

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ

103. **Общие соображения.** В главе V было показано, как можно определить постоянные интегрирования, возникающие при решении дифференциальных уравнений задачи о двух телах, по начальным значениям координат и составляющих скорости, а затем было показано, как можно найти по этим постоянным элементы орбиты. Следовательно, нужно иметь способ для определения положения и составляющих скорости наблюдаемого тела в некоторый момент времени. Трудность этой задачи происходит от того, что наблюдения, сделанные с движущейся Земли, дают лишь направление прямой, соединяющей наблюдателя с данным объектом, и не дают непосредственно его расстояние. Наблюдение видимого положения лишь устанавливает факт, что тело находится где-нибудь на определенной полупрямой, проходящей через наблюдателя. Поэтому положение тела в пространстве и, конечно, его составляющие скорости наблюдениями не определяются. Отсюда возникает необходимость получить добавочные наблюдения в другие моменты. В промежуток времени перед вторым наблюдением Земля сдвинется, и наблюдаемое тело перейдет в другое место на своей орбите. Второе наблюдение просто определяет другую линию, на которой находится тело в другой момент. Ясно, что задача нахождения положения тела и элементов его орбиты по таким данным представляет некоторые затруднения.

Первый вопрос, требующий решения, естественно, касается числа наблюдений, необходимых для определения элементов орбиты.

Так как орбита определяется шестью элементами, то для определения этих элементов необходимо иметь шесть независимых величин, полученных из наблюдений. Одно полное наблюдение дает две такие величины, а именно угловые координаты тела. Следовательно, для определения орбиты вполне достаточно трех полных наблюдений. По крайней мере ясно, что меньшее число недостаточно. Если наблюдаемое тело — комета, орбита которой — парабола, то один из элементов известен заранее, так как эксцентриситет равен единице и остается найти лишь пять элементов. В этом случае, следовательно, достаточно двух полных и одного наблюдения, дающего одну из двух угловых координат.

109. **Промежуточные элементы.** Видимые положения наблюдаемого тела обычно получаются путем измерения его угловых расстояний и направлений от соседних неподвижных звезд. Так как положения звезд даются в каталогах посредством прямого восхождения и склонения, то результаты получаются в этих координатах, но если требуется, то они могут быть переведены в эклиптическую или какую-либо другую систему.

Предположим, что произведены три наблюдения в моменты t_1 , t_2 и t_3 ; обозначим координаты обычными символами с соответствующими значениями 1, 2 и 3. Прямые восхождения и склонения являются функциями элементов орбиты и времени наблюдения. Эти соотношения могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \varphi(\Omega, i, \omega, a, e, T; t_1), \\ \alpha_2 &= \varphi(\Omega, i, \omega, a, e, T; t_2), \\ \alpha_3 &= \varphi(\Omega, i, \omega, a, e, T; t_3), \\ \delta_1 &= \phi(\Omega, i, \omega, a, e, T; t_1), \\ \delta_2 &= \phi(\Omega, i, \omega, a, e, T; t_2), \\ \delta_3 &= \phi(\Omega, i, \omega, a, e, T; t_3). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Задача состоит в решении этих шести уравнений относительно шести неизвестных элементов. Функции φ и ϕ трансцендентны и зависят от элементов очень сложным образом. В случае эллипса положение в орбите находится посредством уравнения Кеплера, в гиперболе — посредством аналогичного уравнения, а в параболе должно быть решено кубическое уравнение, и во всех трех случаях координаты относительно Земли получаются при помощи нескольких тригонометрических преобразований. Отсюда ясно, что прямое решение уравнений (1) обычными способами получить нельзя.

Хотя основной целью является определение элементов орбиты, но сначала рассмотрим задачу нахождения других величин, определяющих элементы. Эти величины можно рассматривать как промежуточные элементы. Уже говорилось, что элементы могут быть найдены, если известны координаты и составляющие скорости для любой эпохи. Предположим, что требуется найти полярные координаты и их производные, однозначно определяющие прямоугольные координаты и их производные для момента времени второго наблюдения t_2 . Для этой задачи уравнения, соответствующие (1), принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= f(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_1, t_2), \\ \alpha_2 &= \alpha_2, \\ \alpha_3 &= f(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_2, t_3), \\ \delta_1 &= g(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_1, t_2), \\ \delta_2 &= \delta_2, \\ \delta_3 &= g(\alpha_2, \delta_2, \rho_2, \alpha'_2, \delta'_2, \rho'_2; t_2, t_3), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$\alpha'_2 = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \delta'_2 = \frac{d\delta}{dt}, \quad \rho'_2 = \frac{d\rho}{dt} \text{ при } t = t_2.$$

Так как α_2 и δ_2 — наблюдаемые величины, то первое, третье, четвертое и шестое уравнения могут быть решены относительно четырех неизвестных ρ_2 , α'_2 , δ'_2 , ρ'_2 . Таким образом задача приведена к решению

четырёх совместных уравнений, которые, кроме того, гораздо проще, чем уравнения (1). Этим уравнениям можно придать удобную форму, в чем заключается один из методов решения задачи. Впервые он был развит и применен к действительному определению орбит Лапласом в 1780 г., впоследствии этот метод был расширен и изменен в деталях многими позднейшими авторами.

За другую группу промежуточных элементов можно взять три координаты в две эпохи. Предположим, что для этой цели выбраны моменты t_1 и t_3 . Тогда основные уравнения, соответствующие (1), могут быть написаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1, \\ \alpha_2 &= F(\alpha_1, \delta_1, \rho_1, \alpha_3, \delta_3, \rho_3; t_1, t_2, t_3), \\ \alpha_3 &= \alpha_3, \\ \delta_1 &= \delta_1, \\ \delta_2 &= g(\alpha_1, \delta_1, \rho_1, \alpha_3, \delta_3, \rho_3; t_1, t_2, t_3), \\ \delta_3 &= \delta_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

В этом случае уравнения приведены к двум с двумя неизвестными ρ_1 и ρ_3 , и они также могут быть решены. Этот способ решения задачи был предложен Лагранжем в 1778 г., независимо от него он был предложен и выведен несколько иначе Гауссом. В 1801 г. этого способа более или менее близко придерживались многие позднейшие авторы. Несмотря на сотни работ, написанных по теории определения орбит, очень немного, прибавлено к работе Лапласа и Гаусса, что действительно ново или теоретически важно, если не берется более трех наблюдений.

110. Подготовка наблюдений. Наблюдения, полученные астрономом-практиком, независимо от применяемого метода, требуют известных небольших поправок, которые должны быть сделаны до начала вычисления орбиты.

Притяжения Луны и Солнца на экваториальное вздутие Земли вызывают небольшие периодические колебания и медленное вековое изменение в положении плоскости экватора. Так как экватор и эклиптика пересекаются в точках равноденствия, то весеннее равноденствие подвергается небольшим периодическим колебаниям (нута́ция) и медленно передвигается вдоль эклиптики (прецессия). Очевидно, все наблюдения необходимо иметь отнесенными к одной и той же системе координат, и поэтому принято брать среднее равноденствие и положение экватора для начала того года, когда произведены наблюдения.

Наблюдаемые места подвергаются также влиянию aberrации света, происходящей от обращения Земли вокруг Солнца и ее вращения вокруг своей оси. Так как вращение очень медленно по сравнению с обращением, то aberrация, происходящая от первого, относительно мала и обычно ею можно пренебречь, особенно, если наблюдения не очень точны.

Предположим, что α_0 и δ_0 — наблюдаемые прямое восхождение и склонение тела в какой-либо момент. Тогда прямое восхождение и склоне-

ние, отнесенные к среднему равноденствию начала года и исправленные за годичную аберрацию, определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - 15f - g \sin(G + \alpha_0) \operatorname{tg} \delta_0 - h \sin(H + \alpha_0) \sec \delta_0, \\ \delta &= \delta_0 - i \cos \delta_0 - g \cos(G + \alpha_0) - h \cos(H + \alpha_0) \sin \delta_0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где f , g , h , C и H суть вспомогательные величины, называемые бесселевыми постоянными, которые даются в астрономических ежегодниках для каждого дня года. На практике эти числа надо брать из эфемерид. Они зависят от движений Земли, но их вывод относится к области сферической и практической астрономии и здесь приведен быть не может.

Поправки для суточной аберрации таковы:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\alpha &= -0'',322 \cos \varphi \cos(\theta - \alpha_0) \sec \delta_0, \\ \Delta\delta &= -0'',322 \cos \varphi \sin(\theta - \alpha_0) \sin \delta_0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где φ — широта наблюдателя и $\theta - \alpha_0$ — часовой угол объекта во время наблюдения. Вторая из этих поправок не может превышать малой величины $0'',322$, и первая тоже мала за тем исключением, когда δ близко к $\pm 90^\circ$.

111. Очерк метода Лапласа определения орбит. Прежде чем входить в детали, необходимые для определения элементов орбиты каждым из двух обычно применяемых методов, изложим кратко основы каждого метода. Это даст возможность получить понятие о плане действий и оценить взаимоотношения подробностей исследования.

Для сохранения основной мысли предположим, что для определения орбиты имеются лишь три полных наблюдения. Пусть даты наблюдений обозначены через t_1 , t_2 и t_3 , и поэтому прямые восхождения и склонения наблюденного с Земли тела, в эти времена известны. Для определенности в терминологии пусть S обозначает наблюденное тело, обращающееся вокруг Солнца S и наблюденное с Земли E ; ξ , η , ζ — прямоугольные координаты C по отношению к E ; x , y , z — прямоугольные координаты C по отношению к S ; X , Y , Z — прямоугольные координаты S по отношению к E ; ρ — расстояние от E до C ; r — расстояние от S до C ; R — расстояние от E до S .

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho \cos \delta \cos \alpha = \rho \lambda, \\ \eta &= \rho \cos \delta \sin \alpha = \rho \mu, \\ \zeta &= \rho \sin \delta = \rho \nu. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Величины λ , μ и ν , являющиеся направляющими косинусами прямой EC , известны в моменты t_1 , t_2 и t_3 . Расстояние ρ совершенно неизвестно.

Первый шаг. Первый шаг состоит в определении значений первой и второй производных от λ , μ , ν . X , Y и Z в какой-либо момент, близкий к моментам наблюдения, скажем, к t_2 . Ограничимся пока указанием, что это может быть сделано с достаточным приближением, не вдаваясь

в обсуждение, каким методом это лучше произвести. Значение первой производной от λ в течение интервала от t_1 до t_2 в среднем равно:

$$\lambda'_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_2 - t_1},$$

а это очень близко к значению λ' в середине интервала, если λ не изменяется слишком быстро. Приближение тем лучше, чем короче интервал. Подобным образом образуется λ'_{23} . Если интервал $t_3 - t_1$ равняется интервалу $t_2 - t_1$, то значение λ в момент t_2 очень близко к:

$$\lambda'_2 = \frac{1}{2} [\lambda'_{12} + \lambda'_{23}].$$

Если интервалы не равны, то, конечно, можно сделать поправку за их неравенство.

Подобным образом из определения производной следует, что вторая производная от λ в момент t_2 в случае двух равных интервалов приближенно равна:

$$\lambda''_2 = \frac{\lambda'_{21} - \lambda'_{12}}{\frac{1}{2}(t_1 - t_1)}.$$

Первая и вторая производные от μ и ν даются приближенно аналогичными формулами, и это надо понимать так, что когда интервалы настолько коротки, как они обычно бывают на практике, то приближения, особенно полученные усовершенствованными методами, которые будут рассмотрены подробно дальше, очень близки. Астрономические ежегодники дают значения X , Y и Z для каждого дня года, и из этих чисел можно найти значения их первых и вторых производных. Фактически требуются лишь первые производные этих координат.

Второй шаг заключается в наложении условия, что C движется вокруг S согласно с законом тяготения. Предположим, что C не возмущено заметно притяжениями других тел. Тогда его координаты удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3} \quad (7)$$

Но из соотношений между C , E и S следует также, что

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho\lambda - X, \\ y &= \rho\mu - Y, \\ z &= \rho\nu - Z. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставляя эти выражения для x , y и z в уравнения (7), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} (\rho\lambda)'' - X'' &= \frac{-k^2(\rho\lambda - X)}{r^3}, \\ (\rho\mu)'' - Y'' &= \frac{-k^2(\rho\mu - Y)}{r^3}, \\ (\rho\nu)'' - Z'' &= \frac{-k^2(\rho\nu - Z)}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Но так как E также обращается вокруг S согласно закону тяготения, то следует, что

$$\begin{aligned} X'' &= -\frac{k^2 X}{R^3}, \\ Y'' &= -\frac{k^2 Y}{R^3}, \\ Z'' &= -\frac{k^2 Z}{R^3}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (9) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \rho'' + 2\lambda' \rho' + \left[\lambda'' + \frac{k^2 \lambda}{r^3} \right] \rho &= -k^2 X \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \\ \mu \rho'' + 2\mu' \rho' + \left[\mu'' + \frac{k^2 \mu}{r^3} \right] \rho &= -k^2 Y \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \\ \nu \rho'' + 2\nu' \rho' + \left[\nu'' + \frac{k^2 \nu}{r^3} \right] \rho &= -k^2 Z \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Неизвестными величинами в этих уравнениях являются ρ'' , ρ' , ρ и r , из которых первые три входят линейно.

Третий шаг. Третий шаг состоит в определении расстояний S от E и S при помощи уравнений (10) и геометрического условия, которому должны удовлетворять три тела. Чтобы решить уравнения (10) относительно ρ , составим детерминант:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda, \lambda', \lambda'' + \frac{k^2 \lambda}{r^3} \\ \mu, \mu', \mu'' + \frac{k^2 \mu}{r^3} \\ \nu, \nu', \nu'' + \frac{k^2 \nu}{r^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda, \lambda', \lambda'' \\ \mu, \mu', \mu'' \\ \nu, \nu', \nu'' \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Вторая форма детерминанта D получается путем умножения первого столбца на $\frac{k^2}{r^3}$ и вычитания произведения из третьего столбца. Также необходим детерминант, полученный путем замены элементов третьего столбца D правыми частями (10). Опуская общий множитель $\left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right]$, мы напомним этот детерминант в виде:

$$D_1 = -k^2 \begin{vmatrix} \lambda, \lambda', X \\ \mu, \mu', Y \\ \nu, \nu', Z \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Детерминанты D и D_1 включают лишь известные величины.

Определяя из уравнений (10) ρ , найдем:

$$\rho = \frac{D_1}{D} \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right]. \quad (13)$$

К этому уравнению с двумя неизвестными ρ и r должно быть прибавлено уравнение:

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \phi, \quad (14)$$

вытекающее из того, что три тела C , S и E образуют треугольник. Угол ϕ есть угол при E между R и ρ , и это уравнение также содержит лишь неизвестные ρ и r . Задача решения (13) и (14) относительно ρ и r составляет третий шаг. Решение этой задачи дает координаты C при помощи уравнений (8), включающих лишь неизвестное ρ .

Четвертый шаг. Четвертый шаг состоит в определении составляющих скорости C . Из уравнений (8) следует, что

$$\left. \begin{aligned} x' &= \rho' \lambda + \rho \lambda' - X', \\ y' &= \rho' \mu + \rho \mu' - Y', \\ z' &= \rho' \nu + \rho \nu' - Z'. \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Единственным неизвестным в правых частях этих уравнений является ρ' , которое может быть определено из уравнений (10). Выражение для него таково:

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= + \frac{D_2}{2D} \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \\ D_2 &= -k^2 \begin{vmatrix} \lambda, & X, & \lambda'' \\ \mu, & Y, & \mu'' \\ \nu, & Z, & \nu'' \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Поэтому x' , y' и z' становятся известными.

Пятый шаг. Пятый и последний шаг состоит в определении элементов орбиты из положения и составляющих скорости тела. Эта задача уже решена в главе V.

112. Очерк метода Гаусса определения орбит. Первый шаг. Первый шаг метода Гаусса состоит в наложении условия, что C движется в плоскости, проходящей через S . Так как S является началом координат x , y и z , то это условие напишется в виде:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + Cz_1 &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 &= 0, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 &= 0, \end{aligned}$$

где A , B , C — постоянные, зависящие от положения плоскости движения. Результатом исключения неизвестных постоянных A , B и C является уравнение:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Детерминант (17) может быть разложен по элементам трех столбцов, что дает три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} (y_2 z_3 - z_2 y_3) x_1 - (y_1 z_3 - z_1 y_3) x_2 + (y_1 z_2 - z_1 y_2) x_3 &= 0, \\ (x_2 z_3 - z_2 x_3) y_1 - (x_1 z_3 - z_1 x_3) y_2 + (x_1 z_2 - z_1 x_2) y_3 &= 0, \\ (x_2 y_3 - y_2 x_3) z_1 - (x_1 y_3 - y_1 x_3) z_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) z_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Очевидно, эти три уравнения представляют собой лишь различные формы одного и того же, но если девять скобок определены из дополнительных соображений и x_1, x_2, \dots выражены через геоцентрические координаты при помощи (8), то они становятся независимыми с неизвестными ρ_1, ρ_2 и ρ_3 . Скобки являются удвоенными площадями проекций треугольников с вершинами S и положениями C , взятыми попарно на три основные плоскости. Так как в каждом уравнении три площади проектируются на ту же плоскость, то вместо их проекций могут быть взяты самые треугольники. Если $[1, 2], [1, 3]$ и $[2, 3]$ представляют треугольники с вершинами S и C соответственно в моменты $t, t_0, t_1 t_3$ и $t_2 t_3$, то уравнения (8) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} [2, 3] x_1 - [1, 3] x_2 + [1, 2] x_3 &= 0, \\ [2, 3] y_1 - [1, 3] y_2 + [1, 2] y_3 &= 0, \\ [2, 3] z_1 - [1, 3] z_2 + [1, 2] z_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Второй шаг. Второй шаг заключается в разложении отношений треугольников в ряд по степеням интервалов времени. Это дается интегрированием уравнений (7), разложенных в ряды по степеням интервалов времени, и затем подстановкой результатов для $t = t_1, t_2, t_3$ в коэффициенты (18) или (19). Поскольку ряды основаны на уравнениях (7), то наложено условие, что C движется около S согласно закону тяготения. Чтобы не затягивать рассуждения (подробности см. § 127), дадим сразу результаты. Для упрощения письма положим:

$$\left. \begin{aligned} k(t_2 - t_1) &= \theta_3, \\ k(t_3 - t_2) &= \theta_1, \\ k(t_3 - t_1) &= \theta_2, \\ \theta_2 &= \theta_1 + \theta_3. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В этом обозначении отношения площадей треугольников $[2, 3]$ и $[1, 2]$ к $[1, 3]$ таковы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{[2, 3]}{[1, 3]} &= \frac{\theta_1}{\theta_2} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{r^2} + \dots \right], \\ \frac{[1, 2]}{[1, 3]} &= \frac{\theta_3}{\theta_2} \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r^2} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Третий шаг. Третий шаг состоит в разложении уравнений для определения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 . Результаты подстановки уравнений (8) и (21) в (19) таковы:

$$\left. \begin{aligned} & \theta_1 \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] (\lambda_1 \rho_1 - X_1) - \theta_2 (\lambda_2 \rho_2 - X_2) + \\ & \quad + \theta_3 \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] (\lambda_3 \rho_3 - X) = 0, \\ & \theta_1 \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] (\mu_1 \rho_1 - Y_1) - \theta_2 (\mu_2 \rho_2 - Y_2) + \\ & \quad + \theta_3 \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] (\mu_3 \rho_3 - Y_3) = 0, \\ & \theta_1 \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] (\nu_1 \rho_1 - Z_1) - \theta_2 (\nu_2 \rho_2 - Z_2) + \\ & \quad + \theta_3 \left[1 + \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] (\nu_3 \rho_3 - Z_3) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Эти уравнения содержат неизвестные ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 и r_2 , из которых три первые входят линейно. Так как r_2 входит лишь умноженным на малые величины θ_1^2 , θ_2^2 или θ_3^2 , то предположим, что в первом приближении этими членами можно пренебречь, после чего ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 определятся линейными уравнениями. Однако детальное рассмотрение возникающих детерминантов показывает, что необходимо сохранить члены с r_2 даже в первом приближении.

Решение уравнений (22) относительно ρ_2 имеет форму:

$$\Delta \rho_2 = P + \frac{Q}{r_2^3}, \quad (23)$$

где Δ — детерминант, составленный из коэффициентов при ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , а P и Q — функции известных величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, X_1, Y_1, \dots$

Так как S , E и C образуют треугольник в момент t_2 , то величины ρ_2 и r_2 удовлетворяют уравнению:

$$r_2^2 = \rho_2^2 + R_2^2 - 2\rho_2 R_2 \cos \phi_2. \quad (24)$$

Решая любые два уравнения из (22) относительно ρ_1 и ρ_3 , мы получим формулы вида:

$$\left. \begin{aligned} M\rho_1 &= P_1 \rho_2 \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] + Q_1, \\ M\rho_3 &= P_3 \rho_2 \left[1 - \frac{1}{6} \frac{\theta_2^2 - \theta_3^2}{r_2^3} + \dots \right] + Q_3, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где M , P_1 , P_3 суть функции известных величин, Q_1 и Q_3 содержат как неизвестное лишь r .

Четвертый шаг. Четвертый шаг состоит в определении ρ_1 и ρ_3 . Величины ρ_2 и r_2 находятся сначала решением уравнений (23) и (24), что в точности таково же, как третий шаг метода Лапласа, а затем ρ_1 и ρ_3 даются уравнениями (25).

Пятый шаг. Пятый шаг состоит в определении элементов из известных положений S в моменты t_1 и t_3 . Эти два положения и положение S без дальнейшего труда определяют плоскость орбиты. Гаусс решил задачу определения оставшихся элементов, выведя два уравнения, содержащих лишь два неизвестных. Одно уравнение выведено из отношения площадей треугольников с вершинами S и C в моменты t_1 и t_3 к площади сектора, заключенной между r_1 , r_3 и дугой орбиты, описанной в интервал $t_1 t_3$. Другое уравнение было выведено из уравнения Кеплера в эпохи t_1 и t_3 . Формулы сложны, но эти уравнения быстро решаются методом последовательных приближений. После того как уравнения решены, элементы определяются однозначно без всяких трудностей. Позднее были открыты методы, избегающие многих сложностей, имеющих у Гаусса.

МЕТОД ЛАПЛАСА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ

113. Определение первой и второй производных угловых координат из трех наблюдений. В описании (§ 111) этого метода определения орбит было указано, что прежде всего нужно получить первую и вторую производные угловых координат или направляющих косинусов λ , μ и γ .

Положим $k(t - t_0) = \tau$. Тогда уравнения (7) принимают вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2} = -\frac{z}{r^3}. \quad (26)$$

Пусть $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\frac{dx}{d\tau} = x'_0$, $\frac{dy}{d\tau} = y'_0$, $\frac{dz}{d\tau} = z'_0$ при $\tau = 0$. Решения уравнений (26) могут быть разложены в ряды по степеням τ , сходящиеся, если значение τ не слишком велико¹⁾. Они будут иметь форму:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x'_0 \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2x}{d\tau^2} \right)_0 \tau^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n x}{d\tau^n} \right)_0 \tau^n + \dots, \\ y &= y_0 + y'_0 \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{d\tau^2} \right)_0 \tau^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n y}{d\tau^n} \right)_0 \tau^n + \dots, \\ z &= z_0 + z'_0 \tau + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2z}{d\tau^2} \right)_0 \tau^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n z}{d\tau^n} \right)_0 \tau^n + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где индекс 0 у скобок указывает, что производные взяты для $\tau = 0$. Вторые производные могут быть заменены правыми членами (26) для $\tau = 0$, третьи производные могут быть заменены первыми производными от правых частей (26) и т. д. Все производные таким образом будут выражены через x_0 , y_0 , z_0 , x'_0 , y'_0 , z'_0 .

Важно знать, для каких интервалов ряды (27) имеют практическое значение. Пределы тем меньше, чем меньше расстояние перигелия и чем больше эксцентриситет, и, кроме того, они зависят от положения тела в его орбите, при $\tau = 0$. Для малых планет, среднее расстояние которых 2,65 и эксцентриситет орбит которых не превосходит 0,4, что гораздо больше эксцентриситета большинства из них, ряды (27) всегда сходятся

¹⁾ Для определения точной области сходимости см. статью Мультонна в *Astronomical Journal*, т. 23, 1903.

для интервала, меньшего 160 дней. Если орбита — парабола, перигелийное расстояние которой равно единице, то ряды (27) сходятся, если интервал времени не превышает 54 дней. Конечно, ряды не имеют практического значения во всей области сходимости. На практике в случае малых планет интервал в 90 дней почти всегда достаточно мал для обеспечения быстрой сходимости (27), а в случае орбит комет интервал в 20 дней редко бывает слишком большим.

Координаты Земли также разлагаются в ряды вида (27), и они быстро сходятся для очень длинных интервалов благодаря малому эксцентриситету земной орбиты. Отсюда из уравнений (8) следует, что ρ , λ , μ и ν могут быть разложены в степенные ряды типа (27). Область применимости этих разложений такова же, как рядов для x , y и z .

Достаточно рассмотреть ряды для λ , потому что таковые для μ и ν им симметричны. Ряды для λ для общего значения τ и τ_1 , τ_2 и τ_3 , которые соответствуют t_1 , t_2 и t_3 , таковы:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \dots, \\ \lambda_1 &= c_0 + c_1 \tau_1 + c_2 \tau_1^2 + \dots, \\ \lambda_2 &= c_0 + c_1 \tau_2 + c_2 \tau_2^2 + \dots, \\ \lambda_3 &= c_0 + c_1 \tau_3 + c_2 \tau_3^2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где c_0 , c_1 , c_2 , ... — постоянные. Если эти уравнения оборваны после членов второй степени, то коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 определяются через наблюдаемые величины λ_1 , λ_2 и λ_3 и интервалы времени τ_1 , τ_2 и τ_3 . Если имеется большое число наблюдений, то можно определить больше коэффициентов; число их равно числу наблюдений.

