляющих на прямую, имеющую это направление, и образовать соответствующие суммы. Пусть F_r обозначает составляющую возмущающего ускорения в направлении радиуса-вектора r , и пусть F_φ — составляющая по линии, перпендикулярной к r в плоскости движения m , а F_N — составляющая, перпендикулярная к F_r и к F_φ . Составляющую F_r будем считать положительной, когда она направлена от E ; составляющую F_φ будем считать положительной, когда она образует с направлением движения угол меньше чем 90° , и составляющую F_N будем считать положительной, когда она направлена в полушарие, содержащее положительный конец оси z . Выражение для F_r напишется в виде:

$$F_r = F_x \cos(xEm) + F_y \cos(yEm) + F_z \cos(zEm).$$

Выражение для F_φ можно получить отсюда, заменяя угол $\angle Em$ через $\angle Em + 90^\circ$, потому что r будет иметь направление касательной в m , после того как тело продвинется по своей орбите вперед на 90° . Выражение для F_N можно получить, проектируя сначала F_x и F_y на прямую в плоскости xu , перпендикулярную к $E\Omega$; затем проектируя этот результат на прямую, перпендикулярную к плоскости $\angle Fm$, и проектируя F_z непосредственно на ту же самую прямую. Обозначим угол $\angle Em$ через u ; тогда при помощи сферической тригонометрии из рис. 52 находим, что:

$$\left. \begin{aligned} F_r &= +F_x [\cos u \cos \angle \Omega - \sin u \sin \angle \Omega \cos i] + \\ &\quad + F_y [\cos u \sin \angle \Omega + \sin u \cos \angle \Omega \cos i] + F_z \sin u \sin i, \\ F_\varphi &= +F_x [-\sin u \cos \angle \Omega - \cos u \sin \angle \Omega \cos i] + \\ &\quad + F_y [-\sin u \sin \angle \Omega + \cos u \cos \angle \Omega \cos i] + F_z \cos u \sin i, \\ F_N &= +F_x \sin \angle \Omega \sin i - F_y \cos \angle \Omega \sin i + F_z \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

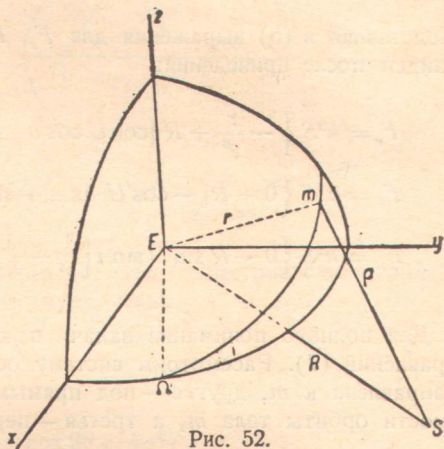


Рис. 52.

Обозначим угол $\angle ES$ через U , так как Солнце движется в плоскости xu :

$$\left. \begin{aligned} x &= r [\cos u \cos \angle \text{—} \sin u \sin \angle \cos i], \\ y &= r [\cos u \sin \angle + \sin u \cos \angle \cos i], \\ z &= r \sin u \sin i, \\ X &= R [\cos U \cos \angle \text{—} \sin U \sin \angle], \\ Y &= R [\cos U \sin \angle + \sin U \cos \angle], \\ Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Подставляя в (5) выражения для F_x , F_y и F_z и пользуясь формулами (6), найдем после приведения:

$$\left. \begin{aligned} F_r &= k^2 S \left\{ -\frac{r}{\rho^3} + R [\cos U \cos u + \sin U \sin u \cos i] \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}, \\ F_v &= k^2 S \left\{ 0 + R [-\cos U \sin u + \sin U \cos u \cos i] \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}, \\ F_N &= k^2 S \left\{ 0 - R \sin U \sin i \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Для полного понимания задачи важно выяснить геометрический смысл уравнений (7). Рассмотрим систему осей с началом в E , одна ось которой направлена к m , другая — под прямым углом к ней и на 90° вперед в плоскости орбиты тела m , а третья — перпендикулярно к двум другим. Тогда из рисунка следует, что коэффициенты при $k^2 SR \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right]$ в (7) соответственно являются косинусами углов между этими осями и прямой ES . Поэтому F_v исчезает, если линия, проведенная через E параллельно перпендикуляру к радиусу, также перпендикулярна к ES , и F_N исчезает, если m находится в плоскости орбиты тела S . Они также исчезают, если $r = \rho$, и в этом случае F_r становится равным просто $-\frac{k^2 S}{r^2}$.

Обозначим угол между r и R через ϕ , тогда:

$$\left. \begin{aligned} F_r &= k^2 S \left\{ -\frac{r}{\rho^3} + R \cos \phi \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}, \\ \rho^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi, \\ \frac{1}{\rho^3} &= \frac{1}{R^3} \left[1 - \frac{2r}{R} \cos \phi + \frac{r^2}{R^2} \right]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{R^3} \left[1 + 3 \frac{r}{R} \cos \phi \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Поэтому выражение для F_r принимает вид:

$$F_r = \frac{k^2 S}{2R^2} \left\{ \frac{r}{R} [1 + 3 \cos 2\phi] + \dots \right\}. \quad (9)$$

Следовательно, если отбросить члены высшего порядка, то F_r исчезает, когда:

$$1 + 3 \cos \phi = 0, \quad (10)$$

откуда

$$\phi = 54^\circ 44', 125^\circ 16', 234^\circ 44', 305^\circ 16'.$$

Теперь рассмотрим задачу нахождения тангенциальных и нормальных составляющих возмущающего ускорения. Пусть P обозначает произвольную точку орбиты (рис. 53), PT — касательную к P , а PN — перпендикуляр к ней. Из элементарных свойств эллипса следует, что PN делит пополам угол между r_1 и r_2 . Тогда тангенциальные и нормальные составляющие возмущающего ускорения выражаются через F_r и F_v при помощи формул:

$$\left. \begin{aligned} T &= +F_r \sin \theta + F_v \cos \theta, \\ N &= -F_r \cos \theta + F_v \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

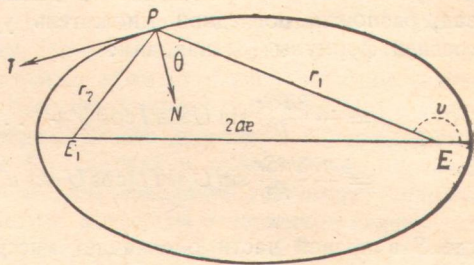


Рис. 53.

Чтобы получить окончательные выражения для T и N , нужно выразить $\sin \theta$ и $\cos \theta$ через v . Из геометрических свойств эллипса и из треугольника EPE_1 следует, что:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \\ r_1 + r_2 &= 2a, \\ r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\theta &= 4a^2 e^2. \end{aligned}$$

Если из этих уравнений исключить r_1 и r_2 , то получим:

$$\sin \theta = \frac{e \sin v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}}, \quad \cos \theta = \frac{1+e \cos v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}}.$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{e \sin v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} F_r + \frac{(1+e \cos v)}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} F_v, \\ N &= \frac{-(1+e \cos v)}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} F_r + \frac{e \sin v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} F_v. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При помощи формул (7) и соотношения $u = \omega + v$ окончательные выражения для тангенциальной и нормальной составляющей возмущающего ускорения можно написать в виде:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{k^2 S}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} \left\{ -e \sin v \frac{r}{\rho^3} + [-\cos U (\sin u + e \sin \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \sin U \cos i (\cos u + e \cos \omega)] R \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}, \\ N &= \frac{k^2 S}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} \left\{ + \frac{r}{\rho^3} - [\cos U (\cos u + e \cos \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \sin U \cos i (\sin u + e \sin \omega)] R \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

187. Возмущения узла. Из определения видно, что ортогональная составляющая S тождественна с F_N ; поэтому по последнему уравнению (7):

$$\text{Ортогональная составляющая} = S = -k^2 SR \sin U \sin i \left[\frac{1}{c^3} - \frac{1}{R^3} \right]. \quad (14)$$

Знак правой части зависит от знаков $\sin U$ и $\left[\frac{1}{c^3} - \frac{1}{R^3} \right]$, которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Для определения знака, который покажет, происходит ли движение линии узлов вперед или назад, разложим последний множитель уравнения (14). При помощи последней формулы (8) находим:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{3k^2 Sr}{R^3} \sin U \sin i \cos \phi + \dots = \\ &= -\frac{3k^2 Sr}{R^3} \sin U \sin i [\cos U \cos u + \sin U \sin u \cos i] + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где S в правой части обозначает массу Солнца.

Угловая скорость Солнца в его орбите мала сравнительно со скоростью Луны; поэтому, предположим для простоты, что Солнце не движется, в то время как Луна делает один оборот. Так как периоды Луны и Солнца не имеют простого отношения, то значения $\sin U$ и $\cos U$ за большой промежуток так же часто увеличиваются, как и уменьшаются, и поэтому это предположение не вызовет значительной ошибки.

Предположим, что S разбито на сумму двух частей S_1 и S_2 , так что

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{3k^2 Sr}{R^3} \sin i \sin U \cos U \cos u, \\ S_2 &= -\frac{3k^2 Sr}{R^3} \sin i \cos i \sin^2 U \sin u. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Чтобы достичь высшей степени простоты, предположим еще, что орбита Луны — круг, так что r постоянно и $u = nt$. Предположим, что U имеет определенное значение, и рассмотрим действия S_1 в продолжение обращения Луны, начавшей двигаться из восходящего узла. Из таблицы § 182 следует, что действия S_1 в первом и втором квадрантах равны и противоположны, потому что $\cos u$ имеет равные числовые значения и противоположные знаки в двух квадрантах. То же самое — в третьем и четвертом квадрантах. Поэтому S_1 производит лишь периодические возмущения в линии узлов.

Теперь рассмотрим действия S_2 . В первую половину обращения, начиная от узла, S_2 отрицательно, потому что $\sin u$ положителен и все другие множители положительны. Во второй половине обращения S_2 положительно, потому что $\sin u$ отрицателен. Поэтому из таблицы § 182 следует, что S_2 вызывает непрерывное, но неправильное обратное движение (за исключением, когда оно временно равно нулю) линии узлов. Полное движение линии узлов складывается из периодических колебаний, происходящих вследствие S_1 , и из периодических и непрерывных изменений, вызванных S_2 .

Период обращения линии лунных узлов около 19 лет. Так как затмения Солнца и Луны могут происходить только в том случае, если Солнце находится вблизи узла лунной орбиты, то момент затмения с каждым годом наступает все раньше и раньше, завершая цикл приблизительно в 19 лет.

188. Возмущения наклонности. Выражение для ортогональной составляющей дано уравнением (15), которое может быть разложено на две части S_1 и S_2 . Из таблицы § 182 следует, что положительное S увеличивает наклонность в первом и четвертом квадрантах и уменьшает ее во втором и третьем квадрантах.

Рассмотрим действие S_1 . Если $\sin U \cos U$ положительно, то в каждом квадранте наклонность уменьшается. Но этот случай может быть сопоставлен с тем, когда $\sin U \cos U$ отрицательно и имеет равное числовое значение. Так как таким образом могут быть сопоставлены все возможные положения, то S_1 производит лишь периодические изменения в наклонности.

Случай с S_2 еще проще, чем с S_1 . Так как u положительно в первых двух квадрантах, то действие во втором квадранте аннулирует таковое в первом. Подобным образом действия в третьем и четвертом квадрантах взаимно уничтожают друг друга. *Поэтому наклонность подвергается лишь периодическим изменениям.*

В этом рассмотрении не были приняты во внимание некоторые обстоятельства. Не учтены эксцентриситеты орбит Луны и Земли. Если их включить, то члены не уничтожают вполне один другого, как мы только что описали. Кроме того, каждое возмущение рассматривалось независимо от всех других. Например, если узел меняется, то влияния на наклонность отличаются от тех, какими они были бы в противном случае, и обратно. Ясно, что для получения точных числовых результатов нужен очень тонкий анализ. Но это не значит, что простые геометрические и физические соображения не имеют огромной важности, в особенности при первом проникновении в неисследованные области.

189. Прецессия равноденствий. Нутация. Предположим, что вписанный в земной сфероид шар удален и оставлено только экваториальное кольцо. Каждую точку в этом кольце можно рассматривать как малый спутник; тогда из принципов, объясненных в § 185 и 186, притяжения Луны и Солнца произведут на них возмущающие ускорения, которые будут иметь стремление сдвинуть их по отношению к сферическому ядру. Но кольца прикреплены к твердой Земле так, что она принимает участие во всяком возмущении, которому они подвергаются. Так как их общая масса очень мала по сравнению с массой сферического тела внутри кольца и так как возмущающие силы очень малы, то изменения в движении Земли будут происходить очень медленно.

Из результатов последнего параграфа следует, что узлы орбит каждой точки будут иметь стремление вернуться обратно в плоскость возмущающего тела. Углом между плоскостью лунной орбиты и плоскостью эклиптики можно временно пренебречь, так как он мал сравнительно с наклонностью земного экватора. Это стремление сообщается всей Земле, так что плоскость земного экватора вращается в обратном направлении относительно плоскости эклиптики. С другой стороны, из симметрии фигуры по отношению к узлам орбит точек экваториального кольца следует, что нет изменения в наклонности плоскости экватора к плоскости эклип-

тики или лунной орбиты. Движущаяся масса так велика и действующие силы так малы, что это обратное движение, называемое *прецессией равноденствия*, составляет лишь приблизительно $50''{,}2$ ежегодно, или плоскость земного экватора совершает оборот приблизительно в 26 000 лет.

Сравнительно с Солнцем Луна очень близка к Земле, и ортогональная составляющая, возникающая от ее притяжения, больше происходящей от притяжения Солнца. Поэтому главное обратное движение происходит у лунной орбиты, которая наклонена к эклиптике приблизительно на $5^{\circ}9'$. Так как линия лунных узлов совершает оборот приблизительно в 19 лет, то плоскость, по отношению к которой экватор движется назад, совершает оборот в то же время. Это производит слабое колебание в движении полюса экватора вокруг полюса эклиптики, называемое *нутацией*.

Числовое согласие между теорией и наблюдением скорости прецессии доказывает, что экваториальная выпуклость прочно связана с остальной частью Земли. Если бы Земля состояла из сравнительно тонкой твердой коры, плавающей на жидком ядре, как это прежде предполагалось,

то она, вероятно, несколько скользила бы по этому ядру и дала бы более быструю прецессию.

190. Разложение возмущающего ускорения в плоскости движения. Из таблицы § 182 следует, что ортогональная составляющая не производит возмущений в большой оси, долготе перигея и эксцентриситете, кроме косвенного, когда она сдвигает линию узлов, от которой считается долгота перигея. Следовательно, понятие о том, каким образом возмущаются эти элементы, можно получить даже предполагая, что наклон-

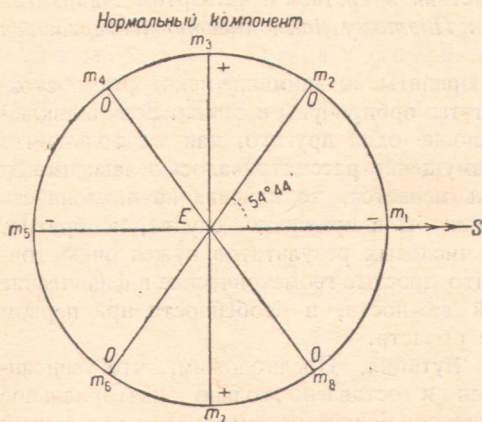


Рис. 54.

ность равна нулю. Но надо помнить, что результаты, полученные при этих ограничениях, не строгие, потому что T и N зависят от наклона. Но приближение полностью оправдывается, потому что оно дает большие упрощения, которые помогают разобраться в этом вопросе.

Полагая $i=0$, мы напишем уравнения (13) в виде:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{k^2 S}{V1 + e^2 + 2e \cos v} \left\{ -e \sin v \frac{r}{\rho^3} - \right. \\ &\quad \left. - R [\sin(u - U) + e \sin(\omega - U)] \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}, \\ N &= \frac{k^2 S}{V1 + e^2 + 2e \cos v} \left\{ -\frac{r}{\rho^3} - \right. \\ &\quad \left. - R [\cos(u - U) + e \cos(\omega - U)] \left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если i равняется нулю, то $\phi = u - U$, и при помощи последнего уравнения (8) мы находим:

$$T = \frac{k^2 S}{V1 + e^2 + 2e \cos v} \left\{ -e \sin v \frac{r}{R^3} - \right. \\ \left. - 3e \frac{r}{R^3} \sin(\omega - U) \cos(u - U) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{r}{R^3} \sin 2(u - U) + \dots \right\}, \quad (18)$$

$$N = \frac{k^2 S}{V1 + e^2 + 2e \cos v} \left\{ -3e \frac{r}{R^3} \cos(\omega - U) \cos(u - U) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{r}{R^3} [1 - 3 \cos 2(u - U)] + \dots \right\}.$$

В лунной орбите e приблизительно равно $1/20$, и, следовательно, отбрасывая такие члены, в которых e входит множителем, мы получим хорошее представление о числовых значениях T и N и обстоятельствах, при которых они меняют знак. Если эти члены отброшены, то находим, что T исчезает при $u - U = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ и $\frac{3\pi}{2}$; оно отрицательно в первом и третьем квадрантах и положительно во втором и четвертом квадрантах. В том же случае N исчезает при $54^\circ 44', 125^\circ 16', 234^\circ 44'$ и $305^\circ 16'$; оно отрицательно от $54^\circ 44'$ до $54^\circ 44'$ и от $125^\circ 16'$ до $234^\circ 44'$ и положительно от $54^\circ 44'$ до $125^\circ 16'$ и от $234^\circ 44'$ до $305^\circ 16'$. Если сохранить члены, зависящие от e , и высшие члены в разложении r^{-3} , то точки, где T и N исчезают, обычно слегка отличаются от найденных, но эти различия не имеют большого значения при качественном рассмотрении, цель которого — просто выявить общие характеристики результатов.

Знаки T и N для Луны в различных частях ее орбиты показаны на рис. 54 и 55.

191. Возмущения большой оси. Если бы перигей был в m_1 или m_8 , то тангенциальная составляющая, которая одна изменяет a , была бы равна и противоположна по знаку в точках, симметрично расположенных по отношению к большой оси. В этом случае в конце полного обращения a не изменилось бы. Но это имеет место лишь мгновенно, потому что возмущающее тело S движется по своей орбите; однако после

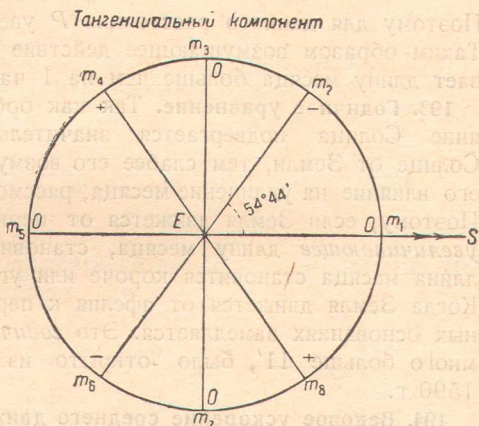


Рис. 55.

очень большого числа обращений, в случае если периоды несоизмеримы, возмущающее влияние окажут равное число равных положительных и отрицательных тангенциальных составляющих. В результате за долгий промежуток времени a не меняется, хотя оно подвергается периодическим изменениям.

192. Возмущение периода. Нормальная составляющая не только отрицательна в течение больше чем половины обращения, но ее отрицательные значения численно больше, чем положительные. Если пренебречь членами, содержащими e , то из второго уравнения (18) видно, что наибольшее отрицательное значение N в 2 раза превышает наибольшее положительное числовое значение. Это эквивалентно уменьшению в среднем притяжения E на m , т. е. уменьшению k^2 ускорения на единицу расстояния.

Соотношение между периодом, k и большой осью (§ 89) дается формулой:

$$P = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{k \sqrt{E + m}}.$$

Поэтому для данного расстояния P увеличивается, если k уменьшается. Таким образом возмущающее действие Солнца на орбиту Луны увеличивает длину месяца больше чем на 1 час [сравни § 184, а)].

193. Годичное уравнение. Так как орбита Земли — эллипс, то расстояние Солнца подвергается значительным изменениям. Чем дальше Солнце от Земли, тем слабее его возмущающие действия и в особенности его влияние на удлинение месяца, рассмотренное в предыдущем параграфе. Поэтому, если Земля движется от перигелия к афелию, то возмущение, *увеличивающее* длину месяца, становится все меньше и меньше, т. е. длина месяца становится короче или угловое движение Луны ускоряется. Когда Земля движется от афелия к перигелию, движение Луны на обратных основаниях замедляется. Это *годичное уравнение*, составляющее немного больше $11'$, было открыто из наблюдений Тихо Браге около 1590 г.

194. Вековое ускорение среднего движения Луны. В начале XVIII столетия Галлей нашел из сравнения древних и современных затмений, что среднее движение Луны постепенно увеличивается. Почти 100 лет спустя (1787 г.) Лаплас дал объяснение этому, показав, что причина заключается в постепенном уменьшении эксцентриситета земной орбиты, которое происходило в течение многих тысячелетий вследствие возмущений других планет и которое будет продолжаться долгое время, прежде чем эксцентриситет начнет увеличиваться.

Одно из действий изменения эксцентриситета земной орбиты состоит в изменении средней возмущающей силы Солнца на орбиту Луны. Теперь покажем, что если эксцентриситет уменьшается, то в среднем возмущающая сила также уменьшается.

Действие на лунный период относится почти всецело к нормальной составляющей, потому что она одна действует по радиусу орбиты, и поэтому в этом рассмотрении соображение, касающееся тангенциальной составляющей, можно опустить. Среднее значение N в течение одного

обращения Луны, так как R и U — постоянная и e положено равным нулю, находится из второго уравнения (18):

$$\text{Среднее } N = -\frac{1}{2} k^2 S \frac{r}{R^3} \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} [1 - 3 \cos 2(nt - U)] dt = -\frac{1}{2} k^2 S \frac{r}{R^3}, \quad (19)$$

т. е. нормальная составляющая возмущающего ускорения в среднем почти пропорциональна радиусу лунной орбиты и обратно пропорциональна третьей степени радиуса земной орбиты. Но если земная орбита эксцентрична, то результат за весь год зависит от эксцентриситета. Если найден характер зависимости среднего N от эксцентриситета земной орбиты, то можно определить влияния увеличения или уменьшения этого эксцентриситета.

Обозначим среднее N за целый год через \bar{N} . Тогда из (19) следует, что

$$\bar{N} = -\frac{k^2 S r}{2P} \int_0^P \frac{dt}{R^3}, \quad (20)$$

где P есть период обращения Земли. По закону площадей следует, что $h dt = R^2 d\theta$; отсюда уравнение (20) принимает вид:

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \frac{k^2 S r}{Ph} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R} = -\frac{1}{2} \frac{k^2 S r}{Ph} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e' \cos \theta}{a' (1 - e'^2)} d\theta = \frac{-k^2 S r \pi}{Ph a' (1 - e'^2)},$$

где a' и e' — большая полуось и эксцентриситет солнечной орбиты. Но из формул задачи о двух телах следует, что

$$h = k \sqrt{(1+m) a' (1 - e'^2)}, \quad P = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{k \sqrt{1+m}}.$$

Поэтому выражение для \bar{N} принимает вид:

$$\bar{N} = \frac{-k^2 S r}{2a'^3 (1 - e')^{\frac{5}{2}}}.$$

Если e' уменьшается, то \bar{N} по числовой величине уменьшается; поэтому, если эксцентриситет земной орбиты уменьшается, то влияние Солнца на уменьшение притяжения Луны Землей постепенно уменьшается, и среднее движение Луны соответственно увеличивается. Изменения так малы, что деформация орбиты почти не заметна, но в течение многих веков долгота Луны заметно увеличивается. Теоретическая величина ускорения около $6''$ в столетие. Величина, полученная из рассмотрения затмений, варьирует от 8 до $12''$. Предполагают, что приливное замедление, удлиняя сутки, вызывает это расхождение, но, повидимому, этот вопрос остается не вполне решенным.

Очень долгие периодические изменения в эксцентриситете земной орбиты, влияния которых на движение Луны только что были рассмотрены, происходят от возмущений со стороны других планет. Хотя массы этих планет так малы и они настолько удалены, что их непосредственные возмущения лунного движения почти нечувствительны, все же они вызывают и другие важные изменения косвенно через возмущения земной орбиты. Этот пример косвенного действия иллюстрирует большую сложность проблемы движения тел солнечной системы и показывает, что для вывода удовлетворительных числовых результатов должны быть применены самые тончайшие методы.

195. Вариация. Имеется другое важное возмущение в движении Луны, которое не зависит от эксцентриситета ее орбиты. Оно было открыто Тихо Браге из наблюдений около 1590 г. Ньютон объяснил в *Началах* его причину прямым и изящным методом, который вызвал восхищение Лапласа.

Это возмущение можно объяснить, предположив, что невозмущенное движение Луны происходит по кругу. Как было показано, нормальная составляющая возмущающего ускорения Солнца отрицательна в интервалах $m_8 m_1 m_2$ и $m_4 m_5 m_6$ (рис. 56) с максимальными значениями в m_1 и m_3 . Предположим, что возмущенное движение в m_1 происходит по кругу,

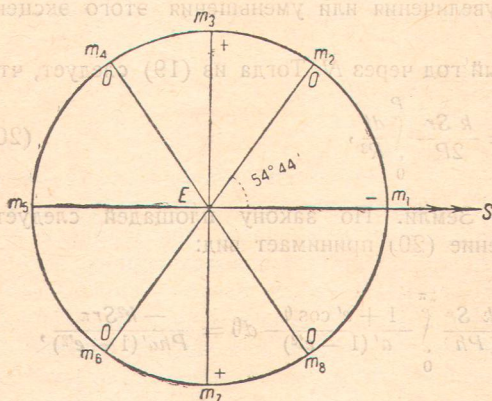


Рис. 56.

т. е. что ускорение вследствие притяжения Земли точно уравнивает центробежное ускорение. В этой точке нет тангенциальной составляющей, но есть большая отрицательная нормальная составляющая. В результате сила, направленная к E , уменьшается, и орбита в этой точке менее изогнута, чем круг. Поэтому Луна удалится на большее расстояние от Земли в квадратуре, чем при движении по круговой орбите. В точке m_3 тангенциальная составляющая равна нулю, сила, направленная к E , увеличена, и кривизна больше, чем в окружности. Условия непрерывно меняются от m_1 до m_3 в промежутке $m_1 m_3$. Соответствующие изменения в остальной части орбиты очевидны. Весь результат таков, что орбита удлинена в направлении, перпендикулярном к линии, проведенной от Земли к Солнцу. Если принять, что Солнце столь далеко, что его возмущающие действия в интервале $m_3 m_5 m_7$ равны действиям в интервале $m_7 m_1 m_3$, то орбита при подходящих начальных условиях симметрична по отношению к E как к центру и близко напоминает по форме эллипс. Это изменение формы орбиты и добавочные изменения в скорости, с которой радиус-вектор описывает площадь, дают начало неравенству в долготе между средним и истинным положением Луны, которое доходит по временам до $39'30''$ и называется *вариацией*.

Вариация имеет интересную и важную связь с современными методами в теории Луны, основание которым было положено Гиллом в его знаменитых мемуарах в первом томе «American Journal of Mathematics» и в «Acta Mathematica», т. VIII. Полное изложение этого метода дано в «Lunar Theory» Броуна в главе: *Метод с прямоугольными координатами*. Гилл пренебрег солнечным параллаксом, т. е. он принял, что в точках, находящихся в соединении и противостоянии с Солнцем, возмущающая сила равна. Вместо того чтобы взять за первое приближение эллипс, он взял за промежуточную орбиту *вариационную орбиту*, замкнутую по отношению к осям, вращающимся с средней угловой скоростью Солнца с синодическим периодом, равным синодическому периоду Луны. Эта идея не только имеет большое значение, но и анализ был сделан Гиллом с редким изяществом и изобретательностью.

196. Параллактическое неравенство. Так как Солнце находится на конечном расстоянии от Земли, то его возмущающие действия не будут в точности одинаковы в точках, симметрично расположенных по отношению к линии $m_3 m_7$, но будут больше на стороне $m_7 m_1 m_3$. Например, если разложение ρ^{-3} в (17) проведено на один порядок дальше, так, чтобы включить члены второго порядка, т. е. с $\frac{r^2}{R^2}$, то часть N , не зависящая от e , окажется равной:

$$N = \frac{k^2 S}{R^2} \left\{ -\frac{r}{2R} [1 + 3 \cos 2(u - U)] - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \frac{r^2}{R^2} [3 \cos(u - U) + 5 \cos 3(u - U)] - \dots \right\}. \quad (22)$$

Если $u - U = 0$, то член второго порядка имеет тот же знак, как член первого порядка, а если $u - U = \pi$, то — противоположный знак. Действие этого члена относительно мало, потому что $\frac{r}{R}$ приблизительно равно 0,0025. Члены второго порядка вызывают искажение в вариационной орбите, которое ведет к неравенству примерно в 2'7" в долготе Луны по сравнению с теоретическим положением в вариационной орбите. Так как это неравенство зависит от параллакса Солнца, то оно получило название *параллактического неравенства*. Лаплас заметил, что определенное с очень большой точностью из длинного ряда наблюдений, оно дает удовлетворительный метод для получения расстояния Солнца. Главная практическая трудность состоит в том, что прежде чем применить этот метод, надо решить трудную задачу нахождения относительных масс Земли и Луны ¹⁾.

197. Движение линии апсид. Вследствие более сложного образа действия разных составляющих на движение линии апсид возмущения этого элемента представляют большие трудности, чем до сих пор рассмотренные. Предположим сначала, что линия апсид совпадает с линией ES и что перигей находится в m_1 (рис. 57). Нормальная составляющая в m_1 отрицательна и поэтому (таблица § 182) производит обрат-

¹⁾ См. Brown, Lunar Theory, стр. 127.

ное движение линии апсид. С другой стороны, если Луна находится в m_3 , то отрицательная нормальная составляющая заставляет линию апсид двигаться вперед. В § 180 было показано, что влияние нормальной составляющей, действующей в то время, когда Луна описывает короткую дугу в апогее, относится к влиянию равной нормальной составляющей, действующей в то время, когда описывается равная дуга в перигее, как $a(1+e)$ к $a(1-e)$. Кроме того, второе уравнение (18) показывает, что нормальная составляющая прямо пропорциональна расстоянию Луны

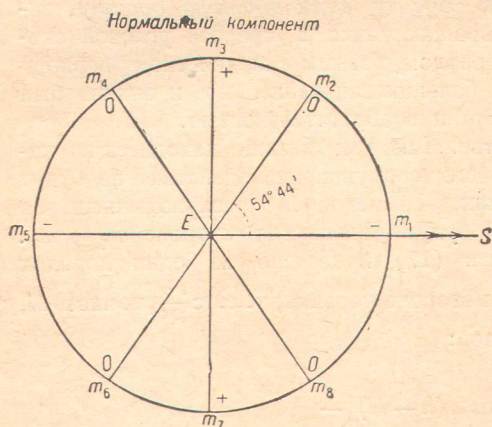


Рис. 57.

от Земли. Поэтому нормальная составляющая больше в апогее и действует сильнее, чем соответствующее ускорение в перигее. Нормальная составляющая положительна, хотя сравнительно мала в интервалах $m_2 m_3 m_4$ и $m_6 m_7 m_8$. Точки К и L делят эти интервалы почти на равные части (рис. 48), в которых действие нормальной составляющей на линию апсид исчезает. Поэтому из таблицы следует, что общее действие в этих интервалах очень мало. Отсюда, если перигей находится в m_1 , то результат в течение целого обращения состоит во вращении линии апсид вле-

пред на значительный угол. Подобные рассуждения ведут к точно таким же результатам, когда перигей находится в m_3 .

Если перигей находится в m_1 , то тангенциальная составляющая равна по числовому значению и противоположна по знаку на противоположных сторонах большой оси (рис. 58). Отсюда из таблиц следует, что действия происходят в том же направлении и равны по величине для точек, симметрично расположенных с противоположных сторон от большой оси. Но действия во втором и третьем квадрантах противоположны по знаку действиям в первом и четвертом квадрантах; кроме того, они немного больше во втором и третьем квадрантах, потому что тогда r наибольшее, а тангенциальная составляющая согласно (18) пропорциональна r . Поэтому, если перигей находится в m_1 , то общее действие тангенциальной составляющей за целое обращение состоит во вращении линии апсид вперед. Теперь соединим это со случаем, когда перигей находится в m_3 , что возникает вследствие движения Солнца даже при стационарных апсидах. При таких обстоятельствах апсиды вращаются назад, и вращение в обоих случаях уничтожает друг друга.

Предположим теперь, что линия апсид перпендикулярна к линии ES. В этом рассмотрении не существенно, на каком конце линии находится перигей, но для определенности возьмем его в m_3 . Нормальная составляющая положительна в интервале $m_2 m_3 m_4$ и согласно таблице вращает линию апсид вперед. Она также положительна в интервале $m_6 m_7 m_8$ и вращает

линию апсид назад. В последнем случае возмущающее ускорение больше и сильнее влияет, так что общим результатом является движение назад. Точки L и K делят интервалы $m_8 m_1 m_2$ и $m_4 m_5 m_6$, в которых нормальные составляющие отрицательны, почти на равные части. Отсюда из таблицы видно, что их результаты почти точно уравновешивают друг друга за целое обращение. Поэтому, если перигей находится в m_3 , то результатом действия нормальной составляющей на линии апсид для целого обращения является значительное движение назад.

Если перигей находится в m_3 , то тангенциальная составляющая положительна в интервале $m_3 m_5$ и отрицательна в $m_5 m_7$. Из таблиц видно, что положительное T в интервале $m_2 m_3 m_7$ заставляет линию апсид вращаться вперед, а отрицательное — назад. Так как знаки T противоположны в двух почти одинаковых частях интервала, то весь результат на линию апсид очень мал. Результат тот же в полуобороте $m_7 m_1 m_3$. Отсюда видно, что совместное влияние нормальной и тангенциальной составляющих на целое обращение состоит во вращении линии апсид назад, когда она перпендикулярна к линии, соединяющей Землю и Солнце.

Было найдено, что линия апсид вращается вперед, когда она совпадает с прямой, соединяющей Землю и Солнце. Теперь нужно определить, что больше: движение вперед или назад? Было отмечено, что общие изменения, возникающие от действия тангенциальных составляющих, выражаются как разности почти равных стремлений и поэтому малы. То же может быть сказано о нормальных составляющих, действующих вблизи концов малой оси эллипса. Кроме того, в двух рассмотренных положениях они действуют в противоположных направлениях, так что их полный результат еще меньше. Наиболее значительные изменения возникают от нормальных составляющих, которые действуют вблизи концов большой оси. Из второго уравнения (18) следует, что в первом случае, в котором линия апсид движется вперед, нормальная составляющая почти в 2 раза больше, чем во втором, в котором линия апсид движется назад. Поэтому полное изменение для двух положений линии апсид есть движение вперед. Результаты для положений, близких к двум рассмотренным, будут такие же, но меньше по величине до некоторых промежуточных точек, где вращение линии апсид за целое обращение Луны будет равно нулю. Из того, каким образом тангенциальные составляющие меняют знак (рис. 58), видно, что эти точки ближе к m_3 и m_7 , чем к m_1 и m_5 , поэтому *средним результатом для всех возможных положений перигея является движение линии апсид вперед.*

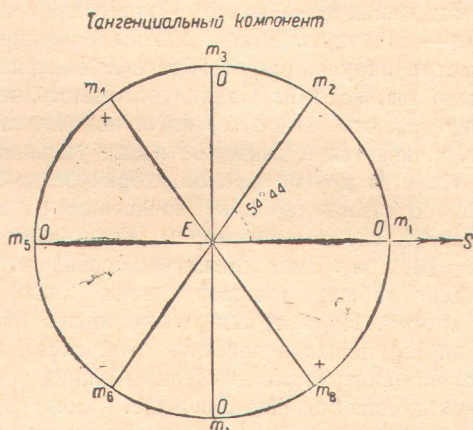


Рис. 58.

198. Вторичные действия. До сих пор мы предполагали, что Солнце остается неподвижным. Однако оно движется в том же направлении, как и Луна. Было показано, что если Луна близка к апогею, а Солнце к линии апсид, то нормальная составляющая заставляет апсиды двигаться вперед. Это движение вперед стремится сохранить положение орбиты по отношению к положению Солнца, и движение вперед апсид увеличивается и делается более продолжительным. С другой стороны, если Луна находится в перигее и Солнце вблизи линии апсид, то линия апсид движется обратно; Солнце движется в одну сторону, а линия апсид — в другую. Такое соотношение между орбитами Солнца и Луны быстро нарушается, и обратное движение оказывается меньше, чем оно было бы, если бы Солнце оставалось неподвижным. Подобным образом для каждого относительного положения линии апсид движение вперед увеличивается и движение назад уменьшается.

Имеется другое важное вторичное действие, зависящее от тангенциальной составляющей и не зависящее от движения Солнца. Для примера возьмем случай, в котором линия апсид проходит через Солнце с перигеем в m_1 . Тангенциальная составляющая в m_3, m_5 положительна и согласно таблице вращает линию апсид вперед, пока Луна не придет в апогей. Но так как линия апсид движется вперед, то Луна придет в апогей позже и действие этой составляющей увеличится. Если принять во внимание также движение Солнца, то это *вторичное действие* приобретает еще большее значение. Таким образом возмущение увеличивает возмущение, и ясно, что подразумевают астрономы, говоря, что почти половина движения лунного перигея зависит от квадрата возмущающей силы, или что она получается во втором приближении.

Теоретическое определение движения лунной линии апсид было одной из наиболее трудных задач небесной механики: вторичные действия ускользнули от Ньютона, когда он писал «Начала» ¹⁾, и не были объяснены до тех пор, пока Клеро (Clairaut) не развил свою лунную теорию в 1749 г. Из всех исследований наиболее успешным является мастерской анализ Гилла в «Acta Mathematica», т. VIII, который в отношении рассмотренных членов не оставляет желать ничего больше. Линия апсид лунной орбиты делает полное обращение примерно в $9\frac{1}{2}$ лет.

199. Возмущения эксцентриситета. Предположим, что линия апсид проходит через Солнце и что перигей находится в m_1 . Из симметрии нормальных составляющих по отношению к линии ES и из результатов, данных в таблице, следует, что в таком случае увеличение и уменьшение эксцентриситета в течение полного обращения под влиянием этой составляющей в точности равны. Из правила изменения знаков тангенциальной составляющей и из результатов, данных в таблице, следует, что изменения в эксцентриситете, зависящие от этой составляющей, точно так же уравниваются. Поэтому при указанных условиях изменения в эксцентриситете нет за целое обращение Луны. Подобным образом такие же результаты получаются, когда перигей находится в m_5 .

¹⁾ В рукописях, оставленных Ньютоном и известных как «Портсмутское собрание», которые опубликованы лишь недавно, дано правильное объяснение движения линии апсид и получены почти верные числовые результаты.

Предположим, что линия апсид имеет направление m_3m_1 . Как и раньше, можно показать, что ни нормальная, ни тангенциальная составляющие не вызывают никакого постоянного изменения в эксцентриситете.

Теперь рассмотрим случай, в котором линия апсид занимает какое-то промежуточное положение. Для простоты предположим, что она находится на прямой m_2m_6 с перигеем в m_2 . Одновременно с этим случаем рассмотрим случай, когда перигей находится в m_6 . Сначала рассмотрим только действия нормальной составляющей. Из рис. 57 и из таблицы § 182 следует, что если перигей находится в m_2 , а Луна — в области m_2m_4 , то нормальная составляющая уменьшает эксцентриситет, а если перигей находится в m_6 , то увеличивает эксцентриситет. Эти два действия в значительной степени уничтожают друг друга. Но в § 181 было показано, что данная нормальная составляющая больше влияет на изменение эксцентриситета, когда Луна находится вблизи апогея, чем когда Луна соответственно близка к перигею. Кроме того, так как N пропорционально r , как это следует из второго уравнения (18), то нормальная составляющая тем больше, чем больше расстояние Луны. По обоим этим причинам, если Луна находится на дуге m_2m_4 , то увеличение эксцентриситета с перигеем в m_6 больше, чем уменьшение с перигеем в m_2 . Эти два случая вместе дают остаточное увеличение второго порядка в эксцентриситете, которое можно обозначить через $+\Delta_1e$. Подобным образом, когда Луна находится в области m_4m_6 , действия нормальной составляющей на эксцентриситет с перигеем в m_2 и m_6 состоят соответственно в увеличении и уменьшении. Обращая внимание на относительные положения апогея, видно, что общее влияние на эксцентриситет есть остаточное увеличение $+\Delta_2e$ второго порядка. Рассуждая аналогично, получаем, что общие действия на Луну в дугах m_6m_8 и m_8m_2 являются положительными остатками второго порядка Δ_3e и Δ_4e .

Возникает вопрос, не уничтожаются ли каким-либо образом остатки второго порядка. Чтобы показать, что они также исчезают, рассмотрим случай, в котором линия апсид имеет положение, симметрично противоположное по отношению к линии ES , т. е. случай, в котором перигей находится в m_8 или m_4 . Если перигей находится в m_4 и Луна в области m_2m_4 , то нормальная составляющая увеличивает эксцентриситет; если перигей находится в m_8 , то эксцентриситет уменьшается. Уменьшение в последнем случае больше, чем увеличение в первом, потому что, если перигей находится в m_8 , то область m_2m_4 близка к апогею. Поэтому общим влиянием является уменьшение второго порядка в эксцентриситете и так как дуга m_2m_4 не только соответственно также расположена по отношению к Земле и Солнцу, но и по отношению к лунной орбите, как если бы линия апсид была линией m_2m_6 , то следует, что увеличение второго порядка в эксцентриситете равно $-\Delta_1e$. Подобным образом получаем, что если Луна находится на дугах m_4m_6 , m_6m_8 и m_8m_2 , то суммы изменений эксцентриситета, когда перигей находится в m_4 и m_8 , соответственно равны $-\Delta_2e$, $-\Delta_3e$ и $-\Delta_4e$. Если эти остатки второго порядка прибавить к полученным, когда линия апсид была линией m_2m_6 , то результат равен нулю. Соответствующее рассмотрение ведет к тем же результатам для всякого другого положения линии апсид, т. е. оно может быть соединено попарно с другим, кото-

рое симметрично противоположно по отношению к линии ES , так что когда перигей взят в обоих направлениях каждой линии, то общее действие нормальной составляющей на эксцентриситет равно нулю. Поэтому нормальная составляющая за длинный промежуток времени не вызывает постоянного изменения в эксцентриситете лунной орбиты, и до некоторой степени подобное рассуждение дает такой же результат для тангенциальной составляющей.

Однако Солнце не остается неподвижным, в то время как Луна делает свое обращение, и принятые условия никогда точно не выполняются. Тем не менее полезно показать, как можно соединить разные конфигурации даже если они меняются с каждым моментом. В очень большом числе обращений дополнительные конфигурации встретятся равное число раз, и эксцентриситет вернется к его начальному значению. Период, требуемый для этого цикла изменения, зависит, по-первых, от периодов Солнца и Луны и, во-вторых, от эксцентриситета солнечной орбиты (земной орбиты) и, наконец, от того, каким образом вращаются линии апсид солнечной и лунной орбит.

Существующая система с достаточными геологическими и биологическими доказательствами очень долгого существования Земли, приблизительно в настоящем состоянии, показывает с достаточной уверенностью что система почти, если не вполне, устойчива. В связи с этим интересен, факт, что два элемента, — линия узлов и линия апсид, которые могут непрерывно меняться в одном направлении, не угрожая устойчивости системы, в среднем всегда движутся первый назад, а второй вперед.

200. Эвекция. Только что было показано, что эксцентриситет не меняется за долгий промежуток времени, но подвергается периодическим вариациям значительной величины, дающим начало наибольшему лунному возмущению, известному как *эвекция*. При своем максимальном действии эвекция смещает Луну в геоцентрической долготе на угол примерно в $1^{\circ}15'$ сравнительно с ее положением в невозмущенной эллиптической орбите. Это изменение было открыто Гиппархом и тщательно наблюдало Птоломеем.

Возмущения элементов и в частности эксцентриситета зависят от двух обстоятельств: от положения Луны в ее орбите и от положения Луны по отношению к Земле и Солнцу. Предположим, что Луна и Солнце начинают двигаться из соединения с перигеем в m_1 . Рассмотрим движение за целое синодическое обращение. Из таблицы § 182 и рис. 57 и 58 следует, что эксцентриситет не меняется, когда Луна находится в m_1 ; что он уменьшается или равняется нулю, когда Луна в m_2, m_3 и m_4 ; что он не изменяется, когда Луна в m_5 ; что он увеличивается или равняется нулю, когда Луна в m_6, m_7 и m_8 и что он перестает изменяться, когда Луна снова возвращается в m_1 . Это верно лишь в предположении, что перигей остается в m_1 в продолжение всего обращения или, другими словами, что линия апсид движется вперед с такой же скоростью, с которой Солнце движется по своей орбите. В действительности Солнце движется приблизительно в 8,5 раза быстрее вращения линии апсид. Так как синодический период Луны около 29,5 дня, в то время как Солнце движется примерно на 1° ежедневно, то Луна отойдет приблизительно на 26° от своего перигея, когда она приходит в m_1 . Как это изменит

вывод? Нормальная составляющая отрицательна и в этой части орбиты вызывает увеличение в эксцентриситете, в то время как тангенциальная составляющая не вызывает изменения, потому что она равна нулю. Когда Луна проходит через m_1 , то нормальная составляющая становится меньше по числовой величине, в то время как тангенциальная составляющая становится отрицательной и стремится уменьшить эксцентриситет. Стремления двух составляющих изменить эксцентриситет в противоположных направлениях уравниваются, когда Луна находится в некоторой точке между m_1 и m , вместо m_1 , после чего эксцентриситет уменьшается. Имеется соответствующее движение вперед точки вблизи m , где эксцентриситет перестает уменьшаться и начинает увеличиваться. Можно прийти к подобным заключениям, исходя из любой другой начальной конфигурации.

Результаты могут быть суммированы следующим образом: возмущения Солнца уменьшают эксцентриситет лунной орбиты в течение времени несколько большего, чем половина синодического обращения, и затем в течение такого же времени увеличивает его. Эти изменения в эксцентриситете вызывают отклонения в геоцентрической долготе от теории эллиптического движения, которое составляет *эвекцию*. Соответствующие методы показывают, что период этого неравенства равен около 31,8 суток.

201. Метод Гаусса вычисления вековых вариаций. Раньше было показано, что некоторые из элементов, такие, как линия узлов и линия аписид, беспрестанно изменяются в одном направлении. Это изменение неравномерно, потому что в добавление к общим изменениям имеется много короткопериодических колебаний такой величины, что элемент часто изменяется в обратном направлении. Если результаты выражены аналитическими символами, то общее среднее движение вперед представляется членом, пропорциональным времени, называемым *вековым изменением*, в то время как отклонения от этого равномерного изменения даются суммой периодических членов, имеющих разные периоды и фазы. Отсюда видно, что вековые изменения вызываются своего рода средними возмущающими силами, когда возмущающие и возмущенные тела занимают всевозможные положения относительно друг друга.

Имеются другие элементы, такие, как наклонность и эксцентриситет, которые, хотя они за долгий промежуток времени периодичны, в среднем во много тысяч лет изменяются непрерывно в одном направлении. Эти изменения можно также рассматривать, как вековые изменения, и они подобным образом происходят от своего рода средних возмущений.

В 1818 г. Гаусс опубликовал мемуар по теории вековых изменений, основанный на только что изложенных понятиях. Его метод применялся особенно к вычислению вековых изменений элементов планетных орбит. Вместо рассмотрения движения тел Гаусс предположил, что масса каждой планеты распределяется по эллиптическому кольцу, совпадающему с ее орбитой таким образом, что плотность в каждой точке обратно пропорциональна скорости, с которой движется тело в этой точке. Затем он показал, как вычислить притяжение одного кольца другим и скорость, с которой их положения и формы изменяются под влиянием этих сил.

Метод Гаусса был предметом целого ряда мемуаров. Вероятно, наиболее полезным для практических целей был мемуар Гилла в I томе

«Astronomical Papers of the American Ephemeris and Nautical Almanac». Формулы Гилла с большим успехом были применены профессором Э. Дуллитлем (Doolittle), результаты, полученные им, очень близко согласуются с результатами, найденными Леверье и Ньюкомбом совершенно иными методами.

202. Долгопериодические неравенства. В теориях взаимных возмущений планет встречаются очень большие члены длинных периодов. Они возникают только в том случае, если периоды двух рассматриваемых тел почти соизмеримы, и их причину легко обнаружить из геометрических рассуждений.

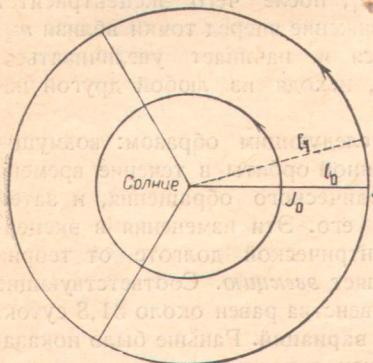


Рис. 59.

Так как наиболее важное изменение происходит во взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна, то объяснение будет применено к этому случаю. Пятикратный период Юпитера немного больше двойного периода Сатурна. Предположим, что две планеты находятся в соединении в начальный момент на линии l_0 (рис. 59). После пяти обращений Юпитера и двух Сатурна они снова окажутся в соединении на линии l_1 , очень близкой к линии l_0 , но имеющей немного большую долготу. Это продолжается бесконечно, каждое соединение происходит на долготу немного большей предыдущей. Часто происходящие соединения близ одних и тех же точек орбиты вызывают очень большие возмущения, и *долгий период* есть время, требуемое для точки соединения, чтобы сделать полное обращение. В случае Юпитера и Сатурна он равен 918 годам. Наибольшее в долготу планет неравенство, смещающее Юпитер на $21'$, а Сатурн на $49'$, долгое время смущало астрономов в их попытках объяснить это как необходимое следствие закона тяготения. Наконец Лаплас сделал один из своих многих важных вкладов в небесную механику, определив действительную причину этого неравенства и показав, что теория и наблюдение согласуются между собой.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что геометрическое место точек, в которых притяжения Солнца и Земли равны, есть сфера радиуса $\frac{RVSE}{S-E}$ с центром, лежащим на прямой, соединяющей Солнце и Землю на расстоянии $\frac{ER}{S-R}$ от центра Земли в сторону, противоположную Солнцу, где S и E соответственно обозначают массу Солнца и Земли.