Простейший способ выражения λ через τ с известными коэффициентами состоит в исключении c_0 , c_1 и c_2 из (28), что дает:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \tau & \tau^2 \\ \lambda_1 & 1 & \tau_1 & \tau_1^2 \\ \lambda_2 & 1 & \tau_2 & \tau_2^2 \\ \lambda_3 & 1 & \tau_3 & \tau_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

Разложение этого детерминанта по элементам первого столбца дает:

$$A_0 \lambda - A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 - A_3 \lambda_3 = 0, \quad (30)$$

где

$$A_0 = \begin{vmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_1^2 \\ 1 & \tau_2 & \tau_2^2 \\ 1 & \tau_3 & \tau_3^2 \end{vmatrix} = -(\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)$$

и где A_1 , A_2 и A_3 получаются из A_0 перестановкой соответственно τ с τ_1 , τ_2 и τ_3 соответственно. Детерминант A_0 отличен от нуля, если τ_1 , τ_2 и τ_3 различны. Теперь уравнение (30) может быть написано в виде:

$$\lambda = \frac{(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} \lambda_1 + \frac{(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} \lambda_2 + \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} \lambda_3. \quad (31)$$

Из уравнения (31)¹⁾ следует, что это уравнение дает точное значение λ при τ_1 , τ_2 и τ_3 ; для других малых значений τ оно дает λ приближенно.

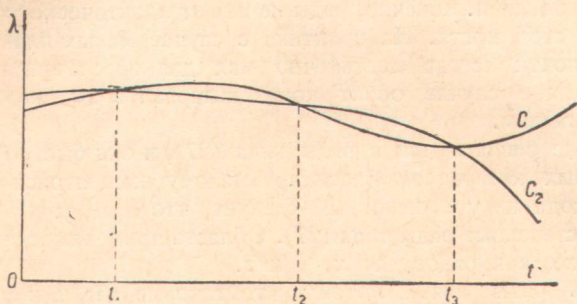


Рис. 31.

Точное значение λ дается бесконечным рядом (28) внутри области его сходимости. С геометрической стороны этот ряд определяет кривую, обозначенную на рис. 31 через C . Парабола (31) определяет другую кривую C_2 . Эти две кривые пересекаются в τ_1 , τ_2 и τ_3 , но вообще не пересекаются нигде больше. Для

малых значений τ две кривые почти совпадают, и приближенное значение λ может быть найдено из параболы вблизи начала.

Из уравнения (31) находим, что первая и вторая производные λ приближенно даются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda' &= \frac{2\tau - (\tau_2 + \tau_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} \lambda_1 + \frac{2\tau - (\tau_3 + \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} \lambda_2 + \frac{2\tau - (\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} \lambda_3, \\ \lambda'' &= \frac{2}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} \lambda_1 + \frac{2}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} \lambda_2 + \frac{2}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} \lambda_3. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Аналогичные выражения можно написать и для μ и γ .

114. Определение производных из более чем трех наблюдений. Чем больше имеется точных и близких между собою наблюдений, тем точнее можно определить λ для малых значений τ и тем больше можно определить ее производных. Предположим, что имеется четыре наблюдения. Тогда λ определяется многочленом третьей степени, аналогичным (31), который проводится к λ_1 , λ_2 , λ_3 и λ_4 соответственно при $\tau = \tau_1$, τ_2 , τ_3 и τ_4 . Развернутое выражение для λ таково:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= + \frac{(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)(\tau_1 - \tau_4)} \lambda_1 + \frac{(\tau - \tau_3)(\tau - \tau_4)(\tau - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_1)} \lambda_2 + \\ &+ \frac{(\tau - \tau_4)(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_4)(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} \lambda_3 + \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)}{(\tau_4 - \tau_1)(\tau_4 - \tau_2)(\tau_4 - \tau_3)} \lambda_4, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

откуда могут быть найдены первая, вторая и третья, но не высшие производные

Отсюда видно, как поступать при любом числе наблюдений. Процесс однозначен и не слишком труден, если число наблюдений не очень велико. Число производных, которые можно определить, по крайней мере приближенно, на одно меньше числа наблюдений, но никогда не употребляется

¹⁾ Формула (31) есть не что иное, как интерполяционная формула Лагранжа. См., например, А. Н. Крылов, Методы приближенных вычислений *Прим. ред.*

производная выше третьего порядка. Если наблюдения простираются на длинный период так, что сходимость ряда (28) прекращается или становится медленной для больших значений τ , то необходимо некоторые из них опустить. Обычно благодаря ошибкам наблюдений четыре или пять наблюдений дадут λ и ее две первые производные с такой же точностью, как и большее число наблюдений.

115. Приближения в определении значений λ , μ , ν и их производных. В приложениях важно знать характер сделанных приближений и все ли нужные величины определены с одинаковой степенью точности. Очевидно, что на эти вопросы не может быть дано точного числового ответа, потому что рассматриваемые орбиты не определены. Но было отмечено, что значения τ не должны быть слишком большими для сходимости рядов (28). Следовательно, значения τ для моментов наблюдений можно рассматривать как малые величины, и мерой приближения служат главные отброшенные члены с низшими степенями τ . Это придает определенность порядку приближения, и опыт показывает, что это является удовлетворительной мерой точности результатов, когда интервалы времени взяты в пределах, упомянутых в § 113.

Сначала предположим, что имеются лишь три наблюдения. Приближения в определении λ и ее производных возникают вследствие пренебрежения высшими членами уравнений (28). Коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 определяются из формул:

$$\left. \begin{aligned} c_0 + c_1 \tau_1 + c_2 \tau_1^2 &= \lambda_1 - c_3 \tau_1^3 - c_4 \tau_1^4 - \dots, \\ c_0 + c_1 \tau_2 + c_2 \tau_2^2 &= \lambda_2 - c_3 \tau_2^3 - c_4 \tau_2^4 - \dots, \\ c_0 + c_1 \tau_3 + c_2 \tau_3^2 &= \lambda_3 - c_3 \tau_3^3 - c_4 \tau_3^4 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Ошибки низших степеней в τ , происходят вследствие пренебрежения членами в правых частях, которые умножены на неизвестную постоянную c_3 . Обозначим ошибки через Δc_0 , Δc_1 и Δc_2 . Тогда:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1, \tau_1, \tau_1^2 \\ 1, \tau_2, \tau_2^2 \\ 1, \tau_3, \tau_3^2 \end{vmatrix} \Delta c_0 &= - \begin{vmatrix} c_3 \tau_1^3 + c_4 \tau_1^4 + \dots, \tau_1, \tau_1^2 \\ c_3 \tau_2^3 + c_4 \tau_2^4 + \dots, \tau_2, \tau_2^2 \\ c_3 \tau_3^3 + c_4 \tau_3^4 + \dots, \tau_3, \tau_3^2 \end{vmatrix} = \\ &= -c_3 \begin{vmatrix} \tau_1^3, \tau_1, \tau_1^2 \\ \tau_2^3, \tau_2, \tau_2^2 \\ \tau_3^3, \tau_3, \tau_3^2 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} \tau_1^4, \tau_1, \tau_1^2 \\ \tau_2^4, \tau_2, \tau_2^2 \\ \tau_3^4, \tau_3, \tau_3^2 \end{vmatrix} + \dots, \end{aligned}$$

аналогичные выражения получим для Δc_1 и Δc_2 . Эти детерминанты легко вычисляются при помощи элементарных правил для упрощения детерминантов, и мы находим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta c_0 &= -c_3 \tau_1 \tau_2 \tau_3 - c_4 \tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + \dots, \\ \Delta c_1 &= +c_3 (\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1) + c_4 (\tau_1 + \tau_2)(\tau_2 + \tau_3)(\tau_3 + \tau_1) + \dots, \\ \Delta c_2 &= -c_3 (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 + \tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Из этих уравнений следует, что c_0 , c_1 и c_2 определены с точностью до членов третьего, второго и первого порядка соответственно.

Теперь рассмотрим первое уравнение из (28). Так как c_1 умножено на τ и c_2 на τ^2 , то каждый из первых трех членов в ряде для λ определен до третьего порядка в τ_j . Беря первую и вторую производные, видим, что λ' и λ'' определены соответственно до второго и первого порядков. Следовательно, λ вообще определяется первыми членами из (28) более точно, чем ее первая производная, а ее первая производная — точнее второй производной. Эта надо помнить в приложениях.

116. Выбор начала времени. До сих пор начало времени не было определено, за исключением предположения, что оно близко к датам наблюдений, так что τ_1 , τ_2 и τ_3 малы. Любая эпоха t_0 , удовлетворяющая этому условию, может быть использована как начало, и сразу возникает задача — определить выбор эпохи наиболее удобным образом.

За начало времени всегда принимается момент второго наблюдения, т. е. $t_0 = t_2$, и поэтому $\tau_2 = 0$. Значение λ точно известно при $\tau = \tau_2 = 0$, а производная от λ при $t = t_2$:

$$\lambda'_2 = c_1 + 2c_2\tau_1 + \dots = c_1,$$

которая подвержена ошибке Δc_1 , равной согласно (35) в этом случае $c_3\tau_3\tau_1$. Подобным образом ошибка в λ'_2 равна:

$$\Delta c_2 = -c_3[\tau_1 + \tau_3].$$

Ошибка в λ'_2 второго порядка, в то время как ошибка в λ'_2 первого порядка. Вообще ошибка первого порядка серьезнее ошибки второго порядка. Но надо заметить, что когда $t_0 = t_2$, то величины τ_1 и τ_2 имеют противоположные знаки, и если интервалы между последовательными наблюдениями равны, то $\tau_1 + \tau_3 = 0$ и ошибка в λ'_2 тоже второго порядка. Следовательно, при $t_0 = t_2$ выгодно иметь последовательные наблюдения, разделенные между собой возможно близкими интервалами времени. Но неблагоприятная погода и другие обстоятельства обычно являются причинами неравномерного распределения наблюдений.

Предположим, что за начало времени взята эпоха первого наблюдения. Величина λ_1 точно известна. Ошибка в λ'_1 равна $\Delta c_1 = c_3\tau_2\tau_3$, которая, как и прежде, второго порядка, но по числовой величине приблизительно в два раза больше, чем в λ'_2 , потому что τ_3 теперь в k раз больше всего интервала между первым и третьим наблюдениями. Ошибка в λ''_1 равна $\Delta c_2 = -c_3(\tau_2 + \tau_3)$, что гораздо больше, чем раньше, потому что τ_3 теперь зависит от всего интервала, занятого наблюдениями, и потому что τ_2 и τ_3 в этом случае оба положительны. Отсюда следует, что за начало времени неудобно принимать время первого наблюдения, и из подобных же соображений надо отвергнуть эпоху третьего наблюдения.

Теперь возникает вопрос, что надо взять за начало времени, если эпоха второго наблюдения не находится посередине между двумя другими наблюдениями. Так как обычно ошибка в λ лишь третьего порядка, а ошибка в λ' лишь второго, в то время как λ'' содержит ошибку первого порядка, ясно, что начало времени должно быть выбрано по возможности

так, чтобы уничтожить ошибку первого порядка. Из второго уравнения (35) следует, что этот результат будет получен, если

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = k(t_1 - t_0) + k(t_2 - t_0) + k(t_3 - t_0) = 0,$$

откуда

$$t_0 = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3). \quad (36)$$

Поэтому лучший выбор начала времени дается вторым уравнением (36), и это значение t_0 становится моментом второго наблюдения, если последовательные наблюдения одинаково удалены одно от другого. При таком выборе t_0 ошибки в λ' и λ'' второго порядка, между тем как λ известна с точностью до третьего порядка.

117. Приближения в случае четырех наблюдений. Когда имеются четыре наблюдения, то уравнения, соответствующие последним трем из (28), таковы:

$$\left. \begin{aligned} c_0 + c_1 \tau_1 + c_2 \tau_1^2 + c_3 \tau_1^3 &= \lambda_1 - c_4 \tau_1^4 + \dots, \\ c_0 + c_1 \tau_2 + c_2 \tau_2^2 + c_3 \tau_2^3 &= \lambda_2 - c_4 \tau_2^4 + \dots, \\ c_0 + c_1 \tau_3 + c_2 \tau_3^2 + c_3 \tau_3^3 &= \lambda_3 - c_4 \tau_3^4 + \dots, \\ c_0 + c_1 \tau_4 + c_2 \tau_4^2 + c_3 \tau_4^3 &= \lambda_4 - c_4 \tau_4^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Детерминат, составленный из коэффициентов при c_0 , c_1 , c_2 и c_3 , равен:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1, & \tau_1, & \tau_1^2, & \tau_1^3 \\ 1, & \tau_2, & \tau_2^2, & \tau_2^3 \\ 1, & \tau_3, & \tau_3^2, & \tau_3^3 \\ 1, & \tau_4, & \tau_4^2, & \tau_4^3 \end{vmatrix} = (\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_1)(\tau_4 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)(\tau_4 - \tau_2)(\tau_4 - \tau_3),$$

что не равно нулю, так как даты наблюдений различны.

Ошибки низшего порядка в c_0 , c_1 , c_2 и c_3 определяются из уравнений (37); если известны только первые члены правой части, то они содержат множителем c_4 . Обозначим эти ошибки через Δc_0 , Δc_1 , Δc_2 и Δc_3 ; требуется определить их порядок относительно τ_j . Выражение для Δc_0 таково:

$$\Delta c_0 = -\frac{c_4}{\delta} \begin{vmatrix} \tau_1^4, & \tau_1, & \tau_1^2, & \tau_1^3 \\ \tau_2^4, & \tau_2, & \tau_2^2, & \tau_2^3 \\ \tau_3^4, & \tau_3, & \tau_3^2, & \tau_3^3 \\ \tau_4^4, & \tau_4, & \tau_4^2, & \tau_4^3 \end{vmatrix}$$

Вынося за знак детерминанта общие множители τ_1 , τ_2 , τ_3 и τ_4 и переставляя столбцы, мы сделаем его равным δ . Следовательно:

$$\Delta c_0 = +c_4 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4. \quad (38)$$

Выражение для Δc_1 таково:

$$\Delta c_1 = \frac{-c_4}{\delta} \begin{vmatrix} 1, & \tau_1^4, & \tau_1^2, & \tau_1^3 \\ 1, & \tau_2^4, & \tau_2^2, & \tau_2^3 \\ 1, & \tau_3^4, & \tau_3^2, & \tau_3^3 \\ 1, & \tau_4^4, & \tau_4^2, & \tau_4^3 \end{vmatrix}.$$

Если в этом детерминанте τ_2 приравнять к τ_1 , то он исчезнет, потому что тогда две строчки становятся тождественными. Поэтому он делится на $\tau_2 - \tau_1$. Подобным же образом он делится на $\tau_3 - \tau_1$, $\tau_4 - \tau_1$, $\tau_3 - \tau_2$, $\tau_4 - \tau_2$ и $\tau_4 - \tau_3$; это значит, что он делится на δ . Все элементы каждого столбца одинаковой степени, и так как каждый член разложения детерминанта имеет множитель из каждого столбца, то члены разложения все одинаковой степени. Этот детерминант девятой степени, так как такова сумма степеней его столбцов. Таким образом Δc_1 третьей степени, потому что δ шестой степени. Кроме того, он симметричен относительно τ_1, \dots, τ_4 , потому что как δ , так и детерминант в числителе симметричны относительно этих величин. Каждый член разложения содержит τ_j лишь в первой степени, потому что τ_j встречается в детерминанте, стоящем в числителе самое большое в четвертой степени и δ — в третьей степени. Числовой коэффициент каждого члена в разложении тот же благодаря симметрии и может быть определен из рассмотрения одного члена. Из рассмотрения произведения главной диагонали элементов находим, что он равен $+1$. Аналогичные рассуждения могут быть сделаны для Δc_2 и Δc_3 , и таким путем найдем, что:

$$\left. \begin{aligned} \Delta c_1 &= -c_4 [\tau_1 \tau_2 \tau_3 + \tau_2 \tau_3 \tau_4 + \tau_3 \tau_4 \tau_1 + \tau_4 \tau_1 \tau_2], \\ \Delta c_2 &= +c_4 [\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_1 \tau_4 + \tau_2 \tau_3 + \tau_2 \tau_4 + \tau_3 \tau_4], \\ \Delta c_3 &= -c_4 [\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Из уравнений (38) и (39) следует, что если имеется четыре наблюдения, то $\lambda, \lambda', \lambda''$ и λ''' определены до малых величин соответственно четвертого, третьего, второго и первого порядков. Обычно λ''' не требуется, хотя его употребляют, когда решение двойное, для определения, которое из двух решений соответствует физической проблеме. В последнем случае выгодно обратить Δc_3 в нуль, определяя t_0 так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 &= 0, \\ t_0 &= \frac{1}{4} (t_1 + t_2 + t_3 + t_4). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

откуда

Если решение задачи приведено в зависимость только от λ, λ' и λ'' , то выгоднее выбрать t_0 так, чтобы Δc_2 исчезло, потому что тогда определяются все величины вплоть до третьего порядка. Эти условия таковы:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_1 \tau_4 + \tau_2 \tau_3 + \tau_2 \tau_4 + \tau_3 \tau_4 &= 0, \\ 6t_0^2 - 3(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)t_0 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Значения t_0 , определенные этим квадратным уравнением, не имеют практического значения, если они не действительны. Дискриминант квадратного уравнения есть:

$$\begin{aligned} 9(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^2 - 24(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4) = \\ = H = 3(t_1 - t_2)^2 + 3(t_1 - t_3)^2 + 3(t_1 - t_4)^2 + \\ + 3(t_2 - t_3)^2 + 3(t_2 - t_4)^2 + 3(t_3 - t_4)^2 > 0. \end{aligned}$$

Поэтому решения всегда действительны и различны:

$$t_0 = \frac{3(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \pm \sqrt{H}}{12}. \quad (42)$$

Чтобы получить конкретное понятие о характере результатов, предположим, что интервалы между последовательными наблюдениями равны T . Тогда уравнение (42) дает:

$$t_0 = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3 + t_4) \pm \frac{1}{6}\sqrt{15} T. \quad (43)$$

Первый член правой части есть средняя эпоха наблюдений, а два значения t_0 находятся на расстоянии $\frac{1}{6}\sqrt{15} T$ по обе стороны этого момента.

Так как интервал между главной эпохой и t_2 и t_3 равен $\frac{1}{2} T$, то следует, что t_0 находится между t_1 и t_2 и отстоит на $(\frac{1}{6}\sqrt{15} - \frac{1}{2}) T \approx \frac{1}{6} T$ от t_2 или расположен симметрично между t_3 и t_4 . На практике самое удобное выбрать $t_0 = t_2$ или $t_0 = t_3$, потому что тогда λ дается точно, коэффициенты (33) наиболее просты, и (41) почти удовлетворено.

При пяти или более наблюдениях рассуждают подобным образом. Для каждого добавочного наблюдения можно определить один добавочный коэффициент в рядах (28), а те, что были определены раньше, становятся известными на один порядок выше в τ_j . В каждом случае один добавочный порядок точности в определении λ'' может быть получен подходящим выбором t_0 , но проще всего, чтобы t_0 равнялось дате наблюдения, наиболее близкой к средней эпохе всех наблюдений.

118. Основные уравнения. Основными уравнениями метода Лапласа являются уравнения (10), где λ , μ , ν , λ' , μ' , ν' , λ'' , μ'' , ν'' даются уравнениями (31) и (32) и соответствующими уравнениями относительно μ и ν . Решая уравнения (10) относительно ρ , ρ' и ρ'' , мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{D_1}{D} \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \\ \rho' &= \frac{D_2}{2D} \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \\ \rho'' &= \frac{1}{D} \left[D_3 - \frac{D_1}{r^3} \right] \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D &= + \begin{vmatrix} \lambda, \lambda', \lambda'' \\ \mu, \mu', \mu'' \\ \nu, \nu', \nu'' \end{vmatrix}, & D_1 &= - \begin{vmatrix} \lambda, \lambda', X \\ \mu, \mu', Y \\ \nu, \nu', Z \end{vmatrix}, \\ D_2 &= - \begin{vmatrix} \lambda, X, \lambda'' \\ \mu, Y, \mu'' \\ \nu, Z, \nu'' \end{vmatrix}, & D_3 &= - \begin{vmatrix} X, \lambda', \lambda'' \\ Y, \mu', \mu'' \\ Z, \nu', \nu'' \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Эти детерминанты подвержены малым ошибкам благодаря тому, что в уравнениях (28) были отброшены высшие члены. После того как ρ и ρ' приближенно определены, можно сделать поправки за эти опущения. Детерминанты также подвержены малым ошибкам, потому что они были выведены в предположении, что наблюдения сделаны из центра Земли вместо одной или нескольких точек на ее поверхности. После того как мы определили приближенное расстояние, наблюдения могут быть исправлены за влияние положения наблюдателя на поверхности Земли.

119. Уравнения для определения r и ρ . Рассмотрим треугольник, образованный S , E и C (рис. 32). Пусть ϕ обозначает угол при E , а φ — угол при C . Тогда мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} R \cos \phi &= X\lambda + Y\mu + Z\nu, \\ \rho &= R \frac{\sin(\phi + \varphi)}{\sin \varphi}, \\ r &= R \frac{\sin \phi}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Подставив (46) в первое уравнение (44), получим:

$$K \sin \phi \cos \varphi + \left[R \cos \phi - \frac{D_1}{DR^3} \right] \sin \varphi = \frac{-D_1}{DR^3 \sin^4 \phi} \sin^4 \varphi.$$

Чтобы упростить это выражение, положим:

$$\left. \begin{aligned} N \sin m &= R \sin \phi \\ N \cos m &= R \cos \phi - \frac{D_1}{DR^3}, \\ M &= -\frac{NDR^3 \sin^3 \phi}{D_1}, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

где знак N выбирается так, чтобы M было положительным. С этим определением знака N первые два уравнения (47) однозначно определяют N и m , и уравнение относительно φ принимает простой вид:

$$\sin^4 \varphi = M \sin(\varphi + m). \quad (48)$$

Величины M и m известны и M положительно.

Теперь исследуем уравнение (48). Так как $\rho=0$, $r=R$ есть решение задачи, то из уравнения (48) следует, что $\varphi=\pi-\phi$ есть решение (48). Это решение относится к положению наблюдателя, и его надо отбросить. Из рис. 32 следует, что φ должно удовлетворять неравенству:

$$\varphi < \pi - \phi. \quad (49)$$

Решение уравнения (48) можно найти, определяя точку пересечения кривых, определенных уравнениями:

$$y_1 = \sin^4 \varphi, \quad y_2 = M \sin(\varphi + m). \quad (50)$$

Если m близко к нулю и отрицательно и M несколько меньше единицы, то эти кривые имеют вид, показанный на рис. 33.

Рассмотрим сначала случай когда $\frac{D_1}{D}$ положительно. Так как и ρ и r должны быть положительны, то из первого уравнения (44) следует, что

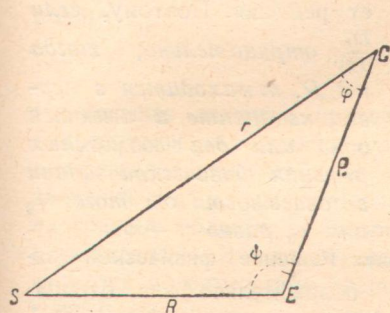


Рис. 32.

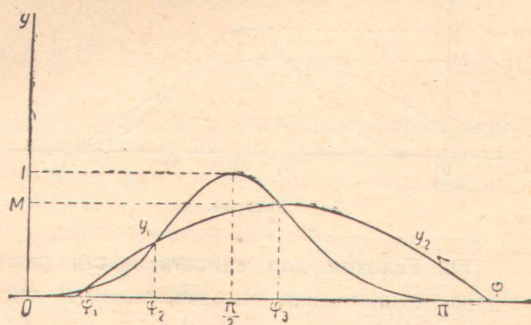


Рис. 33.

в этом случае $r > R$. Так как ϕ меньше 180° , то из (47) следует, что N отрицательно и что m находится в третьем или четвертом квадранте.

Если m находится в четвертом квадранте, то восходящая ветвь кривой y_2 пересекает ось φ в первом квадранте, а если $M < 1$, то расположение кривых соответствует рис. 33. При m близком к 180° имеется три решения φ_1 , φ_2 и φ_3 , одно из которых $\pi - \phi$ принадлежит положению наблюдателя. Если $\varphi_3 = \pi - \phi$, то и φ_1 и φ_2 удовлетворяют всем условиям задачи, и без добавочных сведений нельзя определить, которое принадлежит орбите наблюдаемого тела. Однако может случиться, что φ_1 дает такие большие значения r и φ , что из соображений наблюдательской практики будет очевидно, что тело невидимо; в этом случае очевидно, что φ_2 , которое дает меньшее r , принадлежит к физической задаче. Если $\varphi_2 = \pi - \phi$, то из (49) следует, что φ_1 относится к задаче. Случай $\varphi_1 = \pi - \phi$ не может встретиться, потому что тогда физическая задача не могла бы иметь решения. Если для постоянного M восходящая ветвь кривой y_2 движется вправо, то корни φ_1 и φ_2 приближаются к совпадению между собой, а если она движется еще дальше вправо,

то действительным остается одно φ_3 . Этот случай, соответствующий m , удаленному от 180° в четвертом или в третьем квадранте, не может возникнуть, так как тогда задача не имела бы решения. Поэтому, если $\frac{D_1}{D}$ положительно, то $r > R$, m находится в четвертом квадранте и имеют одно или два возможных решения для физической задачи в зависимости от того, φ_2 или φ_3 равняется $\pi - \phi$.

Теперь предположим, что $\frac{D_1}{D}$ отрицательно. В этом случае $r < R$, и m находится в первом или втором квадранте. Если m находится в первом квадранте, то нисходящая ветвь кривой y_2 пересекает ось φ во втором квадранте, и для малого m и $M < 1$ соотношения таковы, как показано на рис. 34. В этом случае решение задачи единственное или двойное в зависимости от того, φ_2 или φ_3 равняется $\pi - \phi$. Если m находится во втором квадранте, то нисходящая ветвь кривой y_2 пересекает ось φ в первом квадранте, φ_2 и φ_3 недействительны, и задача не имеет решения. Поэтому, если $\frac{D_1}{D}$ отрицательно, тогда $r < R$, m находится в первом квадранте и имеются одно или два возможных решения физической задачи в зависимости от того, φ_2 или φ_3 равно $\pi - \phi$.