Если $R=150\,000\,000$ км и $\frac{S}{E}=33\,000$, тогда

$$\frac{RVSE}{S-E}=260\,000 \text{ км}, \quad \frac{RE}{S-E}=452 \text{ км}.$$

Так как орбита Луны имеет радиус около 384 000 км, то Луна всегда сильнее притягивается Солнцем, чем Землей.

2. Луну можно рассматривать обращающейся вокруг Земли и возмущенную Солнцем или обращающейся вокруг Солнца и возмущенную Землей. Приняв лунную орбиту за круг, найдите положение, при котором возмущающие действия Солнца будут наибольшими; покажите, что возмущающие действия Земли, если рассматривать Луну обращающейся вокруг Солнца, для такого же положения будут наименьшими.

3. Найдите отношение наибольшего возмущающего влияния Солнца к наименьшему возмущающему влиянию Земли.

Омс. Пусть R — расстояние от Солнца до Земли, ρ — расстояние от Солнца до Луны и r — расстояние от Земли до Луны, тогда

$$\frac{D_S}{D_E} = \frac{S}{E} \cdot \frac{r^2}{\rho^2} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - r^2} = \frac{S}{E} \cdot \frac{r^3}{\rho^3} \cdot \frac{R + \rho}{R + r} = 0,0114.$$

4. Найдите отношение возмущающей силы Солнца в максимуме к притяжению Солнца и к притяжению Земли.

$$\text{Омс. } \frac{D_S}{A_S} = \frac{r^2 (R + \rho)}{R^2} = 0,005.$$

$$\frac{D_S}{A_E} = \frac{S}{M} \cdot \frac{r^3}{R^2 \rho^2} = 0,011.$$

5. Докажите подробно полученный в § 199 результат, что тангенциальная составляющая не вызывает вековых изменений в эксцентриситете лунной орбиты.

6. Предположим, что планета возмущает движение другой планеты, которая близка к Солнцу. Найдите, каким образом все элементы орбиты внутренней планеты изменяются для всех относительных положений тел в их орбитах.

7. Покажите, что если скорости изменения элементов известны, когда планета находится в определенном положении на своей орбите, то можно найти напряжение и направление возмущающей силы. Покажите, предполагая расстояние возмущающего тела от Солнца известным, что можно найти его направление и массу. (Это есть часть задачи, решенной Адамсом и Леверье, когда они предсказали видимое положение Нептуна на основании возмущений движения Урана. Имеются большие практические трудности, возникающие вследствие малости вовлеченных величин, которые не проявляются в приведенном здесь простом случае.)

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Первая обработка проблемы трех тел, а также двух тел дана Ньютоном в «Началах», книга I, отдел XI, и, как сказал Эри (Airy), она является «наиболее ценной главой из написанного когда-либо по физическим наукам». Она содержит в известной степени полное объяснение вариаций, параллактического неравенства, годовичного уравнения, движения перигея, возмущений эксцентриситета, обращения узлов и возмущений наклонности. Значение движения лунного перигея, найденное Ньютоном из теории, было в 2 раза меньше данного наблюдениями. В 1872 г. в некоторых из неопубликованных рукописей Ньютона, известных под названием «Портсмутского собрания», было найдено, что Ньютон объяснил движение перигея, включая возмущения второго порядка (см. § 193). Эта работа была неизвестна астрономам, движение лунного перигея не было выведено из теории до 1749 г., когда Клеро (Clairaut) нашел истинное объяснение, в то время как он собирался заменить закон притяжения Ньютона другим в форме $\alpha = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\gamma}{r^3}$. Ньютон считал теорию Луны очень трудной, и говорят, что в отчаянии он сказал своему другу Галлею, что «от нее у него болит голова и она так часто лишает его сна, что он решил больше не думать о ней».

Со времен Ньютона геометрические методы сменили аналитические за исключением элементарных объяснений причин различных видов возмущений. В XVIII столетии развитие теории Луны и небесной механики вообще почти всецело было работой пяти человек: Эйлера (1707—1783, швейцарец, родился в Базеле, жил в Петербурге с 1727 до 1747 г., в Берлине с 1747 до 1766 г. и в Петербурге с 1766 до 1783 г.) Клеро (1713—1765, родился в Париже и почти всю свою жизнь провел в родном городе), Даламбера (1717—1783, тоже родился и жил в Париже), Лагранжа (1736—1813, родился в Турине, Италия, но по происхождению француз, профессор математики в военной школе в Турине с 1753 по 1766 г., преемник Эйлера в Берлине, провел там 20 лет, затем переехал в Париж и прожил во французской столице остаток своей жизни) и Лапласа (1749—1827, сын французского крестьянина из Бомона в Нормандии, профессор в военной школе и в нормальной школе в Париже, где провел большую часть своей жизни после восемнадцатилетнего возраста). Единственная часть их работы, которую мы упомянем здесь, относится к теории Луны. Изложение исследований по общей теории планет будет приведено в следующей главе.

В XVIII столетии была большая потребность в точных таблицах Луны для мореплавания в целях определения положения на море. Это вместе с фактом, что движение Луны представляет наилучшую пробу ньютоновской теории, заставило английское правительство и ряд научных обществ предложить весьма значительные премии за таблицы Луны, согласующиеся с наблюдениями в известных узких пределах. В 1746 г. Эйлер опубликовал довольно несовершенные таблицы Луны. В 1747 г. Клеро и Даламбер в один и тот же день представили в Парижскую академию мемуары по теории Луны. Каждый из них имел затруднения при объяснении движения перигея. Как упомянуто, Клеро нашел источник затруднений в 1749 г., и немного позднее он был также открыт как Эйлером, так и Даламбером. В 1752 г. Клеро за свою «*Théorie de la Lune*» получил премию от Петербургской академии. В 1754 г. Клеро и Даламбер опубликовали теории и числовые таблицы. Позднее они были исправлены и расширены. В 1753 г. Эйлер опубликовал теорию Луны, в приложении к которой был частично разработан аналитический метод вариации элементов. То би а с Ма й е р (1723—1762) из Геттингена сравнил таблицы Эйлера с наблюдениями и исправил их так успешно, что он и Эйлер получили от английского правительства премии по 3000 фунтов. В 1772 г. Эйлер опубликовал вторую теорию Луны, которая содержала много новых черт большой важности.

Лагранж сделал мало в теории Луны, кроме указания общих методов. С другой стороны, Лаплас уделил много внимания этому предмету и в 1787 г. сделал один из своих важных вкладов в небесную механику, объяснив причину векового ускорения среднего движения Луны. Он также предложил определение расстояния Солнца из параллактического неравенства. Теория Лапласа находится в третьем томе его «*Mécanique Céleste*».

В 1824—1828 гг. Дамуазо (Damoiseau, 1768—1846) довел метод Лапласа до большей степени приближения, и составленные им таблицы имели общее употребление, пока не были составлены таблицы Ганзена (Hansen) в 1857 г. В 1832 г. Плана (Plana, 1781—1869) опубликовал теорию, во многих отношениях очень сходную с теорией Лапласа. В 1830—1834 гг. неполная теория была разработана Люббоком (Lubbock, 1803—1865). Большое продвижение по новому пути было сделано Ганzenом (1795—1874) в 1838 и снова в 1862—1864 гг. Его таблицы, опубликованные в 1857 г., были широко приняты для астрономических ежегодников. В 1846 г. Де-Понтекулан (De Pontécoulant, 1795—1874) опубликовал свою «*Théorie Analytique du Système du Monde*». Четвертый том содержит его теорию Луны во всех подробностях. По существу она сходна с теорией Люббока. В 1865—1867 гг. Делоне (Delahune, 1816—1872) опубликовал новую теорию большого математического изящества, доведенную до высокой степени точности.

Наиболее замечательная новая теория, основанная на новых понятиях и развитая при помощи новых математических методов, опубликована Гиллом в 1878 г. в *American Journal of Mathematics*. Его первая основная идея заключалась в принятии вариационной орбиты за приближенное решение вместо эллипса. Выражения для координат вариационной орбиты развиты с редким математическим искусством и отличаются быстрой сходимостью. Второе приближение, дающее часовой движение перигея, опубликовано в VIII томе *Acta Mathematica*. Этот мемуар

содержит первое решение линейного дифференциального уравнения, имеющего периодические коэффициенты, и вводит в математику бесконечный детерминант. Исследования Гилла были продолжены до более высоких приближений и закончены серией статей, опубликованных Е. Броуном в *American Journal of Mathematics*, т. XIV, XV и XVII и в *Monthly Notices of the R. A. S.*, LII, LIV и LV. В настоящее время работа Броуна в числовом отношении — наиболее совершенная из существующих теорий Луны и с этой точки зрения оставляет желать немного. В 1919 г. им выпущены таблицы, которые теперь исключительно применяются для вычисления эфемериды Луны в астрономических ежегодниках. Движение лунных узлов было найдено Адамсом (1819—1892) методами, подобными тем, которые употреблены Гиллом в определении движения перигя.

Геометрические рассуждения возмущений приведены в «Началах» в «Gravitation» Эри (1801—1892) и в «Очерках» астрономии Дж. Гершеля (1792—1871). Для аналитического изучения помимо упомянутых оригинальных мемуаров лучше всего обратиться к «Mécanique Céleste» Тиссерана, т. III, и к «Lunar Theory» Броуна. Оба тома превосходны и по своему содержанию и по ясности изложения. «Lunar Theory» Броуна является особенно полной в таких вопросах как значение употребленных постоянных, что может быть неясным для начинающего изучение этого предмета.

ГЛАВА X

ВОЗМУЩЕНИЯ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

203. Вводные замечания. Взаимные возмущения в движении небесных тел были одним из тех вопросов, которому со времен Ньютона посвятили очень много внимания многие великие математики. Не будем говорить о том, что проблема очень трудна и что было изобретено много методов для ее решения. Так как не удалось получить общих решений проблемы, то явилась необходимость изучить специальные классы возмущений при помощи особых методов. Оказалось удобным разделить случаи, возникающие в солнечной системе, на три главных класса: а) теория Луны и спутников, б) взаимные возмущения планет и с) возмущения комет планетами. Метод, который будет дан в этой главе, применим к теориям планет, и в соответствующих местах будет показано, почему он неприменим к другим случаям. В последней главе даны ссылки на теорию Луны, в особенности на работы Тиссерана и Броуна. В этой главе будут даны некоторые намеки также на метод вычисления возмущений комет.

Главные трудности, возникающие в уяснении теории возмущений, происходят от большого числа переменных, которыми необходимо пользоваться, и от очень длинных преобразований, необходимых для того, чтобы придать уравнениям форму, удобную для числовых вычислений. Здесь за недостатком места невозможно полностью вывести выражения, приспособленные для вычисления, и, конечно, нежелательно выделять эту часть, потому что гораздо важнее получить точное понятие о сущности проблемы, математические особенности применяемых методов, необходимые ограничения, точные места, где введены приближения, если они введены вообще, и их характер, происхождение различных видов членов и основания, на которых покоятся знаменитые теоремы, касающиеся устойчивости солнечной системы.

Имеются два метода изучения возмущений: а) вариации координат различных тел и б) вариации элементов их орбит. Эти две концепции были объяснены в начале предыдущей главы. Аналитическое развитие их было начато Эйлером и Клеро и доведено до высокой степени совершенства Лапласом и Лагранжем. Однако имелись места, в которых были сделаны чистые предположения, и лишь в течение последней половины XIX столетия благодаря работам Коши (Cauchy), Вейерштрасса (Weierstrass) и Пуанкаре оказалось возможным при соответствующих ограничениях полностью установить законность выводов.

204. Поясняющий пример. Математическое основание для теории возмущений часто заслоняется большим числом переменных и употреблением сложных формул. Много существенных черт метода вычисления возмущений можно пояснить примерами, которые не зависят от сложности многих переменных и длинных формул. Выберем один из них, в котором физические соотношения также просты. Рассмотрим решение уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = -\mu \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \nu \cos lt, \quad (1)$$

где k^2 , μ , ν и l — положительные постоянные. Если бы μ и ν были нулями, то дифференциальное уравнение было бы таким, которое определяет простое гармоническое движение. Оно получается во многих физических задачах, например, в задаче математического маятника и в задаче о колебаниях струн. Для определенности предположим, что задача относится к колебаниям камертона. Первый член в правой части можно приписать сопротивлению среды, в которой колеблется камертон. Конечно, не утверждается, что сопротивление колебаниям камертона пропорционально третьей степени скорости. Нечетная степень взята, чтобы дифференциальное уравнение имело одинаковую форму независимо от того, происходит ли движение в положительном или отрицательном направлении, а первая степень не взята потому, что тогда дифференциальное уравнение было бы линейно и его можно было бы без всяких трудностей полностью проинтегрировать в конечном виде.

Рассмотрим левую часть уравнения (1) как определяющую невозмущенное движение камертона. Первый член в правой части представляет возмущение, зависящее от скорости камертона; второй член представляет возмущение, не зависящее от положения и скорости камертона. Первый аналогичен взаимным возмущениям планет, зависящим от их относительных положений, второй более соответствует силам, вызывающим приливы, потому что они являются внешними по отношению к Земле. Приливы определяются уравнениями, аналогичными уравнению (1).

Чтобы иметь уравнение (1) в виде уравнений, которые получаются в теории возмущений, положим:

$$x = x_1, \quad \frac{dx}{dt} = x_2. \quad (2)$$

Тогда (1) принимает вид:

$$\frac{dx_1}{dt} - x_2 = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} + k^2x_1 = -\mu x_2^3 + \nu \cos lt. \quad (3)$$

Соответствующие дифференциальные уравнения для невозмущенного движения будут иметь вид:

$$\frac{dx_1}{dt} - x_2 = 0, \quad \frac{dx_2}{dt} + k^2x_1 = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) можно легко проинтегрировать, и их общее решение имеет вид:

$$x_1 = +a \cos kt + \beta \sin kt, \quad x_2 = -ka \sin kt + k\beta \cos kt, \quad (5)$$

где a и β — произвольные постоянные интегрирования. В терминологии небесной механики a и β — элементы орбиты камертона.

Теперь рассмотрим задачу нахождения решения уравнений (3). Выражаясь физически, элементы α и β должны быть так изменены, чтобы уравнения удовлетворялись для всех значений t . Рассуждая математически, мы можем сказать, что уравнения (5) являются соотношениями между начальными зависящими переменными x_1 и x_2 и новыми зависящими переменными α и β , которые делают возможным преобразование дифференциальных уравнений (3) от одной группы переменных к другой. Это было бы правильным независимо от того, являются ли уравнения (5) решениями уравнений (4) или нет, но так как уравнения (5) являются решениями уравнений (4) и уравнения (4) являются частью уравнений (3), то после того как сделан переход, целый ряд членов выпадает. Рассматривая (5) как группу уравнений, связывающих переменные x и x_2 с α и β и выполняя непосредственные подстановки в (3), находим:

$$\left. \begin{aligned} +\cos kt \frac{d\alpha}{dt} + \sin kt \frac{d\beta}{dt} &= 0, \\ -\sin kt \frac{d\alpha}{dt} + \cos kt \frac{d\beta}{dt} &= \mu k^2 [\alpha \sin kt - \beta \cos kt]^3 + \frac{\nu}{k} \cos lt. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти уравнения линейны относительно $\frac{d\alpha}{dt}$ и $\frac{d\beta}{dt}$ и могут быть решены для этих производных, потому что детерминант их коэффициентов равен единице.

Решая, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -\mu k^2 [\alpha \sin kt - \beta \cos kt]^3 \sin kt - \frac{\nu}{k} \cos lt \sin kt, \\ \frac{d\beta}{dt} &= +\mu k^2 [\alpha \sin kt - \beta \cos kt]^3 \cos kt + \frac{\nu}{k} \cos lt \cos kt. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Задача решения уравнений (7) так же трудна, как и решения уравнений (3), потому что их правые части включают неизвестные величины α и β в таком же сложном виде, как x_1 и x_2 входят в правые части уравнений (3). Но предположим, что μ и ν очень малы, тогда, так как они входят множителями в правые части уравнений (7), зависящие переменные α и β изменяются очень медленно. Следовательно, в течение значительного времени они будут даны с достаточным приближением, если уравнения (7) проинтегрировать рассматривая их как постоянные в правых частях. Для уяснения этого с математической стороны рассмотрим простое уравнение:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mu \alpha (1 + k \cos kt). \quad (8)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\alpha = C e^{\mu(t + \sin kt)},$$

где C есть постоянная интегрирования.

Если правую часть этого уравнения разложить в ряд, то выражение для α принимает вид:

$$\alpha = C [1 + \mu (t + \sin kt) + \frac{\mu^2}{2} (t + \sin kt)^2 + \dots]. \quad (9)$$

Если μ очень мало и если t не слишком велико, то правая часть этого уравнения почти равна его первым двум членам. Если бы время t входило только в тригонометрические функции, то не надо было бы никаких ограничений для t . Но обычно такие ограничения нужны для обеспечения сходимости рядов.

Заметим, что решение (9) на самом деле является степенным рядом относительно параметра μ , коэффициенты которого зависят от t . Если угодно, решение уравнения (8) можно найти и непосредственно в виде степенного ряда относительно μ . Этот метод является общим, и его можно применить для нахождения решений уравнений (7), и нижеследующие уравнения (10) являются первыми членами этого решения. Условия применимости этого метода интегрирования даны в § 207.

То обстоятельство, что, при очень малом μ , α и β можно рассматривать как постоянные в правых частях уравнений (7) для не слишком больших значений t , может быть видно из физической иллюстрации. Рассмотрим теорию возмущений. Изменения в элементах орбиты зависят от элементов орбит взаимно возмущающих тел и от относительных положений тел на их орбитах. Интуитивно ясно, что мы сделаем лишь малую ошибку в вычислении взаимных возмущений двух планет, если введем постоянные элементы, которые немного разнятся, скажем на градус в случае угловых элементов, от действительных, которые изменяются медленно.

Если уравнения (7) проинтегрировать, считая в правых частях α и β постоянными, то найдем:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - \mu k^2 \left\{ \frac{\alpha_0}{8} (\alpha^2 + \beta^2) t + \frac{\beta}{8k} (3\alpha^2 + \beta^2) [\cos 2kt - 1] - \right. \\ &\quad - \frac{\beta}{32k} (3\alpha^2 - \beta^2) [\cos 4kt - 1] - \frac{\alpha^3}{4k} \sin 2kt + \\ &\quad + \frac{\alpha}{32k} (\alpha^2 - 3\beta^2) \sin 4kt \left. \right\} + \frac{\nu}{2k(l+k)} [\cos(l+k)t - 1] - \\ &\quad - \frac{\nu}{2k(l-k)} [\cos(l-k)t - 1], \\ \beta &= \beta_0 + \mu k^2 \left\{ -\frac{3\beta}{8} (\alpha^2 + \beta^2) t - \frac{\alpha}{8k} (\alpha^2 + 3\beta^2) [\cos 2kt - 1] - \right. \\ &\quad + \frac{\alpha}{32k} (\alpha^2 - 3\beta^2) [\cos 4kt - 1] - \\ &\quad - \frac{\beta^3}{4k} \sin kt + \frac{\beta}{32k} (3\alpha^2 - \beta^2) \sin 4kt \left. \right\} + \\ &\quad + \frac{\nu}{2k(l+k)} \sin(l+k)t + \frac{\nu}{2k(l-k)} \sin(l-k)t, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где α_0 и β_0 соответственно являются значениями α и β при $t=0$. Если эти

значения α и β подставить в (5), то значения x_1 и x_2 определяются приближенно для всех значений t , которые не слишком удалены от начального момента.

Рассмотрим уравнения (10). Правая часть каждого из них имеет член, содержащий t простым множителем, в то время как в других местах t стоит под знаком синуса и косинуса. Члены, пропорциональные t , evidentemente, указывают, что α и β бесконечно увеличиваются или уменьшаются со временем; но надо помнить, что уравнения (10) — лишь приближенные выражения для α и β , пригодные только для ограниченного времени.

Возможно, что строгие выражения содержат высшие степени t , причем суммы имеют конечные значения, так же как

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

является выражением, числовое значение которого не превышает единицы, хотя рассмотрение одного первого члена приводит к заключению, что оно делается бесконечно большим с t . С другой стороны, присутствие членов, увеличивающихся пропорционально времени, может указывать на действительное бесконечное увеличение элементов α и β . Например, в предыдущей главе было найдено, что линия узлов и апсид лунной орбиты соответственно имеют непрерывное обратное и прямое движение. Члены, изменяющиеся пропорционально t , называются *вековыми членами*.

Правые части уравнений (10) также содержат периодические члены, имеющие периоды $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{2k}$, $\frac{2\pi}{l+k}$ и $\frac{2\pi}{l-k}$. Они известны как периодические члены. Если l и k почти равны, то члены, содержащие синусы или косинусы от $(l-k)$, имеют очень длинные периоды и называются *членами долгого периода*. Иногда возникают члены, которые являются произведениями t на периодические члены. Эти смешанные члены называются членами Пуассона, потому что они были обнаружены Пуассоном при рассмотрении вариаций больших осей планетных орбит. Если (10) подставить в (5), то полученные выражения для x_1 и x_2 содержат члены Пуассона, но не вековые члены.

Физическая интерпретация уравнений (10) проста. Элементы α и β непрерывно уменьшаются благодаря вековым членам, т. е. амплитуды колебаний, указанные в (5), непрерывно уменьшаются. Это уменьшение всецело зависит от сопротивления движению, как это видно из того обстоятельства, что члены содержат коэффициент μ множителем. Имеются члены с x_1 и x_2 с периодом в 3 и 5 раз большим, чем невозмущенный период, которые также происходят от сопротивления. И периодическая возмущающая сила вводит в α и β члены, периоды которых зависят как от периода возмущающей силы, так и от натурального периода камертона.

Но заметим, что периоды членов, которые вводятся в выражения x_1 и x_2 , являются периодами возмущающей силы и натуральным периодом камертона.

205. Уравнения в задаче трех тел. Рассмотрим движение двух планет m_1 и m_2 по отношению к Солнцу S . Возьмем центр Солнца за начало, и пусть координаты m_1 будут (x_1, y_1, z_1) и координаты m_2 будут (x_2, y_2, z_2) . Пусть расстояния Солнца от m_1 и m_2 соответственно равны r_1 и r_2 , и пусть $r_{1,2}$ обозначает расстояние от m_1 до m_2 . Тогда дифференциальные уравнения движения, как выведено в § 148, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 (S + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_1}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k^2 (S + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_1}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} + k^2 (S + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_1}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k^2 (S + m_2) \frac{x_2}{r_2^3} &= m_1 \frac{\partial R_{2,1}}{\partial x_2}, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + k^2 (S + m_2) \frac{y_2}{r_2^3} &= m_1 \frac{\partial R_{2,1}}{\partial y_2}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} + k^2 (S + m_2) \frac{z_2}{r_2^3} &= m_1 \frac{\partial R_{2,1}}{\partial z_2}, \\ R_{1,2} &= k^2 \left[\frac{1}{r_{1,2}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right], \\ R_{2,1} &= k^2 \left[\frac{1}{r_{1,2}} - \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1}{r_1^3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Правые части уравнений (11) помножены на m_1 и m_2 , которые очень малы по сравнению с S ; следовательно, они очень малы по сравнению с членами слева, происходящими от притяжения Солнца, по крайней мере в течение значительного промежутка времени. Если m_1 и m_2 положить в правых частях равными нулю, то первые три уравнения и вторые три образуют две группы, не зависящие друг от друга, и задача для каждой группы из трех уравнений приводится к задаче двух тел и может быть полностью решена. Шесть уравнений (11) второго порядка удобно привести к двенадцати уравнениям первого порядка. Положим:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt},$$

тогда уравнения (11) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} - x'_1 &= 0, & \frac{dx'_1}{dt} + k^2 (S + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_1}, \\ \frac{dy_1}{dt} - y'_1 &= 0, & \frac{dy'_1}{dt} + k^2 (S + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_1}, \\ \frac{dz_1}{dt} - z'_1 &= 0, & \frac{dz'_1}{dt} + k^2 (S + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

и такие же уравнения с индексами 2.

Если бы движения m_1 и m_2 не возмущали друг друга, то уравнения (12) приняли бы вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} - x'_1 &= 0, & \frac{dx'_1}{dt} + k^2(S + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= 0, \\ \frac{dy_1}{dt} - y'_1 &= 0, & \frac{dy'_1}{dt} + k^2(S + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= 0, \\ \frac{dz_1}{dt} - z'_1 &= 0, & \frac{dz'_1}{dt} + k^2(S + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Пусть

$$\Omega = \frac{1}{2} (x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - k^2 \frac{(S + m_1)}{r_1};$$

тогда уравнения (13) принимают форму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x'_1}, & \frac{dx'_1}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x_1}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y'_1}, & \frac{dy'_1}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}, \\ \frac{dz_1}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z'_1}, & \frac{dz'_1}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial z_1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эта форма дифференциальных уравнений удобна в связи с задачей такого преобразования уравнений, при котором эллиптические элементы становятся зависимыми переменными и требуется найти выражение их через t .