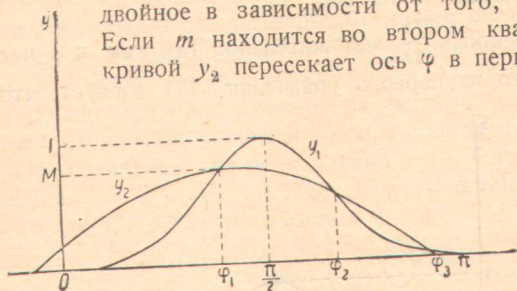


Рис. 34.

120. Условия для единственности решения. Решение физической задачи единственно, независимо от того, положительно или отрицательно $\frac{D_1}{D}$, если $\varphi_2 = \pi - \phi$, в противном случае оно двойное. Предположим, что $\varphi = \pi - \phi + \varepsilon$, где ε — малое положительное число. Из рис. 33 видно, что если, при положительном $\frac{D_1}{D}$, $\varphi_2 = \pi - \phi$, то разность $y_1 - y_2$ положительна для $\varphi = \varphi_2 + \varepsilon$, и когда $\frac{D_1}{D}$ отрицательно, то $y_1 - y_2$ отрицательно для $\varphi = \varphi_2 + \varepsilon = \pi - \phi + \varepsilon$.

Из уравнений (50) следует, что y_1 и y_2 могут быть разложены в ряды по степеням ε , если $\varphi = \pi - \phi + \varepsilon$. Первые два члена разности таковы:

$$y_1 - y_2 = [\sin^4(\pi - \phi) - M \sin(\pi - \phi + m)] + \\ + [4 \sin^3(\pi - \phi) \cos(\pi - \phi) - M \cos(\pi - \phi + m)] \varepsilon + \dots \quad (51)$$

Член, независимый от ε , равен нулю, потому что $\varphi = \pi - \phi$ является решением уравнения (47). Преобразуя коэффициент при ε с помощью уравнений (47) и (48), мы получим:

$$y_1 - y_2 = \frac{MR}{N} \left[1 + \frac{3D_1}{DR^4} \cos \phi \right] \varepsilon + \dots$$

Поэтому условие единственности физической задачи напишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} \left[1 + \frac{3D_1}{DR^1} \cos \phi \right] &> 0, \text{ если } \frac{D_1}{D} > 0, \\ \frac{1}{N} \left[1 + \frac{3D_1}{DR^1} \cos \phi \right] &< 0, \text{ если } \frac{D_1}{D} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Левая часть неравенства вполне определяется наблюдениями, и, следовательно, не решая уравнения (48), можно определить, является ли решение задачи единственным или двойным.

Предельным случаем неравенств (52) является равенство:

$$1 + \frac{3D_1}{DR^1} \cos \phi = 0. \quad (53)$$

Исключая $\cos \phi$ и $\frac{D_1}{D}$, при помощи первых уравнений (44) и (46) находим:

$$\rho^2 = r^2 + \frac{2}{3} \frac{R^3}{r^3} - \frac{5}{3} R^2. \quad (54)$$

Наименьшее значение правой части этого уравнения, рассматриваемой как функция от r , равно нулю, поэтому для каждого значения r имеется единственное положительное значение ρ . Все точки, определенные парами значений r и ρ , удовлетворяющими (54), находятся на границе области, в которой удовлетворяются неравенства (52). Эти граничные поверхности, очевидно, являются поверхностями вращения вокруг линии, соединяющей Землю и Солнце. Сечение этих поверхностей плоскостью, проходящей через линию SE , показано на рис. 35¹⁾.

Поверхности, определенные уравнением (54), делят пространство на четыре части, две из которых на рисунке заштрихованы, а две оставлены белыми. Левая часть неравенства (52) имеет один и тот же знак повсюду, в каждой из этих областей и меняет знак, когда граничная поверхность пересекается в какой-либо обыкновенной точке. Это частный случай общего предложения, которое докажем.

Предположим, что x_0, y_0, z_0 — обыкновенная точка поверхности, определенной уравнением $F(x, y, z) = 0$. Рассмотрим значение F в точке с координатами $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z$, где $\Delta x, \Delta y$ и Δz малы. Значение функции в этой точке равно:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = F(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z + \dots$$

Первый член правой части этого уравнения равен нулю, поэтому что точка x_0, y_0, z_0 лежит на поверхности. Теперь предположим, что точка

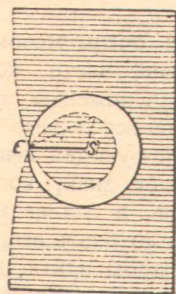


Рис. 35.

¹⁾ Этот рисунок впервые был дан III а р л ь е, Meddelande från Lunds Observatorium, № 45.

$x_0 + \Delta x, \dots$ находится на перпендикуляре к поверхности, в точке x_0, y_0, z_0 . Тогда:

$$\Delta x = \frac{p \frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\Delta y = \frac{p \frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\Delta z = \frac{p \frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

где p — расстояние от x_0, y_0, z_0 до $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z$, так как множители, на которые помножено p , являются направляющими косинусами нормали к поверхности. По одну сторону от поверхности p положительно, а по другую оно отрицательно. Выражение для значения функции F в точке $x_0 + \Delta x \dots$ принимает вид:

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = p \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + p^2 [\dots] + \dots$$

При очень малом p знак функции определяется знаком первого члена правой части, коэффициент которого не равен нулю. Так как согласно предположению x_0, y_0, z_0 является обыкновенной точкой поверхности, то не все первые частные производные от F равны нулю и, следовательно, знак функции меняется с изменением знака p . Это значит, что функция меняет знак, когда пересекается поверхность, на которой она равна нулю, и она не меняет знака ни в какой другой конечной точке, потому что функция непрерывна.

Чтобы найти, в какой из четырех областей рис. 35 решение единственно и в какой двойное, рассмотрим точку на линии SE слева от E . В такой точке $r = \rho + R$, $\phi = \pi$, и, следовательно:

$$1 + \frac{3D_1}{DR^4} \cos \phi = 1 - \frac{3D_1}{DR^4} = 1 - \frac{3(\rho + R)^3}{R[\rho^2 + 3\rho R + 3R^2]},$$

что явно отрицательно для очень большого ρ . Так как в этом случае $r > R$, то следует, что $\frac{D_1}{D} > 0$, $N < 0$, в этом случае имеет место первое неравенство (52). Так как неравенство удовлетворено, то решение задачи единственно, если наблюдаемое тело находится в незаштрихованной области слева от E . Если поверхность пересекается в большей из заштрихованных областей в точке, для которой $r > R$, то функция меняет знак, в то время как знак N не изменяется. Тогда первое неравенство (52)

не удовлетворяется, и физическая задача имеет двойное решение. В этой области функция (53) положительна, а N отрицательно. Если поверхность пересекается в меньшей из незаштрихованных областей, то функция (53) становится отрицательной, а N положительным, и второе неравенство (52), о котором идет речь, удовлетворяется. Поэтому решение единственно в этой незаштрихованной области. \square

Подобным же образом доказывается, что оно двойное в меньшей из заштрихованных областей.

121. Употребление четвертого наблюдения в случае двойного решения. Предположим, что $\varphi_3 = \pi - \phi$, так что имеется два решения (48), которые соответствуют условиям физической задачи. Одним из методов для определения, какое решение действительно принадлежит физической задаче в случае, если имеются четыре наблюдения, очевидно, является разложение (48), употребляя четвертое наблюдение вместо одного из первоначальных трех. Обычно это приводит к единственному решению.

Более хороший метод решения этого двойственного случая может быть выведен из уравнений (44). Исключая r из второго и третьего уравнений (44) при помощи первого, получаем:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{D_1}{2D_1} \rho = P\rho, \quad P = \frac{D_2}{2D_1}, \\ \rho'' &= \frac{\rho}{D_1} \left[D_3 - \frac{D_1}{R^3} + D\rho \right]. \end{aligned}$$

Производная первого из этих уравнений такова:

$$\rho'' = P'\rho + P\rho' = (P' + P^2)\rho$$

и приравненное к правой части второго уравнения дает:

$$D_3 - \frac{D_1}{R^3} + D\rho = D_1(P' + P^2). \quad (55)$$

Так как это уравнение линейно, то ρ определяется однозначно, если D не равно нулю. Детерминант D будет рассмотрен в § 124. Уравнение (55) должно базироваться не менее чем на четырех наблюдениях, потому что P' включает λ''' , μ''' и λ'' , которые не могут быть определены даже приближенно из трех наблюдений.

122. Пределы m и M . В действительной задаче определения орбиты постоянные m и M подчинены условию, что уравнение (48) должно иметь три действительных корня между 0 и π . Пределы, налагаемые этим условием, могут быть определены из условий, что уравнение должно иметь двойные корни; предположим, например, что M постоянно, а m изменяется. В первом случае, представленном на рис. 33, имеется три действительных решения (48), пока при движении кривой y_2 вправо φ_1 и φ_2 не сравняются, а во втором случае, представленном на рис. 34, имеется три действительных решения (48), пока при движении кривой y_2 влево φ_2 и φ_3 не сравняются. Эти два случая по существу одинаковы, потому

что φ_1 в первом случае точно соответствует φ_3 во втором. Подобным образом если m остается неизменными и M , начиная от малого значения, увеличивается, то имеется три действительных решения (56), пока или φ_2 и φ_3 или φ_1 и φ_2 соответственно в первом и во втором случаях не станут равными. Когда пройдены пределы, для которых два значения φ , удовлетворяющие (48), равны, то имеется лишь одно действительное решение между 0 и π .

Условия, чтобы (48) имело двойной корень, таковы:

$$\left. \begin{aligned} \sin^4 \varphi &= M \sin(\varphi + m), \\ 4 \sin^3 \varphi \cos \varphi &= M \cos(\varphi + m). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Деля первое уравнение на второе и определяя $\operatorname{tg} \varphi$, имеем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16 \operatorname{tg}^2 m}}{2 \operatorname{tg} m}. \quad (57)$$

Отсюда следует, что m подчинено условию:

$$9 - 16 \operatorname{tg}^2 m \geq 0,$$

чтобы двойной корень был действителен. Отсюда

$$323^\circ 8' \leq m \leq 360^\circ, \quad 0 \leq m \leq 36^\circ 52'. \quad (58)$$

Первый интервал для m , принадлежащий к первому случаю, представлен на рис. 33, второй, относящийся ко второму случаю, — на рис. 34.

Для каждого m имеется два значения φ между 0 и π , определяемых уравнением (57).

В первом случае $\operatorname{tg} m$ отрицателен, $\operatorname{tg} \varphi$ положителен независимо от того, взят ли перед радикалом верхний или нижний знак, и он меньше всего, когда взят верхний знак. Поэтому значение φ , определенное уравнением (57), когда взят верхний знак, есть то, для которого на рис. 33 $\varphi_1 = \varphi_2$, и значение, определяемое нижним знаком, есть то, для которого $\varphi_2 = \varphi_3$. Если m имеет предельное значение, для которого радикал исчезает, то $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. Рассуждение аналогично для второго случая, в котором $\operatorname{tg} m$ положителен.

Предельные значения φ , определяемые уравнением (57), соответствующие предельным значениям m данным (58), соответственно равны:

$$\varphi = 116^\circ 34', \quad \varphi = 63^\circ 26', \quad (59)$$

и для обоих этих значений φ значение M , определяемое при помощи (56), равно $M = 1,431$. Это максимум для M , для которого (48) может иметь три действительных корня между 0 и π . Чтобы для этого значения M три корня были действительными, значение m должно быть $36^\circ 52'$ или $323^\circ 8'$, и тогда три корня равны между собой.

Рассмотрим первый случай и предположим, что m начинает возрастать от $323^{\circ}8'$ до 360° . Два значения φ , определенные уравнением (57), изменяются от $63^{\circ}26'$, причем одно уменьшается до нуля, а другое увеличивается до 90° . Два соответствующих значения M уменьшаются, начиная от 1,431, одно до нуля, а другое до единицы. Для каждого значения m между пределами (58) имеется два предела, между которыми должно лежать M , чтобы уравнение (48) имело три действительных решения. При составлении таблицы решений уравнения (48), зависящей от двух независимых параметров M и m , эти пределы должны быть приняты во внимание, чтобы по возможности сократить работу.

123. Дифференциальные поправки. Предположим, что приближенное решение уравнения (48) найдено при помощи графиков для y_1 и y_2 , или при помощи числовых проб, или из таблиц корней этого уравнения. Пусть φ_0 представляет приближенное решение, а $\varphi_0 + \Delta\varphi$ — точное решение. Требуется найти поправку $\Delta\varphi$.

Пусть:

$$\sin^4 \varphi_0 - M \sin(\varphi_0 + m) = \eta, \quad (60)$$

где η — малая величина, если φ_0 — приближенное решение (48). Если вместо φ_0 в (48) подставить $\varphi_0 + \Delta\varphi$, и результат подстановки разложить в ряд по степеням $\Delta\varphi$, то мы получим:

$$-\eta = [4 \sin^3 \varphi_0 \cos \varphi_0 - M \cos(\varphi_0 + m)] \Delta\varphi + [\dots] (\Delta\varphi)^2 + \dots$$

Этот степенной ряд может быть обращен, что дает для $\Delta\varphi$ выражение в виде ряда, расположенного по степеням η . Результат таков:

$$\Delta\varphi = \frac{-\eta}{4 \sin^3 \varphi_0 \cos \varphi_0 - M \cos(\varphi_0 + m)} + [\dots] \eta^2 + \dots \quad (61)$$

Единственное исключение бывает, когда коэффициент при $\Delta\varphi$ в ряде, идущем по степеням $\Delta\varphi$, равен нулю. Этот коэффициент дается вторым уравнением (56) — условием для двойного корня. В этом случае разложение для $\Delta\varphi$ идет по степеням $\pm \sqrt{\eta}$. На практике возникает затруднение, если коэффициент $\Delta\varphi$ мал, не будучи нулем, потому что тогда φ_0 должно быть очень близко к истинному значению, прежде чем может быть применен метод дифференциальных поправок.

Высшие члены уравнения (61) можно вычислить без всяких затруднений, но они быстро становятся более сложными. На практике проще пренебречь ими и повторить процесс с последовательно улучшенными значениями φ_0 .

Можно ввести более удобный метод для вычисления дифференциальных поправок, употребляя при работе логарифмы. После того как из наблюдаемых данных вычислены m и M , приближенное решение (48) может быть определено из диаграммы. Кривая y_1 может быть точно проведена раз навсегда. Более известная синусоида, в этом случае растянутая или сжатая в вертикальном направлении множителем M , может быть прове-

дена от руки с достаточной точностью, чтобы дать возможность получить довольно приближенную оценку значения φ . Пусть это будет φ_0 . Вычислив логарифмы правой и левой частей уравнения (48), мы, конечно, найдем, что они не равны. Пусть

$$4 \lg \sin \varphi_0 - \lg M - \lg \sin (\varphi_0 + m) = \varepsilon.$$

В последовательных приближениях изменяется лишь первый и третий из этих логарифмов. Логарифмы тригонометрических функций берутся из таблиц. Пусть табличная разность для логарифма $\sin \varphi$ и $\sin (\varphi_0 + \delta\varphi)$ равна ε_1 , где $\delta\varphi$ — некоторое подходящее приращение к φ_0 , и пусть ε_2 — соответствующая табличная разность для $\sin (\varphi_0 + m)$. Эти величины выписываются из соответствующих столбцов таблиц, когда берутся логарифмы $\sin \varphi_0$ и $\sin (\varphi_0 + m)$. Тогда поправка $\Delta\varphi$ дается уравнением:

$$\Delta\varphi = \frac{\delta\varphi \cdot e}{4\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad (62)$$

где результаты выражены в единицах, употребляемых для $\delta\varphi$. Этот метод настолько удобен на практике, что в любом случае достаточно нескольких минут для нахождения решения уравнения (48) со всей требуемой точностью. В первом приближении, когда ошибка обычно велика, для $\delta\varphi$ можно взять 1° . В позднейших приближениях $10''$ — удобное приращение, потому что табличные разности логарифмов для разностей в $10''$ даются в таблицах¹⁾.

124. Исследование детерминанта D . Детерминант D уравнения (45) входит в определение постоянных M и m , и решение становится неопределенным, если он равен нулю. Следовательно, важно найти, при каких обстоятельствах он исчезает.

Предположим, что в основе определения орбиты лежат только три наблюдения. Тогда значения λ , λ' и λ'' , входящие в D , даются уравнениями (31) и (32). Соответствующие выражения дают μ , μ' , μ'' ; ν , ν' , ν'' . После того как они подставлены в (45), детерминант D может быть разложен на произведение двух детерминантов. Для упрощения письма положим:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{(\tau - \tau_2)(\tau - \tau_3)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)}, \\ P_2 &= \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_3)}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)}, \\ P_3 &= \frac{(\tau - \tau_1)(\tau - \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

и обозначим производные этих функций относительно τ штрихами.

¹⁾ Решение уравнения (48) зависит от двух параметров M и m ; если бы был лишь один, то отношения между ним и φ можно было бы легко табулировать. Несмотря на два параметра Лейшнер (Leuschner) расширил таблицу, первоначально данную Опольцером, из которой непосредственно с достаточной точностью можно получить решение. Это — таблица XVI в третьем издании (Бухгольца) «Теоретической астрономии» Клинкерфуса (Klinkerfuss, Theoretische Astronomie).

Тогда

$$D = \Delta_1 \Delta_2 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta_1 = \begin{vmatrix} P_1 & P'_1 & P''_1 \\ P_2 & P'_2 & P''_2 \\ P_3 & P'_3 & P''_3 \end{vmatrix}, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \quad (64)$$

Следовательно, D может исчезнуть только в том случае, если Δ_1 или Δ_2 равно нулю.

Покажем сначала, что Δ_1 — постоянная, отличная от нуля. Так как Δ_1 формально третьей степени относительно τ , то необходимые и достаточные условия для того, чтобы оно было независимо от τ , есть $\Delta'_1 = 0$ для всех значений τ . Производная от детерминанта равняется сумме детерминантов, полученных путем последовательных замен столбцов начального детерминанта их производными. Следовательно, Δ'_1 есть сумма трех детерминантов. Так как производная первого столбца тождественна со вторым столбцом, то первый из этих детерминантов равен нулю для всех значений τ . Так как производная второго столбца тождественна с третьим, то второй детерминант есть нуль. Производная третьего столбца равна нулю, и поэтому третий детерминант равен нулю. Отсюда Δ'_1 тождественно равно нулю, и Δ_1 постоянно. Его значение, которое легко найти для $\tau = 0$, таково:

$$\Delta_1 = \frac{2 \begin{vmatrix} \tau_2 \tau_3, \tau_2 + \tau_3, 1 \\ \tau_3 \tau_1, \tau_3 + \tau_1, 1 \\ \tau_1 \tau_2, \tau_1 + \tau_2, 1 \end{vmatrix}}{(\tau_1 - \tau_2)^2 (\tau_2 - \tau_3)^2 (\tau_3 - \tau_1)^2} = \frac{2}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)}. \quad (65)$$

Этот детерминант отличен от нуля и не зависит от выбора эпохи t_0 .

Чтобы вывести Δ_2 , помножим первый, второй и третий столбцы соответственно на ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 . Тогда в обозначениях уравнений (6) детерминант Δ_2 принимает вид:

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 \Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

Правая часть этого уравнения численно равна шестикратному объему трехгранной пирамиды, образованной Землей E и тремя положениями S . Объем этой пирамиды равен нулю лишь в том случае, если три положения S лежат в плоскости, проходящей через четвертую точку E . Тот же результат выражается проще следующим образом: *детерминант Δ_2 (а поэтому D) равен нулю лишь в том случае, если три видимые положения S , наблюдаемые из E , лежат на дуге большого круга.*

Из уравнений (44) следует, что если D равно нулю, то D_1 и D_2 также равны нулю, когда R не равно r . Вообще выражения для ρ и ρ' становятся неопределенными, если D равно нулю, и они плохо определяются, когда D мало. В случае, когда C движется в плоскости земной орбиты, Δ_2 и D всегда равны нулю. Но в этом случае надо определить лишь четыре элемента, а так как каждое наблюдение дает единственную координату (долготу), то требуется четыре наблюдения.

Выражение для Δ_2 может быть получено при помощи уравнений (6). После некоторых простых приведений находим:

$$\Delta_2 = \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \delta_3 [\sin (\alpha_2 - \alpha_1) \operatorname{tg} \delta_3 + \\ + \sin (\gamma_3 - \alpha_2) \operatorname{tg} \delta_1 + \sin (\alpha_1 - \alpha_3) \operatorname{tg} \delta_2]. \quad (66)$$

125. Приведение детерминантов D_1 и D_2 . Выражения для D_1 и D_2 [уравнения (45)] вследствие уравнений (31) и (32) и соответствующих выражений для μ , μ' , ν и ν' принимают вид:

$$D_1 = - \begin{vmatrix} P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2 + P_3 \lambda_3, & P'_1 \lambda_1 + P'_2 \lambda_2 + P'_3 \lambda_3, & X \\ P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2 + P_3 \mu_3, & P'_1 \mu_1 + P'_2 \mu_2 + P'_3 \mu_3, & Y \\ P_1 \nu_1 + P_2 \nu_2 + P_3 \nu_3, & P'_1 \nu_1 + P'_2 \nu_2 + P'_3 \nu_3, & Z \end{vmatrix},$$

$$D_2 = + \begin{vmatrix} P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2 + P_3 \lambda_3, & P''_1 \lambda_1 + P''_2 \lambda_2 + P''_3 \lambda_3, & X \\ P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2 + P_3 \mu_3, & P''_1 \mu_1 + P''_2 \mu_2 + P''_3 \mu_3, & Y \\ P_1 \nu_1 + P_2 \nu_2 + P_3 \nu_3, & P''_1 \nu_1 + P''_2 \nu_2 + P''_3 \nu_3, & Z \end{vmatrix}.$$

Если первый столбец D_1 умножить на $\frac{P'_3}{P_3}$ и вычесть из второго столбца, то получаем:

$$- \frac{1}{P_3} \begin{vmatrix} P_\lambda, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \lambda_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \lambda_2, & X \\ P_\mu, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \mu_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \mu_2, & Y \\ P_\nu, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \nu_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \nu_2, & Z \end{vmatrix}$$

где:

$$P_\lambda = P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2 + P_3 \lambda_3$$

$$P_\mu = P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2 + P_3 \mu_3$$

$$P_\nu = P_1 \nu_1 + P_2 \nu_2 + P_3 \nu_3.$$

Этот детерминант равен сумме двух детерминантов:

$$- \frac{1}{P_3} \begin{vmatrix} P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \lambda_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \lambda_2, & X \\ P_1 \mu_1 + P_2 \mu_2, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \mu_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \mu_2, & Y \\ P_1 \nu_1 + P_2 \nu_2, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \nu_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \nu_2, & Z \end{vmatrix}$$

и

$$- \begin{vmatrix} \lambda_3, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \lambda_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \lambda_2, & X \\ \mu_3, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \mu_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \mu_2, & Y \\ \nu_3, & (P'_1 P_3 - P_1 P'_3) \nu_1 + (P'_2 P_3 - P_2 P'_3) \nu_2, & Z \end{vmatrix}.$$

Члены с λ_2, μ_2, ν_2 могут быть подобным образом исключены из второго столбца первого из этих детерминантов. Тогда каждый из детерминантов является суммой двух других, и приведенное выражение для D_1 принимает вид:

$$D_1 = -(P_1 P'_2 - P'_1 P_2) \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_2, X \\ \mu_1, \mu_2, Y \\ \nu_1, \nu_2, Z \end{vmatrix} -$$

$$-(P_2 P'_3 - P'_2 P_3) \begin{vmatrix} \lambda_2, \lambda_3, X \\ \mu_2, \mu_3, Y \\ \nu_2, \nu_3, Z \end{vmatrix} -$$

$$-(P_3 P'_1 - P'_3 P_1) \begin{vmatrix} \lambda_3, \lambda_1, X \\ \mu_3, \mu_1, Y \\ \nu_3, \nu_1, Z \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты этих детерминантов требуются для $\tau=0$. Из уравнений (63) находим, что

$$P_1 P'_2 - P'_1 P_2 = \frac{+\tau_3^2}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)},$$

$$P_2 P'_3 - P'_2 P_3 = \frac{+\tau_1^2}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)},$$

$$P_3 P'_1 - P'_3 P_1 = \frac{+\tau_2^2}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1)}.$$

Тогда выражение для D_1 приводится к следующему:

$$D_1 = -\frac{\tau_3^2}{P} \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_2, X \\ \mu_1, \mu_2, Y \\ \nu_1, \nu_2, Z \end{vmatrix} - \frac{\tau_1^2}{P} \begin{vmatrix} \lambda_2, \lambda_3, X \\ \mu_2, \mu_3, Y \\ \nu_2, \nu_3, Z \end{vmatrix} - \frac{\tau_2^2}{P} \begin{vmatrix} \lambda_3, \lambda_1, X \\ \mu_3, \mu_1, Y \\ \nu_3, \nu_1, Z \end{vmatrix}. \quad (67)$$

$$P = (\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)(\tau_3 - \tau_1).$$

Подобным образом выражение для D_2 приводится к виду:

$$D_2 = \frac{2\tau_3}{P} \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_2, X \\ \mu_1, \mu_2, Y \\ \nu_1, \nu_2, Z \end{vmatrix} + \frac{2\tau_1}{P} \begin{vmatrix} \lambda_2, \lambda_3, X \\ \mu_2, \mu_3, Y \\ \nu_2, \nu_3, Z \end{vmatrix} + \frac{2\tau_2}{P} \begin{vmatrix} \lambda_3, \lambda_1, X \\ \mu_3, \mu_1, Y \\ \nu_3, \nu_1, Z \end{vmatrix}. \quad (68)$$

Каждый из детерминантов в выражениях для D_1 и D_3 может быть представлен в форме, подобной уравнению (66).