203. Преобразование переменных. Чтобы избежать путаницы в анализе и иметь возможность сказать, где и как введены приближения, надо рассматривать метод вариации параметров, во-первых, как простое преобразование переменных, которое совершенно законно для всех значений времени, для которых пригодны уравнения преобразований. С этой точки зрения весь процесс математически прост и ясен, единственная трудность возникает от числа переменных и сложности соотношений между ними.

В главе V было показано, как выразить координаты в задаче двух тел через элементы и время. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ обозначают элементы орбиты m_1 и β_1, \dots, β_6 — элементы орбиты m_2 . Тогда уравнения для координат в задаче двух тел могут быть написаны так:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f(\alpha_1, \dots, \alpha_6, t), & x'_1 &= \theta(\alpha_1, \dots, \alpha_6, t), \\ y_1 &= g(\alpha_1, \dots, \alpha_6, t), & y'_1 &= \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_6, t), \\ z_1 &= h(\alpha_1, \dots, \alpha_6, t), & z'_1 &= \psi(\alpha_1, \dots, \alpha_6, t), \\ x_2 &= f(\beta_1, \dots, \beta_6, t), & x'_2 &= \theta(\beta_1, \dots, \beta_6, t), \\ y_2 &= g(\beta_1, \dots, \beta_6, t), & y'_2 &= \varphi(\beta_1, \dots, \beta_6, t), \\ z_2 &= h(\beta_1, \dots, \beta_6, t), & z'_2 &= \psi(\beta_1, \dots, \beta_6, t). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Теперь сделаем преобразование переменных в уравнениях (12). Забудем на время, что уравнения (15) являются решениями задачи двух тел и

что α_i и β_i являются элементами двух орбит, но рассмотрим уравнения (15) как уравнения, преобразующие уравнения (12) со старыми переменными $x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1, x_2, y_2, z_2, x'_2, y'_2, z'_2$ в эквивалентную систему с новыми переменными $\alpha_1, \dots, \alpha_6, \beta_1, \dots, \beta_6$. Преобразования происходят при помощи вычисления производных, встречающихся в (12), и непосредственных подстановок. Производные выражений (15) по отношению к t таковы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt}, \\ . &. , \\ \frac{dx'_1}{dt} &= \frac{\partial x'_1}{\partial t} + \sum_{l=1}^6 \frac{\partial x'_1}{\partial a_l} \frac{da_l}{dt}. \\ . &. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Прямая подстановка (16) в (12) дает:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} - x_1' + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} - y_1' + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial z_1}{\partial t} - z_1' + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial x_1'}{\partial t} + k^2(S + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_1'}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial y_1'}{\partial t} + k^2(S + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_1'}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial z_1'}{\partial t} + k^2(S + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z_1'}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и подобные уравнения с x_2, \dots, z'_2 и β_1, \dots, β_6 . Эти уравнения линейны относительно производных $\frac{da_i}{dt}$ и могут быть решены для них, выражая их через $a_1, \dots, a_6, \beta_1, \dots, \beta_6$ и t при условии, что детерминант из их коэффициентов отличен от нуля.

Но если уравнения (15) являются решением задачи невозмущенного эллиптического движения, то уравнения (17) сильно упрощаются, потому что из (13) видно, что если a_1, \dots, a_6 постоянны, то $\frac{dx_1}{dt} - x'_1 = 0$ для всех значений t . Частная производная $\frac{\partial x_1}{\partial t}$, если a_1, \dots, a_6 рассматри-

ваются как переменные, тождественно с $\frac{dx_1}{dt}$ в случае, если они рассматриваются как постоянные. Поэтому $\frac{dx_1}{dt} - x'_1 \equiv 0$ и подобным образом $\frac{dx'_1}{dt} + k^2(S + m_1)\frac{x_1}{r_1^3} \equiv 0$ и такие же уравнения для y и z . Вследствие этих соотношений уравнения (17) приводятся к виду:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= 0, & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x'_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_1}, \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= 0, & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial y'_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_1}, \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= 0, & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial z'_1}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

и подобные уравнения для β_i . Эти уравнения линейны относительно производных $\frac{da_i}{dt}$ и могут быть решены для них, если детерминант, составленный из их коэффициентов, не равен нулю. Но детерминант линейной системы (18) является детерминантом Якоби первой группы уравнений (15) по отношению к a_1, \dots, a_6 , и он не может исчезнуть, если эти функции независимы, и дает простое и единственное решение для элементов ¹⁾. Эти функции независимы и обычно дают простые и единственные значения для элементов, так как они являются выражениями для координат в проблеме двух тел. Задача определения элементов по координатам и составляющим скорости была решена в главе V.

Если $m_2 = 0$, то уравнения (18) линейны и однородны, а если детерминант не равен нулю, то они могут быть удовлетворены лишь при $\frac{da_i}{dt} = 0$ ($i = 1, \dots, 6$), т. е. элементы являются постоянными, что, конечно, не ново.

Решая уравнения (18), находим, что:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= m_2 \varphi_i(a_1, \dots, a_6; \beta_1, \dots, \beta_6; t) \\ \frac{d\beta_i}{dt} &= m_1 \phi_i(a_1, \dots, a_6; \beta_1, \dots, \beta_6; t) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где $i = 1, \dots, 6$.

¹⁾ См. «Детерминанты» Бальтцера (Baltzer), стр. 141; см. также Э. Гурса, Курс анализа, т. I, ч. 1, ГТТИ, 1934.

Вспомним, что в определении координат в задаче двух тел первый шаг — вычисление средней аномалии, включал среднее движение, определенное уравнением:

$$n_j = \frac{k \sqrt{S + m_j}}{a_j^{\frac{3}{2}}}. \quad (j = 1, 2)$$

Так как n_j зависит от масс планет, то правые части (15), и следовательно (19), содержат m_1 и m_2 неявным образом.

Чтобы оправдать с математической стороны метод интегрирования уравнений (19), применяемый астрономами, необходимо сделать несколько замечаний относительно m_1 и m_2 . Там, где они встречаются неявно в функциях φ_i и ψ_i , они рассматриваются как постоянные числа; там, где они являются множителями при $\dot{\varphi}_i$ и $\dot{\psi}_i$, они рассматриваются как параметры, по степеням которых и будет разложено решение. Такое обобщение параметров допустимо, потому что если функция содержит параметр двумя различными путями, то нет причины, почему бы она не могла быть разложена по отношению к параметру, входящему одним образом, а не другим. Если функция вместо того, чтобы быть заданной явным образом, определяется системой дифференциальных уравнений, то то же самое можно сказать относительно разложений решений по степеням параметра. Если притяжения тел зависят от чего-то кроме их масс (измеряемых их инерцией) и их расстояний, как, например, от скорости их вращений или температур, то m_1 и m_2 , поскольку они входят в φ_i и ψ_i неявно через n_1 и n_2 , где они определяются численно из их индивидуальных взаимных притяжений с Солнцем, должны отличаться от тех значений, когда они являются множителями при $\dot{\varphi}_i$ и $\dot{\psi}_i$, потому что в последних случаях они определяются из притяжения друг к другу.

Поэтому значения масс m_1 и m_2 , входящих в уравнения (15) и (19) неявно, рассматриваются как постоянные, наперед заданные числа, а нет нужды удерживать их явно; с другой стороны, m_1 и m_2 , являющиеся множителями возмущающих членов уравнений, удерживаются явно, предполагая, что они могут принять любые значения, не превышающие известных пределов.

207. Метод решения. Уравнения (11) являются общими дифференциальными уравнениями движения для задачи трех тел. Уравнения (12) также общие. Никаких приближений при преобразовании переменных с помощью уравнений (15) введено не было; поэтому уравнения (12) общие и строгие. Разница та, что если уравнения (19) проинтегрированы, то вместо координат, как в уравнениях (11), будут найдены элементы, но так как последние могут быть всегда найдены из первых, то это надо рассматривать как решение задачи.

Вместо того чтобы прерывать ход математических рассуждений выводом явных формул уравнений (19), предпочтительнее показать сначала, какими методами они решаются, при этом точно укажем те предположения или приближения, которые будут сделаны.

Если m_1 и m_2 очень малы по сравнению с S , какими они являются в солнечной системе, то орбиты — почти неизменные эллипсы и поэтому a_i и β_i изменяются очень медленно. Следовательно, если их рас-

смаатривать как постоянные в правых частях (19) и уравнения проинтегрировать, то приближенные значения α_i и β_i будут получены для значений t , не слишком удаленных от начального момента. Этот метод, примененный в поясняющем примере предыдущего параграфа, часто принимался астрономами, в особенности в пионерские дни небесной механики. Но всякая теория, которая только приближенна, даже если она удовлетворительна в числовом отношении, не соответствует идеалам науки.

Уравнения (19) принадлежат к типам, которые, как показали Коши и Пуанкаре, могут быть проинтегрированы в виде рядов, расположенных по степеням m_1 и m_2 . Коши доказал, что m_1 , m_2 и t могут быть взяты столь малыми, что ряды сходятся. Пуанкаре доказал более общую теорему ¹⁾, что если мгновенные орбиты, по которым движутся тела, в начальное время не пересекаются, то для всякого конечного ряда значений t , m_1 и m_2 могут быть взяты столь малыми, что решения сходятся для каждого значения t в этом интервале. Однако массы не могут быть выбраны произвольно малыми, а даются природой. Поэтому практическая важность добавочных теорем та, что какими бы ни были значения m_1 и m_2 , существует интервал для t , столь ограниченный, что решения уравнений (19) в виде рядов по параметрам m_1 и m_2 сходятся для каждого значения t в этом интервале. В общем, чем больше значения параметров, тем более ограничен интервал. Это, конечно, специальный случай общей теоремы, касающейся разложения решений дифференциальных уравнений типа, к которому относятся уравнения (19), в ряды по степеням параметров ²⁾.

Из последней теоремы следует, что если интервал не слишком велик, то решения уравнений (19) могут быть выражены при помощи сходящихся рядов по степеням m_1 и m_2 вида:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i^{(j, k)} m_1^j m_2^k, \\ \beta_i &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_i^{(j, k)} m_1^j m_2^k, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где верхние индексы при α_i и β_i просто указывают порядок коэффициента. $\alpha_i^{(j, k)}$ и $\beta_i^{(j, k)}$ являются функциями времени, которые требуется определить. Обычно в теории возмущений принималось без доказательств, что это разложение применимо для любого интервала времени. Как указано, можно доказать, что оно применимо для достаточно малого интервала времени; но так как метод доказательств дает лишь предельный интервал, в котором ряды наверное сходятся, а не самый длинный интервал, внутри которого они сходятся, и так как предел почти несомненно слишком мал, то он никогда не вычислялся. Поэтому надо помнить, что метод, которым сейчас будет объяснен, действителен для известного интервала времени, который в теории планет, несомненно, составляет несколько сотен лет.

¹⁾ Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, т. I, стр. 58.

²⁾ См. «Traité d'Analyse» Пикара (Picard), т. II, гл. XI и т. III. См. также Э. Гурса, Курс анализа, т. II, ч. 2. *Прим. ред.*

Подставляя (20) в (19) и разлагая относительно m_1 и m_2 , находим:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d\alpha_i^{(1,0)}}{dt} + \frac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt} m_2 + \frac{d\alpha_i^{(1,0)}}{dt} m_1 + \frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt} m_1 m_2 + \frac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt} m_2^2 + \\
 & + \frac{d\alpha_i^{(2,0)}}{dt} m_1^2 + \dots = m_2 \varphi_i(\alpha_i^{(0,0)}, \dots, \alpha_6^{(0,0)}; \beta_1^{(0,0)}, \dots, \beta_6^{(0,0)}; t) + \\
 & + m_2 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j} (\alpha_j^{(0,1)} m_2 + \alpha_j^{(1,0)} m_1) + \\
 & + m_2 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j} (\beta_j^{(0,1)} m_2 + \beta_j^{(1,0)} m_1) + \text{высшие члены с } m_1 \text{ и } m_2, \\
 & \frac{d\beta_i^{(0,0)}}{dt} + \frac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt} m_2 + \frac{d\beta_i^{(1,0)}}{dt} m_1 + \frac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt} m_1 m_2 + \frac{d\beta_i^{(0,2)}}{dt} m_2^2 + \\
 & + \frac{d\beta_i^{(2,0)}}{dt} m_1^2 + \dots = m_1 \phi_i(\alpha_1^{(0,0)}, \dots, \alpha_6^{(0,0)}; \beta_1^{(0,0)}, \dots, \beta_6^{(0,0)}; t) + \\
 & + m_1 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_j} (\alpha_j^{(0,1)} m_2 + \alpha_j^{(1,0)} m_1) + m_1 \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \phi_i}{\partial \beta_j} (\beta_j^{(0,1)} m_2 + \beta_j^{(1,0)} m_1) + \\
 & + \text{высшие члены с } m_1 \text{ и } m_2 \quad (i=1, \dots, 6).
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Надо помнить, что в частных производных α_i и β_i соответственно заменены через $\alpha_i^{(0,0)}$ и $\beta_i^{(0,0)}$. Если бы m_1 и m_2 в левой части уравнений (1) не рассматривались как постоянные числа, то φ_i , ϕ_i , $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j}$ и т. д. пришлось бы разложить в ряды по степеням m_1 и m_2 и это сильно усложнило бы работу.

В пределах сходимости коэффициенты при равных степенях m_1 и m_2 в двух частях уравнений равны. Поэтому, приравнявая их, получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d\alpha_i^{(0,0)}}{dt} = 0, \quad (i=1, \dots, 6), \\
 & \frac{d\beta_i^{(0,0)}}{dt} = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt} = \varphi_i(\alpha_1^{(1,0)}, \dots, \alpha_6^{(0,0)}; \beta_1^{(0,0)}, \dots, \beta_6^{(0,0)}; t), \\
 & \frac{d\alpha_i^{(1,0)}}{dt} = 0, \\
 & \frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt} = 0, \\
 & \frac{d\beta_i^{(1,0)}}{dt} = \phi_i(\alpha_1^{(0,0)}, \dots, \alpha_6^{(0,0)}; \beta_1^{(0,0)}, \dots, \beta_6^{(0,0)}; t),
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(1,0)} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j} \beta_j^{(1,0)}, \\
 \frac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,1)} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta_j} \beta_j^{(0,1)}, \\
 \frac{d\alpha_i^{(2,0)}}{dt} &= 0, \\
 \frac{d\dot{\alpha}_i^{(1,1)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,1)} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_j} \beta_j^{(0,1)}, \\
 \frac{d\dot{\alpha}_i^{(2,0)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(1,0)} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_j} \beta_j^{(1,0)}, \\
 \frac{d\dot{\beta}_i^{(0,2)}}{dt} &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Интегрируя уравнения (22) и подставляя полученные значения $\alpha_i^{(1,0)}$ и $\beta_i^{(0,0)}$ в уравнения (23), мы приведем последние к квадратурам и сможем проинтегрировать; интегрируя (23) и подставляя выражения для $\alpha_i^{(0,1)}$, $\alpha_i^{(1,0)}$, $\beta_i^{(0,1)}$, $\beta_i^{(1,0)}$ в (24), мы приведем последние к квадратурам и сможем проинтегрировать; этот процесс может быть продолжен бесконечно. Таким образом можно определить коэффициенты рядов (20) и найти значения α_i и β_i с любой желаемой степенью точности для тех значений времени, для которых ряды сходятся.

208. Определение постоянных интегрирования. При интегрировании уравнений (22), (23),... относительно каждого $\alpha_i^{(j,k)}$, $\beta_i^{(j,k)}$ вводятся новые постоянные интегрирования. Определим теперь эти постоянные.

Обозначим постоянную, которая вводится с $\alpha_i^{(j,k)}$, через $-a_i^{(j,k)}$, и которая вводится с $\beta_i^{(j,k)}$ через $-b_i^{(j,k)}$. Так как первая группа дифференциальных уравнений имеет множителем в правых частях m_2 , в то время как вторая группа имеет множителем m_1 , то следует, что:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^{(j,0)} &= a_i^{(j,0)}, \\
 \beta_i^{(0,k)} &= b_i^{(0,k)},
 \end{aligned}$$

где $j=0, \dots, \infty$, $k=0, \dots, \infty$.

Так как $\alpha_i^{(j,k)}$ и $\beta_i^{(j,k)}$ определяются квадратурами, то все постоянные интегрирования просто прибавляются к функциям t , т. е. $\alpha_i^{(j,k)}$ и $\beta_i^{(j,k)}$ имеют форму:

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^{(j,k)} &= f_i^{(j,k)}(t) - a_i^{(j,k)}, \\
 \beta_i^{(j,k)} &= g_i^{(j,k)}(t) - b_i^{(j,k)}.
 \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (20) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{j=0}^{\infty} a_i^{(j,0)} m_1^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (f_i^{(j,k)} - a_i^{(j,k)}) m_1^j m_2^k, \\ \beta_i &= \sum_{k=0}^{\infty} b_i^{(0,k)} m_2^k + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (g_i^{(j,k)} - b_i^{(j,k)}) m_1^j m_2^k. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Пусть значения α_i и β_i при $t=t_0$ соответственно равны $\alpha_i^{(0)}$ и $\beta_i^{(0)}$. Тогда при $t=t_0$ уравнения (25) принимают вид:

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(0)} &= \sum_{j=0}^{\infty} a_i^{(j,0)} m_1^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (f_i^{(j,k)} - a_i^{(j,k)})_0 m_1^j m_2^k, \\ \beta_i^{(0)} &= \sum_{k=0}^{\infty} b_i^{(0,k)} m_2^k + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (g_i^{(j,k)} - b_i^{(j,k)})_0 m_1^j m_2^k. \end{aligned}$$

Так как ниже известных границ эти уравнения должны быть действительны для всех значений m_1 и m_2 , то коэффициенты при соответствующих степенях m_1 и m_2 в правых и левых частях равны, откуда:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^{(0,0)} &= \alpha_i^{(0)}, \quad \alpha_i^{(j,0)} = 0, \quad f_i^{(j,k)}(t_0) - a_i^{(j,k)} = 0, \\ \beta_i^{(0,0)} &= \beta_i^{(0)}, \quad \beta_i^{(0,k)} = 0, \quad g_i^{(j,k)}(t_0) - b_i^{(j,k)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где $j=1, \dots, \infty$; $k=1, \dots, \infty$.

Так как все члены правых частей уравнений (25) кроме первого исчезают при $t=t_0$, то следует, что $\alpha_i^{(0,0)}$ и $\beta_i^{(0,0)}$ являются оскулирующими элементами (§ 172) орбит m_1 и m_2 во время $t=t_0$ и что другие коэффициенты уравнений (20) являются определенными интегралами дифференциальных уравнений, взятых между пределами $t=t_0$ и $t=t$.

209. Члены первого порядка. Члены первого порядка по отношению к массам определяются уравнениями (23). Так как члены нулевого порядка являются оскулирующими элементами в момент t_0 , то дифференциальные уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt} &= \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t), \\ \frac{d\beta_i^{(0,1)}}{dt} &= \psi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Правые части этих уравнений пропорциональны скоростям, с которыми некоторые элементы орбит двух планет стали бы изменяться в любое время t , если бы две планеты двигались в этот момент строго по первоначальным эллипсам. Поэтому интегралы (27) являются суммами мгновенных действий, или, другими словами, они — суммы изменений, которые имели бы место, если бы силы и их мгновенные результаты были всегда

точно равны таковым в невозмущенных орбитах. Конечно, возмущения изменяют эти условия и производят действия второго, третьего и более высоких порядков. Они входят в коэффициенты высших степеней m_1 и m_2 в уравнениях (20).

Величины $\alpha_i^{(0,1)}$ и $\beta_i^{(1,0)}$ обычно называются возмущениями первого порядка по отношению к массам. Причина ясна, потому что они являются коэффициентами при первой степени масс в рядах (20). В теориях планет нет необходимости переходить к возмущениям высших порядков, за исключением случаев больших планет, когда они близки друг к другу, и при этом сравнительно немногие члены достаточно велики, чтобы быть ощутимыми. В настоящем состоянии теории планет нет необходимости включать члены третьего порядка, кроме как во взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна.

Вместо двух планет и Солнца имеется восемь планет и Солнце, так что действительная теория не совсем так проста, как изложенная. Однако, как будет показано, большая сложность бывает главным образом в возмущениях высших порядков. Если бы имелась третья планета m_3 , элементы орбиты которой были бы $\gamma_1, \dots, \gamma_6$, то уравнения (23) приняли бы вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(1,0,0)}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\alpha_i^{(0,1,0)}}{dt} &= \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}, \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t), \\ \frac{d\alpha_i^{(0,0,1)}}{dt} &= \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t), \\ \frac{d\beta_i^{(1,0,0)}}{dt} &= \psi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t), \\ \frac{d\beta_i^{(1,1,0)}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\beta_i^{(0,0,1)}}{dt} &= \phi_i(\beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t), \\ \frac{d\gamma_i^{(1,0,0)}}{dt} &= \chi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t), \\ \frac{d\gamma_i^{(0,1,0)}}{dt} &= \chi_i(\beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t); \\ \frac{d\gamma_i^{(0,0,1)}}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Если бы имелось больше планет, то прибавилось бы больше уравнений того же типа. Рассмотрим возмущения первого порядка элементов орбиты m_1 ; они состоят из двух отдельных частей, данных вторым и третьим уравнениями (28), одна часть происходит от притяжения m_2 , а другая — от притяжения m_3 . Поэтому утверждение астрономов о том, что возмущающие действия разных планет можно рассматривать отдельно, правильно для возмущений первого порядка по отношению к массам.

210. Члены второго порядка. Было показано, что $\alpha_i^{(1,0)} = \alpha_i^{(2,0)} = \beta_i^{(0,1)} = \beta_i^{(0,2)} = 0$; поэтому из уравнений (24) следует, что члены второго порядка по отношению к массам определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \beta_j} \beta_j^{(1,0)}, \\ \frac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,1)}, \\ \frac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \psi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,1)}, \\ \frac{d\beta_i^{(2,0)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \psi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \beta_j} \beta_j^{(1,0)}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

К возмущениям первого порядка относятся такие, которые получились бы, если бы возмущающие силы в каждый момент были такими же, как если бы тела двигались по первоначальным эллипсам. Если тела m_1 и m_2 движутся по кривым, отличающимся от начальных эллипсов, то скорости, с которыми изменяются в каждый момент элементы, отличаются от значений, данных уравнениями (27). Возмущения элементов орбиты m_1 , происходящие от того, что m_1 удаляется от своего первоначального эллипса вследствие возмущений первого порядка, даются уравнениями типа первого (29), потому что если $\beta_j^{(1,0)} = 0$, то следует, что $\alpha_i^{(1,1)}$ также равно нулю. Возмущения элементов орбиты m_1 , происходящие от того, что m_1 удаляется от своего первоначального эллипса вследствие возмущений первого порядка, даются уравнениями типа второго (29), так как если $\alpha_j^{(0,1)} = 0$, то следует, что $\alpha_i^{(0,2)}$ также равно нулю. Подобным путем в элементах орбиты m_2 возникают члены $\beta_i^{(1,1)}$ и $\beta_i^{(2,0)}$. Таким образом возмущения второго порядка исправляют ошибки в членах первого порядка, возмущения третьего порядка исправляют ошибки в членах второго порядка и т. д.

Как говорилось, решения, выраженные рядами по степеням масс, сходятся, если интервал времени взят не слишком большим. Вообще, чем меньше массы планет, тем длиннее время, в течение которого сходятся ряды.

В теории Луны Солнце играет роль возмущающей планеты. Так как его масса слишком велика по сравнению с центральным телом, Землей, то ряды по степеням масс, как дано выше, стали бы сходиться лишь для очень короткого времени, вероятно лишь для нескольких месяцев вместо лет. Такая теория Луны была бы совершенно неудовлетворительной. Поэтому возмущения в теории Луны разлагаются по степеням отношения расстояний Луны и Солнца от Земли, и особые приемы употребляются для избежания вековых членов во всех элементах кроме долготы узла и перигея.

Если имеется третья планета, то возмущения второго порядка значительно сложнее. Пусть m_1 , m_2 и m_3 будут планеты, и рассмотрим возмущения второго порядка элементов орбиты планеты m_1 . Из чисто физических соображений видно, что возникнут следующие виды членов: а) члены, возникающие от возмущающего действия m_2 и m_3 , соответственно происходящие от возмущений первого порядка элементов m_2 и m_3 планетой m_1 ; б) члены, возникающие от возмущающего действия планет m_2 и m_3 вследствие возмущений первого порядка элементов орбиты планеты m_1 планетами m_2 и m_3 ; в) члены, возникающие от возмущающего действия m_2 вследствие возмущений первого порядка элементов орбиты планеты m_1 планетой m_3 ; г) члены, возникающие от возмущающего действия m_3 вследствие возмущений первого порядка элементов орбиты планеты m_1 планетой m_2 , и д) члены, возникающие от возмущающего действия планеты m_3 вследствие возмущений первого порядка элементов планеты m_3 планетой m_2 .