126. Поправки за абберационное время. Так как скорость света конечна, то тело C в любой момент видимо там, где оно было в некоторый предшествующий момент. Это вводит небольшую ошибку в моменты наблюдения, которую надо исправить после определения приближенных

расстояний, если требуются точные результаты. Так как скорость света очень велика, а видимые движения небесных тел вообще медленны, то для внесения поправки за конечную скорость света нет необходимости знать расстояние C с большой точностью.

Пусть E_1 , E_2 и E_3 — положения наблюдателя соответственно в моменты t_1 , t_2 и t_3 (рис. 36). Пусть наблюдаемые направления C в эти эпохи суть E_1C_1 , E_2C_2 и E_3C_3 . В течение времени, потребного для того, чтобы свет прошел от C до E , тело продвинется вперед по своей орбите в положения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 , являющиеся истинными положениями его в эпохи t_1 , t_2 и t_3 .

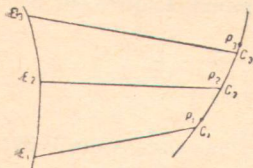


Рис. 36.

Если расстояния известны, то наблюдаемые координаты могут быть легко исправлены за эти передвижения, но это изменяет все наблюдаемые данные задачи и делает необходимым переычисление всех детерминантов.

Второй метод, практически более удобный, состоит в исправлении моментов наблюдений. Тело C проходит через точки C_1 , C_2 и C_3 не в t_1 , t_2 и t_3 , но в эти эпохи, уменьшенные на время, требуемое светом для прохождения от C_1 , C_2 и C_3 соответственно до E_1 , E_2 и E_3 . Чтобы определить эти поправки эпохи, необходимо знать $E_1C_1 = \rho_1$, $E_2C_2 = \rho_2$, $E_3C_3 = \rho_3$. Предположим, что (48), (46) и (44) решены и что ρ и ρ' известны. Тогда значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 даются с достаточными для настоящей цели приближениями при помощи формул:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho + \rho' \tau_1, \\ \rho_2 &= \rho + \rho' \tau_2, \\ \rho_3 &= \rho + \rho' \tau_3. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Пусть V обозначает скорость света. Тогда эпохи, в которые C было в C_1 , C_2 и C_3 , таковы:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 - \Delta\tau_1 &= \tau_1 - \frac{\rho_1}{V} = \tau_1 - \frac{(\rho + \rho' \tau_1)}{V}, \\ \tau_2 - \Delta\tau_2 &= \tau_2 - \frac{\rho_2}{V} = \tau_2 - \frac{(\rho + \rho' \tau_2)}{V}, \\ \tau_3 - \Delta\tau_3 &= \tau_3 - \frac{\rho_3}{V} = \tau_3 - \frac{(\rho + \rho' \tau_3)}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Теперь рассмотрим поправки к D , D_1 и D_2 . В D изменяется лишь множитель Δ_1 . Но в приложениях употребляются только отношения D к D_1 и D_2 , а последние также содержат множителем Δ_1 .

Поэтому единственное изменение, которое нужно сделать, состоит в том, чтобы заменить в числителях коэффициентов при детерминантах уравнений (67) и (68) τ_1 , τ_2 и τ_3 соответственно через $\tau_1 - \Delta\tau_1$, $\tau_2 - \Delta\tau_2$ и $\tau_3 - \Delta\tau_3$.

127. Разложение x , y и z в ряды. Чтобы найти поправки, которые надо прибавить к λ' и λ'' для определения элементов орбиты с большой точностью, необходимо разложить x , y и z в ряды по степеням τ . Эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{d\tau^2} &= -\frac{x}{r^3} = -ux, \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} &= -\frac{y}{r^3} = -uy, \\ \frac{d^2z}{d\tau^2} &= -\frac{z}{r^3} = -uz, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где

$$u = \frac{1}{r^3}.$$

В теории дифференциальных уравнений показывается, что решения дифференциальных уравнений этого типа разлагаются в степенные ряды вида:

$$x = x_0 + x'_0\tau + \frac{1}{2}x''_0\tau^2 + \frac{1}{6}x'''_0\tau^3 + \frac{1}{24}x^{IV}_0\tau^4 + \frac{1}{120}x^V_0\tau^5 + \dots,$$

$$y = y_0 + y'_0\tau + \frac{1}{2}y''_0\tau^2 + \frac{1}{6}y'''_0\tau^3 + \frac{1}{24}y^{IV}_0\tau^4 + \frac{1}{120}y^V_0\tau^5 + \dots,$$

$$z = z_0 + z'_0\tau + \frac{1}{2}z''_0\tau^2 + \frac{1}{6}z'''_0\tau^3 + \frac{1}{24}z^{IV}_0\tau^4 + \frac{1}{120}z^V_0\tau^5 + \dots$$

Из уравнений (71) и их последовательных производных находим, что

$$\left. \begin{aligned} x''_0 &= -u_0x_0, \\ x'''_0 &= -u'_0x_0 - u_0x'_0, \\ x^{IV}_0 &= (-u''_0 + u_0^2)x_0 - 2u'_0x'_0, \\ x^V_0 &= (-u'''_0 + 4u_0u'_0)x_0 - (3u''_0 - u_0^2)x'_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Коэффициенты рядов для y и z отличаются лишь тем, что вместо x_0 , x'_0 появляются соответственно y_0 , y'_0 и z_0 , z'_0 . Поэтому:

$$\left. \begin{aligned} x &= fx_0 + gx'_0, \\ y &= fy_0 + gy'_0, \\ z &= fz_0 + gz'_0, \\ f &= 1 - \frac{1}{2}u_0\tau^2 - \frac{1}{6}u'_0\tau^3 - \frac{1}{24}(u''_0 - u_0^2)\tau^4 - \frac{1}{120}(u'''_0 - 4u_0u'_0)\tau^5 + \dots, \\ g &= \tau - \frac{1}{6}u_0\tau^3 - \frac{1}{12}u'_0\tau^4 - \frac{1}{120}(3u''_0 - u_0^2)\tau^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Чтобы иметь f и g в форме, удобной для практического применения, надо выразить производные от u через x_0 , y_0 , z_0 , x'_0 , y'_0 и z'_0 . Лагранж

сделал это очень изящно, введя вспомогательные величины p и q при помощи уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r^2 p &= \frac{1}{2} \frac{dr^2}{d\tau} = xx' + yy' + zz', \\ r^3 q &= \frac{1}{2} \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} = x'^2 + y'^2 + z'^2 - r^2 u. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Тогда находим, что

$$\begin{aligned} u' &= -\frac{3}{r^4} \frac{dr}{d\tau} = -\frac{3}{r^4} \frac{1}{2r} \frac{dr^2}{d\tau} = -3up, \\ p' &= +\frac{1}{2r^2} \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} - \frac{1}{r^3} \frac{dr^2}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = q - 2p^2, \\ q' &= -\frac{1}{r^3} \frac{d^2 r^2}{d\tau^2} \frac{dr}{d\tau} + \frac{1}{2r^2} \frac{d^3 r^2}{d\tau^3} = -up - 2pq. \end{aligned}$$

При помощи этих выражений и их последовательных производных мы выразим коэффициенты в рядах для f и g в виде многочленов относительно u , p и q . Выражения для f и g принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} f &= 1 - \frac{1}{2} u_0 \tau^2 + \frac{1}{2} u_0 p_0 \tau^3 + \frac{1}{24} (3u_0 q_0 - 15u_0 p_0^2 + u_0^2) \tau^4 + \\ &\quad + \frac{1}{8} (7u_0 p_0^3 - 3u_0 p_0 q_0 - u_0^2 p_0) \tau^5 + \dots \\ g &= \tau - \frac{1}{6} u_0 \tau^3 + \frac{1}{4} u_0 p_0 \tau^4 + \frac{1}{12} (9u_0 q_0 - 45u_0 p_0^2 + u_0^2) \tau^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Производные от x , y и z могут быть определены из уравнений (73) и (75). Например:

$$\left. \begin{aligned} x''' &= f''' x_0 + g''' x'_0, \\ x^{IV} &= f^{IV} x_0 + g^{IV} x'_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

128. Вычисление высших производных λ , μ , ν . Значения λ , λ' и λ'' , определенные уравнениями (31) и (32), лишь приближены, потому что c_3 , c_4 , ... неизвестны. Но после того как становятся известными высшие производные, можно получить эти коэффициенты и исправить приближенные значения.

Третьи производные уравнений (8) таковы:

$$\left. \begin{aligned} \rho''' \lambda + 3\rho'' \lambda' + 3\rho' \lambda'' + \rho \lambda''' &= x'' + X''', \\ \rho''' \mu + 3\rho'' \mu' + 3\rho' \mu'' + \rho \mu''' &= y''' + Y''', \\ \rho''' \nu + 3\rho'' \nu' + 3\rho' \nu'' + \rho \nu''' &= z''' + Z'''. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Левые части этих уравнений содержат четыре неизвестные ρ''' , λ''' , μ''' и ν''' , так как первая и вторая производные приближенно опреде-

лены уравнениями (31), (32) и (44); но неизвестные не независимы, потому что λ, μ и ν и их производные удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1, \\ \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' &= 0, \\ \lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \nu\nu'' + \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 &= 0, \\ \lambda\lambda''' + \mu\mu''' + \nu\nu''' + 3(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') &= 0.\end{aligned}$$

Следовательно, если уравнения (77) умножить соответственно на λ, μ и ν и сложить, то результат будет таков:

$$\begin{aligned}\rho''' &= 3\rho'(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2) + 3\rho(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') + \\ &+ (x''' + X''')\lambda + (y''' + Y''')\mu + (z''' + Z''')\nu,\end{aligned}\quad (78)$$

что однозначно определяет ρ''' . Тогда λ''' , μ''' и ν''' определяются при помощи (77), потому что x'' , y'' , z'' даются уравнениями (76) и X'' , Y'' и Z'' могут быть найдены из эфемерид.

Величины λ^{IV} , μ^{IV} и ν^{IV} могут быть вычислены подобным образом, беря производные от (77) и приводя их при помощи соотношений между λ, μ и ν .

129. Улучшение значений x, y, z, x', y', z' . После того как D, D_1 и D_2 найдены из (65), (66), (67) и (68), можно решить уравнение (48); и тогда определить x, y, z и их первые производные из уравнений (8) и их первых производных. Эти результаты лишь приближенные благодаря ошибкам в $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu'$ и ν' , и задача состоит в исправлении их после определения λ''', μ''' ...

Из первого уравнения (28) следует, что

$$c_3 = \frac{1}{6} \lambda''', \quad c_4 = \frac{1}{24} \lambda^{IV}, \dots$$

Тогда уравнения (35) дают:

$$\begin{aligned}\Delta c_0 &= -\frac{1}{6} \lambda''' \tau_1 \tau_2 \tau_3 - \frac{1}{24} \lambda^{IV} \tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) + \dots, \\ \Delta c_1 &= +\frac{1}{6} \lambda''' (\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1) + \frac{1}{24} \lambda^{IV} (\tau_1 + \tau_2) (\tau_2 + \tau_3) (\tau_3 + \tau_1) + \dots, \\ \Delta c_2 &= -\frac{1}{6} \lambda''' (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) - \frac{1}{24} \lambda^{IV} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2 + \tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1) + \dots,\end{aligned}$$

и выражение для λ принимает вид:

$$\lambda = c_0 + \Delta c_0 + (c_1 + \Delta c_1) \tau + (c_2 + \Delta c_2) \tau^2 + \frac{1}{6} \lambda''' \tau^3 + \frac{1}{24} \lambda^{IV} \tau^4 + \dots, \quad (79)$$

где c_0, c_1 и c_2 — приближенные значения коэффициентов рядов, полученных из (31) и (32), полагая τ равным нулю. Имеются соответствующие уравнения для μ и ν . С этими более точными значениями $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ deter-

минанты D , D_1 и D_2 вычисляются из (45), φ определяется из (48), ρ и ρ' — из (44) и x , y , z , x' , y' , z' — из (8) и их первых производных. Затем можно вычислить еще более высокие производные от λ , μ и ν и определить более точные значения от λ , λ' и λ'' или при помощи методов, приведенных в главе V, можно определить элементы по x , y , z , x' , y' , z' .

Против метода Лапласа имеются два принципиальных возражения. Одно — то, что в каждой стадии приближения надо перевычислять все детерминанты и вспомогательные величины, причем каждое перевычисление требует значительного труда. Другое возражение то, что через уравнения, при помощи которых X'' , Y'' и Z'' были исключены из (9), метод зависит от движения наблюдателя. Очевидно, единственно важно в задаче то, что C наблюдается из определенно известных мест и что оно движется вокруг Солнца согласно закону тяготения.

130. Видоизменения Гарцера и Лейшнера. Метод Лапласа определения орбит на практике оказался не вполне удовлетворительным. Причина, повидимому, в том, что условия для точного удовлетворения первого и третьего наблюдений не представлены прямо, как, например, в методе Гаусса. Для исправления этого дефекта Гарцер (Harzer) предложил ¹⁾ такой план определения x , y , z , x' , y' , z' при помощи дифференциальных поправок, после того как их приближенные значения найдены, чтобы три наблюдения были точно представлены. Если рассматриваются более трех наблюдений, то им вообще нельзя точно удовлетворить, и тогда подготовка производится методом наименьших квадратов.

Здесь мы хотим достаточно бегло обрисовать метод получения дифференциальных поправок. Прямые восхождение и склонения выражаются через координаты и составляющие скорости при t_0 :

$$\begin{aligned}\rho\lambda &= fx_0 + gx'_0 + X, \\ \rho\mu &= fy_0 + gy'_0 + Y, \\ \rho\nu &= fz_0 + gz'_0 + Z,\end{aligned}$$

что получено путем подстановки уравнений (78) в уравнения (8).

Прямое восхождение и склонение входят через λ , μ и ν уравнений (6). Результат может быть символически представлен так:

$$\begin{aligned}\alpha &= F(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0), \\ \delta &= G(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0).\end{aligned}$$

Из этих уравнений вариации в α и δ , которые являются известными разностями между наблюдениями и приближенной теорией, выражены через искомые вариации x_0, \dots, z_0 . Соотношения таковы:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{\partial F}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial F}{\partial x'_0} \Delta x'_0 + \frac{\partial F}{\partial y'_0} \Delta y'_0 + \frac{\partial F}{\partial z'_0} \Delta z'_0, \\ \Delta\delta &= \frac{\partial G}{\partial x_0} \Delta x_0 + \frac{\partial G}{\partial y_0} \Delta y_0 + \frac{\partial G}{\partial z_0} \Delta z_0 + \frac{\partial G}{\partial x'_0} \Delta x'_0 + \frac{\partial G}{\partial y'_0} \Delta y'_0 + \frac{\partial G}{\partial z'_0} \Delta z'_0.\end{aligned}$$

¹⁾ Astronomische Nachrichten, № 3371—2, 1896.

При образовании частных производных надо помнить, что x_0, \dots, z'_0 входят через f и g , а кроме того явным образом. Написав эти уравнения для трех моментов, мы получим столько же уравнений, сколько у нас имеется неизвестных, т. е. $\Delta x_0, \dots, \Delta z'_0$, которые, следовательно, однозначно определяются, если детерминант, составленный из их коэффициентов, отличен от нуля. Обстоятельства, при которых он исчезает, не исследованы. Если имеется более трех наблюдений, то число уравнений превышает число неизвестных величин и применяется метод наименьших квадратов.

Если момент второго наблюдения взят за начало времени и имеется лишь три наблюдения, то число условных уравнений приводится к четырем, что обычно может быть удовлетворено подходящим определением $\Delta \rho_0, \Delta x'_0, \Delta y'_0$ и $\Delta z'_0$. Этот способ принят Лейшнером¹⁾ для сокращения метода Гарцера. В упрощенном виде метод оказался очень удобным на практике и привел к удовлетворительным результатам.

МЕТОД ГАУССА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ

131. Уравнение для ρ_2 . В методе Гаусса уравнения (19) являются основными. Если геоцентрические координаты введены при помощи уравнений (8), то уравнения (19) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} [2, 3] \rho_1 \lambda_1 - [1, 3] \rho_2 \lambda_2 + [1, 2] \rho_3 \lambda_3 &= [2, 3] X_1 - [1, 3] X_2 + [1, 2] X_3, \\ [2, 3] \rho_1 \mu_1 - [1, 3] \rho_2 \mu_2 + [1, 2] \rho_3 \mu_3 &= [2, 3] Y_1 - [1, 3] Y_2 + [1, 2] Y_3, \\ [2, 3] \rho_1 \nu_1 - [1, 3] \rho_2 \nu_2 + [1, 2] \rho_3 \nu_3 &= [2, 3] Z_1 - [1, 3] Z_2 + [1, 2] Z_3. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Левые части этих уравнений линейны относительно трех неизвестных ρ_1, ρ_2 и ρ_3 . Находя из этих уравнений ρ_2 , получим:

$$\rho_2 = \frac{D}{\Delta},$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= -[2, 3] [1, 3] [1, 2] \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} = -[2, 3] [1, 3] [1, 2] \Delta_2, \\ D &= -[2, 3] [1, 2] \begin{vmatrix} \lambda_1, [2, 3] X_1 - [1, 3] X_2 + [1, 2] X_3, \lambda_3 \\ \mu_1, [2, 3] Y_1 - [1, 3] Y_2 + [1, 2] Y_3, \mu_3 \\ \nu_1, [2, 3] Z_1 - [1, 3] Z_2 + [1, 2] Z_3, \nu_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Детерминант D есть сумма трех детерминантов:

$$\left. \begin{aligned} D &= [2, 3]^2 [1, 2] D^{(1)} - [2, 3] [1, 3] [1, 2] D^{(2)} + [2, 3] [1, 2]^2 D^{(3)}, \\ D^{(1)} &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & Y_1 & \mu_3 \\ \nu_1 & Z_1 & \nu_3 \end{vmatrix} \quad D^{(2)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & Y_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & Z_2 & \nu_3 \end{vmatrix} \quad D^{(3)} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_3 & \lambda_3 \\ \mu_1 & Y_3 & \mu_3 \\ \nu_1 & Z_3 & \nu_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

¹⁾ Publications of the Lick Observatory, т. VII, ч. I, 1902.

Следовательно, первое уравнение (81) принимает вид:

$$\Delta \rho_2 = - \frac{[2, 3]}{[1, 3]} D^{(1)} + D^{(2)} - \frac{[1, 2]}{[1, 3]} D^{(3)}. \quad (83)$$

Предположим, что за начало времени взято t_2 . Тогда из уравнений (73) следует, что

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 x_2 - g_1 x'_2, & y_1 &= f_1 y_2 + g_1 y'_2, & z_1 &= f_1 z_2 + g_1 z'_2, \\ x_3 &= f_3 x_2 + g_3 x'_2, & y_3 &= f_3 y_2 + g_3 y'_2, & z_3 &= f_3 z_2 + g_3 z'_2. \end{aligned}$$

Выражения для отношений площадей треугольников принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{[2, 3]}{[1, 3]} &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{x_1 y_3 - x_3 y_1} = \frac{+g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1}, \\ \frac{[1, 2]}{[1, 3]} &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 y_3 - x_3 y_1} = \frac{-g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1}. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Из уравнений (75) находим, что числители и знаменатели выражений в правых частях этих уравнений можно разложить в ряды по степеням τ_1 и τ_3 . Но для упрощения (83) удобно положить:

$$\left. \begin{aligned} k(t_3 - t_1) &= \tau_3 - \tau_1 = 2\tau, \\ \tau_1 &= -\tau + \varepsilon, \quad \tau_3 = +\tau + \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

где ε вообще мало по сравнению с τ ; предположим, что оно порядка τ^2 . Тогда выражения для отношений площадей треугольников принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{[2, 3]}{[1, 3]} &= \frac{+g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\tau} + \frac{1}{4} u \tau P + \frac{\tau \varepsilon}{12} u Q, \\ \frac{[1, 2]}{[1, 3]} &= \frac{-g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1} = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\tau} + \frac{1}{4} u \tau^2 P - \frac{\tau \varepsilon}{12} u Q, \\ P &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} - 2p\varepsilon + \frac{1}{12} (7u - 15p^2 + 3q) \tau^2 + \dots, \\ Q &= 1 - \frac{\varepsilon^2}{\tau^2} + \frac{3}{2} p \frac{\tau^2}{\varepsilon} - 3p\varepsilon + \frac{1}{6u} (37u - 765p^2 + 153q) \tau^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4} p (3u + 14p^2 - 6q) \frac{\tau^4}{\varepsilon} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

где написаны все члены до шестого порядка. Величина u определяется равенством $u = \frac{1}{r_2^3}$, а p и q определены уравнениями (74).

При помощи уравнений (86) уравнение (83) принимает вид:

$$\Delta \rho_2 = K + \frac{\tau^2}{4r_2^3} P K_1 + \frac{\tau \varepsilon}{12r_2^3} Q K_2. \quad (87)$$

где

$$K = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_1, \mu_3 \\ \nu_1, Z_1, \nu_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1, X_2, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_2, \mu_3 \\ \nu_1, Z_2, \nu_3 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \lambda_1, X_3, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_3, \mu_3 \\ \nu_1, Z_3, \nu_3 \end{vmatrix},$$

$$K_1 = - \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_1, \mu_3 \\ \nu_1, Z_1, \nu_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda_1, X_3, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_3, \mu_3 \\ \nu_1, Z_3, \nu_3 \end{vmatrix},$$

$$K_2 = - \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_1, \mu_3 \\ \nu_1, Z_1, \nu_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1, X_3, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_3, \mu_3 \\ \nu_1, Z_3, \nu_3 \end{vmatrix}.$$

Правые части выражений для K , K_1 и K_2 после сложения дают более простые выражения:

$$\left. \begin{aligned} K &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1 + X_3 - 2X_2, \lambda_3 - \lambda_1 \\ \mu_1, Y_1 + Y_3 - 2Y_2, \mu_3 - \mu_1 \\ \nu_1, Z_1 + Z_3 - 2Z_2, \nu_3 - \nu_1 \end{vmatrix}, \\ K_1 &= - \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1 + X_3, \lambda_3 - \lambda_1 \\ \mu_1, Y_1 + Y_3, \mu_3 - \mu_1 \\ \nu_1, Z_1 + Z_3, \nu_3 - \nu_1 \end{vmatrix}, \\ K_2 &= + \begin{vmatrix} \lambda_1, X_3 - X_1, \lambda_3 - \lambda_1 \\ \mu_1, Y_3 - Y_1, \mu_3 - \mu_1 \\ \nu_1, Z_3 - Z_1, \nu_3 - \nu_1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Рассмотрим уравнение (87). Детерминант Δ_2 , на который умножена левая часть, выражается через a_i и δ_i уравнением (66), которое мы имели в методе Лапласа. Его можно также написать простым комбинированием столбцов в виде:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_3 - 2\lambda_2, \lambda_3 - \lambda_1 \\ \mu_1, \mu_1 + \mu_3 - 2\mu_2, \mu_3 - \mu_1 \\ \nu_1, \nu_1 + \nu_3 - 2\nu_2, \nu_3 - \nu_1 \end{vmatrix}.$$

Если λ_i, μ_i, ν_i заменены рядами (28), то при $\tau_2 = 0$ второй столбец относительно интервалов времени будет второго порядка, а третий — первого порядка, поэтому Δ_2 — третьего порядка.

Так как левая часть уравнения (87) третьего порядка, то правая часть также должна быть третьего порядка. Второй столбец выражения для K , первое уравнение (88), — второго порядка, а третий столбец — первого порядка, поэтому K — третьего порядка. Детерминант K_1 — первого порядка, а K_2 — второго порядка. Первый умножается на τ_1^2 , которое второго порядка, последний — на τ_2 , которое третьего порядка. В предваритель-

ном определении орбиты можно опустить члены высших порядков, после чего (87) принимает вид:

$$\Delta_2 \rho_2 = K + \frac{\tau^2 K_1}{4r_2^3}.$$

Это уравнение имеет ту же форму, что и первое из (44) и содержит две неизвестных ρ_2 и r_2 . Их можно выразить через одну неизвестную φ при помощи уравнений (46), приписав индексы 2. Полученное уравнение имеет точно такую же форму, как (48), и его решение дает приближенные значения для ρ_2 и r_2 .

132. Уравнения для ρ_1 и ρ_3 . Уравнения (80) линейны относительно ρ_1 и ρ_3 , и эти величины можно определить любыми двумя из трех уравнений. На практике следует употреблять два уравнения, дающие наибольший детерминант при коэффициентах ρ_1 и ρ_3 , потому что они лучше всего определяют эти величины.

Решение первых двух уравнений (80) для ρ_1 и ρ_3 , если их сначала написать в детерминантной форме, а затем представить в виде суммы детерминантов, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_3 \\ \mu_1, \mu_3 \end{vmatrix} \rho_1 &= \begin{vmatrix} X_1, \lambda_3 \\ Y_1, \mu_3 \end{vmatrix} - \frac{[1, 3]}{[2, 3]} \begin{vmatrix} X_2, \lambda_3 \\ Y_2, \mu_3 \end{vmatrix} + \\ &+ \frac{[1, 2]}{[2, 3]} \begin{vmatrix} X_3, \lambda_3 \\ Y_3, \mu_3 \end{vmatrix} + \rho_2 \frac{[1, 3]}{[2, 3]} \begin{vmatrix} \lambda_2, \lambda_3 \\ \mu_2, \mu_3 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_3 \\ \mu_1, \mu_3 \end{vmatrix} \rho_3 &= \frac{[2, 3]}{[1, 2]} \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1 \\ \mu_1, Y_1 \end{vmatrix} - \frac{[1, 3]}{[1, 2]} \begin{vmatrix} \lambda_1, X_2 \\ \mu_1, Y_2 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \lambda_1, X_3 \\ \mu_1, Y_3 \end{vmatrix} + \rho_2 \frac{[1, 3]}{[1, 2]} \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_2 \\ \mu_1, \mu_2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Решение первого и третьего уравнений (80) отличается от этого лишь тем, что μ_i заменено ν_i , а Y_i заменено Z_i ; решение второго и третьего уравнений (80) можно получить из (89), меняя λ_i , μ_i , X_i и Y_i соответственно на μ_i , ν_i , Y_i и Z_i .

После вычисления ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 можно вычислить поправку моментов за абберационное время. Метод был объяснен в § 126.

133. Улучшение решения. Полученные до сих пор результаты лишь приближенные, потому что только первый член с P сохранен, в то время как член с Q совершенно отброшен. Найдя приближенное решение, его легко исправить. Значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 известны, а соответствующие значения r могут быть найдены в каждую из трех эпох из формулы:

$$r^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \phi,$$

что следует из того, что S , E и C образуют треугольники для трех наблюдений. После нахождения r_1 , r_2 и r_3 можно получить при помощи метода § 113 первую и вторую производные от r в $t = t_2$. Тогда урав-

нения (74) определяют p и q , после чего можно получить более точные значения для P и Q .

134. Метод Гаусса для вычисления отношения площадей треугольников. Уравнение (83), которое является основным в определении ρ_2 и r_2 , содержит два отношения площадей треугольников. Из (86) следует, что они могут быть написаны в форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{[2, 3]}{[1, 3]} &= \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\tau} + \frac{P_1}{r_2^3}, \\ \frac{[1, 2]}{[1, 3]} &= \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\tau} + \frac{P_2}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Следовательно, если можно определить отношения площадей треугольников, то P_1 и P_2 могут быть найдены из этих уравнений. Важной чертой метода Гаусса является удобный способ определения отношения треугольников. Для применения этого метода необходимо найти наклонность, долготу узла орбиты и аргумент широты в моменты наблюдений.

Так как геоцентрические координаты после определения ρ_1, ρ_2, ρ_3 все известны, то можно вычислить гелиоцентрические координаты. Предположим, что употребляются эклиптические координаты и что долготы и широты, так же как и расстояния, известны для t_1, t_2 и t_3 . Наклонность меньше или больше 90° в зависимости от того, что l_3 больше или меньше, чем l_1 . Тогда (рис. 37) из сферических треугольников $C_1 \odot l_1$ и $C_3 \odot l_3$ следует, что

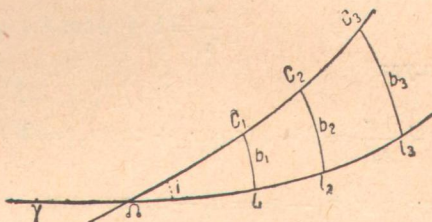


Рис. 37.

$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \odot) = \operatorname{tg} b_1, \quad \operatorname{tg} i \sin(l_3 - \odot) = \operatorname{tg} b_3.$$

Но $l_3 - \odot = (l_3 - l_1) - (l_1 - \odot)$, поэтому эти уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} i \sin(l_1 - \odot) &= \operatorname{tg} b_1, \\ \operatorname{tg} i \cos(l_1 - \odot) &= \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}, \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

однозначно определяющие i и \odot , так как квадрант i уже известен из знака $l_3 - l_1$.

Долгота C от узла называется аргументом широты. Из рис. 37 следует, что

$$\left. \begin{aligned} \cos(l_j - \odot) \cos b_j &= \cos u_j, \\ \sin(l_j - \odot) \cos b_j &= \sin u_j \cos i, \\ \sin b_j &= \sin u_j \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, 3), \quad (92)$$

что однозначно определяет u_1, u_2 и u_3 .

Пусть A равно площади сектора, заключенного между радиусами r_1 и r_2 и орбитой. Тогда отношение площади сектора к площади треугольника, заключенного между r_1 и r_2 , таково:

$$\eta = \frac{A}{[r_1 r_2]} = \frac{k \sqrt{a} (t_2 - t_1)}{r_1 r_2 \sin u_2 - u_1}, \quad (93)$$

где p теперь представляет параметр конического сечения. Предположим, что соответствующие отношения для $t_3 - t_1$ и $t_3 - t_0$ найдены, тогда отношения треугольников известны. Метод Гаусса зависит от определения этих отношений. Каждая из этих величин определяется двумя совместными уравнениями с двумя неизвестными величинами.

135. Первое уравнение Гаусса. Полярное уравнение конического сечения дает:

$$\frac{p}{r_1} = 1 + e \cos v_1, \quad \frac{p}{r_2} = 1 + e \cos v_2,$$

откуда

$$p \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = 2 + e (\cos v_1 + \cos v_2) = 2 + 2e \cos \left(\frac{v_2 + v_1}{2} \right) \cos \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right). \quad (94)$$

Так как $v_2 - v_1 = u_2 - u_1$ известно, то единственное неизвестное в правой части этого уравнения есть $e \cos \left(\frac{v_2 + v_1}{2} \right)$, которое теперь исключим. Из уравнений § 98 следует, что:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{r_1} \cos \frac{v_1}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E_1}{2}, & \sqrt{r_2} \cos \frac{v_2}{2} &= \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E_2}{2}, \\ \sqrt{r_1} \sin \frac{v_1}{2} &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E_1}{2}, & \sqrt{r_2} \sin \frac{v_2}{2} &= \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Из этих уравнений находим:

$$\begin{aligned} \sqrt{r_1 r_2} \cos \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) &= a \cos \left(\frac{E_2 - E_1}{2} \right) - ae \cos \left(\frac{E_2 + E_1}{2} \right), \\ \sqrt{r_1 r_2} \cos \left(\frac{v_2 + v_1}{2} \right) &= a \cos \left(\frac{E_2 + E_1}{2} \right) - ae \cos \left(\frac{E_2 - E_1}{2} \right). \end{aligned}$$

Исключая $e \cos \left(\frac{E_2 + E_1}{2} \right)$ и решая относительно $e \cos \left(\frac{v_2 + v_1}{2} \right)$, находим, что:

$$e \cos \left(\frac{v_2 + v_1}{2} \right) = \frac{p}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\frac{E_2 - E_1}{2} \right) - \cos \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right).$$

Вследствие этого уравнение (94) приводится к виду:

$$p = \frac{2r_1 r_2 \sin^2 \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right)}{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) \cos \left(\frac{E_2 - E_1}{2} \right)}.$$

Исключая p из этого уравнения и из (93), получаем уравнение:

$$\eta^2 = \frac{k^2 (t_2 - t_1)^2 \sec^2 \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right)}{2r_1 r_2 \left\{ r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos \left(\frac{v_2 - v_1}{2} \right) \cos \left(\frac{E_2 - E_1}{2} \right) \right\}}. \quad (96)$$

Для упрощения его положим:

$$\left. \begin{aligned} v_2 - v_1 &= u_2 - u_1 = 2f, \quad E_2 - E_1 = 2g, \\ m &= \frac{k(t_2 - t_1)}{(2 \sqrt{r_1 r_2} \cos f)^{\frac{3}{2}}}, \quad l = \frac{r_1 + r_2}{4 \sqrt{r_1 r_2} \cos f} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Тогда выражение для η^2 приводится к виду:

$$\eta^2 = \frac{m^2}{l + \sin^2 \frac{g}{2}}, \quad (98)$$

где η и g — неизвестные. Это первое уравнение в методе Гаусса.

136. Второе уравнение Гаусса. Теперь выведем второе независимое уравнение, содержащее η и g . Оно будет зависеть от уравнения Кеплера, что обеспечивает его независимость от (98), которое было выведено без использования уравнения Кеплера. Прежде всего мы можем написать:

$$M_1 = \frac{k(t_1 - l)}{a^{\frac{3}{2}}} = E_1 - e \sin E_1, \quad M_2 = \frac{k(t_2 - l)}{a^{\frac{3}{2}}} = E_2 - e \sin E_2,$$

откуда:

$$\frac{k(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2e \sin g \cos \left(\frac{E_2 + E_1}{2} \right).$$

Чтобы привести это уравнение к требуемому виду, надо исключить величины a и $e \cos \left(\frac{E_2 + E_1}{2} \right)$. Употребляя первое уравнение, следующее за (95), находим:

$$\frac{k(t_2 - t_1)}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2 \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{a} \sin g \cos f. \quad (99)$$

Остается исключить a . Из § 98 следует:

$$\frac{r_1}{a} = 1 - e \cos E_1, \quad \frac{r_2}{a} = 1 - e \cos E_2,$$

откуда

$$\frac{r_1 + r_2}{a} = 2 - 2e \cos g \cos \left(\frac{E_2 + E_1}{2} \right).$$

Исключая $e \cos \frac{E_2 + E_1}{2}$ с помощью первого уравнения, следующего за (95), мы получим:

$$\frac{1}{a} = \frac{2 \sin^2 g}{r_1 + r_2 - 2 \sqrt{r_1 r_2} \cos g \cos f},$$

что вследствие выражения для η^2 принимает вид:

$$\frac{1}{a} = \left(\frac{2 \eta \sin g \cos f}{k(t_2 - t_1)} \right)^2 r_1 r_2. \quad (100)$$

Исключая a из (99) и (100), находим:

$$\frac{\eta^3}{m^2} - \frac{\eta^2}{m^2} = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}. \quad (101)$$

что является вторым уравнением с η и g . Подобные уравнения можно написать также для интервалов времени $t_3 - t_1$ и $t_3 - t_2$.

137. Решение уравнений (98) и (101). Из определения η следует, что оно положительно, если гелиоцентрическое движение по орбите меньше 180° в промежуток $t_2 - t_1$. Предположим в дальнейшем, что наблюдения настолько близки между собой, что это условие выполнено.

Пусть:

$$\sin^2 \frac{g}{2} = x, \quad \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g} = X. \quad (102)$$

Исключая η из (98) и (100) и имея в виду (102), находим:

$$m = (l + x)^{\frac{1}{2}} + X(l + x)^{\frac{3}{2}}. \quad (103)$$

Теперь величина X должна быть выражена через x , после чего (103) будет содержать как неизвестное лишь одну эту величину. Выполним это, выразив сперва X через g , а затем g через x . Возьмем известные ряды для тригонометрических функций:

$$\sin 2g = 2g - \frac{4}{3} g^3 + \frac{4}{15} g^5 - \frac{8}{315} g^7 + \frac{8}{5670} g^9 - \dots,$$

$$\sin^3 g = g^3 - \frac{1}{2} g^5 + \frac{13}{120} g^7 - \frac{41}{3024} g^9 + \dots,$$

откуда:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{15} g^2 + \frac{8}{315} g^4 - \frac{8}{5670} g^6 + \dots}{1 - \frac{1}{2} g^2 + \frac{13}{120} g^4 - \frac{41}{3024} g^6 + \dots} = \\ &= \frac{4}{3} \left(1 + \frac{3}{10} g^2 + \frac{17}{230} g^4 + \frac{29}{2800} g^6 + \dots \right). \end{aligned} \quad (104)$$

Из первого уравнения (102) следует, что

$$\begin{aligned} g &= 2 \arcsin \left(x^{\frac{1}{2}} \right) = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{20} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{56} x^{\frac{7}{2}} + \dots, \\ g^2 &= 4x + \frac{4}{3} x^3 + \frac{32}{45} x^3 + \frac{16}{35} x^4 + \dots, \\ g^4 &= 16x^2 + \frac{32}{3} x^3 + \frac{112}{15} x^4 + \dots, \\ g^6 &= 64x^3 + 64x^4 + \dots \end{aligned}$$

Тогда уравнение (104) принимает вид:

$$X = \frac{4}{3} \left[1 + \frac{6}{5} x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7} x^2 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9} x^3 + \dots \right],$$

или

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\frac{3}{4} \left[1 + \frac{6}{5} x + \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7} x^2 + \frac{6 \cdot 8 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 9} x^3 + \dots \right]} = \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10} \left[x - \frac{2}{35} x^2 - \frac{52}{1575} x^3 + \dots \right]}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\xi = \frac{2}{35} x^2 + \frac{52}{1575} x^3 + \dots \quad (105)$$

Если $\frac{1}{2}g$ есть малая величина первого порядка, то x второго порядка и ξ четвертого порядка.

Из (98) находим, что

$$x = \frac{m^2}{\eta^2} - l. \quad (106)$$

Пусть

$$h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi}, \quad (107)$$

тогда (101) может быть написано в виде:

$$\eta - 1 = \frac{m^2 X}{\eta^2} = \frac{\frac{10}{9} h}{\eta^2 - h},$$

откуда находим:

$$\eta^3 - \eta^2 - h\eta - \frac{h}{g} = 0. \quad (108)$$

Если бы ξ было известно, то h было бы определено уравнением (107), а η — уравнением (108), которое имеет лишь один действительный положительный корень. В первом приближении вычислим h , принимая, что малая величина ξ равна нулю, затем найдем действительный положительный корень (108). Или вместо вычисления корня используем таблицы,

составленные Гауссом, дающие действительные положительные значения η для значения h от 0 до 0,6¹⁾. Значения x тогда вычисляются при помощи уравнения (106), а значения ξ — при помощи (105)²⁾. С этими значениями ξ перевычисляются h и η , и процесс повторяется, пока не получится требуемая точность. Опыт показал, что этот метод вычисления отношения площади сектора к треугольнику очень быстро сходится, даже если интервалы времени значительны.

Этим определяется род конического сечения, орбита есть эллипс, парабола или гипербола в зависимости от того, что x положителен, нуль или отрицателен, потому что $x = \sin^2 \frac{g}{2} = \sin^2 \frac{1}{4} (E_2 - E_1)$ и E_2 и E_1 действительны в эллипсах, равны нулю в параболах и мнимы в гиперболах.

Гаусс ввел преобразования, облегчающие вычисления l , определяемые последним уравнением (97)³⁾. Пусть

$$\sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}} = \operatorname{tg} (45^\circ + \omega'), \quad 0^\circ \leq \omega' \leq 45^\circ,$$

откуда

$$\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} + \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} = \operatorname{tg}^2 (45^\circ + \omega') + \operatorname{ctg}^2 (45^\circ + \omega'),$$

или

$$\frac{r_1 + r_2}{\sqrt{r_1 r_2}} = 2 + 4 \operatorname{tg}^2 2\omega'.$$

Тогда последнее уравнение (97) принимает вид:

$$l = \frac{\sin^2 \frac{f}{2} + \operatorname{tg}^2 2\omega'}{\cos f}.$$

138. Определение элементов a , e и ω . После того как при помощи метода § 137 найдено g , легко получить элементы a , e и ω . Большая полуось a определяется уравнением, приведенным ранее, или предыдущим уравнением для более длинных интервалов времени:

$$a = \frac{r_1 + r_2 - 2\sqrt{r_1 r_2} \cos g \cos f}{2 \sin^2 g}. \quad (109)$$

Параметр орбиты p определяется уравнением (93). Так как

$$p = a(1 - e^2) \quad \text{или} \quad p = a(e^2 - 1), \quad (110)$$

в зависимости от того, что орбита — эллипс или гипербола, то e определяется, когда a и p известны.

¹⁾ Эта таблица XIII в «Theoretical Astronomy» Ватсона, VIII в «Bahnbestimmung» Оппольцера и XIX в таблицах Баушингера.

²⁾ Значение по аргументу x дается в «Theoretical Astronomy» Ватсона, табл. XIV и в «Bahnbestimmung» Оппольцера табл. IX.

³⁾ «Theoria Motus», Art. 86.

Если угол v отсчитывается от точки перигелия, то он связан с гелиоцентрическими расстояниями и с e и p полярным уравнением конического сечения:

$$r_i = \frac{p}{1 + e \cos v_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (111)$$

Любое из этих уравнений определяет значение v , так как r известно в t_1 , t_2 и t_3 , а затем ω определяется при помощи:

$$\omega = u_i - v_i. \quad (112)$$

139. Второй метод определения a , e и ω . Метод Гаусса зависит от сложных формул § 135 и 136. Если высшие члены в P и Q уравнений (86) дают достаточно точные значения отношения площадей треугольников, то имеется другой метод ¹⁾, который проще и особенно удобен, когда интервалы между наблюдениями не слишком велики. В решении употребляются следующие данные: $r_1, u_1; r_2, u_2; r_3, u_3$, гелиоцентрические координаты в моменты t_1, t_2 и t_3 .

Элементы i и Ω могут быть вычислены при помощи уравнений (91), которые пригодны для любой орбиты. Все трудности возникают при нахождении a, e, ω .

Примем за элемент вместо большой полуоси a , параметр p , который более удобен тем, что не обращается в бесконечность при e , равном единице, и один входит в уравнение площадей:

$$k \sqrt{p} dt = r^2 dv = r^2 du.$$

Интеграл этого уравнения таков:

$$k \sqrt{p} (t_3 - t_1) = \int_{u_1}^{u_3} r^2 du. \quad (113)$$

Если r^2 выражено через u , то можно найти интеграл правой части при данном значении p .

Покажем, что при известном значении r^2 , если $u = u_1, u_2, u_3$, то $r^2 = r_1^2, r_2^2, r_3^2$ может быть выражено через u с достаточной точностью, чтобы дать достаточное приближение для p .

Для значений u , не слишком далеких от u_2 , функция r^2 может быть разложена в сходящийся ряд вида:

$$r^2 = r_2^2 + c_1 (u - u_2) + c_2 (u - u_2)^2 + c_3 (u - u_2)^3 + \dots \quad (114)$$

Если орбита неизвестна, то коэффициенты ряда (114) неизвестны, но теперь покажем, как легко можно найти достаточное число их для определения p с требуемой степенью точности. По предположению радиусы

¹⁾ Ф. Мультон, The Astronomical Journal, т. XXII, № 510, 1901.

и аргументы широты известны в эпохи t_1 , t_2 и t_3 . Отсюда (114) в моменты t_1 и t_3 принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= r_2^2 + c_1(u_1 - u_2) + c_2(u_1 - u_2)^2 + \\ &\quad + c_3(u_1 - u_2)^3 + c_4(u_1 - u_2)^4 + \dots \\ r_3^2 &= r_2^2 + c_1(u_3 - u_2) + c_2(u_3 - u_2)^2 + \\ &\quad + c_3(u_3 - u_2)^3 + c_4(u_3 - u_2)^4 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Для сокращения положим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= u_3 - u_2, & \varepsilon_1 &= c_3(u_1 - u_2)^3 + c_4(u_1 - u_2)^4 + \dots, \\ \sigma_2 &= u_3 - u_1, & \varepsilon_3 &= c_3(u_3 - u_2)^3 + c_4(u_3 - u_2)^4 + \dots, \\ \sigma_3 &= u_2 - u_1. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Тогда уравнения (115) могут быть написаны в виде:

$$\begin{aligned} -c_1 \sigma_3 + c_2 \sigma_3^2 &= r_1^2 - r_2^2 - \varepsilon_1, \\ +c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_1^2 &= r_3^2 - r_2^2 - \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения относительно c_1 и c_3 , находим:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{-(r_1^2 - \varepsilon_1) \sigma_1^2 + (r_3^2 - \varepsilon_3) \sigma_3^2 - r_2^2 (\sigma_3^2 - \sigma_1^2)}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, \\ c_2 &= \frac{(r_1^2 - \varepsilon_1) \sigma_1 + (r_3^2 - \varepsilon_3) \sigma_2 - r_2^2 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, \end{aligned}$$

и, подставляя значения ε_1 и ε_3 :

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{-r_1^2 \sigma_1^2 + r_3^2 \sigma_3^2 - r_2^2 (\sigma_3^2 - \sigma_1^2)}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} - c_3 \sigma_1 \sigma_3 - c_4 \sigma_1 \sigma_3 (\sigma_1 - \sigma_3) - \dots \\ c_2 &= \frac{r_1^2 \sigma_1 + r_3^2 \sigma_3 - r_2^2 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} - c_3 (\sigma_1 - \sigma_3) + c_4 (3\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2^3) - \dots \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Получив эти выражения для коэффициентов второго и третьего члена уравнения (114), подставим этот ряд для r^2 в (113) и проинтегрируем почленно. С помощью (116) легко находим:

$$\begin{aligned} k \sqrt{p(t_3 - t_1)} &= r_2^2 \sigma_2 + \frac{c_1}{2} (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) + \frac{c_2}{3} (\sigma_1^3 + \sigma_3^3) + \\ &\quad + \frac{c_3}{4} (\sigma_1^4 - \sigma_3^4) + \frac{c_4}{5} (\sigma_1^5 + \sigma_3^5) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения c_1 и c_2 , данные в (117), мы напомним уравнение в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{p(t_3 - t_1)} &= \frac{r_2^2 \sigma_2^3}{6\sigma_1 \sigma_3} + \frac{r_1 \sigma_2}{6\sigma_3} (2\sigma_3 - \sigma_1) + \\ &\quad + \frac{r_3^2 \sigma_2}{6\sigma_1} (2\sigma_1 - \sigma_3) + \frac{c_3 \sigma_2^3}{12} (\sigma_3 - \sigma_1) - \\ &\quad - \frac{c_4 \sigma_2^3}{30} \{4(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \sigma_1 \sigma_3\} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

Если второе наблюдение делит весь интервал на две почти равные части, как обычно бывает на практике, то σ_1 и σ_3 почти равны. Пусть

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \varepsilon \quad \text{и} \quad \sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_2,$$

откуда

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2 + \varepsilon}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_2 - \varepsilon}{2},$$

где ε — вообще очень малая величина. Подставляя эти выражения в последние члены (118), мы получим:

$$k\sqrt{p}(t_3 - t_1) = \left. \begin{aligned} & \frac{r_2^2 \sigma_3^3}{6\sigma_1 \sigma_3} + \frac{r_1^2 \sigma_2}{6\sigma_3} (2\sigma_3 - \sigma_1) + \\ & + \frac{r_3^2 \sigma_2}{6\sigma_1} (2\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{c_3 \sigma_3^3 \varepsilon}{12} - \\ & - \frac{c_4}{120} \sigma_2^3 \left(\frac{3}{2} + 15\varepsilon^2 \right) - \dots \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

Подобным же образом, интегрируя между пределами, соответствующими t_2 и t_1 , находим, что:

$$k\sqrt{p}(t_2 - t_1) = \left. \begin{aligned} & \frac{r_2^2 \sigma_3 (3\sigma_1 + \sigma_3)}{6\sigma_1} + \frac{r_1^2 \sigma_3 (3\sigma_1 + 2\sigma_3)}{6\sigma_2} - \\ & - \frac{r_3^2 \sigma_3^3}{6\sigma_1 \sigma_2} + \frac{c_3 \sigma_3^3}{12} (2\sigma_1 + \sigma_3) + \\ & + \frac{c_4}{30} \sigma_3^3 (5\sigma_1^2 - 5\sigma_1 \sigma_3 - 4\sigma_3^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Для интервалов времени, встречающихся при определении орбиты, эти ряды очень быстро сходятся, и приближенное значение p , обычно имеющее требуемую точность, можно получить, взяв только первые три члена¹⁾ правой части уравнения (119). Рассматривая одновременно уравнения (119) и (120) и отбрасывая члены с c_4 и высшего порядка, можно определить как p , так и c_3 . Но точность не увеличивается в значительной мере, потому что член с c_3 в (119) умножен на малую величину ε , в то время как таковой с c_4 не имеет этого множителя. Покажем, как можно найти ω и e , если вычислено значение p .

Полярное уравнение конического сечения дает:

$$\left. \begin{aligned} e \cos(u_1 - \omega) &= \frac{p - r_1}{r_1}, \\ e \cos(u_3 - \omega) &= \frac{p - r_3}{r_3}. \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

¹⁾ Об условиях и быстроте сходимости смотри оригинальную статью в *Astronomical Journal* № 510. Там показано, что элементы орбит астероидов даются первыми тремя членами (119) с точностью до шести десятичных знаков, если весь интервал, занятый наблюдениями, не более 40 дней, а в случае кометных орбит, если интервал не более 10 дней. Если прибавить два поправочных члена, определяемые формулами (123), то соответствующие интервалы равны 100 и 20 дням.

Но $u_3 - \omega = (u_3 - u_1) + (u_1 - \omega)$. Подставляя это выражение для $u_3 - \omega$ во второе уравнение (121), разлагая и приводя при помощи первого, находим:

$$\left. \begin{aligned} e \sin(u_1 - \omega) &= \frac{r_3(p - r_1) \cos(u_3 - u_1) - r_1(p - r_3)}{r_1 r_3 \sin(u_3 - u_1)} \\ e \cos(u_1 - \omega) &= \frac{p - r_1}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Так как e положительно, то эти уравнения однозначно определяют e и ω . Если p и e известны, то a определяется через $p = a(1 - e^2)$ или $p = a(e^2 - 1)$ согласно тому, что орбита — эллипс или гипербола.

Если элементы a , e и ω не найдены с достаточной точностью, то теперь возможно их исправить. Из (114) следует, что

$$c_3 = \frac{1}{6} \frac{\partial^3(r^2)}{\partial u_3^3}, \quad c_4 = \frac{1}{24} \frac{\partial^4(r^2)}{\partial u_3^4},$$

и так как

$$r^2 = \frac{p^2}{[1 + e \cos(u - \omega)]^2},$$

то находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_3}{p^2} &= \frac{-e \sin(u - \omega)}{3[1 + e \cos(u - \omega)]^3} + \frac{3e^2 \sin(u - \omega) \cos(u - \omega)}{[1 + e \cos(u - \omega)]^4} + \\ &\quad + \frac{4e^3 \sin^3(u - \omega)}{[1 + e \cos(u - \omega)]^5}, \\ \frac{c_4}{p^2} &= \frac{-e \cos(u - \omega)}{12[1 + e \cos(u - \omega)]^3} - \frac{e^2 \sin^2(u - \omega)}{[1 + e \cos(u - \omega)]^4} + \\ &\quad + \frac{3e^2 \cos^2(u - \omega)}{4[1 + e \cos(u - \omega)]^4} + \frac{6e^3 \sin^2(u - \omega) \cos(u - \omega)}{[1 + e \cos(u - \omega)]^5} + \\ &\quad + \frac{5e^4 \sin^4(u - \omega)}{[1 + e \cos(u - \omega)]^6} \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Вычислив из этих уравнений значения c_3 и c_4 , можно прибавить высшие члены в (119), определяя таким образом более точное значение p , после чего e и ω могут быть перевычислены при помощи (122). Этот метод очень краток и, кроме того, имеет преимущество быть одинаково применимым для всех конических сечений.