Предполагая, что имеется три планеты, из уравнений (19) и (20) находим члены второго порядка по отношению к массам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_i^{(1,1,0)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \beta_j} \beta_j^{(1,0,0)}, \\ \frac{d\alpha_i^{(1,0,1)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t)}{\partial \gamma_j} \gamma_j^{(1,0,0)}, \\ \frac{d\alpha_i^{(0,2,0)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,1,0)}, \\ \frac{d\alpha_i^{(0,0,2)}}{dt} &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t)}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,0,1)}, \\ \frac{d\alpha_i^{(0,1,1)}}{dt} &= \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,0,1)} + \\ &+ \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \beta_1^{(0)}, \dots, \beta_6^{(0)}; t)}{\partial \beta_j} \beta_j^{(0,0,1)} + \\ &+ \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t)}{\partial \alpha_j} \alpha_j^{(0,1,0)} + \\ &+ \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \varphi_i(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_6^{(0)}; \gamma_1^{(0)}, \dots, \gamma_6^{(0)}; t)}{\partial \gamma_j} \gamma_j^{(0,1,0)} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и подобные уравнения для $\frac{d\beta_i}{dt}$ и $\frac{d\gamma_i}{dt}$.

Первые два уравнения дают возмущения класса (а), так как $\varphi_i(\alpha, \beta)$ и $\varphi_i(\alpha, \gamma)$ являются частями возмущающей функции, соответственно даваемой m_2 и m_3 , в то время как $\beta_j^{(1,0,0)}$ и $\gamma_j^{(1,0,0)}$ являются возмущениями первого порядка элементов орбит m_2 и m_3 планеты m_1 . Подобным образом третье и четвертое уравнения дают возмущения класса (b); первый член пятого уравнения дает возмущения класса (с); второй член — класса (d); третий член — класса (е) и четвертый член — класса (f). Отсюда следует, что члены второго порядка не могут быть вычислены отдельно для каждой из возмущающих планет.

Типы членов, которые возникают в возмущениях третьего порядка, можно подобным образом предсказать из физических рассуждений, и эти предсказания могут быть подтверждены при помощи подробного рассмотрения уравнений.

ЗАДАЧИ

1. В уравнениях (3) перед началом интегрирования перенесите член $\nu \cos it$ в левую часть и введите его в уравнения (4). Прodelайте весь процесс интегрирования с этим изменением.

2. Если уравнения (7) проинтегрированы как ряды по степеням μ и ν , то какого типа функции от t возникнут в членах второго порядка?

3. Напишите уравнения, определяющие члены нулевого, первого и второго порядков в массах, если уравнения (11) проинтегрированы как ряды по m_1 и m_2 . Покажите, что члены нулевого порядка есть координаты, которые имели бы m_1 и m_2 , если бы они были частицами, двигающимися вокруг Солнца по эллипсам, определенным их начальными условиями. Покажите, что уравнения, определяющие члены первого и высших порядков, линейны и неоднородны, вместо того чтобы быть приведенными к квадратурам, как это бывает при употреблении метода вариации параметров.

4. Предположим, что имеется четыре планеты m_1, m_2, m_3, m_4 . Напишите все члены второго порядка по отношению к массам согласно (30) и объясните каждый член.

5. Предположим, что имеется две планеты m_1 и m_2 . Напишите все члены третьего порядка по отношению к массам и объясните каждый из них.

6. Предположим, что $m_1 = m_2 = m_3$ и что планеты расположены в порядке m_1, m_2, m_3 по отношению к их расстоянию от Солнца. Покажите, что из возмущений, определенных уравнениями (30), наиболее важными являются данные первым и третьим уравнениями и вторым членом пятого уравнения, следующими по важности являются возмущения, данные первым, третьим и четвертым членами пятого уравнения, и что наименее важные даются вторым и четвертым уравнениями.

211. Выбор элементов. Чтобы показать, каким образом входят различные виды членов в возмущения первого порядка, необходимо представить уравнения (18) в явной форме. Это было отложено из-за длинных преобразований, пока не была рассмотрена математическая сторона вопроса.

Если рассматриваются члены одного первого порядка, то функции $\varphi_i(\alpha, \beta)$ можно рассматривать независимо от $\psi(\alpha, \beta)$. Вместо обычных элементов можно ввести любые независимые функции элементов. Действительно, один из принятых уже элементов $\pi = \omega + \Omega$ является суммой двух геометрически более простых элементов. Форма $\varphi_i(\alpha, \beta)$ зависит от выбранных элементов; с некоторыми элементами одна довольно проста, а с другими очень сложна. В первом следующем примере элементы будут взяты так, чтобы эти функции были возможно простыми.

В следующих рассуждениях возникнет много сложных выражений. Так как выкладки будут симметричны относительно x, y, z , то для сокращения письма пусть знак S , стоящий перед функцией от x , показывает, что должны быть прибавлены такие же функции от y и z . Так, например:

$$S(x_1 x'_2 - x_2 x'_1) \equiv (x_1 x'_2 - x_2 x'_1) + (y_1 y'_2 - y_2 y'_1) + (z_1 z'_2 - z_2 z'_1).$$

Начиная с определения скобок и отбрасывая индексы у x, \dots, z , которые в дальнейшем не нужны, находим, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [a_i, a_j]}{\partial t} &= S \left\{ \frac{\partial^2 x}{\partial t_i \partial t} \frac{\partial x'}{\partial a_j} + \frac{\partial x}{\partial a_i} \frac{\partial^2 x'}{\partial a_j \partial t} - \frac{\partial^2 x'}{\partial a_i \partial t} \frac{\partial x}{\partial a_j} - \frac{\partial x'}{\partial a_i} \frac{\partial^2 x}{\partial a_j \partial t} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a_i} S \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial a_j} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a_j} \right\} + S \left\{ - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial a_i \partial a_j} + \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial^2 x}{\partial a_i \partial a_j} \right\} + \\ &\quad + S \left\{ \frac{\partial x}{\partial a_i} \frac{\partial^2 x'}{\partial a_j \partial t} - \frac{\partial x'}{\partial a_i} \frac{\partial^2 x}{\partial a_j \partial t} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a_i} S \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial a_j} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a_j} \right\} - \frac{\partial}{\partial a_j} S \left\{ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial a_i} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a_i} \right\}. \end{aligned}$$

Частные производные координат по времени таковы же в возмущенном движении, как полные производные в невозмущенном движении. Поэтому это уравнение как следствие уравнений (14) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [a_i, a_j]}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial a_i} S \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_j} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial a_j} \right\} - \frac{\partial}{\partial a_j} S \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial a_i} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a_j} \right) - \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial a_i} \right) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a_i \partial a_j} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a_j \partial a_i} = 0, \end{aligned}$$

что доказывает теорему, что скобки не содержат t явным образом. Это было трудно предвидеть, так как каждая величина, появляющаяся в скобках, является явной функцией t .

Так как скобки не содержат явно время, то они могут быть вычислены для любой эпохи и в частности для $t=t_0$. Уравнения становятся очень простыми, если координаты во время $t=t_0$ взять за элементы a_1, \dots, a_6 . Это допустимо, так как обычные элементы определяются этими величинами, и обратно. Не следует предполагать, что они постоянны; они такие величины, что если по ним вычислены элементы и затем вычислены координаты для любого времени, употребляя эти элементы, то будут получены правильные результаты. Так как в возмущенном движении элементы меняются вместе со временем, то значения координат в $t=t_0$ также меняются. Иначе рассуждая, если употреблены оскулирующие элементы эпохи t и если вычислены координаты во время $t=t_0$, то в случае возмущенного движения найдем, что координаты в $t=t_0$ изменятся и что это есть требуемые значения координат.

Обозначим координаты во время $t=t_0$ через x_0, \dots, z'_0 , тогда:

$$[x_0, y_0] = S \left\{ \frac{\partial x_0}{\partial x_0} \frac{\partial x'_0}{\partial y_0} - \frac{\partial x'_0}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial y_0} \right\},$$

что равняется нулю, потому что x'_0 не зависит от y_0 и x_0 . Подобным образом:

$$\left. \begin{aligned} [y_0, z_0] = [z_0, x_0] = [x'_0, y'_0] = [y'_0, z'_0] = [z'_0, x'_0] = [x_0, y_0] = 0, \\ [x_0, y'_0] = [x_0, z'_0] = [y_0, x'_0] = [y_0, z'_0] = [z_0, x'_0] = [z_0, y'_0] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

но

$$[x_0, x'_0] = [y_0, y'_0] = [z_0, z'_0] = 1, \quad (37)$$

поэтому уравнения (33) в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x'_0}, & \frac{dx'_0}{dt} &= -m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x_0}, \\ \frac{dy_0}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y'_0}, & \frac{dy'_0}{dt} &= -m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y_0}, \\ \frac{dz_0}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z'_0}, & \frac{dz'_0}{dt} &= -m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Всякая система дифференциальных уравнений формы (38) называется *канонической системой* и обладает свойствами, делающими ее особенно ценной в теоретических исследованиях. Существует теорема, что всякая динамическая задача, в которой силы могут быть представлены как частные производные потенциальной функции, может быть выражена в этой форме; и если возможно придать задаче каноническую форму, то это возможно сделать в бесконечно многих системах зависящих переменных¹⁾.

Если уравнения (38) будут решены, то они дадут значения координат в момент t_0 , которые надо использовать для получения истинных координат во время t , при предположении, что планета движется по невозмущенному эллипсу в течение $t - t_0$. Если переменные будут эллиптическими элементами, то решения уравнений дадут элементы, которые будут использованы для вычисления координат во время t , когда предполагается, что они постоянны в течение интервала $t - t_0$. Таким образом, когда элементы найдены, то остальное вычисление относится к невозмущенному движению.

214. Переход к обыкновенным элементам. Элементы, употребляемые в астрономии, не являются координатами в эпоху $t = t_0$, но суть элементы Ω , i , a , e , π и T (или $\varepsilon = \pi - nT$), которые выражены в § 86, 87 и 88 через начальные условия. Поэтому необходимо преобразовать уравнения (38) в такие, которые включают лишь элементы, которыми действительно пользуются астрономы.

Пусть s представляет какой-нибудь из элементов Ω , i , a , e , π , ε . Его можно выразить символически через начальные условия так:

$$s = f(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0). \quad (39)$$

1) См. добавление I в конце книги. *Прим. ред.*

и затем преобразовывая к более употребительным. Дальнейшее основано на изложении Тиссерана метода Лагранжа ¹⁾.

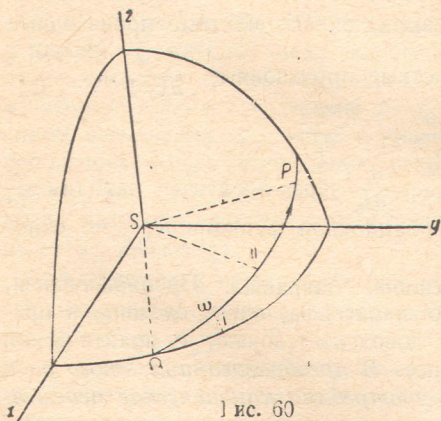
Пусть плоскость xy есть плоскость эклиптики (рис. 60), $\odot P$ — проекция орбиты на небесную сферу, Π — проекция точки перигелия и P — проекция положения планеты во время t . Вместо π и ε введем новые элементы ω и σ , определенные уравнениями:

$$\omega = \pi - \odot, \quad \sigma = -nT. \quad (42)$$

Следующие уравнения или даны в § 98 или получаются из рис. 60 при помощи основных формул тригонометрии:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{k \sqrt{S+m_1}}{a^{\frac{3}{2}}}, & \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ E - e \sin E &= nt + \sigma, & \cos v &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \\ r &= a(1 - e \cos E), & \sin v &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \\ x &= r \{ \cos(v + \omega) \cos \odot - \sin(v + \omega) \sin \odot \cos i \}, \\ y &= r \{ \cos(v + \omega) \sin \odot + \sin(v + \omega) \cos \odot \cos i \}, \\ z &= r \sin(v + \omega) \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Из этих уравнений и их производных по времени можно вычислить частные производные координат по элементам. Элементы выбраны таким образом, что они делятся на две группы, имеющие разные свойства; \odot , i и ω определяют положение плоскости движения и ориентировку орбиты в плоскости, а a , e и σ определяют размеры и форму орбиты и положение планеты в ее орбите. Поэтому координаты в орбите могут быть выражены через элементы первой и второй групп, и координаты в пространстве могут быть найдены из них при помощи одной первой группы.



Возьмем новую систему осей с началом в Солнце, направим положительный конец оси ξ к точке перигелия, ось η — на 90° вперед в плоскости орбиты и ось ζ — перпендикулярно к плоскости орбиты. Обозначим направляющие косинусы между осью x и осями ξ , η и ζ через α , α' , α'' ; между осью y и осями ξ , η и ζ через β , β' , β'' ; между осью z и осями ξ , η и ζ через γ , γ' , γ'' .

¹⁾ См. добавление I в конце книги. Прим. ред.

и ξ — через β, β', β'' и между осью z и осями ξ, η и ζ — через $\gamma, \gamma', \gamma''$. Тогда из рис. 60 следует, что:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \cos \omega \cos \varnothing - \sin \omega \sin \varnothing \cos i, \\ \beta &= \cos \omega \sin \varnothing + \sin \omega \cos \varnothing \cos i, \\ \gamma &= \sin \omega \sin i, \\ \alpha' &= -\sin \omega \cos \varnothing - \cos \omega \sin \varnothing \cos i, \\ \beta' &= -\sin \omega \sin \varnothing + \cos \omega \cos \varnothing \cos i, \\ \gamma' &= \cos \omega \sin i, \\ \alpha'' &= \sin \varnothing \sin i, \\ \beta'' &= -\cos \varnothing \sin i, \\ \gamma'' &= \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Между этими девятью направляющими косинусами существуют, как это легко можно показать, соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1, & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 &= 1, & \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0, \\ \alpha &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'', & \alpha' &= \beta''\gamma - \gamma'\beta, & \alpha'' &= \beta\gamma' - \gamma\beta', \\ \beta &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'', & \beta' &= \gamma''\alpha - \alpha'\gamma, & \beta'' &= \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \\ \gamma &= \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'', & \gamma' &= \alpha''\beta - \beta''\alpha, & \gamma'' &= \alpha\beta' - \beta\alpha'. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Из (43) и (44) и определения новой системы осей следует, что:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos v = a (\cos E - e), \\ \eta &= a \sqrt{1 - e^2} \sin E, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{n}{1 - e \cos E}, \\ \xi' &= \frac{-na \sin E}{1 - e \cos E} = \frac{-k \sqrt{S + m_1} \sin E}{V a (1 - e \cos E)}, \\ \eta' &= \frac{na \sqrt{1 - e^2} \cos E}{1 - e \cos E} = \frac{k \sqrt{S + m_1} \sqrt{1 - e^2} \cos E}{V a (1 - e \cos E)}, \\ x &= \alpha \xi + \alpha' \eta, & y &= \beta \xi + \beta' \eta, & z &= \gamma \xi + \gamma' \eta, \\ x' &= \alpha' \xi + \alpha'' \eta, & y' &= \beta' \xi + \beta'' \eta, & z' &= \gamma' \xi + \gamma'' \eta, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где штрихи при x, y, z, ξ, η и ζ обозначают первые производные по t .

Частные производные от α, \dots, γ'' по элементам могут быть вычислены раз навсегда; они находятся из (44):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} &= \alpha', & \frac{\partial \alpha'}{\partial \omega} &= -\alpha, & \frac{\partial \alpha''}{\partial \omega} &= 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \omega} &= \beta', & \frac{\partial \beta'}{\partial \omega} &= -\beta, & \frac{\partial \beta''}{\partial \omega} &= 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} &= \gamma', & \frac{\partial \gamma'}{\partial \omega} &= -\gamma, & \frac{\partial \gamma''}{\partial \omega} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \delta} &= -\beta, & \frac{\partial \alpha'}{\partial \delta} &= -\beta', & \frac{\partial \alpha''}{\partial \delta} &= -\beta'', \\ \frac{\partial \beta}{\partial \delta} &= \alpha, & \frac{\partial \beta'}{\partial \delta} &= \alpha', & \frac{\partial \beta''}{\partial \delta} &= \alpha'', \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \delta} &= 0, & \frac{\partial \gamma'}{\partial \delta} &= 0, & \frac{\partial \gamma''}{\partial \delta} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial i} &= \alpha'' \sin \omega, & \frac{\partial \alpha'}{\partial i} &= \alpha'' \cos \omega, & \frac{\partial \alpha''}{\partial i} &= +\sin \delta \cos i, \\ \frac{\partial \beta}{\partial i} &= \beta'' \sin \omega, & \frac{\partial \beta'}{\partial i} &= \beta'' \cos \omega, & \frac{\partial \beta''}{\partial i} &= -\cos \delta \cos i, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial i} &= \gamma'' \sin \omega, & \frac{\partial \gamma'}{\partial i} &= \gamma'' \cos \omega, & \frac{\partial \gamma''}{\partial i} &= -\sin i, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Нужно вычислить столько скобок, сколько имеется сочетаний из шести элементов, взятых по два, т. е. $\frac{6!}{2!4!} = 15$. Три из них содержат элементы лишь первой группы; девять — один элемент первой группы и один второй и три содержат лишь элементы второй группы. Пусть K и L представляют любые два элемента первой группы δ, i, ω ; P и Q — любые элементы второй группы α, e, σ . Тогда скобки Лагранжа, которые надо вычислить, таковы:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } [K, L] &= S \left\{ \frac{\partial x}{\partial K} \frac{\partial x'}{\partial L} - \frac{\partial x'}{\partial K} \frac{\partial x}{\partial L} \right\} \text{ (3 уравнения),} \\ \text{b) } [K, P] &= S \left\{ \frac{\partial x}{\partial K} \frac{\partial x'}{\partial P} - \frac{\partial x'}{\partial K} \frac{\partial x}{\partial P} \right\} \text{ (9 уравнений),} \\ \text{c) } [P, Q] &= S \left\{ \frac{\partial x}{\partial P} \frac{\partial x'}{\partial Q} - \frac{\partial x'}{\partial P} \frac{\partial x}{\partial Q} \right\} \text{ (3 уравнения).} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Из (46) находим, что:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial K} &= \xi \frac{\partial \alpha}{\partial K} + \eta \frac{\partial \alpha'}{\partial K}, & \frac{\partial x'}{\partial K} &= \xi \frac{\partial \alpha}{\partial K} + \eta \frac{\partial \alpha'}{\partial K}, \\ \frac{\partial x}{\partial P} &= \alpha \frac{\partial \xi}{\partial P} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial P}, & \frac{\partial x'}{\partial P} &= \alpha \frac{\partial \xi}{\partial P} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial P} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

и такие же уравнения с y и z .

216. Вычисление $[\omega, \Omega], [\Omega, i], [i, \omega]$. Пусть S указывает, что надо взять сумму функций, симметричных относительно α, β и γ . Тогда первое уравнение (50) вследствие (51) принимает вид:

$$[K, L] = (\xi\eta' - \eta\xi') S \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial K} \frac{\partial \alpha'}{\partial L} - \frac{\partial \alpha'}{\partial K} \frac{\partial \alpha}{\partial L} \right\}.$$

Но закон площадей (§ 89) дает:

$$\xi\eta' - \eta\xi' = \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} = K \sqrt{(S + m_1) a (1 - e^2)} = na^2 \sqrt{1 - e^2},$$

поэтому

$$[K, L] = na^2 \sqrt{1 - e^2} S \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial K} \frac{\partial \alpha'}{\partial L} - \frac{\partial \alpha'}{\partial K} \frac{\partial \alpha}{\partial L} \right\}. \quad (52)$$

Вычисляя правую часть этого уравнения при помощи (47), (48) и (49) и приводя при помощи (45), находим, что скобки, содержащие элементы одной первой группы, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} [\omega, \Omega] &= na^2 \sqrt{1 - e^2} (-\alpha\beta - \alpha'\beta' + \alpha\beta' + \alpha'\beta) = 0, \\ [\Omega, i] &= na^2 \sqrt{1 - e^2} \{ (\alpha\beta'' - \beta\alpha'') \cos \omega + (\beta\alpha' - \alpha'\beta'') \sin \omega \} = \\ &= na^2 \sqrt{1 - e^2} (-\gamma' \cos \omega - \gamma \sin \omega) = -na^2 \sqrt{1 - e^2} \sin i, \\ [i, \omega] &= -na^2 \sqrt{1 - e^2} \{ (\alpha'a'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') \cos \omega + \\ &\quad + (\alpha'a + \beta''\beta + \gamma''\gamma) \sin \omega \} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

217. Вычисление $[K, P]$. Вторые уравнения (50) вследствие (51) принимают вид:

$$\begin{aligned} [K, P] &= S \left\{ \left[\xi \frac{\partial \alpha}{\partial K} + \eta \frac{\partial \alpha'}{\partial K} \right] \left[\alpha \frac{\partial \xi'}{\partial P} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial P} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\xi' \frac{\partial \alpha}{\partial K} + \eta' \frac{\partial \alpha'}{\partial K} \right] \left[\alpha \frac{\partial \xi}{\partial P} + \alpha' \frac{\partial \eta'}{\partial P} \right] \right\} = \\ &= + \left[\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial K} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial K} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial K} \right] \left[\xi \frac{\partial \xi'}{\partial P} - \xi' \frac{\partial \xi}{\partial P} \right] + \\ &\quad + \left[\alpha' \frac{\partial \alpha'}{\partial K} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial K} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial K} \right] \left[\eta \frac{\partial \eta'}{\partial P} - \eta' \frac{\partial \eta}{\partial P} \right] + \\ &\quad + \left[\alpha \frac{\partial \alpha'}{\partial K} + \beta \frac{\partial \beta'}{\partial K} + \gamma \frac{\partial \gamma'}{\partial K} \right] \left[\eta \frac{\partial \xi'}{\partial P} - \eta' \frac{\partial \xi}{\partial P} \right] + \\ &\quad + \left[\alpha' \frac{\partial \alpha}{\partial K} + \beta' \frac{\partial \beta}{\partial K} + \gamma' \frac{\partial \gamma}{\partial K} \right] \left[\xi \frac{\partial \eta'}{\partial P} - \xi' \frac{\partial \eta}{\partial P} \right]. \end{aligned}$$

Из уравнений (45), (47), (48) и (49) следует, что:

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial a}{\partial K} + \beta \frac{\partial \beta}{\partial K} + \gamma \frac{\partial \gamma}{\partial K} &= 0, \\ \alpha' \frac{\partial a'}{\partial K} + \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial K} + \gamma' \frac{\partial \gamma'}{\partial K} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial a'}{\partial K} + \beta \frac{\partial \beta'}{\partial K} + \gamma \frac{\partial \gamma'}{\partial K} &= -[\alpha' \frac{\partial a}{\partial K} + \beta' \frac{\partial \beta}{\partial K} + \gamma' \frac{\partial \gamma}{\partial K}];\end{aligned}$$

поэтому:

$$\begin{aligned}[K, P] &= [\alpha' \frac{\partial a}{\partial K} + \beta' \frac{\partial \beta}{\partial K} + \gamma' \frac{\partial \gamma}{\partial K}] \cdot [\xi \frac{\partial \eta'}{\partial P} + \eta' \frac{\partial \xi}{\partial P} - \xi' \frac{\partial \eta}{\partial P} - \eta \frac{\partial \xi'}{\partial P}] = \\ &= [\alpha' \frac{\partial a}{\partial K} + \beta' \frac{\partial \beta}{\partial K} + \gamma' \frac{\partial \gamma}{\partial K}] \frac{\partial (\xi \eta' - \eta \xi')}{\partial P} = \\ &= k \sqrt{S + m_1} [\alpha' \frac{\partial a}{\partial K} + \beta' \frac{\partial \beta}{\partial K} + \gamma' \frac{\partial \gamma}{\partial K}] \frac{\partial V_P}{\partial P}.\end{aligned} \quad (54)$$

Пусть P по очереди равно a , e , σ . Тогда находим, что:

$$\left. \begin{aligned}k \sqrt{S + m_1} \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial a} &= \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2}, \\ k \sqrt{S + m_1} \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial e} &= -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}, \\ k \sqrt{S + m_1} \frac{\partial \sqrt{a(1-e^2)}}{\partial \sigma} &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Пусть K в уравнениях (54) по очереди равно ω , Ω , i и используем (55) тогда находим, что:

$$\left. \begin{aligned}[\omega, a] &= \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2}, & [\omega, e] &= \frac{-na^2 e}{\sqrt{1-e^2}}, & [\omega, \sigma] &= 0, \\ [\Omega, a] &= \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \cos i, & [i, a] &= 0, & [i, e] &= 0, \\ [\Omega, e] &= \frac{-na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i, & [\Omega, \sigma] &= 0, & [i, \sigma] &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (56)$$