140. Вычисление времени прохождения через перигелий. Методы вычисления времени прохождения через перигелий зависят от того, движется ли тело по параболе, эллипсу или гиперболе, и основаны на формулах главы V.

Случай параболы. Уравнение (32) главы V имеет вид:

$$k(t - T) = \sqrt{2} q^{\frac{3}{2}} \left[\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right], \quad (124)$$

где $2q = p$. Так как $u = v + \omega$ и u_1 , u_2 и u_3 известны, то это уравнение определяет T .

Случай эллипса. Первые два уравнения (49) главы V дают:

$$\left. \begin{aligned} \sin E &= \frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{1+e \cos v}, \\ \cos E &= \frac{e + \cos v}{1+e \cos v}, \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

что однозначно определяет E . Тогда уравнение Кеплера:

$$M = n(t - T) = E - e \sin E \quad (126)$$

определяет T , употребляя v и соответствующее E для моментов t_1 , t_2 или t_3 .

Случай гиперболы. Величина F определяется при помощи уравнения:

$$\operatorname{th} \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad (127)$$

после чего T получается из формулы:

$$\frac{k \sqrt{1+m}}{\frac{3}{a^2}} (t - T) = -F + e \operatorname{sh} F. \quad (128)$$

141. Прямой вывод уравнений, определяющих орбиту. Движение наблюдаемого тела должно удовлетворять как геометрическим, так и динамическим условиям. Проще всего сразу выписать эти условия. Они включают прямо или косвенно многие из уравнений метода Лапласа и Гаусса, потому что оба эти метода имеют в своей основе самую сущность задачи.

Сохраним обозначения § 111 и примем Солнце за начало. Тогда очевидно, что координата x тела C равняется координате x наблюдателя плюс координата x от C по отношению к наблюдателю. Подобные уравнения, конечно, сохраняются и для других координат. Таким образом мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_i \rho_i + x_i &= -X_i, \\ -\mu_i \rho_i + y_i &= -Y_i, \\ -\gamma_i \rho_i + z_i &= -Z_i, \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

где $i=1, 2, 3$.

Эти уравнения не содержат ошибок параллакса, потому что употреблены координаты наблюдателя. Кроме того, они содержат все геометрические соотношения, существующие между телами S , E и C в моменты t_1 , t_2 и t_3 .

Следующее налагаемое условие заключается в том, чтобы C двигалось вокруг S согласно закону тяготения. Это равносильно тому, что их

координаты могут быть разложены в ряды вида (73). Используя это замечание, мы напишем уравнения (129) в виде:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1 \rho_1 + f_1 x_0 + g_1 x'_0 &= -X_1, \\ -\lambda_2 \rho_2 + f_2 x_0 + g_2 x'_0 &= -X_2, \\ -\lambda_3 \rho_3 + f_3 x_0 + g_3 x'_0 &= -X_3, \\ -\mu_1 \rho_1 + f_1 y_0 + g_1 y'_0 &= -Y_1, \\ -\mu_2 \rho_2 + f_2 y_0 + g_2 y'_0 &= -Y_2, \\ -\mu_3 \rho_3 + f_3 y_0 + g_3 y'_0 &= -Y_3, \\ -\nu_1 \rho_1 + f_1 z_0 + g_1 z'_0 &= -Z_1, \\ -\nu_2 \rho_2 + f_2 z_0 + g_2 z'_0 &= -Z_2, \\ -\nu_3 \rho_3 + f_3 z_0 + g_3 z'_0 &= -Z_3. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Если момент второго наблюдения взят за начало времени, как это удобно на практике, то $f_2 = 1$ и $g_2 = 0$.

Уравнения (130) полностью содержат геометрические и динамические условия задачи и действительны для всех классов конических сечений. Так как они — только необходимые условия, то не введено никаких искусственных трудностей или исключительных случаев, и если в специальном случае они окажутся непригодными, то никакой другой способ не будет иметь успеха.

Правые части уравнений (130) полностью известны; неизвестными в левых частях являются $\rho_1, \rho_2, \rho_3, x_0, x'_0, y_0, y'_0, z_0$ и z'_0 , так что число неизвестных в точности равняется числу уравнений. Величины ρ_1, ρ_2 и ρ_3 входят линейно, но x_0, \dots, z'_0 встречаются не только явно, но также в более высоких членах f_i и g_i . Решая уравнения (130) относительно ρ_1, ρ_2 , и ρ_3 , мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \rho_1 &= +A_1 - \frac{f_1 g_3 - f_3 g_1}{g_3} A_2 - \frac{g_1}{g_3} A_3, \\ \Delta_2 \rho_2 &= \frac{-g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1} B_1 + B_2 + \frac{g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1} B_3, \\ \Delta_2 \rho_3 &= \frac{-g_2}{g_1} C_1 + \frac{f_1 g_3 - f_3 g_1}{g_1} C_2 + C_3, \end{aligned} \right\} \quad (131)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}, & A_i &= \begin{vmatrix} X_i & \lambda_2 & \lambda_3 \\ Y_i & \mu_2 & \mu_3 \\ Z_i & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}, \\ B_i &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & X_i & \lambda_3 \\ \mu_1 & Y_i & \mu_3 \\ \nu_1 & Z_i & \nu_3 \end{vmatrix}, & C_i &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & X_i \\ \mu_1 & \mu_2 & Y_i \\ \nu_1 & \nu_2 & Z_i \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Для завершения рассмотрения надо вывести коэффициенты детерминантов в правых частях этих уравнений, как это сделано в (86), и так как Δ_2 —

третьего порядка, то в правой части члены третьего порядка должны быть удержаны даже в первом приближении. Применив это ко второму уравнению (131), получаем уравнение в виде первого из (44). Деталей этого и завершения решения уравнений (130) коснемся в задачах в конце § 142.

142. Формулы для вычисления приближенной орбиты. Для удобства соберем здесь формулы для вычисления приближенной орбиты в том порядке, в каком ими пользуются. Формулы обозначены теми же номерами, как и в тексте.

Подготовка данных. Наблюдаемые прямые восхождения и склонения α_0 и δ_0 должны быть исправлены за прецессию, абerrацию и т. д. при помощи формул:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 - 15f - g \sin(G + \alpha_0) \operatorname{tg} \delta_0 - h \sin(H + \alpha_0) \sec \delta_0, \\ \delta &= \delta_0 - i \cos \delta_0 - g \cos(G + \alpha_0) - h \cos(H + \alpha_0) \sin \delta_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Направляющие косинусы даются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j &= \cos \delta_j \cos \alpha_j, \\ \mu_j &= \cos \delta_j \sin \alpha_j, \\ \nu_j &= \sin \delta_j, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $j = 1, 2, 3$.

Метод Лапласа. Возьмем $t_0 = t_2$, если интервалы между последовательными наблюдениями не слишком неравны, в каком случае полагаем $t_0 = \frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$. Предположим, что $t_0 = t_2$, и допустим, что X , Y и Z табулированы в эфемеридах для t_a, t_b, t_c где t близко к t_0 . Тогда X , Y и Z в момент t_0 вычислим по формулам вида ¹⁾:

$$X = \frac{(t_0 - t_b)(t_0 - t_c)}{(t_a - t_b)(t_a - t_c)} X_a + \frac{(t_0 - t_a)(t_0 - t_c)}{(t_b - t_a)(t_b - t_c)} X_b + \frac{(t_0 - t_a)(t_0 - t_b)}{(t_c - t_a)(t_c - t_b)} X_c, \quad (31)$$

$$k(t_j - t_2) = \tau_j, \quad (j = 1, 2, 3; \tau_2 = 0), \quad (26)$$

$$P = -\tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \tau_1), \quad (67)$$

$$D = \frac{2}{P} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}, \quad (64, 65)$$

$$D_1 = -\frac{\tau_3^2}{P} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & X \\ \mu_1 & \mu_2 & Y \\ \nu_1 & \nu_2 & Z \end{vmatrix} - \frac{\tau_1^2}{P} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & X \\ \mu_2 & \mu_3 & Y \\ \nu_2 & \nu_3 & Z \end{vmatrix}, \quad (67)$$

$$D_2 = +\frac{2\tau_3}{P} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & X \\ \mu_1 & \mu_2 & Y \\ \nu_1 & \nu_2 & Z \end{vmatrix} + \frac{2\tau_1}{P} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & X \\ \mu_2 & \mu_3 & Y \\ \nu_2 & \nu_3 & Z \end{vmatrix}, \quad (68)$$

¹⁾ Эти уравнения очень просты, потому что t_a, t_b, t_c различаются интервалами в один день, но имеются другие еще более простые методы интерполирования.

$$R \cos \phi = X\lambda + Y\mu + Z\nu \quad (0 < \phi \leq \pi), \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} N \sin m &= R \sin \phi, \\ N \cos m &= R \cos \phi - \frac{D_1}{DR^3}, \\ M &= -\frac{NDR^3}{D_1} \sin^3 \phi > 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\sin^4 \varphi = M \sin(\varphi + m), \quad (48)$$

$$r = R \frac{\sin \phi}{\sin \varphi}, \quad \rho = R \frac{\sin(\phi + \varphi)}{\sin \varphi}, \quad (46)$$

$$\rho' = \frac{D_2}{2D} \left[\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} \right], \quad (44)$$

$$x = \rho\lambda - X, \quad y = \rho\mu - Y, \quad z = \rho\nu - Z. \quad (8)$$

Вычислим λ' , μ' , ν' из уравнений вида:

$$\lambda' = \frac{-(\tau_2 + \tau_3)\lambda_1}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} - \frac{(\tau_3 + \tau_1)\lambda_2}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} - \frac{(\tau_1 + \tau_2)\lambda_3}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}. \quad (32)$$

Вычислим X' , Y' и Z' из уравнений вида:

$$kX' = \frac{2t_2 - (t_b + t_c)}{(t_a - t_b)(t_a - t_c)} X_a + \frac{2t_2 - (t_c + t_a)}{(t_b - t_a)(t_b - t_c)} X_b + \frac{2t_2 - (t_a + t_b)}{(t_c - t_a)(t_c - t_b)} X_c. \quad (32')$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= \rho'\lambda + \rho\lambda' - X', \\ y' &= \rho'\mu + \rho\mu' - Y', \\ z' &= \rho'\nu + \rho\nu' - Z'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Можно ввести теперь поправку за абберационное время при помощи уравнений (70) и улучшить приближенные значения x , y , z , x' , y' и z' методами § 128 и 129, или элементы могут быть вычислены сразу из формул, данных в главе V. Формулы для определения элементов даем дальше, причем обозначение уравнений относится к главе V.

Интегралы площадей в экваториальной системе таковы:

$$\left. \begin{aligned} xy' - yx' &= b_1, \\ yz' - zy' &= b_2, \\ zx' - xz' &= b_3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Если ε представляет наклонность эклиптики, то соответствующие постоянные в эклиптической системе равны:

$$a_1 = b_1 \cos \varepsilon - b_3 \sin \varepsilon,$$

$$a_2 = b_2,$$

$$a_3 = b_1 \sin \varepsilon + b_3 \cos \varepsilon,$$

i и Ω определяются при помощи (глава V) формул:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cos i, \\ a_2 &= \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sin i \sin \Omega, \\ a_3 &= \mp \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sin i \cos \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Большая полуось и параметр определяются из уравнений:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = k^3 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (24)$$

$$k^3 p = k^3 a (1 - e^2) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \quad (22)$$

Из рис. 37 (стр. 213) следует, что:

$$\sin i \sin u = \sin b = \frac{z}{r},$$

$$\cos i \sin u = \cos b \sin (l - \Omega) = \frac{y}{r} \cos \Omega - \frac{x}{r} \sin \Omega,$$

$$\cos u = \cos b \cos (l - \Omega) = \frac{y}{r} \sin \Omega + \frac{x}{r} \cos \Omega,$$

откуда определяется u . Угол v дается уравнением орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

и формулой:

$$\omega = u - v.$$

Если орбита — парабола, то T определяется при помощи уравнения:

$$k(t - T) = \frac{1}{2} p^{\frac{3}{2}} \left[\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right]. \quad (32)$$

Если орбита — эллипс, то E , n и T определяются из формул:

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad (50)$$

$$n = \frac{k}{a^2}, \quad (30)$$

$$n(t - T) = E - e \sin E. \quad (42)$$

Соответствующие формулы для гиперболических орбит имеют вид:

$$a + r = ae \operatorname{ch} F, \quad (73)$$

$$n(t - T) = -F + e \operatorname{sh} F. \quad (74)$$

Метод Гаусса. Наблюдаемые данные исправляются с помощью уравнений (4), а направляющие косинусы даются уравнениями (6). Координаты Солнца в моменты t_1 , t_2 и t_3 могут быть вычислены из формул:

$$X_i = \frac{(t_i - t_b)(t_i - t_c)}{(t_a - t_b)(t_a - t_c)} X_a + \frac{(t_i - t_a)(t_i - t_c)}{(t_b - t_a)(t_b - t_c)} X_b + \frac{(t_i - t_a)(t_i - t_b)}{(t_c - t_a)(t_c - t_b)} X_c, \quad (31)$$

где X_a , X_b , X_c берутся из эфемерид, а t_b есть время, ближайшее к t_i , для которого X дано. Тогда

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \\ \nu_1, \nu_2, \nu_3 \end{vmatrix}, \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} K &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1 + X_3 - 2X_2, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_1 + Y_3 - 2Y_2, \mu_3 \\ \nu_1, Z_1 + Z_3 - 2Z_2, \nu_3 \end{vmatrix} \\ K_1 &= - \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1 + X_3, \lambda_3 \\ \mu_1, Y_1 + Y_3, \mu_3 \\ \nu_1, Z_1 + Z_3, \nu_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Пренебрегая последним членом в (87), который очень мал, и сравнивая результат с первым уравнением (44), получаем формулы для определения r_2 и p_2 :

$$R_2 \cos \phi_2 = X_2 \lambda_2 + Y_2 \mu_2 + Z_2 \nu_2 \quad (0 < \phi_2 \leq \pi), \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} N \sin m &= R_2 \sin \phi_2, \\ N \cos m &= R_2 \cos \phi_2 - \frac{K}{\Delta_2}, \\ M &= \frac{4\Delta_2 R^3 \sin^3 \phi}{K_1} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

$$\sin' \varphi = M \sin(\varphi + m), \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{R_2 \sin \phi_2}{\sin \varphi}, \\ \rho_2 &= R_2 \frac{\sin(\phi_2 + \varphi)}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Тогда ρ_1 и ρ_3 даются при помощи формул:

$$\left. \begin{aligned} \left| \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_3 \\ \mu_1, \mu_3 \end{vmatrix} \right| \rho_1 &= \left| \begin{vmatrix} X_1, \lambda_3 \\ Y_1, \mu_3 \end{vmatrix} \right| - \frac{[1, 3]}{[2, 3]} \left| \begin{vmatrix} X_2, \lambda_3 \\ Y_2, \mu_3 \end{vmatrix} \right| + \\ &+ \frac{[1, 2]}{[2, 3]} \left| \begin{vmatrix} X_3, \lambda_3 \\ Y_3, \mu_3 \end{vmatrix} \right| + \rho_2 \frac{[1, 3]}{[2, 3]} \left| \begin{vmatrix} \lambda_2, \lambda_3 \\ \mu_2, \mu_3 \end{vmatrix} \right|, \\ \left| \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_3 \\ \mu_1, \mu_3 \end{vmatrix} \right| \rho_3 &= \frac{[2, 3]}{[1, 2]} \left| \begin{vmatrix} \lambda_1, X_1 \\ \mu_1, Y_1 \end{vmatrix} \right| - \frac{[1, 3]}{[1, 2]} \left| \begin{vmatrix} \lambda_1, X_2 \\ \mu_1, Y_2 \end{vmatrix} \right| + \\ &+ \left| \begin{vmatrix} \lambda_1, X_3 \\ \mu_1, Y_3 \end{vmatrix} \right| + \rho_2 \frac{[1, 3]}{[2, 3]} \left| \begin{vmatrix} \lambda_1, \lambda_2 \\ \mu_1, \mu_2 \end{vmatrix} \right| \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

(или формулами, полученными из них при помощи круговой перестановки букв λ , μ , ν и X , Y , Z), где

$$2\tau = \tau_3 - \tau_1, \quad 2\varepsilon = \tau_3 + \tau_1, \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{[1, 2]}{[2, 3]} &= \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\tau}{2\tau} + \frac{\tau^2}{4r_2^3}}, & \frac{[1, 2]}{[2, 3]} &= \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\tau^2}{2r_2^3}}{1 + \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\tau^2}{2r_2^3}}, \\ \frac{[2, 3]}{[1, 2]} &= \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\tau^2}{2r_2^3}}{1 - \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\tau^2}{2r_2^3}}, & \frac{[1, 3]}{[1, 2]} &= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2\tau} + \frac{\tau^2}{4r_2^3}}. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

$$\left. \begin{aligned} x_j &= \rho_j \lambda_j - X_j, \\ y_j &= \rho_j \mu_j - Y_j, \\ z_j &= \rho_j \nu_j - Z_j. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Теперь может быть введена поправка за абберационное время; первые две производные от r_2^2 можно вычислить из значений r_1^2 , r_2^2 и r_3^2 , применяя к этому случаю формулы (32); p и q можно вычислить из (74), а более точные значения P и Q можно определить из (86) и затем можно повторить вычисления, начиная с уравнений (46), или, чтобы повысить точность выражений для отношений площадей треугольников, можно применить метод Гаусса (§ 134), или элементы могут быть вычислены без дальнейшего приближения или промежуточных величин. Формулы для вычисления элементов даем ниже. Пусть прямоугольные координаты в эклиптической системе суть \bar{x}_j , \bar{y}_j , \bar{z}_j , и наклонность эклиптики обозначена через ε , которое не надо смешивать с ε , определенным в (85). Тогда

$$\begin{aligned} \bar{x}_j &= x_j, \\ \bar{y}_j &= +y_j \cos \varepsilon + z_j \sin \varepsilon, \\ \bar{z}_j &= -y_j \sin \varepsilon + z_j \cos \varepsilon \end{aligned} \quad (j=1, 2, 3),$$

$$\left. \begin{aligned} A\bar{x}_1 + B\bar{y}_1 + C\bar{z}_1 &= 0, \\ A\bar{x}_2 + B\bar{y}_2 + C\bar{z}_2 &= 0, \\ A\bar{x}_3 + B\bar{y}_3 + C\bar{z}_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

откуда

$$A : B : C = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{z}_1 \\ \bar{y}_2 & \bar{z}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{z}_1 & \bar{x}_1 \\ \bar{z}_2 & \bar{x}_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 & \bar{y}_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда из уравнений, соответствующих (11), (14) и (15) главы V, находим:

$$\left. \begin{aligned} \cos i &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \sin \delta \sin i &= \frac{\pm B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \delta \sin i &= \frac{\pm C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

что определяет δ и i .

Из рис. 37 следует, что аргументы широты определяются из формул:

$$\begin{aligned} \sin i \sin u_j &= \frac{z_j}{r_j} \quad (j=1, 2, 3), \\ \cos i \sin u_j &= \frac{y_j}{r_j} \cos \delta - \frac{x_j}{r_j} \sin \delta, \\ \cos u_j &= \frac{y_j}{r_j} \sin \delta + \frac{x_j}{r_j} \cos \delta, \\ \sigma_1 &= u_3 - u_2, \quad \sigma_2 = u_3 - u_1, \quad \sigma_3 = u_2 - u_1, \end{aligned} \quad (116)$$

$$k \sqrt{p}(t_3 - t_1) = \frac{r_3^2 \sigma_3^2}{6\sigma_1\sigma_3} + \frac{r_3^2 \sigma_2(2\sigma_3 - \sigma_1)}{6\sigma_3} + \frac{r_3^2 \sigma_2(2\sigma_1 - \sigma_3)}{6\sigma_1}. \quad (119)$$

Отсюда получаем p .

$$\left. \begin{aligned} e \sin(u_1 - \omega) &= \frac{r_3(p - r_1) \cos \sigma_2 - r_1(p - r_3)}{r_1 r_3 \sin \sigma_2}, \\ e \cos(u_1 - \omega) &= \frac{p - r_1}{r_1}. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Из этих уравнений находим e и ω , а зная p и e можем определить a .

Так как $v_j = u_j - \omega$ ($j=1, 2, 3$), то время прохождения через перигелий определяется совершенно так, как в методе Лапласа — уравнениями (32), (50), (30), (42), (73), (74) главы V соответственно в случае параболы, эллипса и гиперболы.

ЗАДАЧИ

1. Возьмите три наблюдения астероида, разделенные одно от другого не более чем 15 днями, или три наблюдения кометы, разделенные друг от друга не более чем 6 днями, и вычислите элементы орбит методом Лапласа, а также методом Гаусса.

2. Докажите, что видимое движение C не может совершаться постоянно вдоль большого круга, если оно не происходит в плоскости эклиптики.

3. Примените формулы (31) и (32) к определенной не обращающей я в бесконечность функции, как, например, $x = \sin t$.

4. При помощи уравнения:

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \phi$$

исключите ρ из первого уравнения (44), рассмотрите результат методами теории алгебраических уравнений и покажите, что решения количественно согласуются с таковыми, полученными в § 119.

5. Рассмотрите детерминанты D , D_1 и D_2 , если имеются четыре наблюдения.

6. Выразите Δ_2 , когда имеется три наблюдения; через α_i и δ_i так, чтобы выявить тот факт, что оно третьего порядка.

7. Выведите в явном виде формулы, употребляя λ_i , μ_i и ν_i и детерминантные обозначения для дифференциальных поправок метода Гарцера и Лейшнера.

8. Дайте геометрическое объяснение исчезновению коэффициентов ρ_1 и ρ_3 в уравнениях (89).

9. Предположим, что три положения C известны, как в § 139. Покажите: а) что три уравнения:

$$r_i = \frac{p}{1 + e \cos(u_i - \omega)} \quad (i = 1, 2, 3)$$

определяют p , e и ω , не употребляя интервалов времени, в которые описаны дуги; б) выпишите формулы для вычисления p , e и ω ; в) сравните их длину с таковой (119) и (122) и д) покажите, что p определяется неуверенно, так как оно зависит от отношения малых величин третьего порядка.

10. Предположив, что $f_2 = 1$, $g_2 = 0$, и рассматривая (130) как линейные уравнения относительно ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , x_0 , x'_0 , y_0 , y'_0 , z_0 , z'_0 , покажите, что детерминант, составленный из коэффициентов, есть:

$$\Delta = -g_1 g_3 (f_1 g_3 - f_3 g_1) \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix}.$$

11. Покажите, что, употребляя разложения уравнений (86), второе уравнение (131) принимает вид (87).

12. Найдя ρ_2 из уравнения, соответствующего (87), и ρ_1 и ρ_3 из (131), покажите, что x_0 , x'_0 , y_0 , y'_0 , z_0 , z'_0 могут быть определены из уравнений (130). (Затем элементы могут быть определены, как в методе Лапласа.)

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Первый метод нахождения орбиты тела (кометы, движущейся по параболе) из трех наблюдений был дан Ньютоном и приведен в «Началах», книга III, предложение XII. Решение зависит от графического построения, которое при помощи последовательных приближений приводит к элементам. Одним из первых применил этот метод Галлей в комете, которая с тех пор носит его имя. Ньютон, повидавшему, имел затруднение с задачей определения орбит, потому что он говорит: «Эта задача очень большой трудности, я испробовал много методов для ее решения». Успех Ньютона, основавшего свои рассуждения на основных элементах проблемы, был вполне объяснен Лапласом в его мемуаре на эту тему.

Первое полное решение, не зависевшее от графического построения, было дано Эйлером в 1749 г. в его «Theoria Motuum Planetarum et Cometarum». Важные успехи были сделаны Ламбертом (Lambert) в 1761 г. До этого времени в большинстве случаев базировались на одном из двух предположений, которые лишь приближенно правильны, т. е. что в интервал $t_3 - t_1$ наблюдаемое тело описывает прямую линию с равномерной скоростью или что радиус во время второго наблюдения делит хорду, соединяющую крайние положения, на отрезки, пропорциональные интервалам между наблюдениями. Пытаясь улучшить одно из этих предположений, Ламберт открыл зависимость между радиусами, хордой, промежутком времени и большой полуосью, упомянутой в § 92. Позднее он сделал определение зависящим от кривизны видимой орбиты, которая имеет близкое отношение к детерминанту Δ_2 , и в этом направлении приблизился к лучшим современным методам. Он мастерски уловил физический и геометрический смысл задачи и предвосхитил многие идеи, которые были доведены до конца его преемниками лучшими и более удобными путями.

Лагранж написал три мемуара по теории орбит, два в 1778 г. и один в 1783 г. Они напечатаны вместе в его «Собрании сочинений» (т. IV, стр. 439—532). Как и можно было ожидать, Лагранж внес общность, точность и математическое изящество. Он определил геометрическое расстояние C во время второго наблюдения при помощи уравнения восьмой степени, которое — не что иное, как уравне-

ние (87) с r_2 , исключенным при помощи уравнения, выражающего, что S , E и C образуют треугольник в момент t_2 . Он разложил выражения для гелиоцентрических координат в ряд по степеням интервалов времени [уравнение (73)] и заложил основу для разложения выражений для промежуточных элементов в степенные ряды. Эти разложения были выполнены и приведены к виду, удобному для вычислений, Шарлье (Charlier, *Meddelande från Lunds Astronomiska Observatorium* № 46). Оригинальной работе Лагранжа не была придана форма, соответствующая нуждам вычислителя, и она не применялась на практике.

В 1780 г. Лаплас опубликовал совершенно новый метод (Собрание сочинений, т. X, стр. 93—146). Этот метод, основные идеи которого бы и даны в настоящей главе, послужил основанием для большей части позднейших работ. Среди работ в этом направлении можно упомянуть мемуар Виларсо (Villargceau, *Annales d'Observatoire de Paris*, III), работу Гарцера (Harzer, *Astronomische Nachrichten*, т. 14) и ее упрощение, произведенное Лейшнером (Leuschner, *Publications of the Lick Observatory*, т. VII, ч. I).

В первоначальном методе Лапласа неудобно вычислять приближения кроме первого, но метод дифференциальных поправок, предложенный Гарцером и упрощенный Лейшнером, оказался вполне удовлетворительным на практике.

В 1797 г. Ольберс опубликовал свой классический труд «*Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen*». Этот метод не был превзойден для определения параболических орбит и широко применяется даже в настоящее время. Он дается почти в каждом сочинении по теории определения орбит.

Открытие Цереры в 1801 г. и ее потеря после того, как она была наблюдаема лишь короткое время, привлекли внимание блестящего молодого германского математика Гаусса к задаче определения элементов орбиты небесного тела из наблюдений, произведенных с Земли. Задача была быстро решена, и применение метода привело к отысканию Цереры. Гаусс разработал и усовершенствовал свою работу и в 1809 г. опубликовал ее в своей «*Theoria Motus Corporum Coelestium*». Эта работа, написанная человеком, который был одновременно математиком в математике и искусным вычислителем, содержит так много ценных идей и настолько исчерпывающая, что она остается до сего времени классическим сочинением по этому вопросу. Позднейшие сочинения многим обязаны работам Гаусса.

В «*Memoirs of the National Academy of Sciences*», т. IV, 1888, Джиббс (Dibbs) опубликовал оригинальный метод, в котором первое приближение к отношению треугольников было получено более точно, улаживая с самого начала три геоцентрических расстояния в качестве неизвестных. Этот метод отличается также тем, что он был выведен при помощи векторного анализа.

Рекомендуем познакомиться со следующими работами:

«*Theoria Motus*» Гаусса; «*Theoretical Astronomy*» Ватсона; «*Bahnbestimmung*» Оппольцера (исчерпывающее сочинение); «*Leçons sur la Détermination des Orbites*» Тиссерана, написанное в характерно ясном французском стиле; «*Bahnbestimmung*» Баушингера, новая превосходная книга одного из лучших авторитетов по вопросу теории орбит; «*Theoretische Astronomie*» Клинкерфуса (третье издание Бухгольца), прекрасная и наиболее исчерпывающая из существующих работ.

Из русских учебников укажем на следующие:

А. Я. Орлов, Теоретическая астрономия. Одесса 1921.

А. А. Иванов, Основной курс теоретической астрономии, 1923.

М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1933.

ГЛАВА VII

ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ О n ТЕЛАХ

143. Дифференциальные уравнения движения. Предположим, что рассматриваемые тела состоят из однородных сферических слоев, тогда они притягивают друг друга так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах. Пусть m_1, m_2, \dots, m_n представляют их массы, и x_i, y_i, z_i ($i=1, \dots, n$) обозначают координаты m_i , отнесенные к неподвижной системе осей координат. Пусть r_{ij} представляет расстояние между центрами m_i и m_j и k^2 — постоянную тяготения, зависящую от единиц измерения. Тогда составляющие силы, действующей на массу m_1 , параллельные оси x , будут:

$$-\frac{k^2 m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \cdot \frac{(x_1 - x_2)}{r_{1,2}}, \quad \dots, \quad -\frac{k^2 m_1 m_n}{r_{1,n}^2} \cdot \frac{(x_1 - x_n)}{r_{1,n}^2},$$

и общей силой является их сумма. Поэтому

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k m_1 \sum_{j=2}^n m_j \frac{(x_1 - x_j)}{r_{1,j}^3},$$

и соответствующие уравнения напишутся для y и z .

Такие уравнения можно написать для каждого тела. Система уравнений, определяющих движение n тел, будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -k^2 m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{i,j}^3}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -k^2 m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{(y_i - y_j)}{r_{i,j}^3}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -k^2 m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{(z_i - z_j)}{r_{i,j}^3}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $i=1, \dots, n; j \neq i$.

Каждое из этих уравнений содержит все $3n$ переменных x_i, y_i и z_i , и поэтому система должна быть решена совместно. Система содержит

всего $3n$ уравнений, каждое второго порядка, так что порядок задачи равен $6n$.

Уравнениям (1) можно придать простую и изящную форму введением потенциальной функции, которая в этой задаче будет обозначена через U вместо V . Постоянную k^2 включим в потенциал. В главе IV потенциал V был определен при помощи интеграла $V = \int \frac{dm}{\rho}$. В этом случае система состоит из отдельных масс, и потенциал определяется формулой:

$$U = \frac{1}{2} k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \quad (i \neq j). \quad (2)$$

Частная производная от U по x_i имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = k^2 m_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}} = -k^2 m_i \sum_{j=1}^n m_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} \quad (i \neq j);$$

аналогичный результат получим дифференцированием по y_i и z_i . Поэтому уравнения (1) могут быть написаны в форме:

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $i = 1, \dots, n$.

144. Шесть интегралов движения центра массы. Функция U не зависит от выбора осей координат, так как она зависит только от взаимных расстояний тел. Поэтому, если мы сместим начало координат параллельно оси x в отрицательном направлении на расстояние a , то координата x каждого тела возрастет на величину a , но потенциальная функция не изменится. Так как U является функцией всех координат x , то мы можем написать:

$$U = U(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

После перемещения начала координаты x принимают вид:

$$x'_i = x_i + a \quad (i = 1, \dots, n).$$

Частная производная от U по a напишется в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial x'_1} \frac{\partial x'_1}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial x'_2} \frac{\partial x'_2}{\partial a} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x'_n} \frac{\partial x'_n}{\partial a}.$$

Но $\frac{\partial x'_i}{\partial \alpha} = 1$ ($i = 1, \dots, n$) и $\frac{\partial U}{\partial \alpha} = 0$, так как U не содержит α явным образом.

Поэтому, опуская штрихи и написав соответствующие уравнения по y_i и z_i , для смещений β и γ находим:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_i} = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0.$$

Поэтому уравнения (3) дают:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения легко интегрируются, и мы находим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{dx_i}{dt} &= \alpha_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \frac{dy_i}{dt} &= \beta_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \frac{dz_i}{dt} &= \gamma_1, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — постоянные интегрирования. Интегрируя еще раз, мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i x_i &= \alpha_1 t + \alpha_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i &= \beta_1 t + \beta_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i &= \gamma_1 t + \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пусть $\sum_{i=1}^n m_i = M$, а \bar{x} , \bar{y} и \bar{z} представляют координаты центра массы n тел, тогда согласно § 19 мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i x_i &= M\bar{x}, \\ \sum_{i=1}^n m_i y_i &= M\bar{y}, \\ \sum_{i=1}^n m_i z_i &= M\bar{z}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и уравнения (5) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} M\bar{x} &= \alpha_1 t + \alpha_2, \\ M\bar{y} &= \beta_1 t + \beta_2, \\ M\bar{z} &= \gamma_1 t + \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

откуда следует, что координаты центра массы изменяются прямо пропорционально времени. Отсюда выводим, что центр массы движется с равномерной скоростью по прямой линии. Скорость центра массы равна:

$$\bar{V} = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)^2} = \frac{1}{M} \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2} \quad (8)$$

и является постоянной. Исключая t из уравнений (7), находим:

$$\frac{M\bar{x} - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{M\bar{y} - \beta_2}{\beta_1} = \frac{M\bar{z} - \gamma_2}{\gamma_1}, \quad (9)$$

являющиеся симметричными уравнениями прямой линии в пространстве трех измерений.

Уравнения (8) и (9) дают теорему:

Если n тел не подвергаются действию других сил, кроме их взаимных притяжений, то их центр массы движется с равномерной скоростью по прямой линии. Если $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$, то получим частный случай $\bar{V} = 0$. Так как невозможно определить неподвижную точку в пространстве, то и невозможно определить эти шесть постоянных.

Теперь начало может быть перенесено в центр массы системы, как это было сделано в задаче двух тел, или в центр одного из тел, как это будет иметь место в § 148, и порядок задачи понизится на шесть единиц.

145. Три интеграла площадей. Потенциальная функция не изменяется при повороте осей. Предположим, что система координат повернута вокруг оси z на угол $-\varphi$, и обозначим новые координаты через x'_i , y'_i и z'_i . Они связаны со старыми координатами формулами:

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x_i \cos \varphi - y_i \sin \varphi, \\ y'_i &= x_i \sin \varphi + y_i \cos \varphi, \\ z'_i &= z_i \quad (i=1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Так как функция U не изменяется при повороте, то она не содержит явно φ , и поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial z'_i} \frac{\partial z'_i}{\partial \varphi} = 0. \quad (11)$$

Но из (10) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial \varphi} &= -y'_i, \\ \frac{\partial y'_i}{\partial \varphi} &= x'_i, \\ \frac{\partial z'_i}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n);$$

поэтому (11) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^n \left[x'_i \frac{\partial U}{\partial y'_i} - y'_i \frac{\partial U}{\partial x'_i} \right] = 0.$$

Опуская штрихи, которые больше не нужны, вследствие (3) находим, что

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right] = 0,$$

и аналогично

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[z_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - x_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right] = 0.$$

Каждый член этой суммы может быть проинтегрирован в отдельности, и мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \left[x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right] &= c_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \left[y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right] &= c_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i \left[z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right] &= c_3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Выражения в скобках являются проекциями секториальных скоростей различных тел на три основных плоскости (§ 16). Так же как невозможно определить какую-либо неподвижную точку в пространстве, то также невозможно определить какое-либо неподвижное направление в пространстве, следовательно, практически невозможно определить постоянные c_1, c_2, c_3 . Однако принято считать, что неподвижные звезды в среднем не изменяют своего положения в пространстве, так что при наблюдении их эти постоянные могут быть определены. Однако очевидно, что имеется одинаково мало доводов как к тому, что звезды не обращаются, так и к тому, что они не движутся поступательно в пространстве, — и то и другое является чистым предположением без возможности доказательства или опровержения. Но надо заметить, что если допустить эти предположения, то постоянные c_1, c_2 и c_3 могут быть определены с большой степенью точности, в то время как при настоящем состоянии наблюдательной астрономии постоянные уравнений (4) не могут быть найдены сколько-нибудь точно.

Пусть A_i, B_i и C_i представляют проекции площадей, описанных прямой, проведенной от начала к телу m_i соответственно на плоскости xy, yz и zx , тогда (12) может быть написано так:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{dA_i}{dt} &= c_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i \frac{dB_i}{dt} &= c_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i \frac{dC_i}{dt} &= c_3, \end{aligned} \right\}$$

откуда интегрированием находим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i A_i &= c_1 t + c'_1, \\ \sum_{i=1}^n m_i B_i &= c_2 t + c'_2, \\ \sum_{i=1}^n m_i C_i &= c_3 t + c'_3. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отсюда теорема:

Суммы произведений масс на проекции площадей, описанных соответствующими радиусами, пропорциональны времени, или из (12): суммы произведений масс на скорости проекций площадей являются постоянными.

Возможно, как это впервые было показано Лапласом, направить оси так, чтобы две постоянных в уравнении (12) равнялись нулю, в то время как третья равняется $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. Это плоскость максимальной суммы произведений масс на скорости проекций площадей. Ее отношения к первоначальным неподвижным осям определяются постоянными c_1, c_2, c_3 , и ее положение поэтому всегда одно и то же. Поэтому она была названа Лапласом неизменной плоскостью. В настоящее время неизменная плоскость солнечной системы наклонена к эклиптике приблизительно на 2° , и долгота ее восходящего узла равна приблизительно 286° . Эти цифры несколько неточны вследствие нашего неточного знания масс некоторых планет.

Если бы положение неизменной плоскости было точно известно, то она имела бы некоторые практические преимущества перед эклиптической, которая подвергается значительным изменениям как фундаментальная плоскость отсчета. Неизменная плоскость имела большое значение в некоторых теоретических исследованиях¹⁾.

146. Интеграл энергии²⁾. Умножая уравнения (3) соответственно на $\frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}$, складывая и суммируя по отношению к i , находим:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{dx_i}{dt} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{dy_i}{dt} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{dz_i}{dt} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right\}. \quad (14)$$

Потенциал U есть функция $3n$ переменных x_i, y_i, z_i , поэтому правая часть (14) является полной производной от U по t . После интегрирования обеих частей этого уравнения находим:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right\} = U + h. \quad (15)$$

Левая часть этого уравнения есть кинетическая энергия всей системы, правая часть — потенциальная функция плюс постоянная.

Пусть потенциальная энергия одной конфигурации системы по отношению к другой конфигурации определена как количество работы, требуемой, чтобы перевести ее из одной в другую. Если два тела взаимно притягиваются обратно пропорционально квадрату расстояния, то действующая

¹⁾ См. мемуары Якоби, Journal de Math., т. IX; Тиссеран, Mécanique Céleste, т. I, гл. XXV; Пуанкаре, Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, т. I, ч. 39.

²⁾ Его часто называют интегралом живых сил

щая между ними сила равна $\frac{k^2 m_i m_j}{r_{i,j}^2}$. Количество работы, употребленной для изменения их расстояния от $r_{i,j}^{(0)}$ до $r_{i,j}$, таково:

$$W_{ij} = k^2 m_i m_j \int_{r_{i,j}^{(0)}}^{r_{i,j}} \frac{dr_{i,j}}{r_{i,j}^2} = k^2 m_i m_j \left[\frac{1}{r_{i,j}^{(0)}} - \frac{1}{r_{i,j}} \right]. \quad (16)$$

Если в начале движения тела находились на бесконечном расстоянии одно от другого, то $r_{i,j}^{(0)} = \infty$, и (16) принимает вид:

$$-W_{i,j} = \frac{k^2 m_i m_j}{r_{i,j}},$$

откуда

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_{i,j}.$$

Поэтому U является потенциальной энергией всей системы, взятой с обратным знаком, принимая начальное положение тел в бесконечности.

Это дает теорему:

В системе n тел, не подверженных никаким силам кроме их взаимных притяжений, сумма кинетической и потенциальной энергии постоянна.

147. Вопрос о новых интегралах. Из всех 61 интегралов, требуемых для полного решения задачи, мы получили 10. Известны лишь эти 10 интегралов, и возникает вопрос, существуют ли еще интегралы какого-либо вида.

В глубоком мемуаре в «Acta Mathematica», т. XI, Брунс (Bruns) показал, что если за зависящие переменные взяты прямоугольные координаты, то не имеется новых алгебраических интегралов. Это, конечно, не исключает возможности алгебраических интегралов при употреблении других переменных. Пуанкаре (Poincaré) показал в премированном мемуаре в «Acta Mathematica», т. XIII, и затем с некоторыми дополнениями в «Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste», гл. V, что задача трех тел не допускает новых однозначных трансцендентных интегралов, даже если массы двух тел очень малы по сравнению с массой третьего тела. В этой теореме зависящие переменные суть элементы орбит тел, которые непрерывно меняются вследствие их взаимных притяжений. Не следует думать, что интегралы класса, рассмотренного Пуанкаре, не существуют, когда взяты другие зависимые переменные. На самом деле Леви-Чивита (Levi-Civita) показал существование этого класса интегралов в специальной задаче, которая подходит под теорему Пуанкаре, когда употреблены соответствующие переменные («Acta Mathematica», т. XXX). Практическое значение теорем Брунса и Пуанкаре часто переоценивалось теми, которые забывали условия, при которых была доказана их правильность.

ЗАДАЧИ

1. Напишите уравнения (1), когда сила изменяется обратно пропорционально n -й степени расстояния. Для каких значений n все уравнения становятся независимыми? Задача n тел может быть полностью решена для этого закона силы; покажите, что по отношению к центру массы системы все орбиты — эллипсы с центром в этой точке. Покажите, что орбита любого тела по отношению ко всякому другому также является центральным эллипсом и что то же самое имеет место в движении всякого тела по отношению к центру массы любой подгруппы всей системы. Покажите, что все периоды равны.

2. Каково определение потенциальной функции, если сила изменяется обратно пропорционально n -й степени расстояния?

3. Выведите уравнения, непосредственно предшествующие (4), прямо из уравнений (1).

4. Докажите, что теорема о движении центра массы применима, когда сила изменяется пропорционально любой степени расстояния.

5. Выведите уравнения, непосредственно предшествующие (12), прямо из уравнений (1) и покажите, что они применимы, когда сила меняется пропорционально любой степени расстояния.

6. Любая плоскость, проходящая через начало, может быть изменена в любую другую плоскость, проходящую через начало, вращением вокруг каждой из двух координатных осей. Преобразуйте уравнения (12) последовательным вращением вокруг двух осей и покажите, что углы вращения могут быть выбраны так, что две постоянные, которым равны функции новых координат, подобные (12), равняются нулю и что третья есть $\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$. (Этот метод был употреблен Лапласом для доказательства существования неизменной плоскости.)

7. Почему уравнения (13) не рассматриваются как интегралы дифференциальных уравнений (1), доводя таким образом общее число интегралов до тринадцати.

148. Перенесение начала в Солнце. Нам ничего неизвестно об абсолютных движениях планет, потому что наблюдения дают сведения лишь об их относительных положениях или об их положениях относительно Солнца. Правда, известно, что солнечная система движется по направлению к созвездию Геркулеса, но надо помнить, что это движение происходит лишь по отношению к некоторым звездам. Задача небесной механики состоит в определении относительных положений членов солнечной системы или в частности в определении положений планет по отношению к Солнцу. Для этой цели удобно перенести начало в Солнце и преобразовать соответствующим образом дифференциальные уравнения.

Предположим, что m_n — Солнце; возьмем его центр за начало, и пусть координаты тела m_i по отношению к новой системе будут x'_i, y'_i, z'_i . Тогда старые координаты выражаются через новые формулами:

$$x_i = x'_i + x_n,$$

$$y_i = y'_i + y_n, \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

$$z_i = z'_i + z_n$$

Так как разности старых переменных равны соответствующим разностям новых, то очевидно, что:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial y_i} = \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \quad \frac{\partial U}{\partial z_i} = \frac{\partial U}{\partial z'_i} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Вследствие этих преобразований уравнения (3) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'_i}{dt^2} + \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x'_i}, \\ \frac{d^2 y'_i}{dt^2} + \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial y'_i}, \\ \frac{d^2 z'_i}{dt^2} + \frac{d^2 z_n}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial z'_i}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где $i = 1, \dots, n-1$.

Так как начало находится в $x'_n = y'_n = z'_n = 0$, то после подстановки $i = n$ первое уравнение (1) дает:

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \frac{k^2 m_1 x'_1}{r_{1,n}^3} + \frac{k^2 m_2 x'_2}{r_{2,n}^3} + \dots + \frac{k^2 m_{n-1} x'_{n-1}}{r_{n-1,n}^3} = k^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j x'_j}{r_{j,n}^3}. \quad (18)$$

Это уравнение и соответствующие с y и z , внесенные в (17), завершают переход к новым переменным, но удобнее комбинировать члены иначе, так, чтобы те, которые происходят от притяжения Солнца, были отделены от других. Напишем дифференциальные уравнения для тела m_1 , откуда путем перестановки индексов можно образовать другие.

Потенциальную функцию можно разбить на сумму:

$$U = k^2 m_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{m_i}{r_{i,n}} + \frac{1}{2} k^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_i m_j}{r_{i,j}} \quad (i \neq j)$$

или

$$U = k^2 m_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{m_j}{r_{j,n}} + U'. \quad (19)$$

Подставляя выражения (18) и (19) в уравнения (17), мы перепишем их в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'_1}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_n) \frac{x'_1}{r_{1,n}^3} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial U'}{\partial x'_1} - k^2 \sum_{j=2}^{n-1} \frac{m_j x'_j}{r_{j,n}^3}, \\ \frac{d^2 y'_1}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_n) \frac{y'_1}{r_{1,n}^3} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial U'}{\partial y'_1} - k^2 \sum_{j=2}^{n-1} \frac{m_j y'_j}{r_{j,n}^3}, \\ \frac{d^2 z'_1}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_n) \frac{z'_1}{r_{1,n}^3} &= \frac{1}{m_1} \frac{\partial U'}{\partial z'_1} - k^2 \sum_{j=2}^{n-1} \frac{m_j z'_j}{r_{j,n}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Положим:

$$R_{1,j} = k^2 \left\{ \frac{1}{r_{1,j}} - \frac{x'_1 x'_j + y'_1 y'_j + z'_1 z'_j}{r_{j,n}^3} \right\},$$

тогда уравнения (20) могут быть написаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'_1}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_n) \frac{x'_1}{r_{1,n}^3} &= \sum_{j=2}^{n-1} m_j \frac{\partial R_{1,j}}{\partial x'_1}, \\ \frac{d^2 y'_1}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_n) \frac{y'_1}{r_{1,n}^3} &= \sum_{j=2}^{n-1} m_j \frac{\partial R_{1,j}}{\partial y'_1}, \\ \frac{d^2 z'_1}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_n) \frac{z'_1}{r_{1,n}^3} &= \sum_{j=2}^{n-1} m_j \frac{\partial R_{1,j}}{\partial z'_1}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Отбросим штрихи, которые больше не нужны, и напомним аналогичные уравнения для других тел, для чего положим:

$$R_{i,j} = k^2 \left\{ \frac{1}{r_{i,j}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_{j,n}^3} \right\} \quad (i \neq j). \quad (22)$$

Тогда уравнения относительного движения будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + k^2 (m_i + m_n) \frac{x_i}{r_{i,n}^3} &= \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial R_{i,j}}{\partial x_i}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} + k^2 (m_i + m_n) \frac{y_i}{r_{i,n}^3} &= \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial R_{i,j}}{\partial y_i}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} + k^2 (m_i + m_n) \frac{z_i}{r_{i,n}^3} &= \sum_{j=1}^{n-1} m_j \frac{\partial R_{i,j}}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} \quad (i \neq j) \quad (23)$$

где $i = 1, \dots, n-1$.

149. Динамическое значение уравнений. Чтобы легче понять значение уравнений, предположим, что имеется лишь три тела m_1 , m_2 и m_n , из которых m_n — Солнце с массой, равной единице, и пусть расстояния от него до m_1 и m_2 соответственно равны r_1 и r_2 . Тогда уравнения (23) полностью напишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{x_1}{r_1^3} &= k^2 m_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{r_{1,2}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right\}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{y_1}{r_1^3} &= k^2 m_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ \frac{1}{r_{1,2}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right\}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} + k^2 (1 + m_1) \frac{z_1}{r_1^3} &= k^2 m_2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ \frac{1}{r_{1,2}} - \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_2^3} \right\}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k^2 (1 + m_2) \frac{x_2}{r_2^3} &= k^2 m_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{r_{2,1}} - \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1}{r_1^3} \right\}, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + k^2 (1 + m_2) \frac{y_2}{r_2^3} &= k^2 m_1 \frac{\partial}{\partial y_2} \left\{ \frac{1}{r_{2,1}} - \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1}{r_1^3} \right\}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} + k^2 (1 + m_2) \frac{z_2}{r_2^3} &= k^2 m_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \left\{ \frac{1}{r_{2,1}} - \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1}{r_1^3} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Если бы m_2 было нуль, то первые три уравнения не зависели бы от вторых трех и были бы уравнениями для относительного движения тела m по отношению к $m_n = 1$, и их можно было бы проинтегрировать. Все отклонения от чисто эллиптического движения возникают от присутствия правых частей, которые в первых трех уравнениях являются частными производными от $R_{1,2}$ соответственно по переменным x_1, y_1 и z_1 . Поэтому $m_2 R_{1,2}$ называется *пертурбационной функцией*.

Частные производные первых членов правых частей первых трех уравнений соответственно равны:

$$-k^2 m_2 \frac{(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3}, \quad -k^2 m_2 \frac{(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3}, \quad -k^2 m_2 \frac{(z_1 - z_2)}{r_{1,2}^3},$$

что является составляющими ускорениями m_1 вследствие притяжения m_2 . Частные производные вторых членов таковы:

$$-k^2 m_2 \frac{x_2}{r_2^3}, \quad -k^2 m_2 \frac{y_2}{r_2^3}, \quad -k^2 m_2 \frac{z_2}{r_2^3},$$

являющиеся составляющими ускорения Солнца с обратным знаком вследствие притяжения m_2 . Поэтому правые части первых трех уравнений (24) являются разностями составляющих ускорения m_2 и Солнца вследствие притяжения m_1 . Подобным образом правые части последних трех уравнений суть разности составляющих ускорения m_2 и Солнца вследствие притяжения m_1 .

Если два тела подвержены равным параллельным ускорениям, то их относительные положения не изменятся. Разности их ускорений происходят вследствие возмущающих сил и измеряют эти возмущения. Поэтому правые части уравнений (24)—именно те части ускорений, которые происходят вследствие возмущающих сил.

Если имеется $n-2$ возмущающих тела, то правые части являются суммами членов, зависящих от тел m_2, \dots, m_{n-1} , подобных правым частям (24), которые зависят от одного m_2 , или, другими словами, все равнодействующие возмущающих ускорений равны суммам частей, возникающих от действия отдельных возмущающих тел.

150. Порядок системы уравнений. Порядок системы уравнений (23) есть $6n-6$ вместо $6n$, как это было в случае абсолютного движения. В абсолютном движении было найдено десять интегралов, при помощи которых порядок системы может быть понижен до $6n-10$. Шесть из этих интегралов относились к движению центра массы, три—к секториальным скоростям и один—к энергии системы.

В настоящем случае могут быть найдены лишь четыре интеграла, три интеграла площадей и интегралы энергии, которые также понижают порядок задачи порядок до $6n-10$.

Задача может быть прямо приведена к порядку $6n-6$, если употреблять интегралы для центра массы. В частности рассмотрим дифференциальные уравнения для тел m_1, m_2, \dots, m_{n-1} . В первоначальных уравнениях они содержат координаты m_n , но эти величины могут быть исключены с помощью уравнений (5).

и подобные уравнения с u и z , где

$$U = k^2 m_n \left(\frac{m_{n-1}}{r_{n,n-1}} + \frac{m_{n-2}}{r_{n,n-2}} + \dots + \frac{m_1}{r_{n,1}} \right) + \\ + k^2 m_{n-1} \left(\frac{m_{n-2}}{r_{n-1,n-2}} + \frac{m_{n-3}}{r_{n-1,n-3}} + \dots + \frac{m_1}{r_{n-1,1}} \right) + \\ + k^2 m_2 \frac{m_1}{r_{1,2}}.$$

(Эти уравнения таковы же, как найденные Радо с другой точки зрения в мемуаре, цитированном в § 150. Они были применены Тиссераном в очень изящном доказательстве теоремы Пуассона о неизменности больших осей планетных орбит до возмущений второго порядка включительно по отношению к массам. Пуанкаре употребил эту систему в исследованиях задачи трех тел.)