218. Вычисление $[a, e]$, $[e, \sigma]$, $[\sigma, a]$. Вследствие уравнений (51) третье уравнение (50) принимает вид:

$$\begin{aligned}[P, Q] &= S \{ [\alpha \frac{\partial \xi}{\partial P} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial P}] [\alpha \frac{\partial \xi'}{\partial Q} + \alpha' \frac{\partial \eta'}{\partial Q}] - [\alpha \frac{\partial \xi'}{\partial P} + \alpha' \frac{\partial \eta'}{\partial P}] [\alpha \frac{\partial \xi}{\partial Q} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial Q}] \} = \\ &= + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) [\frac{\partial \xi}{\partial P} \frac{\partial \xi'}{\partial Q} - \frac{\partial \xi}{\partial Q} \frac{\partial \xi'}{\partial P}] + (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) [\frac{\partial \eta}{\partial P} \frac{\partial \eta'}{\partial Q} - \frac{\partial \eta}{\partial Q} \frac{\partial \eta'}{\partial P}] + \\ &+ (\alpha \alpha' + \beta \beta' + \gamma \gamma') [\frac{\partial \xi}{\partial P} \frac{\partial \eta'}{\partial Q} - \frac{\partial \xi}{\partial Q} \frac{\partial \eta'}{\partial P} + \frac{\partial \xi}{\partial Q} \frac{\partial \eta}{\partial P} - \frac{\partial \xi'}{\partial P} \frac{\partial \eta}{\partial Q}].\end{aligned}$$

Вследствие уравнений (45) правая часть этого уравнения приводится к:

$$[P, Q] = \frac{\partial \xi}{\partial P} \frac{\partial \xi'}{\partial Q} - \frac{\partial \xi}{\partial Q} \frac{\partial \xi'}{\partial P} + \frac{\partial \eta}{\partial \varpi} \frac{\partial \eta'}{\partial Q} - \frac{\partial \eta}{\partial Q} \frac{\partial \eta'}{\partial \varpi}. \quad (57)$$

Так как скобки не содержат время явным образом, то после образования частных производных для t может быть задано любое значение. Частные производные становятся наипростейшими, когда $t = T$, время прохождения через перигелий. Для этого значения t , $E = 0$, $r = a(1 - e)$, и из уравнений (46) находим, что ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial a} &= 1 - e, & \frac{\partial \eta}{\partial a} &= 0, & \frac{\partial \xi'}{\partial a} &= 0, & \frac{\partial \eta'}{\partial a} &= -\frac{n}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial e} &= -a, & \frac{\partial \eta}{\partial e} &= 0, & \frac{\partial \xi'}{\partial e} &= 0, & \frac{\partial \eta'}{\partial e} &= \frac{1}{1-e} \cdot \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \varpi} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial \varpi} &= a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, & \frac{\partial \xi'}{\partial \varpi} &= \frac{-na}{(1-e)^2}, & \frac{\partial \eta'}{\partial \varpi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Тогда уравнение (57) дает:

$$[a, e] = 0, \quad [e, \varpi] = 0, \quad [\varpi, a] = \frac{na}{2}. \quad (59)$$

Используя соотношение $[a_i, a_j] = -[a_j, a_i]$ и выражения (53), (56) и (59), мы напомним уравнения (33) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \frac{da}{dt} - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \omega}, \\ -na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{di}{dt} + \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \cos i \frac{da}{dt} - \\ &\quad - \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i \frac{de}{dt} = m_2 \frac{\partial R_1}{\partial \delta}, \\ na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \frac{d\delta}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial i}, \\ -\frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \frac{d\omega}{dt} - \frac{na}{2} \sqrt{1-e^2} \cos i \frac{d\delta}{dt} - \frac{na}{2} \frac{d\varpi}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}, \\ \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} + \frac{na^2 e \cos i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\delta}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e}, \\ \frac{na}{2} \frac{da}{dt} &= m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varpi}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

¹⁾ Надо помнить, что a и e входят явно, а также неявно через E и n , потому что E определяется уравнением:

$$E = e \sin E = n(t - T) = \frac{k \sqrt{S + m_1}}{a^{\frac{3}{2}}} (t - T).$$

Тогда, например, $\frac{\partial \xi}{\partial a} = \cos E - e - a \sin E \frac{\partial E}{\partial a} = 1 - e$, когда $t = T$, и т. д.

Эти уравнения легко решаются относительно производных и дают:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta_0}{dt} &= \frac{m_2}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{m_2 \cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \omega} - \frac{m_2}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta_0}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{-m_2 \cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial i} + \frac{m_2 \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \tau}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{m_2(1-e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \tau} - \frac{m_2 \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \omega}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{m_2(1-e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e} - \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Пертурбационная функция $R_{1,2}$ содержит элемент a явным образом, а также неявно через n , которое входит лишь в форме $nt + \sigma$. Следовательно, последнее уравнение (61) принимает вид:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{m_2(1-e^2)}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e} - \frac{2m_2}{na} \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial a} \right) - \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial a}, \quad (62)$$

где частная производная в скобках указывает, что производная взята лишь по явно входящему параметру.

Из формулы $nt + \sigma$ следует, что:

$$\frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial n} = \frac{2m_2 t}{na} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \tau} = t \frac{da}{dt}. \quad (63)$$

В § 225—227 будет показано, что $\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \tau}$ есть сумма периодических членов, поэтому σ , определенная уравнением (62), содержит члены, являющиеся произведениями t на тригонометрические члены. Очевидно, такой элемент неудобен при употреблении больших значений t . Для избежания этой трудности Леверье употребил ¹⁾ в качестве элемента вместо τ среднюю долготу от перигелия. Она определяется при помощи формулы:

$$l = \int n \, dt + \sigma, \quad (64)$$

откуда

$$\frac{dl}{dt} = n + t \frac{dn}{dt} + \frac{d\sigma}{dt}. \quad (65)$$

¹⁾ Annales de l'Observatoire de Paris, т. I, стр. 255.

Так как $n = \frac{k\sqrt{S+m}}{a^2}$, то следует, что:

$$\frac{\partial n}{\partial a} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a}, \quad \frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a} \frac{da}{dt}. \quad (66)$$

Поэтому при помощи (62) уравнение (65) принимает вид:

$$\frac{dl}{dt} = n - \frac{m_2(1-e^2)}{na^2e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e} - \frac{2m_2}{na} \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial a} \right). \quad (67)$$

Так как $\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \sigma} = \frac{\partial R_{1,2}}{\partial l}$, то четвертое и пятое уравнения, в которые входят лишь частные производные от $R_{1,2}$ по σ , не изменяются по форме. Поэтому, если l введено вместо σ повсюду в (61), то уравнения не изменятся по форме, и надо брать частную производную от $R_{1,2}$ по a лишь поскольку a входит явно.

219. Переход от $\delta\delta$, ω и σ к $\delta\delta$, π и ε . Преобразование от элементов $\delta\delta$, ω и σ к $\delta\delta$, π и ε легко, потому что соотношения между ω и σ и π и ε очень просты. Из определений § 214 и 215 следует, что:

$$\left. \begin{aligned} \delta\delta &= \delta\delta, \\ \omega &= \pi - \delta\delta, \\ \sigma &= \varepsilon - \pi, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta\delta}{dt} &= \frac{d\delta\delta}{dt}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d\pi}{dt} - \frac{d\delta\delta}{dt}, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\pi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Решая (68) относительно $\delta\delta$, π и ε , находим, что:

$$\left. \begin{aligned} \delta\delta &= \delta\delta, \\ \pi &= \omega + \delta\delta, \\ \varepsilon &= \sigma + \pi = \sigma + \omega + \delta\delta. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Отсюда преобразования частных производных даются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta\delta} &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta\delta} \right) \frac{\partial \delta\delta}{\partial \delta\delta} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi} \right) \frac{\partial \pi}{\partial \delta\delta} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \delta\delta} = \\ &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta\delta} \right) + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi} \right) + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \omega} &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta\delta} \right) \frac{\partial \delta\delta}{\partial \omega} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi} \right) \frac{\partial \pi}{\partial \omega} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = \\ &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi} \right) + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon} \right), \\ \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \sigma} &= \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta\delta} \right) \frac{\partial \delta\delta}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi} \right) \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon} \right). \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Подставляя (69) и (71) в (61) и опуская скобки при частных производных и решая для производных элементов по t , находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta_0}{dt} &= \frac{m_2}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial i}, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{-m_2}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta_0} - \frac{m^2 \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left[\frac{\partial R_{1,2}}{\partial \pi} + \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \epsilon} \right], \\ \frac{d\pi}{dt} &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial i} + \frac{m_2 \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{de}{dt} &= -m_2 \sqrt{1-e^2} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon} - \frac{m_2 \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \varepsilon_1}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial i} + m_2 \sqrt{1-e^2} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e} - \frac{2m_2}{na} \frac{\partial R_{1,2}}{\partial a}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Эти уравнения ¹⁾ вместе с соответствующими для элементов планеты m^2 образуют строгую систему дифференциальных уравнений для определения движения планет m_1 и m_2 по отношению к Солнцу, если не имеется иных сил, кроме взаимных притяжений трех тел. Если $R_{1,2}$ выражено через время и оскулирующие элементы в эпоху t_0 , то уравнения (72) становятся явными выражениями для первой половины системы (27) и определяют возмущения элементов первого порядка по отношению к массам.

220. Введение прямоугольных составляющих возмущающего ускорения. Уравнения (72) требуют для их применения, чтобы $R_{1,2}$ было выражено сначала через элементы, после чего должны быть образованы частные производные. В некоторых случаях, в особенности в орбитах комет, удобно иметь скорости вариации элементов, выраженные через три прямоугольные составляющие возмущающего ускорения.

Разложим возмущающее ускорение на три прямоугольных составляющих W , S , R , где W является составляющей ускорения, перпендикулярной к плоскости орбиты с положительным направлением к северному полюсу; S является составляющей в плоскости орбиты, действующей под прямым углом к радиусу-вектору с положительным направлением, образующим угол меньше чем 90° с направлением движения; R — составляющей, действующей вдоль радиуса-вектора с положительным направлением от Солнца. Составляющие, употребленные в предыдущей главе, очевидно, могут быть применены здесь вместо этих, но получающиеся уравнения будут менее просты.

Для получения требуемых уравнений необходимо лишь выразить частные производные от $R_{1,2}$ по элементам через W , S и R и подставить

¹⁾ Индекс 1, который был отброшен у координат и элементов в § 213, должен быть снова введен, когда пишут уравнения двух или нескольких планет.

их в (61) или (72) в зависимости от группы взятых элементов. Сделаем преобразование для элементов, фигурирующих в уравнениях (61).

Величины $m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x}$, $m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y}$, $m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z}$ являются составляющими возмущающего ускорения, параллельными соответствующим неподвижным осям. Из элементарных свойств разложения и суммирования ускорений следует, что $m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x}$ равно сумме проекций W , S и R на ось x и аналогично для других.

Пусть u представляет аргумент широты или расстояние от восходящего узла до планеты P (рис. 61). Тогда из основных формул тригонометрии следует, что:

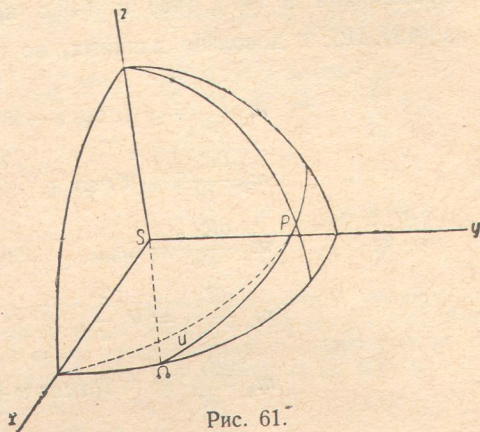


Рис. 61.

$$\left. \begin{aligned} m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x} &= +R(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - \\ &\quad - S(\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i) + W \sin \Omega \sin i, \\ m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y} &= +R(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) - \\ &\quad - S(\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i) - W \cos \Omega \sin i, \\ m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z} &= +R \sin u \sin i + S \cos u \sin i + W \cos i. \end{aligned} \right\} (73)$$

Пусть s представляет любой из элементов Ω, \dots, τ ; тогда:

$$\frac{\partial R_{1,2}}{\partial s} = \frac{\partial R_{1,2}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial R_{1,2}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (74)$$

Производные $\frac{\partial R_{1,2}}{\partial x}$, $\frac{\partial R_{1,2}}{\partial y}$, $\frac{\partial R_{1,2}}{\partial z}$ даны в (73), и если $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ найдены, то преобразование может быть сразу выполнено.

Из уравнений (51) следует:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial K} &= \xi \frac{\partial a}{\partial K} + \eta \frac{\partial e}{\partial K}, & \frac{\partial x}{\partial P} &= a \frac{\partial \xi}{\partial P} + a' \frac{\partial \eta}{\partial P}, \\ \frac{\partial y}{\partial K} &= \xi \frac{\partial \beta}{\partial K} + \eta \frac{\partial \beta'}{\partial K}, & \frac{\partial y}{\partial P} &= \beta \frac{\partial \xi}{\partial P} + \beta' \frac{\partial \eta}{\partial P}, \\ \frac{\partial z}{\partial K} &= \xi \frac{\partial \gamma}{\partial K} + \eta \frac{\partial \gamma'}{\partial K}, & \frac{\partial z}{\partial P} &= \gamma \frac{\partial \xi}{\partial P} + \gamma' \frac{\partial \eta}{\partial P}, \end{aligned} \right\} (75)$$

где K — любой из элементов Ω, i, ω и P — любой из элементов a, e, τ .

Величины α, \dots, γ' определены формулами (44), и их производные даются выражениями в (47), (48) и (49); производные $\frac{\partial \xi}{\partial P}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial P}$ вычисляются из (46). После довольно длинных, но простых приведений находим, что:

$$\left. \begin{aligned} m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \delta_0} &= Sr \cos i - Wr \cos u \sin i, \\ m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial i} &= Wr \sin u, \\ m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \omega} &= Sr, \\ m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial a} &= R \frac{r}{a}, \\ m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial e} &= -Ra \cos v + S \left[1 + \frac{r}{p} \right] a \sin v, \\ m_2 \frac{\partial R_{1,2}}{\partial \sigma} &= \frac{Rae}{\sqrt{1-e^2}} \sin v + S \frac{a^2}{r} \sqrt{1-e^2}. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Поэтому уравнения (61) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta_0}{dt} &= \frac{r \sin u}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{-\sqrt{1-e^2} \cos v}{nae} R + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[1 + \frac{r}{p} \right] \sin v S - \frac{r \sin u \operatorname{ctg} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} W, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2e \sin v}{n \sqrt{1-e^2}} R + \frac{2a \sqrt{1-e^2}}{nr} S, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{na} R + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left[\frac{a^2 (1-e^2)}{r} - r \right] S, \\ \frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{1}{na} \left[\frac{2r}{a} - \frac{1-e^2}{e} \cos v \right] R - \frac{(1-e^2)}{nae} \left[1 + \frac{r}{p} \right] \sin v S. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

ЗАДАЧИ

1. Выразите составляющие S и R , найденные в этой главе, через T и N , которые были употреблены в главе IX § 174.

$$\text{Отв. } S = \frac{(1+e \cos v)}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} T + \frac{e \sin v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} N, \\ R = \frac{e \sin v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} T - \frac{1+e \cos v}{\sqrt{1+e^2+2e \cos v}} N.$$

2. При помощи уравнений задачи 1 выразите вариации элементов δ_0, \dots, σ через T и N и проверьте все результаты, содержащиеся в таблице § 182.

3. Объясните, почему $\frac{d\omega}{dt}$ содержит член, зависящий от W .

2. Предположим, что возмущаемое тело движется в сопротивляющейся среде; найдите уравнения для вариации элементов:

$$\begin{aligned} \text{Омс. } \frac{d\delta_0}{dt} &= 0, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{nae} \frac{\sin v}{\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} T, \\ \frac{di}{dt} &= 0, \quad \frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{1+e^2+2e\cos v}}{n\sqrt{1-e^2}} T, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}(\cos v + e)}{na\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} T, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2(1-e^2)(1+e^2+e\cos v)\sin v}{nae(1+e\cos v)\sqrt{1+e^2+2e\cos v}} T. \end{aligned}$$

5. Рассмотрите, каким образом изменяются элементы в последней задаче, включающей значения v , для которых максимум и минимум в скоростях изменения бывает, когда T постоянно и когда оно прямо пропорционально квадрату скорости.

6. Выведите уравнения, соответствующие (77), для элементов δ_0 , i , π , a , e и ε .

$$\begin{aligned} \text{Омс. } \frac{d\delta_0}{dt} &= \frac{r \sin u}{na\sqrt{1-e^2} \sin i} W, \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r \cos u}{na^2\sqrt{1-e^2}} W, \\ \frac{d\pi}{dt} &= 2 \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\delta_0}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left\{ -R \cos v + S \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin v \right\}, \\ \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left(Re \sin v + S \frac{p}{r} \right), \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left\{ R \sin v + S \left(\frac{e + \cos v}{1 + e \cos v} + \cos v \right) \right\}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2rR}{na^2} + \frac{e^2}{1 + \sqrt{1-e^2}} \frac{d\pi}{dt} + 2\sqrt{1-e^2} \sin^2 \frac{i}{2} \frac{d\delta_0}{dt}. \end{aligned}$$

221. Разложение пертурбационной функции. Для применения уравнений (72) пертурбационная функция $R_{1,2}$ должна быть выражена явным образом через элементы и время. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь возмущения первого порядка; поэтому, согласно с результатами § 208, элементы, входящие в $R_{1,2}$, являются оскулирующими элементами в эпоху t_0 .

В обозначениях § 205 пертурбационная функция имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} R_{1,2} &= k^3 \left[\frac{1}{r_{1,2}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right], \\ r_{1,2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Возмущающие силы, очевидно, скорее зависят от взаимных наклонностей орбит, чем от их независимых наклонностей к основной неподвижной плоскости. Поэтому удобнее разложить $R_{1,2}$ в ряд по взаимной

наклонности. Так как этот угол может быть выражен через i_1 , i_2 , Ω_1 и Ω_2 , то частные производные от $R_{1,2}$ по этим элементам будут отчасти зависеть от их неявного вхождения в этот угол.

Разложение пертурбационной функции состоит из трех шагов ¹⁾:

а) Разложение $R_{1,2}$ в ряд по степеням квадрата синуса половины взаимной наклонности орбит.

б) Разложение коэффициентов ряда, полученного в «а», в ряд по степеням e_1 и e_2 .

с) Разложение коэффициентов предыдущего ряда в ряд Фурье по средним долготам двух планет и угловым переменным π_1 , π_2 , Ω_1 и Ω_2 .

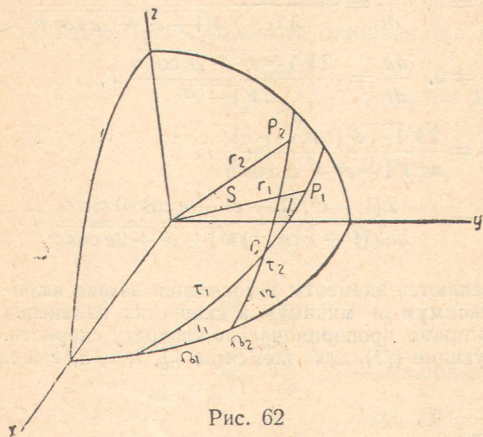


Рис. 62

Из-за недостатка места приходится ограничиться общим изложением действий, требуемых для произведения полного разложения. Подробное изложение дано в «Mécanique Céleste» Тиссерана, т. I, гл. XII, до XVIII включительно.

222. а) Разложение $R_{1,2}$ по взаимной наклонности. Пусть S представляет угол между радиусами r_1 и r_2 , тогда (рис. 62):

$$\frac{1}{r_{1,2}} = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos S)^{-\frac{1}{2}}. \quad (79)$$

Пусть α_1 , β_1 , γ_1 представляют углы между r_1 и соответственно осями x , y и z , а для r_2 эти углы обозначим через α_2 , β_2 и γ_2 . Тогда

$$x_1 = r_1 \cos \alpha_1, \quad y_1 = r_1 \cos \beta_1, \quad z_1 = r_1 \cos \gamma_1 \quad \text{и т. д.} \quad (80)$$

и

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) = r_1 r_2 \cos S. \quad (81)$$

Пусть I представляет угол между двумя орбитами, а τ_1 и τ_2 — расстояние от их восходящих узлов до точки их пересечения. Из сферического треугольника $P_1 P_2 C$ находим значение $\cos S$:

$$\left. \begin{aligned} \cos S &= \cos(u_1 - \tau_1) \cos(u_2 - \tau_2) + \sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2) \cos I, \\ \text{или} \\ \cos S &= \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1) - 2 \sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2) \sin^2 \frac{I}{2}, \\ u_1 - \tau_1 &= v_1 + \pi_1 - \Omega_1 - \tau_1, \\ u_2 - \tau_2 &= v_2 + \pi_2 - \Omega_2 - \tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

¹⁾ Имеется много более или менее важных изменений изложенного здесь метода, который основан на работе Леверье в *Annales de l'Observatoire de Paris*, т. I.

Величины I , τ_1 , τ_2 определяются с помощью формул Гаусса, примененных к треугольнику $\odot\odot_1\odot\odot_2$ C:

$$\left. \begin{aligned} \sin I \sin \tau_1 &= \sin i_2 \sin (\odot\odot_1 - \odot\odot_2), \\ \sin I \sin \tau_2 &= \sin i_1 \sin (\odot\odot_1 - \odot\odot_2), \\ \sin I \cos \tau_1 &= \sin i_1 \cos i_2 - \cos i_1 \sin i_2 \cos (\odot\odot_1 - \odot\odot_2), \\ \sin I \cos \tau_2 &= -\cos i_1 \sin i_2 + \sin i_1 \cos i_2 \cos (\odot\odot_1 - \odot\odot_2), \\ \cos I &= \cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos (\odot\odot_1 - \odot\odot_2). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Для простоты I , τ_1 и τ_2 будут сохранены, но надо помнить, что когда берутся частные производные от $R_{1,2}$, то они являются функциями от i_1 , i_2 , $\odot\odot_1$ и $\odot\odot_2$.

Вследствие уравнений (79), (81) и (82) пертурбационная функция может быть написана в форме:

$$\left. \begin{aligned} R_{1,2} &= [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)]^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[1 + \frac{4r_1 r_2 \sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2) \sin^2 \frac{I}{2}}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)} \right]^{-\frac{1}{2}} - \\ &- \frac{r_1}{r_2^2} \left[\cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1) - 2 \sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2) \sin^2 \frac{I}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Радиусы r_1 и r_2 не зависят от I . Второй множитель первого члена правой части этого уравнения можно разложить по формуле бинома в абсолютно сходящийся ряд по степеням $\sin^2 \frac{I}{2}$, пока абсолютное числовое значение:

$$\frac{4r_1 r_2 \sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2) \sin^2 \frac{I}{2}}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)} \quad (85)$$

меньше единицы. Эта дробь меньше или в крайнем случае равна:

$$\frac{4r_1 r_2 \sin^2 \frac{I}{2}}{(r_1 - r_2)^2}. \quad (86)$$

Если это выражение меньше единицы для значений, которые могут принять r_1 и r_2 в данных эллипсах, то разложение (84) пригодно для всех значений времени. В случае больших планет оно всегда очень мало, наибольшее значение относится к Меркурию и Марсу, 0,0118. В возмущениях малых планет Юпитером оно часто непригодно, так как I иногда имеет значительную величину, в то время как $r_2 - r_1$ может быть малым.

В случае Марса и Эроса $r_2 - r_1$ может действительно исчезнуть, и, следовательно, этот способ разложения непригоден. Излишне говорить, что он вообще неприменим в орбитах комет.

В случаях, если разложение (84) пригодно, выражение для $R_{1,2}$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
 R_{1,2} = & + [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)]^{-\frac{1}{2}} - \\
 & - r_1 r_2 [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)]^{-\frac{3}{2}} \times \\
 & \times 2 \sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2) \sin^2 \frac{I}{2} + \\
 & + r_1^2 r_2^2 [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)]^{-\frac{5}{2}} \times \\
 & \times 6 \sin^3(u_1 - \tau_1) \sin^2(u_2 - \tau_2) \sin^4 \frac{I}{2} + \\
 & + \dots \dots \dots - \\
 & - \frac{r_1}{r_2^2} \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1) + \\
 & + \frac{2r}{r_2^2} \sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2) \sin^2 \frac{I}{2}.
 \end{aligned} \quad (87)$$

223. б) Разложение коэффициентов по степеням e_1 и e_2 . Радиусы r_1 и r_2 соответственно изменяются от $a_1(1 - e_1)$ и $a_2(1 - e_2)$ до $a_1(1 + e_1)$ и $a_2(1 + e_2)$.

Пусть:

$$r_1 = a_1(1 + \rho_1), \quad r_2 = a_2(1 + \rho_2). \quad (88)$$

Углы u_1 и u_2 выражаются через истинные аномалии v_1 и v_2 и элементы при помощи уравнений (82). Истинные аномалии равны средним аномалиям плюс уравнения центра, которые обозначим через w_1 и w_2 . Пусть l_1 и l_2 представляют средние долготы, отсчитываемые от оси x (рис. 62), тогда:

$$u_1 - \tau_1 = l_1 - \oslash_1 - \tau_1 + w_1, \quad u_2 - \tau_2 = l_2 - \oslash_2 - \tau_2 + w_2. \quad (89)$$

Из (81) следует, что $R_{1,2}$ может быть написано в форме:

$$R_{1,2} = F[a_1(1 + \rho_1), a_2(1 + \rho_2)],$$

где F — однородная функция от a_1 и a_2 степени — 1. Поэтому

$$R_{1,2} = \frac{1}{1 + \rho_2} F \left[a_1 + a_1 \frac{\rho_1 - \rho_2}{1 + \rho_2}, a_2 \right]. \quad (90)$$

Правая часть этого равенства может быть разложена по формуле Тейлора, и мы получим:

$$R_{1,2} = \frac{1}{1+\rho_2} \left\{ F(a_1, a_2) + \frac{\rho_1 - \rho_2}{1+\rho_2} \frac{a_1}{1} \frac{\partial F(a_1, a_2)}{\partial a_1} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{1+\rho_2} \right)^2 \frac{a_1^2}{1 \cdot 2} \frac{\partial^2 F(a_1, a_2)}{\partial a_1^2} + \dots \right\} \quad (91)$$

Выражения $\left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{1+\rho_2} \right)^i$ могут быть разложены в ряд по степеням ρ_1 и ρ_2 . Но в уравнении (62), § 100 ρ дано как ряд по степеням e , коэффициентами которого являются косинусы кратных дуг средней аномалии. Производя эти разложения и подстановки в (91), мы можем представить $R_{1,2}$ в виде степенного ряда по e_1 и e_2 . Эти действия должны быть выполнены над отдельными членами ряда (87), так что полученный ряд располагается по степеням e_1 , e_2 и $\sin^2 \frac{l}{2}$. Углы ω_1 и ω_2 также зависят соответственно от e_1 и e_2 , но их разложение будет введено лишь после следующего этапа.

224. с) Разложение в ряды Фурье. Первый член в скобках (91) получается путем замены r_1 и r_2 соответственно на a_1 и a_2 в (87). Высшие члены содержат производные от F по a_1 . Обращаясь к явному ряду в (87), мы видим, что надо рассмотреть разложение выражений типа:

$$(a_1 a_2)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)]^{-\frac{\nu}{2}},$$

где ν является нечетным целым числом.

Пусть $u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1 = \phi$. Из теории рядов Фурье известно, что если a_1 и a_2 не равны, как это и предполагается, то $[a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \phi]^{-\frac{\nu}{2}}$ может быть разложено в ряд по косинусам кратных от ϕ , который сходится для всех значений ϕ , т. е.

$$(a_1 a_2)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \phi]^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_v^{(i)} \cos i \phi, \quad (92)$$

где $B_v^{(i)} = B_v^{(-i)}$.

Коэффициенты $B_v^{(i)}$, конечно, даются интегралом Фурье:

$$B_v^{(i)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (a_1 a_2)^{\frac{\nu-1}{2}} [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \phi]^{-\frac{\nu}{2}} \cos i \phi d\phi,$$

но благодаря трудности нахождения интеграла в этой специальной задаче удобнее поступить иначе.

Пусть $z = e^{\sqrt{-1}\phi}$, где e обозначает основание неперовых логарифмов. Тогда:

$$2 \cos \phi = z + z^{-1}, \quad 2 \cos i \phi = z^i + z^{-i}.$$

Предположим, что $a_2 > a_1$, и пусть $\frac{a_1}{a_2} = \alpha$; тогда (92) принимает вид:

$$\frac{a^{\frac{\nu-1}{2}}}{a_2} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} B_{\nu}^{(i)} \cos i\psi. \quad (93)$$

Пусть:

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{-\frac{\nu}{2}} = (1 - \alpha z)^{-\frac{\nu}{2}} (1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} b_{\nu}^{(i)} z^i.$$

Тогда

$$B_{\nu}^{(i)} = \frac{a^{\frac{\nu-1}{2}}}{a_2} b_{\nu}^{(i)}. \quad (94)$$

Так как абсолютные значения αz и αz^{-1} меньше единицы для всех действительных значений ψ , то множители $(1 - \alpha z)^{-\frac{\nu}{2}}$ и $(1 - \alpha z^{-1})^{-\frac{\nu}{2}}$ могут быть разложены по формуле бинома в сходящиеся ряды по степеням αz и αz^{-1} . Коэффициент z^i в произведении этих рядов равен $\frac{1}{2} b_{\nu}^{(i)}$, после чего $B_{\nu}^{(i)}$ получается из (94). Легко найдем, что общий член произведения разложений таков:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} b_{\nu}^{(i)} = & \frac{\frac{\nu}{2} \left(\frac{\nu}{2} + 1 \right) \dots \left(\frac{\nu}{2} + i - 1 \right)}{i!} \alpha^i \left[1 + \frac{\frac{\nu}{2}}{1} \cdot \frac{\frac{\nu}{2} + i}{i+1} \alpha^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\frac{\nu}{2} \left(\frac{\nu}{2} + 1 \right)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\left(\frac{\nu}{2} + 1 \right) \left(\frac{\nu}{2} + i + 1 \right)}{(i+1)(i+2)} \alpha^4 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (95)$$

Таким образом коэффициенты при $\rho_1^{j_1} \rho_2^{j_2} \left(\sin^2 \frac{l}{2} \right)^k$ разлагаются в ряды Фурье по $\cos i(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)$. Но эти функции умножены на $\sin(u_1 - \tau_1) \sin(u_2 - \tau_2)$, возведенные в разные степени [уравнение (87)]. Эти степени синусов должны быть приведены к синусам и косинусам кратных аргументов и к произведениям, образованным с $\cos i(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)$, и снова сделано приведение к синусам и косинусам кратных друг. Окончательные тригонометрические члены будут иметь форму $\cos(j_1 u_1 + j_2 u_2 + k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)$, где j_1, j_2, k_1 и k_2 являются целыми числами. Вследствие (89) это выражение может быть представлено в виде:

$$\left. \begin{aligned} & \cos(j_1 l_1 + j_2 l_2 - j_1 \odot \odot_1 - j_2 \odot \odot_2 + k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2 + j_1 w_1 + j_2 w_2) = \\ & = \cos(j_1 l_1 + j_2 l_2 - j_1 \odot \odot_1 - j_2 \odot \odot_2 + k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2) \times \\ & \times \{ \cos(j_1 w_1) \cos(j_2 w_2) - \sin(j_1 w_1) \sin(j_2 w_2) \} - \\ & - \sin(j_1 l_1 + j_2 l_2 - j_1 \odot \odot_1 - j_2 \odot \odot_2 + k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2) \times \\ & \times \{ \sin(j_1 w_1) \cos(j_2 w_2) + \cos(j_1 w_1) \sin(j_2 w_2) \}. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Так как:

$$l_1 = \delta_{\delta_1} + \omega_1 + n_1(t_0 - T_1) + n_1(t - t_0) = n_1 t + \varepsilon_1,$$

$$l_2 = \delta_{\delta_2} + \omega_2 + n_2(t_0 - T_2) + n_2(t - t_0) = n_2 t + \varepsilon_2,$$

то первые множители членов в правой части уравнения не зависят от e_1 и e_2 . Величины $\cos(j_1 \omega_1)$ и т. д. должны быть разложены обычными методами в степенные ряды по ω_1 и ω_2 . Но $\omega_1 = v_1 - M_1$, $\omega_2 = v_2 - M_2$, а эти величины были разложены в ряды по степеням e_1 и e_2 [уравнение (64) § 100], коэффициенты которых суть ряды Фурье с кратными средней аномалии как аргументами. Подставляя эти ряды для e_1 и e_2 в разложения второго множителя членов правой части (96) и приводя степени синусов и косинусов средней аномалии к синусам и косинусам кратных дуг средней аномалии и умножая на:

$$\cos(j_1 l_1 + j_2 l_2 - j_1 \delta_{\delta_1} - j_2 \delta_{\delta_2} + k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)$$

и

$$\sin(j_1 l_1 + j_2 l_2 - j_1 \delta_{\delta_1} - j_2 \delta_{\delta_2} + k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2)$$

и снова приводя к синусам и косинусам кратных аргументов, мы разложим выражение (96) в ряды по степеням e_1 и e_2 , коэффициенты которых являются рядами по синусам и косинусам от сумм кратных l_1 , l_2 , δ_{δ_1} , δ_{δ_2} , τ_1 , τ_2 , M_1 , M_2 . Но $M_1 = l_1 - \pi_1$, $M_2 = l_2 - \pi_2$, поэтому аргументы будут l_1 , l_2 , δ_{δ_1} , δ_{δ_2} , τ_1 , τ_2 , π_1 , π_2 , где τ_1 и τ_2 являются функциями от δ_{δ_1} , δ_{δ_2} , l_1 и l_2 , определенными уравнениями (83).

Если описанные разложения и приведения полностью выполнены, то $R_{1,2}$ будет представлено в виде степенных рядов по e_1 , e_2 и $\sin^2 \frac{I}{2}$, коэффициенты которых являются рядами синусов и косинусов аргументов кратных l_1 , l_2 , δ_{δ_1} , δ_{δ_2} , τ_1 , τ_2 , π_1 , π_2 , причем коэффициенты каждого тригонометрического члена зависят от отношения больших полуосей. Если знаки при δ_{δ_1} , δ_{δ_2} , π_1 , π_2 , τ_1 , τ_2 , ε_1 , ε_2 и t изменить, то величина $R_{1,2}$, определяемая (84), очевидно, не изменится, поэтому рассматриваемое разложение содержит только косинусы аргументов. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} R_{1,2} &= \sum C \cos D, \\ D &= j_1(n_1 t + \varepsilon_1) + j_2(n_2 t + \varepsilon_2) - j'_1 \delta_{\delta_1} - j'_2 \delta_{\delta_2} + \\ &\quad + k_1 \tau_1 + k_2 \tau_2 + k'_1 \pi_1 + k'_2 \pi_2, \\ C &= f\left(a_1, a_2, e_1, e_2, \sin^2 \frac{I}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

где j_1, \dots, k'_2 принимают все целые значения, положительные, отрицательные и нуль, а суммирование распространяется на все эти значения.

Из предыдущего ясно, что ряд для $R_{1,2}$ очень сложен, и в каждом особом случае для получения этого разложения требуется много труда.

Леверье выполнил полное разложение всех членов до седьмого порядка включительно относительно e_1 , e_2 , $\sin^2 \frac{I}{2}$, и объем работы таков, что потребовалось пятьдесят три страницы большого формата в первом томе «Annales de l'Observatoire de Paris», чтобы выписать результаты.

225. Периодические вариации. Из уравнений (82) и (97) следует, что скорости изменения элементов m_1 даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta_1}{dt} &= \frac{m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2} \sin i_1} \sum \left\{ \frac{\partial C}{\partial i_1} \cos D - \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] C \sin D \right\}, \\ \frac{di_1}{dt} &= \frac{-m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2} \sin i_1} \sum \left\{ j_1' - k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \delta_1} - k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \delta_1} \right\} C \sin D + \\ &\quad + \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \sum \left\{ k_1' + j_1 + k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \pi_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \pi_1} \right\} C \sin D, \\ \frac{d\pi_1}{dt} &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \sum \left\{ \frac{\partial C}{\partial i_1} \cos D - \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] C \sin D \right\} + \\ &\quad + \frac{m_2 \sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \frac{\partial C}{\partial e_1} \cos D, \\ \frac{da_1}{dt} &= \frac{-2m_2}{n_1 a_1} \sum j_1 C \sin D, \\ \frac{de_1}{dt} &= m_2 \sqrt{1-e_1^2} \frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum j_1 C \sin D + \\ &\quad + \frac{m_2 \sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \left\{ k_1' + k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \pi_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \pi_1} \right\} C \sin D, \\ \frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \sum \left\{ \frac{\partial C}{\partial i_1} \cos D - \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] C \sin D \right\} + \\ &\quad + m_2 \sqrt{1-e_1^2} \frac{1-\sqrt{1-e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \frac{\partial C}{\partial e_1} \cos D - \frac{2m_2}{n_1 a_1} \sum \frac{\partial C}{\partial a_1} \cos D. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Возмущения первого порядка элементов орбиты m_1 по отношению к массе m_2 получим, интегрируя эти уравнения, рассматривая элементы в правых частях как постоянные. Подобные члены должны быть прибавлены для каждой возмущающей планеты.

Члены, входящие в $R_{1,2}$, разделяются на три класса: а) такие, в которых $j_1 n_1 + j_2 n_2$ отлично от нуля; б) такие, в которых $j_1 n_1 + j_2 n_2$ очень мало, но отличается от нуля, и с) такие, в которых $j_1 n_1 + j_2 n_2$ равняется нулю. Ввиду этого напомним:

$$R_{1,2} = \sum C_0 \cos D_0 + \sum C_2 \cos D_1 + \sum C_2 \cos D_2,$$

где три суммы в правой части содержат соответственно эти три класса

членов. Поэтому возмущения первого порядка и первого класса элементов m_1 со стороны m_2 напишутся в виде:

$$\begin{aligned}
 (\delta \mathcal{O}_1^{(0,1)}) - (\delta \mathcal{O}_1^{(0,1)})_{t_0} &= \frac{m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} \sin i_1} \times \\
 &\times \sum \left\{ \frac{\partial C_0}{\partial i_1} \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} + \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} \right\}, \\
 (i_1^{(0,1)}) - (i_1^{(0,1)})_{t_0} &= \frac{m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} \sin i_1} \times \\
 &\times \sum \left\{ j_1' - k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \delta \delta_1} - k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \delta \delta_1} \right\} \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} - \\
 &- \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \sum \left\{ k_1' + j_1 + k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \pi_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \pi_1} \right\} \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2}, \\
 (\pi_1^{(0,1)}) - (\pi_1^{(0,1)})_{t_0} &= \\
 &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \sum \left\{ \frac{\partial C_0}{\partial i_1} \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} + \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} \right\} + \\
 &+ \frac{m_2 \sqrt{1 - e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \frac{\partial C_0}{\partial e_1} \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2}, \quad (99) \\
 (a_1^{(0,1)}) - (a_1^{(0,1)})_{t_0} &= \frac{2m_2}{n_1 a_1} \sum j_1 \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2}, \\
 (e_1^{(0,1)}) - (e_1^{(0,1)})_{t_0} &= -m_2 \sqrt{1 - e_1^2} \frac{1 - \sqrt{1 - e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum j_1 \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} - \\
 &- \frac{m_2 \sqrt{1 - e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \left\{ k_1' + k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \pi_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \pi_1} \right\} \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2}, \\
 (\varepsilon_1^{(0,1)}) - (\varepsilon_1^{(0,1)})_{t_0} &= \\
 &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \sum \left\{ \frac{\partial C_0}{\partial i_1} \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} + \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] \frac{C_0 \cos D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} \right\} + \\
 &+ m_2 \sqrt{1 - e_1^2} \frac{1 - \sqrt{1 - e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \frac{\partial C_0}{\partial e_1} \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2} - \\
 &- \frac{2m_2}{n_1 a_1} \sum \frac{\partial C_0}{\partial a_1} \frac{\sin D_0}{j_1 n_1 + j_2 n_2}.
 \end{aligned}$$

Эти члены чисто периодические с периодами $\frac{2\pi}{j_1 n_1 + j_2 n_2}$ и составляют *периодические вариации*. Каждый элемент подвержен им, завися от бесконечного числа таких членов, периоды которых различны. Чем больше $j_1 n_1 + j_2 n_2$, тем короче период члена и обычно тем меньше его коэффициент.

Метод представления движения планет при помощи ряда периодических членов несколько аналогичен теории эпициклов Птолемея, потому что каждый член отдельно эквивалентен прибавлению малого кругового движения к существующему ранее. Эта теория сложнее теории Птолемея тем, что она прибавляет беспредельно эпицикл на эпицикл, но она проще теории Птолемея, потому что она вытекает из одного простого принципа закона тяготения.

226. Вариации долгого периода. Буквы j_1 и j_2 представляют все положительные и отрицательные целые числа и нуль. Поэтому за исключением того, когда n_1 и n_2 несоизмеримы между собою, существуют такие j_1 и j_2 , отличные от нуля, что $j_1 n_1 + j_2 n_2 = 0$. Но тогда D есть постоянная, и интеграл таким путем не образуется. Однако будут ли n_1 и n_2 несоизмеримыми или нет, можно найти такую пару чисел, что $j_1 n_1 + j_2 n_2$ очень мало. Соответствующий член будет большим, если C не слишком мало. В полном рассмотрении разложения $R_{1,2}$ показывается, что порядок C относительно $e_1, e_2, \sin^2 \frac{I}{2}$ по меньшей мере равняется числовому значению $j_1 + j_2$ (см. «Mécanique Céleste» Тиссерана, т. I, стр. 308). Так как n_1 и n_2 оба положительны, то одно из чисел j_1, j_2 должно быть положительным, а другое отрицательным, для того чтобы сумма $j_1 n_1 + j_2 n_2$ была мала. Чем ближе между собой j_1 и j_2 по числовой величине, тем меньше числовое значение $j_1 + j_2$ и, следовательно, тем больше C . Если средние движения двух планет таковы, что они почти соизмеримы между собою, причем отношение n_1 к n_2 выражается малыми целыми числами, то большие члены в возмущениях возникают от присутствия этих малых делителей. Период такого члена равен $\frac{2\pi}{j_1 n_1 + j_2 n_2}$, что очень велико, откуда название: долгий период. Эти члены даны уравнениями той же формы, как (90), но с ограничением, что $j_1 n_1 + j_2 n_2$ должно быть очень мало.

При геометрическом рассмотрении условие, что периоды близко соизмеримы и их отношение выражается малыми целыми числами, означает, что точки соединения повторяются почти в той же части орбит с лишь немногими промежуточными соединениями. Крайний случай тот, в котором не имеется промежуточных соединений, т. е. когда j_1 и j_2 разнятся по числовой величине на единицу.

Средние движения Юпитера и Сатурна близки к отношению пяти к двум. Следовательно, $j_1 = 2, j_2 = -5$ дают член долгого периода, и порядок коэффициента C равен абсолютной величине разности $2 - 5$, т. е. 3. Причина долгопериодического неравенства Юпитера и Сатурна была открыта Лапласом в 1784 г. при вычислении возмущений третьего порядка в e_1 и e_2 . Длина периода в случае этих двух планет примерно 850 лет.

227. Вековые вариации. Выражение D не зависит от времени для всех членов, в которых $j_1 = j_2 = 0$. Частные производные от D по элементам также не зависят от времени; поэтому, выделяя эти члены из (95) и интегрируя их, находим:

$$\begin{aligned}
 [\delta_1^{(0,1)}] &= \frac{m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} \sin i_1} \times \\
 &\times \sum \left\{ \frac{C_2}{\partial i_1} \cos D_2 - \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] C_2 \sin D_2 \right\} (t - t_0), \\
 [i_1^{(0,1)}] &= \frac{-m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} \sin i_1} \times \\
 &\times \sum \left\{ j'_1 - k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \delta_1} - k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \delta_1} \right\} C_2 \sin D_2 \cdot (t - t_0) + \\
 &\frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \times \\
 &\times \sum \left\{ k'_1 + k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \pi_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \pi_1} \right\} C_2 \sin D_2 \cdot (t - t_0), \\
 [\pi_1^{(0,1)}] &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \times \\
 &\times \sum \left\{ \frac{\partial C_2}{\partial i_1} \cos D_2 - \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] C_2 \sin D_2 \right\} (t - t_0) + \\
 &+ \frac{m_2 \sqrt{1 - e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \frac{\partial C_2}{\partial e_1} \cos D_2 \cdot (t - t_0), \\
 a_1^{(0,1)} &= 0, \\
 [e_1^{(0,1)}] &= \frac{m_2 \sqrt{1 - e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \sum \left\{ k'_1 + k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial \pi_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial \pi_1} \right\} C_2 \sin D_2 \cdot (t - t_0), \\
 [\varepsilon_1^{(0,1)}] &= \frac{m_2 \operatorname{tg} \frac{i_1}{2}}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \times \\
 &\times \sum \left\{ \frac{\partial C_2}{\partial i_1} \cos D_2 - \left[k_1 \frac{\partial \tau_1}{\partial i_1} + k_2 \frac{\partial \tau_2}{\partial i_1} \right] C_2 \sin D_2 \right\} (t - t_0) + \\
 &+ m_2 \sqrt{1 - e_1^2} \frac{1 - \sqrt{1 - e_1^2}}{n_1 a_1^2 e_1} \cdot \sum \frac{\partial C_2}{\partial e_1} \cos D_2 \cdot (t - t_0) - \\
 &- \frac{2m_2}{n_1 a_1} \sum \frac{\partial C_2}{\partial a_1} \cos D_2 \cdot (t - t_0).
 \end{aligned} \tag{100}$$

Отсюда следует, что в возмущениях a не имеется вековых членов этого типа первого порядка по отношению к массам. Это составляет

первую теорему об устойчивости солнечной системы. Она была доказана до второй степени эксцентриситета Лапласом в 1773 г.¹⁾ в мемуаре о взаимном притяжении Юпитера и Сатурна, когда ему было лишь 24 года. В 1776 г. Лагранж показал, что она верна для всех степеней эксцентриситетов²⁾. В 1809 г. Пуассон доказал, что в вековых возмущениях a не имеется членов второго порядка по отношению к массам, но что имеются члены типа $t \cos D$, где D содержит время³⁾. Члены этого типа называются *членами Пуассона*.

Все элементы, кроме a , имеют вековые члены. Предполагали, что вековые члены, которые, повидимому, являются причиной беспредельного изменения элементов, одни препятствуют употреблению уравнений (72) для вычисления возмущений для любого времени, как бы велико оно ни было. Для избежания появления вековых членов было предложено много методов вычисления возмущений; однако ясно, что появляются ли члены, пропорциональные времени, или нет, метод строго применим только для таких значений времени, для которых ряды (20) § 207 сходятся.

Вековые члены могут входить другим, обычно не рассматриваемым, путем. Если $j_1 n_1 + j_2 n_2 = 0$, при $j_1 \neq 0$, $j_2 \neq 0$, то D не зависит от времени и соответствующие члены являются вековыми. В этом случае D не зависит от ϵ_1 , и в возмущениях a будут вековые члены. Как указано, это условие всегда удовлетворяется бесконечным числом значений j_1 и j_2 , если n_1 и n_2 соизмеримы. Но из наблюдений невозможно определить, соизмеримы или нет n_1 и n_2 , потому что всегда имеется граница точности, с которой могут быть произведены наблюдения, и в пределах этой границы находится бесконечно много соизмеримых и несоизмеримых чисел. Поэтому имеется столько же оснований сказать, что вековые члены в a этого типа существуют, сколько для того, чтобы сказать, что они не существуют. Однако они не имеют практического значения, потому что отношение n_1 к n_2 не может быть выражено малыми целыми числами и коэффициенты этих членов, если они существуют, так малы, что они нечувствительны для значений времени, которые обычно употребляются.

228. Члены второго порядка по отношению к массам. Члены второго порядка определяются уравнениями (29) § 210. Правые части этих уравнений являются произведениями частных производных по элементам от правых частей, которые встречаются в членах первого порядка, и возмущений первого порядка соответствующих элементов. Так, возмущения узлов второго порядка определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \delta \varphi_1^{(0,2)}}{dt} &= \frac{m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} \sin i_1} \sum_{s_1} \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial i_1 \partial s_1} s_1^{(0,1)}, \\ \frac{d \delta \varphi_2^{(1,1)}}{dt} &= \frac{m_2}{n_1 a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} \sin i_1} \sum_{s_2} \frac{\partial^2 R_{1,2}}{\partial i_1 \partial s_2} s_2^{(1,0)}, \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

где s_1 и s_2 соответственно представляют элементы орбиты m_1 и m_2 .

¹⁾ Мемуар, представленный Парижской академией наук.

²⁾ Мемуары Берлинской академии, 1776.

³⁾ *Journal de l'Ecole Polytechnique*, т. XV.

Частная производная $\frac{\partial^2 B_{1,2}}{\partial i_1 \partial s_1}$ является суммой периодических и постоянных членов; $s_1^{(0,1)}$ и $s_2^{(1,0)}$ — суммы периодических членов и членов, содержащих множителем время в первой степени. Поэтому произведения $\frac{\partial_2 R_{1,2}}{\partial i_1 \partial s_1} s_1^{(0,1)}$ и $\frac{\partial_2 R_{1,2}}{\partial i_1 \partial s_2} s_2^{(1,0)}$ содержат члены четырех видов: а) $\frac{\sin}{\cos} D$, где D содержит время; б) $t \frac{\sin}{\cos} D$; в) $\frac{\sin}{\cos} D_2$, где D_2 не зависит от времени, и д) $t \frac{\sin}{\cos} D_2$. Интегралы от членов этих четырех типов соответственно равны:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{-\cos D}{j_1 n_1 + j_2 n_2}; \quad \text{б) } t \frac{-\cos D}{j_1 n_1 + j_2 n_2} + \frac{\sin D}{(j_1 n_1 + j_2 n_2)^2}; \\ \text{в) } & t \frac{\sin}{\cos} D_2; \quad \text{д) } \frac{t^2}{2} \frac{\sin}{\cos} D_2. \end{aligned}$$

Поэтому возмущения второго порядка по отношению к массам имеют чисто периодические члены, члены Пуассона или члены, в которых тригонометрические члены умножаются на время, вековые члены, где время встречается в первой степени, и вековые члены, где время встречается во второй степени. Это имеет место для всех элементов, кроме большой полуоси, в случае которой коэффициенты членов третьего и четвертого типа равны нулю, как это впервые доказал Пуассон.

В членах третьего порядка по отношению к массам имеются вековые члены в возмущениях всех элементов кроме a_1 , которые пропорциональны третьей степени времени и т. д.

229. Метод Лагранжа для определения вековых вариаций. Присутствие вековых членов в выражениях для элементов, повидимому, указывает, что если предположить, что ряды представляют элементы для всех значений времени, то элементы изменяются без предела вместе с временем. Но этот вывод ни в коем случае не является непременно верным. Например, рассмотрим функцию:

$$\sin(cmt) = cmt - \frac{c^3 m^3 t^3}{3!} + \dots, \quad (102)$$

где c есть постоянная и m — очень малый множитель, который может играть роль массы. Ряд в правой части сходится для всех значений t . Эта функция никогда не превышает единицы для любого значения времени; однако, если дано ее разложение по степеням m и если взяты немногие правые члены, не зная закона образования коэффициентов, то может показаться, что ряд представляет функцию, бесконечно увеличивающуюся в числовом значении со временем.

Следуя идее, что вековые члены могут появиться в разложении функций, которые всегда конечны, Лагранж показал (см. «Collected Works», т. V и VI) в известных предположениях, которые логически не были подтверждены, что вековые члены на самом деле являются разложениями

периодических членов очень долгого периода. Эти члены отличаются от вариаций долгого периода (§ 226) тем, что они происходят из малых некомпенсированных частей периодических вариаций, вместо того чтобы происходить непосредственно из специальных условий планетных соединений. Как правило эти члены очень малы, и их периоды гораздо длиннее, чем периоды собственно членов долгого периода. Здесь мы имеем возможность дать лишь весьма общее понятие о методе Лагранжа.

Первый шаг в методе Лагранжа — это преобразование переменных при помощи уравнений:

$$\left. \begin{aligned} h_j &= e_j \sin \pi_j, \\ l_j &= e_j \cos \pi_j, \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

и

$$\left. \begin{aligned} p_j &= \operatorname{tg} i_j \sin \varnothing_j, \\ q_j &= \operatorname{tg} i_j \cos \varnothing_j, \end{aligned} \right\} \quad (104)$$

где e_j , π_j и т. д. являются элементами орбиты m_j , а l_j — новая переменная, которую не следует смешивать со средней долготой. Эти преобразования надо сделать одновременно в элементах орбит всех планет. Элементы a_j и ε_j остаются без изменения. Отбрасывая индексы в уравнениях (103) и (104), находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= +e \cos \pi \frac{d\pi}{dt} + \sin \pi \frac{de}{dt}, \\ \frac{dl}{dt} &= -e \sin \pi \frac{d\pi}{dt} + \cos \pi \frac{de}{dt}, \\ \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{\partial R}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial e} + \frac{\partial R}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial e} = \sin \pi \frac{\partial R}{\partial h} + \cos \pi \frac{\partial R}{\partial l}, \\ \frac{\partial R}{\partial \pi} &= \frac{\partial R}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \pi} = e \cos \pi \frac{\partial R}{\partial h} - e \sin \pi \frac{\partial R}{\partial l}, \\ \frac{dp}{dt} &= +\operatorname{tg} i \cos \varnothing \frac{d\varnothing}{dt} + \sec^2 i \sin \varnothing \frac{di}{dt}, \\ \frac{dq}{dt} &= -\operatorname{tg} i \sin \varnothing \frac{d\varnothing}{dt} + \sec^2 i \cos \varnothing \frac{di}{dt}, \\ \frac{\partial R}{\partial \varnothing} &= \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \varnothing} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \varnothing} = \operatorname{tg} i \cos \varnothing \frac{\partial R}{\partial p} - \operatorname{tg} i \sin \varnothing \frac{\partial R}{\partial q}, \\ \frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{\partial R}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial R}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial i} = \sec^2 i \sin \varnothing \frac{\partial R}{\partial p} + \sec^2 i \cos \varnothing \frac{\partial R}{\partial q}. \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Тогда из уравнений (72) следует:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dh}{dt} &= \frac{m_2 \sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial l} - \frac{m_2 \sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \frac{h}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \\
 &\quad + \frac{m_2 l \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{dl}{dt} &= -\frac{m_2 \sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h} - \\
 &\quad - \frac{m_2 \sqrt{1-h^2-l^2}}{na^2} \frac{l}{1+\sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - \\
 &\quad - \frac{m_2 h \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-h^2-l^2}} \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{dp}{dt} &= \frac{m_2}{na^2 \sqrt{1-h^2-l^2} \cos^3 i} \frac{\partial R}{\partial q} - \\
 &\quad - \frac{m_2 p}{2na^2 \sqrt{1-h^2-l^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left[\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right], \\
 \frac{dq}{dt} &= \frac{-m_2}{na^2 \sqrt{1-h^2-l^2} \cos^3 i} \frac{\partial R}{\partial p} - \\
 &\quad - \frac{m_2 q}{2na^2 \sqrt{1-h^2-l^2} \cos i \cos^2 \frac{i}{2}} \left[\frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Разлагая правые части этих уравнений и пренебрегая всеми членами выше первого порядка¹⁾ относительно h , l , p и q , мы приведем эти уравнения к виду:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dh}{dt} &= + \frac{m_2}{na^2} \frac{\partial R}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= - \frac{m_2}{na^2} \frac{\partial R}{\partial h}, \\
 \frac{dp}{dt} &= + \frac{m_2}{na^2} \frac{\partial R}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= - \frac{m_2}{na^2} \frac{\partial R}{\partial p}.
 \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Члены, содержащие производные от R по ε , i и π , не входят в эти уравнения, потому что они содержат множителями h , l , p или q . Этот факт вытекает из свойств C , данных в § 226 и формы уравнений (103) и (104).

Каждая возмущающая планета вносит в правые части уравнений (107) члены, подобные написанным и возникающим от m_2 . Дифференциальные уравнения не строго верны, так как взято первое приближение, пренебрегая высшими степенями переменных.

Второй этап заключается в методе рассмотрения дифференциальных уравнений. Разложения $R_{i,j}$ содержат некоторые члены, не зависящие

¹⁾ Члены выше первого порядка отбрасываются повсюду в одном из дальнейших преобразований этого метода.

Коэффициенты $c_{i,j}$ зависят только от больших полуосей (ϵ_j не появляется в вековых членах), которые рассматриваются как постоянные, так как большие полуоси не имеют вековых членов в возмущениях первого и второго порядков по отношению к массам. Здесь надо заметить, что предположение, что $c_{i,j}$ является постоянным, не строго верно, так как большие полуоси имеют периодические возмущения, могущие достигать значительной величины.

Когда эти линейные уравнения решены с помощью метода, примененного в § 160, то значения переменных находятся в форме:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \sum_{j=1}^n H_{i,j} e^{\lambda_j t}, & l_i &= \sum_{j=1}^n L_{i,j} e^{\lambda_j t}, \\ p_i &= \sum_{j=1}^n P_{i,j} e^{\mu_j t}, & q_i &= \sum_{j=1}^n Q_{i,j} e^{\mu_j t}, \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

где $H_{i,j}$, $L_{i,j}$, $P_{i,j}$ и $Q_{i,j}$ — постоянные, зависящие от начальных условий. Подробное рассмотрение показывает, что λ_j и μ_j чисто мнимы с очень малыми абсолютными значениями, поэтому h_i , l_i , p_i и q_i колеблются около средних значений с очень длинными периодами. Или так как e_j и i_j выражаются как суммы квадратов h_j , l_j , p_j и q_j , то следует, что они также совершают небольшие колебания с длинными периодами; например, эксцентриситет земной орбиты теперь уменьшается и будет продолжать уменьшаться приблизительно в течение 24 000 лет.

Уравнения (109) имеют интегралы, впервые найденные Лапласом в 1784 г., которые практически приводят к той же теореме. Они таковы:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_j n_j a_j^2 (h_j^2 + l_j^2) &= \text{const.} = C, \\ \sum_{j=1}^n m_j n_j a_j^2 (p_j^2 + q_j^2) &= C', \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

или вследствие (103) и (104):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_j n_j a_j^2 e_j^2 &= C, \\ \sum_{j=1}^n m_j n_j a_j^2 \text{tg}^2 i_j &= C', \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

где n_j есть среднее движение тела m_j . Как определено первоначальными условиями, постоянные C и C' очень малы, и так как левые части (112) состоят лишь из одних положительных членов, то ни одно e_j или i_j

никогда не может стать очень большим. Исключение может быть, если соответствующее m_j очень мало сравнительно с другими.

Уравнения (112) дают знаменитые теоремы Лапласа о том, что эксцентриситеты и наклонности могут изменяться лишь в очень узких пределах. Хотя доказательство страдает отсутствием полной строгости, однако результаты замечательны и значительны.

230. Вычисление возмущений с помощью механических квадратур. Если второй член второго множителя в (84) по абсолютной величине больше единицы, то ряд (87) расходится и не может быть употреблен при вычислении возмущений. Разложения могут оказаться непригодными, если r_1 и r_2 почти равны, или иногда, когда они не слишком близки к равенству, то благодаря тому, что l велико. В последнем случае иногда может быть употреблен другой способ разложения¹⁾, но бывают случаи, когда ни один метод не пригоден. Оба они оказываются неприменимыми, если две орбиты, расположенные в одной и той же плоскости, пересекаются, потому что в этом случае

$$r_{1,2}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(u_1 - u_2 + \tau_2 - \tau_1)$$

исчезает, когда два тела приходят в точку пересечения их орбит в одно и то же время. Если периоды не будут соизмеримыми между собой особым образом, то это обязательно случится. Конечно, нет необходимости в действительном исчезновении $r_{1,2}$ для того, чтобы разложение уравнения (84) перестало сходиться.

Возмущения могут быть вычислены методом механических квадратур, не разлагая явно пертурбационную функцию. Следовательно, этим методом можно пользоваться для вычисления возмущающих действий планет на кометы и в других случаях, когда разложение $R_{1,2}$ совсем не сходится или сходится медленно.

Пусть s представляет элемент орбиты m_1 ; тогда уравнения (77) могут быть написаны в форме:

$$\frac{ds}{dt} = f_s(t),$$

и возмущения первого порядка в интервале $t_n - t_0$ будут таковы:

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t_n} f_s(t) dt, \quad (113)$$

где s_0 есть значение s в момент $t = t_0$.

Единственная трудность в вычислении возмущений состоит в образовании интегралов, указанных в (113). Если пертурбационная функция не может быть явно разложена по t , то нельзя найти подинтегральную функцию $f_s(t)$. Но во всяком случае значения $f_s(t)$ могут быть найдены для любых значений t , и из значений $f_s(t)$ можно получить прибли-

¹⁾ Тиссеран, *Mécanique Céleste*, т. I, гл. XXVIII.

подразделения первоначально выбранных интервалов. Есть вторая причина, по которой результаты, полученные при помощи механических квадратур, могут быть недостаточно точны. До сих пор предполагалось, что $f(t_s)$, являясь функцией одного t , или, другими словами, что элементы орбит, от которых эта функция зависит, постоянны. Это то предположение, которое делается при вычислении возмущений первого порядка. Если оно недостаточно точно, то можно вычислить новые значения $f_s(t_1), \dots, f_s(t_n)$, употребляя соответствующие значения элементов s , которые были найдены при помощи первого интегрирования. По новым значениям $f_s(t_1), \dots, f_s(t_n)$ можно получить более приближенное значение интеграла. Если интервал $t_n - t_0$ не слишком велик, то этот процесс сходится и интеграл может быть найден с любой требуемой степенью приближения, потому что это есть просто метод последовательных приближений Пикара, законность которого установлена¹⁾. На практике всегда лучше выбирать интервал $t_n - t_0$ настолько коротким, чтобы не требовалось никаких повторных вычислений с улучшенными значениями функции на концах подинтервалов. Для каждого нового интервала интегрирования употребляются значения элементов, полученные для конца предыдущего интервала.

Отсюда следует, что этот метод дает возможность вычислить не только возмущения первого порядка, но также возмущения всех порядков лишь с теми ограничениями, что интервалы не могут быть взяты бесконечно малыми и вычисление не может быть сделано с бесконечно многими положениями исследуемых тел.

Процесс вычисления возмущений при помощи метода механических квадратур по сравнению с процессом, в котором употребляется разложение пертурбационной функции, имеет свои преимущества и недостатки. Преимущество — что в применении механических квадратур нет необходимости выражать возмущающие силы явным образом через элементы и время. Это иногда имеет большое значение, так как в случаях, когда эксцентриситеты и наклонности велики, как в орбитах некоторых астероидов, эти выражения, являющиеся рядами, очень медленно сходятся; и в случае орбит, эксцентриситеты которых превосходят 0,6627, или в случае, если радиус какой-либо одной орбиты равен какому-либо радиусу другой, ряды расходятся и не могут быть употреблены. Метод механических квадратур одинаково применим ко всем видам орбит; единственное ограничение в том, что интервалы должны быть взяты достаточно короткими.

Этот метод обычно употребляется в одной из своих многих форм при вычислении возмущений орбит комет.

Недостаток — в том, что для нахождения при помощи механических квадратур значений элементов для какого-либо данного времени необходимо вычислить их для всех промежуточных эпох. Будучи чисто числовым, этот метод не освещает общий характер возмущений и не ведет к общим теоремам, касающимся устойчивости системы. Это вопросы большого интереса, и в отношении их сделаны наиболее блестящие открытия в небесной механике.

¹⁾ Picard, *Traté d'Analyse*, т. II, гл. XI, отд. 2.

231. Общие размышления. Астрономия — старейшая из наук и в известном смысле прародительница всех других. Относительно простые и регулярно повторяющиеся небесные явления впервые показали людям во времена древних греков, что природа систематична и упорядочена. О важности этого урока можно заключить из того, что он является фундаментом, на котором зиждется вся наука. В течение долгого времени прогресс был чрезвычайно медленен. Потребовались века наблюдений и попыток теорий для объяснения их, прежде чем, наконец, Кеплеру удалось вывести законы, являющиеся первым приближением к описанию движения планет. Удивительно то, что несмотря на отвращения, вызываемые неустойчивостью социального строя, имелось так много людей, находивших наивысшее удовольствие терпеливо производить трудные наблюдения, требовавшиеся для открытия законов небесных движений.

Работа Кеплера завершила предварительную эпоху в две с лишним тысячи лет, и блестящие открытия Ньютона дали начало другой эпохе. Изобретение анализа Ньютоном и Лейбницем дало впервые математический аппарат, вполне пригодный для того, чтобы подойти к таким трудным проблемам, как возмущающие действия Солнца на движение Луны или взаимные, возмущения планет. К счастью, около того же времени был изобретен телескоп, так как без его помощи было бы невозможно производить точные наблюдения, давшие числовые данные для математических теорий, с помощью которых они были испытаны. История небесной механики в течение XVIII столетия представляет собой сплошной ряд триумфов. Аналитический фундамент, заложенный Клеро, Даламбером и Эйлером, явился основанием для великолепных достижений Лагранжа и Лапласа. Их последователи в XIX столетии в общем при помощи тех же методов продвинули вперед теории движений Луны и планет до более высоких порядков приближения и сравнили их с более многочисленными и точными наблюдениями. В связи с этим особенно надо вспомнить имена Леверье, Делоне, Ганзена и Ньюкомба. В конце XIX столетия началась третья эпоха, отличающаяся новыми взглядами и новыми методами, по силе и математической строгости на много превосходящими все употребленные до сего времени. Она была открыта Гиллом в его «Researches on the Lunar Theory», но главную роль сыграли блестящие вклады Паункаре в проблему трех тел.

В настоящее время небесную механику можно рассматривать как наиболее совершенную науку и как одно из великолепнейших достижений человеческого ума. Ни одна из других наук не покоится на стольких наблюдениях, простирающихся на такое длинное время. Ни одна другая наука не может так критически проверять свои заключения и нигде теория и опыт не находятся в столь совершенном согласии. Имеются тысячи малых отклонений от движения по коническим сечениям в орбитах планет, спутников и комет, где теория и наблюдения точно согласуются, в то время как единственные необъясненные неправильности (вероятно, вследствие неизвестных сил) составляют немногие малые отклонения в движении Луны и движении перигелия орбиты Меркурия. Теория много раз обгоняла практику и указывала на существование особенностей движения, не полученных в то время из наблюдений. Совершенство теории в течение времени, покрытого опытом, дало смелость следовать за нею

в прошлые времена до начала наблюдений и в будущее, когда, может быть, они прекратятся. Как телескоп дал возможность глазу человека увидеть чудеса необъятного пространства, так небесная механика открыла в пределах досягаемости его разума не меньшие чудеса соответственно необъятного времени. Поэтому неудивительно, что человек находит глубокое удовлетворение в области, где он в значительной мере освободился от ограничений как пространства, так и времени.

ЗАДАЧИ

1. Предположим: а) что $R_{1,2}$ велико и почти постоянно; б) что $R_{1,2}$ велико и быстро меняется; с) что $R_{1,2}$ мало и почти постоянно. Если возмущения вычислены механическими квадратурами, то как надо выбрать $t_n - t_0$ соответственно в этих трех случаях и в каком соотношении должно быть число подразделений $t_n - t_0$?

2. Пертурбационная функция содержит обратные величины расстояния от возмущающей до возмущенной планеты. Это называется *главной частью* и дает наибольшую трудность в разложении. Сколько отдельных обратных расстояний должно быть разложено, чтобы вычислить в системе одного Солнца и n планет а) возмущения первого порядка одной планеты; б) возмущения первого порядка двух планет; с) возмущения второго порядка одной планеты и д) возмущения третьего порядка одной планеты?

3. Как упрощаются разложения пертурбационной функции, если взаимные наклонности орбит равны нулю и если орбиты — круги?

4. Какие виды членов вообще появляются в возмущениях третьего порядка по отношению к массам?

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Теория возмущений, относящаяся к теории Луны, была развита с геометрической точки зрения Ньютоном. Мемуары Клеро и Даламбера в 1747 г. содержат значительные шаги вперед, ставя решения в зависимость от интегрирования дифференциальных уравнений при помощи рядов. Клеро скоро получил возможность применить свой метод интегрирования к возмущениям кометы Галлея планетами Юпитером и Сатурном. Эта комета была наблюдена в 1531, 1607 и 1682 гг. Если бы ее период был постоянен, то она снова прошла бы через перигелий в середине 1757 г. Клеро вычислил возмущения, происходящие от притяжений Юпитера и Сатурна, и предсказал, что прохождение через перигелий будет 13 апреля 1759 г. Он заметил, что вычисленное время, возможно, ошибочно на месяц вследствие неопределенности масс Юпитера и Сатурна и возможности возмущений от неизвестных планет кроме этих двух. Комета прошла через перигелий 13 марта, блестяще доказав ценность методов Клеро.

Теория возмущений планет была начата Эйлером, мемуары которого о взаимных возмущениях Юпитера и Сатурна в 1748 и 1752 гг. получили премии Французской академии. В этих мемуарах было дано первое аналитическое развитие метода вариации параметров. Уравнения не были вполне общими, так как он не считал элементы изменяющимися одновременно. Первые шаги в развитии пертурбационной функции были также сделаны Эйлером.

Лагранж, вклады которого в небесную механику носили наиболее блестящий характер, написал свой первый мемуар о возмущениях Юпитера и Сатурна в 1766 г. В этой работе он еще дальше развил метод вариации параметров, оставляя, однако, все еще неправильными конечные уравнения тем, что считал большие оси и эпохи прохождения через перигелий как постоянные в выводе уравнений для определения вариаций. Уравнения для наклонности, узла и долготы перигелия от узла были совершенно правильны. В выражениях для средних долгот планет имелись члены, пропорциональные первой и второй степеням времени. Она происходили всецело от несовершенства метода, и их истинная форма есть форма членов долгого периода, как это было показано Лапласом в 1784 г. при

помощи рассмотрения членов третьего порядка в эксцентриситетах. Метод вариации параметров впервые был полностью развернут в 1782 г. Лагранжем в премированном мемуаре о возмущениях комет, двигающихся по эллиптическим орбитам. Значительно более широкое применение метода вариации параметров дано Делоне (Delaunay), теория Луны которого по существу является длинным рядом последовательных применений процесса, каждый шаг которого удалял один из членов пертурбационной функции.

В 1773 г. Лаплас представил Французской академии наук свой первый мемуар. В нем он доказал свою знаменитую теорему, что до второго порядка эксцентриситета большие оси и, следовательно, средние движения планет не имеют вековых членов. Эта теорема была расширена Лагранжем в 1774 и 1776 гг. до всех степеней эксцентриситетов и синуса угла взаимной наклонности для возмущений первого порядка по отношению к массам. В 1809 г. Пуассон доказал, что большие оси не имеют чисто вековых членов в возмущениях второго порядка относительно масс. В 1878 г. Аретю (Haretu) в своей диссертации в Сорбонне доказал, что имеются вековые вариации в выражениях для больших осей в членах третьего порядка относительно масс. В XIX томе *Annales de l'Observatoire de Paris* Эгинитис (Eginitis) рассмотрел члены еще более высоких степеней относительно масс.

Лагранж начал изучение вековых членов в 1774 г., введя переменные h , l , p , и q . Исследования были выполнены Лагранжем и Лапласом, каждый из них дополнял и расширял работу другого, пока в 1784 г. их работа не была завершена открытием Лапласа его знаменитых уравнений:

$$\sum_{j=1}^n m_j n_j a_j^2 e_j^2 = C, \quad \sum_{j=1}^n m_j n_j a_j^2 \lg^2 i_j = C'.$$

Эти уравнения были выведены, употребляя в дифференциальных уравнениях только линейные члены. Лаверье, Гилл и другие расширили работу методами последовательных приближений до членов высших степеней. Ньюкомб (*Smithsonian Contributions to Science*, т. XXI, 1876) установил наиболее полные результаты, представив в случае планетных возмущений элементы чисто периодическими функциями времени, которые формально удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения. Если бы эти ряды были сходящимися, устойчивость солнечной системы была бы обеспечена, но Пуанкаре показал, что они вообще расходятся («*Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*», гл. IX). Линдстедту (Lindstedt) и Гюльдену (Guldin) также удалось проинтегрировать уравнения движения n тел при помощи периодических рядов, которые, однако, вообще расходятся.

Таус, Эри (Airy) Адамс (Adams), Лаверье, Ганзен и многие другие сделали важные вклады в планетную теорию в различных направлениях. Адамс и Лаверье предсказали существование и видимое положение Нептуна из необъясненных неправильностей в движении Урана. Позднее Пуанкаре обратил свое внимание на небесную механику, опубликовав премированный мемуар в *Acta Mathematica*, т. XIII. Этот мемуар был расширен и опубликован в виде книги под заглавием: «*Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*». Пуанкаре с несравненной гениальностью приложил к проблеме все ресурсы современной математики; он внес в исследование такое богатство идей и избрал методы такого могущества, что предмет в своем теоретическом виде в его руках был совершенно революционизирован. Нет сомнения, что в течение следующих пятидесяти лет многие работы будут посвящены приложению и расширению предложенных им методов. Рекомендуем следующие работы:

«Небесная механика» («*Mécanique Céleste*») Лапласа, содержащая все, что было известно в небесной механике в то время, когда она была написана (1799 — 1805 гг.).

О вариации параметров — *Annales de l'Observatoire de Paris*, т. I; «Небесная механика» («*Mécanique Céleste*») Тиссерана, т. I; «Теория Луны» («*Lunar Theory*») Броуна; «Планетные движения» («*Planeten-Bewegungen*») Дзиевека (Dziobek).

О разложении пертурбационной функции — *Annales de l'Observatoire de Paris*, т. I; «Небесная механика» Тиссерана, т. I; «Entwickelung des Products einer Potenz des Radius-Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie» Ганзена, *Abh. d. K. Sachs. Ges. zu Leipzig*, т. II; мемуары Ньюкомба об общих интегралах движения планет; «Les Méthodes Nouvelles» Пуанкаре, т. I, гл. VI.

Об устойчивости солнечной системы — «Небесная механика» Тиссерана, т. I, гл. XI, XXV, XXVI и т. IV, гл. XXVI; Гюльден (Gulden) «Traite Analytique des Orbites absolues», т. I; Ньюкомб («Smithsonian Contributions»), т. XXI; Пуанкаре («Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste», т. II, гл. X).

По небесной механике в целом не существует лучшей работы, чем Тиссерана, которую должен иметь каждый особенно интересующийся этим предметом. Другой работой, заслуживающей внимания, является «Mechanik des Himmels» Шарлье (Charlier), которая наряду с высоким достоинством общего содержания несправедливо с другими трудами в рассмотрении периодических решений задачи трех тел.