4. Выведите дифференциальные уравнения, соответствующие (23) в полярных координатах:

$$\frac{d^2 r_{j,n}}{dt^2} - r_{j,n} \cos^2 \varphi_j \left(\frac{d\theta_j}{dt} \right)^2 - r_{j,n} \left(\frac{d\varphi_j}{dt} \right)^2 = - \frac{k^2 (m_j + m_n)}{r_{j,n}^2} + \sum_{i=1}^{n-1} m_i \frac{\partial R_{j,i}}{\partial r_{j,n}},$$

$$\frac{d}{dt} \left(r_{j,n}^2 \cos^2 \varphi_j \frac{d\theta_j}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \frac{\partial R_{j,i}}{\partial \theta_j},$$

$$\frac{d}{dt} \left(r_{j,n}^2 \frac{d\varphi_j}{dt} \right) + r_{j,n}^2 \sin \varphi_j \cos \varphi_j \left(\frac{d\theta_j}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \frac{\partial R_{j,i}}{\partial \varphi_j},$$

где $j = 1, \dots, n-1$ ($i \neq j$).

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Исследования задачи n тел делятся на два класса: к первому относятся те исследования, которые ведут к общим теоремам, применимым к каждой системе, а ко второму относятся исследования, дающие хорошие приближения для известного промежутка времени в особых системах, как, например, солнечная система. Исследования второго класса известны как теории возмущений, рассмотрение которых будет дано в другой главе.

Первые общие теоремы касаются движения центра массы и были даны Ньютоном в «Началах». Десять интегралов и теоремы, к которым они приводят, были известны Эйлеру. Следующим общим результатом было доказательство существования и рассмотрение свойств неизменной плоскости Лапласом в 1784 г. В зимнем семестре 1842-43 г. Якоби прочел курс лекций по динамике в Кенигсбергском университете. В этом курсе он привел результаты некоторых очень важных исследований интегрирования дифференциальных уравнений механики. Во всех случаях, когда силы зависят от одних координат и когда существует потенциальная функция (условия, выполненные в задаче n тел), он доказал, что если все интегралы, кроме двух, найдены, то последние два могут быть всегда найдены. Он также показал, развивая некоторые исследования В. Гамильтона, что задача может быть приведена к решению дифференциального уравнения с частными производными, порядок которого в два раза меньше порядка первоначальной системы. Лекции Якоби опубликованы в дополнительном томе к собранию его сочинений. Они очень важны сами по себе, а также абсолютно необходимы как вступление к чтению составивших эпоху мемуаров Пуанкаре и должны быть доступны для каждого изучающего небесную механику.

Большой интерес представляет вопрос, чисто ли периодичны движения членов такой системы, как Солнце и планеты. Ньюкомб показал в важном мемуаре, опубликованном в «*Smithsonian Contributions to Knowledge*», декабрь 1874 г., что дифференциальным уравнениям можно формально удовлетворить чисто периодическими рядами. Однако он не доказал сходимости этих рядов и действительно, Пуанкаре показал в «*Les Méthodes Nouvelles*», гл. IX и XII, что они вообще расходятся.

Как было упомянуто в § 147, Брунс доказал в «*Acta Mathematica*», т. XI, что при употреблении прямоугольных координат не существует новых алгебраических интегралов, а Пуанкаре показал в «*Acta Mathematica*», т. XIII, что при употреблении элементов как переменных не существует новых однозначных трансцендентных интегралов, даже если массы всех тел, кроме одного, очень малы.

Для дальнейшего чтения по вопросу об общих дифференциальных уравнениях при выборе различных переменных изучающим можно рекомендовать «*Mécanique Céleste*» Тиссерана, т. I, гл. III, IV и V.

ГЛАВА VIII

ЗАДАЧА О ТРЕХ ТЕЛАХ

151. Специальные случаи задачи о трех телах. В предыдущей главе были выведены дифференциальные уравнения задачи о n телах и рассмотрены общие свойства этих уравнений. Точное интегрирование невозможно даже для простейшего случая, когда $n=3$, т. е. для задачи о трех телах. Тем не менее начальные значения можно выбрать таким образом, что задача разрешается до конца. Хотя эти специальные случаи не имеют непосредственного практического значения, но их исследование чрезвычайно важно и имеет глубокий теоретический смысл, а поэтому мы и посвящаем этому вопросу особую главу.

Первая часть этой главы будет посвящена исследованию некоторых свойств движения бесконечно малого тела, которое притягивается двумя конечными телами, обращающимися по кругу вокруг их центра массы. Затем мы рассмотрим доказательство существования некоторых частных решений, в которых расстояния бесконечно малого тела от конечных тел постоянны. Вторая часть этой главы посвящается изложению метода нахождения частных решений общей задачи о трех телах, в которых отношения их взаимных расстояний постоянны.

Частные решения задачи трех тел, которые мы здесь рассмотрим, впервые были получены Лагранжем в премирном мемуаре 1772 г. Метод, принятый здесь, радикально отличается от метода Лагранжа и легче поддается обобщению для случая большего количества тел. Но, с другой стороны, этим методом не достигается понижение порядка задачи, что составляло интересную черту мемуара Лагранжа. Однако так как не было возможности использовать каким-либо путем это понижение, то оно не имеет особого практического значения.

С математической точки зрения бесконечно малое тело — это такое тело, которое притягивается конечными массами, но само их не притягивает. С физической точки зрения это тело настолько малой массы, что вызванные возмущения в движении конечных тел остаются меньше любого сколь угодно малого количества в течение сколь угодно большого промежутка времени. Задача о движении бесконечно малого тела также еще не решена, но многочисленные исследования настолько продвинули вперед эту задачу, что теперь известны многие существенные свойства движения в этом частном и специальном случае задачи о трех телах.

Заметим, что обычно эта задача носит название «ограниченной задачи о трех телах».

ДВИЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ТЕЛА

152. Дифференциальные уравнения движения. Предположим, что система состоит из двух конечных тел, обращающихся по кругам вокруг их общего центра массы, и из бесконечно малого тела, подверженного действию их притяжения. Примем за единицу массы сумму масс конечных тел, тогда массы могут быть представлены в виде $1 - \mu$ и μ , где $\mu \leq \frac{1}{2}$. За единицу расстояния примем постоянное расстояние между конечными телами и единицу времени выберем так, чтобы k' также равнялось единице.

Возьмем начало координат в центре массы конечных тел и выберем направления осей таким образом, что плоскость $\xi\eta$ является плоскостью движения конечных масс. Пусть координаты масс $1 - \mu$, μ и бесконечно малого тела обозначены соответственно через $\xi_1, \eta_1, 0$; $\xi_2, \eta_2, 0$ и ξ, η, ζ ; кроме того, положим:

$$r_1 = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2}.$$

Тогда дифференциальные уравнения движения бесконечно малого тела будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -(1-\mu) \frac{(\xi - \xi_1)}{r_1^3} - \mu \frac{(\xi - \xi_2)}{r_2^3}, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -(1-\mu) \frac{(\eta - \eta_1)}{r_1^3} - \mu \frac{(\eta - \eta_2)}{r_2^3}, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -(1-\mu) \frac{\zeta}{r_1^3} - \mu \frac{\zeta}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При нашем выборе единиц среднее угловое движение конечных масс равно:

$$n = k \frac{\sqrt{(1-\mu) + \mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = 1.$$

Отнесем теперь движение тел к новой системе осей координат, имеющих то же начало, как и старые, но вращающихся в плоскости $\xi\eta$ в направлении движения конечных тел с равномерной угловой скоростью, принимаемой также за единицу. Координаты в новой системе определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos t - y \sin t, \\ \eta &= x \sin t + y \cos t, \\ \zeta &= z \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и подобными уравнениями для букв с индексами 1 и 2. Вычисляя вторые производные от выражений (2) и подставляя в (1), находим:

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x \right\} \cos t - \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - y \right\} \sin t = \\ & = - \left\{ (1-\mu) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \mu \frac{(x-x_2)}{r_2^3} \right\} \cos t + \\ & + \left\{ (1-\mu) \frac{(y-y_1)}{r_1^3} + \mu \frac{(y-y_2)}{r_2^3} \right\} \sin t, \\ & \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x \right\} \sin t + \left\{ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - y \right\} \cos t = \\ & = \left\{ (1-\mu) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} + \mu \frac{(x-x_2)}{r_2^3} \right\} \sin t - \\ & - \left\{ (1-\mu) \frac{(y-y_1)}{r_1^3} + \mu \frac{(y-y_2)}{r_2^3} \right\} \cos t, \\ & \frac{d^2z}{dt^2} = - (1-\mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Умножив первые два уравнения соответственно на $\cos t$ и $\sin t$, затем на $-\sin t$ и $\cos t$ и сложив, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= x - (1-\mu) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} - \mu \frac{(x-x_2)}{r_2^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= y - (1-\mu) \frac{(y-y_1)}{r_1^3} - \mu \frac{(y-y_2)}{r_2^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= - (1-\mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}. \end{aligned}$$

Направления осей можно выбрать таким образом, чтобы ось x постоянно проходила через центры конечных тел, тогда $y_1=0$, $y_2=0$, и уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= x - (1-\mu) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} - \mu \frac{(x-x_2)}{r_2^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= y - (1-\mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= - (1-\mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Это — дифференциальные уравнения движения бесконечно малого тела, отнесенного к вращающимся осям так, что конечные тела всегда лежат на оси x . Существенным в уравнениях (4) является то, что они не содержат явно независимой переменной t , так как вследствие вращения осей координаты конечных тел стали постоянными. Наоборот, в уравнениях (1) величины ξ_1 , ξ_2 , η_1 и η_2 являются функциями t .

Общая задача определения движения бесконечно малого тела — шестого порядка; если же оно движется в плоскости движения конечных тел, то задача — четвертого порядка.

153. Интеграл Якоби. Уравнения (4) имеют интеграл, который впервые был получен Якоби в «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris», т. III, стр. 59, и который был рассмотрен Хиллом (Hill) в первом из его знаменитых мемуаров по теории Луны («The American Journal of Mathematics», т. I, стр. 18), а также Дарвином в его мемуарах о периодических орбитах («Acta Mathematica», т. XXI, стр. 102). Положим:

$$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(1-\mu)}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (5)$$

тогда уравнения (4) могут быть написаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если эти уравнения умножить соответственно на $2 \frac{dx}{dt}$, $2 \frac{dy}{dt}$ и $2 \frac{dz}{dt}$ и сложить, то полученное уравнение может быть проинтегрировано, так как U есть функция только x , y и z , и мы получим:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = V^2 = 2U - C \equiv x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C, \quad (7)$$

где C — постоянная интегрирования.

Чтобы решить задачу полностью, надо найти еще пять интегралов. Если бесконечно малое тело движется в плоскости xu , то остается найти еще три интеграла, из которых два последних могут быть получены посредством *последнего множителя* ¹⁾ Якоби, если бы был найден первый. Таким образом очевидно, что для полного решения этой специальной задачи в плоскости ²⁾ требуется еще лишь один новый интеграл. Брунс в «Acta Mathematica», т. XI, доказал, что при употреблении прямоугольных координат не существует никаких новых алгебраических интегралов, а Пуанкаре доказал в «Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste», т. I, гл. V, что при употреблении в качестве переменных элементов нет также новых однозначных трансцендентных интегралов, даже если масса одного из конечных тел очень мала по сравнению с другим телом (см. § 147). Эти доказательства очень сложны и здесь воспроизведены быть не могут.

¹⁾ Выведен Якоби в «Vorlesungen über Dynamik»; см. также Whittaker, *Analytische Dynamik. Прим. ред.*

²⁾ Хилл придал своим специальным уравнениям такую форму, что они могут быть приведены к квадратурам, если единственная переменная выражается через время, «American Journal of Mathematics», т. I, стр. 16.

154. Поверхности нулевой относительной скорости¹⁾. Уравнение (7) дает соотношение между квадратом скорости и координатами бесконечно малого тела относительно вращающихся осей. Поэтому, если постоянная интегрирования C определена численно начальными условиями, то уравнение (7) определяет скорость, с которой движется бесконечно малое тело, если оно вообще движется, во всех точках вращающегося пространства; обратно, для данной скорости уравнение (7) дает геометрическое место точек относительного пространства, в которых может находиться бесконечно малое тело. В частности, если V в этом уравнении положить равным нулю, то оно определит поверхности, на которых скорость будет равна нулю. С одной стороны от этих поверхностей скорость будет действительна, а с другой мнима²⁾; другими словами, тело может двигаться с одной стороны поверхности и не может двигаться с другой. Общая теорема о том, что функция меняет знак, если пересекается поверхность, на которой она равна нулю (по крайней мере в регулярной точке поверхности), доказана в § 120. Несмотря на то, что вообще невозможно сказать, кроме весьма специальных случаев, какой будет орбита, все же это деление относительного пространства покажет, в каких частях бесконечно малое тело может двигаться и в каких частях не может.

Уравнение поверхностей нулевой относительной скорости имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} &= C, \\ r_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Так как сюда входят лишь квадраты координат y и x , то поверхности, определенные уравнением (8), симметричны по отношению к плоскостям xy и xz , а если $\mu = \frac{1}{2}$, то также и по отношению к плоскости yz . Поверхности для $\mu \neq \frac{1}{2}$ можно рассматривать как деформированные поверхности для $\mu = \frac{1}{2}$. Из того, каким образом в уравнение входит z , следует, что линия, параллельная оси z , встречается поверхности в двух (или ни в одной) действительных точках.

Кроме того, поверхности заключены внутри прямого круглого цилиндра, ось которого есть z и радиус \sqrt{C} , к которому некоторые поверхности асимптотически приближаются, когда z^2 стремится к бесконечности. Уравнение этого цилиндра имеет вид:

$$x^2 + y^2 = C.$$

¹⁾ Впервые рассмотрены Хиллом в его теории Луны, «The American Journal of Mathematics», т. I, и затем для движения в плоскости xu Дарвином в его «Периодических орбитах» в «Acta Mathematica», т. XXI.

²⁾ Так как V^2 имеет разные знаки. *Прим. ред.*

155. Приближенные формы поверхностей. Из свойств поверхностей, разобранных в предшествующем параграфе, и из форм кривых, по которым поверхности пересекают координатные плоскости, может быть получено общее понятие о их форме. Полагая в первом уравнении (8) z равным нулю, получаем уравнение линии пересечения поверхностей с плоскостью xy :

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = C. \quad (9)$$

Для очень больших значений x и y , удовлетворяющих этому уравнению, третий и четвертый члены малы, и уравнение может быть написано так:

$$x^2 + y^2 = C - \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} - \frac{2\mu}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} = C - \epsilon,$$

где ϵ — малая величина. Это есть уравнение окружности, радиус которой равен $\sqrt{C - \epsilon}$, следовательно, одна ветвь кривой пересечения поверхности

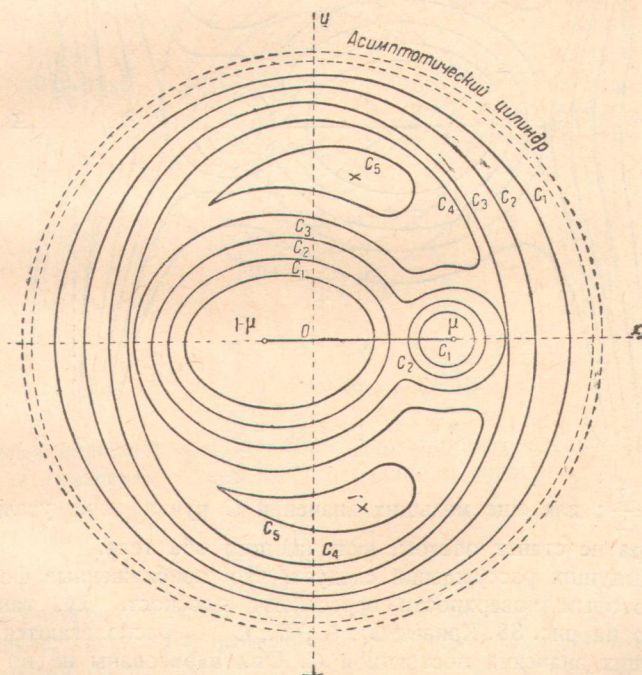


Рис. 38.

с плоскостью xy представляет собой близкий к окружности овал, лежащий внутри асимптотического цилиндра. Заметим также, что чем больше C , тем больше значения x и y , удовлетворяющие этому уравнению, тем меньше ϵ , тем ближе кривая к окружности и тем больше она приближается к асимптотическому цилиндру.

Для малых значений x и y , удовлетворяющих уравнению (9), первый и второй члены малы, и уравнение может быть написано в виде:

$$\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = \frac{C}{2} - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{C}{2} - \varepsilon.$$

Это уравнение *экипотенциальных кривых*¹⁾ для двух притягивающих центров $1-\mu$ и μ . Для больших значений C они состоят из замкнутых овалов вокруг каждого тела $1-\mu$ и μ ; для меньших значений C эти овалы соединяются между телами, образуя фигуру, имеющую форму гимнастических гирь, в которой концы разной величины, за исключением

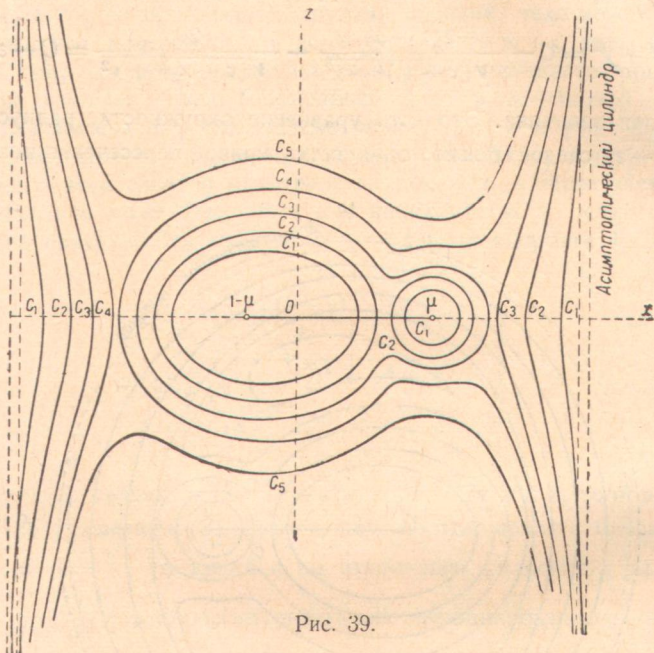


Рис. 39.

когда $\mu = \frac{1}{2}$; для еще меньших значений C ручка гири увеличивается, пока фигура не станет овалом, включающим оба тела.

Из предыдущих рассуждений следует, что приближенные формы кривых, по которым поверхности пересекают плоскость xu , таковы, как изображено на рис. 38. Кривые C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 располагаются в порядке возрастающих значений постоянной C . Они нарисованы не по числовым вычислениям и показывают лишь качественный характер кривых.

Уравнение кривых пересечения поверхностей с плоскостью xz получается, полагая в уравнении (8) y равным нулю:

$$x^2 + \frac{2(1-\mu)}{V(x-x_1)^2 + z^2} + \frac{2\mu}{V(x-x_2)^2 + z^2} = C. \quad (10)$$

1) См. Thomson and Tait, Natural Philosophy, II, § 508.

Для больших значений x и z , удовлетворяющих этому уравнению, второй и третий члены малы, и уравнение может быть написано в виде:

$$x^2 = C - \varepsilon,$$

что является уравнением симметричной пары прямых линий, параллельных оси x . Чем больше C , тем больше значение x , которое для данного значения z удовлетворяет уравнению, и поэтому тем меньше ε . Отсюда, чем больше C , тем ближе линии пересечения к асимптотическому цилиндру

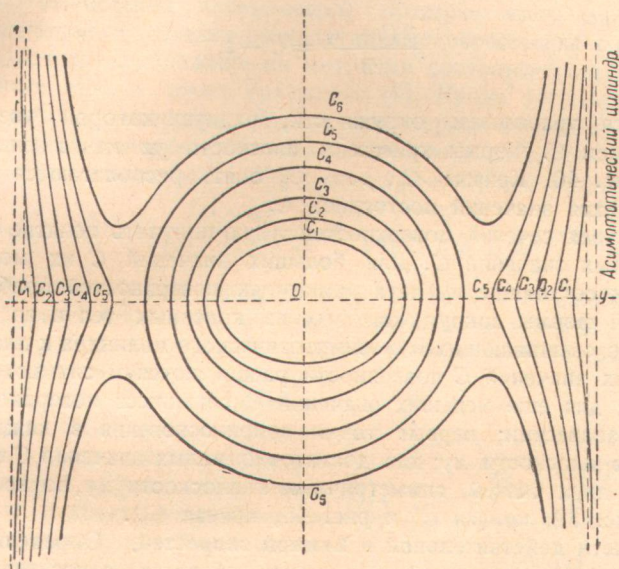


Рис. 40.

Для малых значений x и z , удовлетворяющих уравнению (10), первый член мал, и уравнение может быть написано в виде:

$$\frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} = \frac{C}{2} - \varepsilon.$$

Это опять уравнение эквипотенциальных кривых и имеет те же свойства, как и прежде. Поэтому формы кривых пересечения с плоскостью xz качественно похожи на изображенные на рис. 39. Кривые C_1, \dots, C_5 опять расположены в порядке уменьшающихся значений постоянной C и нарисованы не по числовым вычислениям.

Уравнение кривых пересечения поверхностей с плоскостью yz получается, если положить в уравнении (8) x равным нулю:

$$y^2 + \frac{2(1-\mu)}{\sqrt{x_1^2 + y^2 + z^2}} + \frac{2\mu}{\sqrt{x_2^2 + y^2 + z^2}} = C. \quad (11)$$

Для больших значений y и z , удовлетворяющих этому уравнению, второй и третий члены малы, и оно может быть написано в виде:

$$y^2 = C - \varepsilon,$$

что является уравнением пары прямых, лежащих вблизи асимптотического цилиндра и приближающихся к нему, если C увеличивается.

Если $1 - \mu$ гораздо больше, чем μ , то числовое значение x_2 значительно больше, чем x_1 ; поэтому для малых значений y и z , удовлетворяющих (11), это уравнение может быть написано в виде:

$$\frac{2(1 - \mu)}{r_1} = C - \varepsilon,$$

что является уравнением окружности, радиус которой увеличивается с уменьшением C . Формы кривых в плоскости yz качественно изображены на рис. 40. Кривые C_1, \dots, C_5 опять располагаются в порядке уменьшающихся значений постоянной C .

Из этих трех сечений поверхностей легко получить понятие о их форме для различных значений C . Для больших значений C их можно грубо описать как состоящие из двух замкнутых поверхностей приблизительно сферической формы вокруг каждого из конечных тел и из занавесей, симметрично свешивающихся с асимптотического цилиндра к плоскости xu ; для меньших значений C поверхности расширяются и сливаются (рис. 38, кривая C_3); для еще меньших значений C слившиеся поверхности соединяются с занавесями; первые точки соприкосновения в каждом случае находятся в плоскости xu ; для достаточно малых значений C поверхности состоят из двух частей, симметричных к плоскости xu , но не пересекающих ее (рис. 39, кривая C_5 и рис. 40, кривая C_6).

156. Области действительной и мнимой скоростей. Определив формы поверхностей, остается найти, в каких областях относительного пространства движение действительно и в каких оно мнимо. Выражение для квадрата скорости имеет вид:

$$V^2 = x^2 + y^2 + \frac{2(1 - \mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C.$$

Предположим, что C настолько велико, что овалы и занавеси все раздельны. Движение действительно в таких частях относительного пространства, для которых правая часть этого уравнения положительна. Если она положительна в одной точке замкнутой полости, то она также положительна в каждой другой точке внутри нее, так как функция меняет знак лишь на поверхности нулевой относительной скорости.

Из уравнения видно, что x и y могут быть взяты настолько большими, что правая часть будет положительна, как бы велико ни было C ; поэтому вне занавесей движение действительно. Также ясно, что точка может быть выбрана настолько близкой к $1 - \mu$ или μ , т. е. r_1 или r_2 могут быть взяты настолько малыми, что правая часть будет положительна, как бы велико C ни было.

Если значение C настолько велико, что поверхности вокруг конечных тел замкнуты и бесконечно малое тело в начальный момент находится внутри одной из этих поверхностей, то оно всегда остается там, так как оно не может пересечь поверхность нулевой скорости. Предположив, что земная орбита — окружность и что масса Луны бесконечно мала, найдем, что постоянная C , определенная движением Луны, так велика, что поверхность вокруг Земли замкнута и Луна находится внутри нее. Поэтому Луна не может удалиться от Земли в бесконечность. Таким путем и с таким приближением Хилл доказал, что расстояние Луны от Земли имеет верхний предел ¹⁾.

157. Метод вычисления поверхностей. Быстрее всего можно найти точки поверхностей, определяя сначала кривые пересечения с плоскостью xu и затем находя приближенными методами соответствующие значения для z , которые удовлетворяют уравнению (7). Кроме того, кривые в плоскости xu наиболее интересны, потому что первые точки контакта при соединении разных поверхностей появляются в этой плоскости и, конечно, на оси симметрии поверхностей. Уравнение кривых в плоскости xu таково:

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{V(x-x_1)^2 + y^2} + \frac{2\mu}{V(x-x_2)^2 + y^2} = C.$$

Если это уравнение рационализировать и освободить от дробей, то в результате получится многочлен шестнадцатой степени относительно x и y . Если значение одной из переменных взято произвольно, то соответствующее значение другой может быть найдено решением этого рационализованного уравнения. Эта задача представляет большие практические трудности благодаря высокой степени уравнения, и эти трудности увеличиваются наличием посторонних решений, которые вводятся процессами рационализирования.

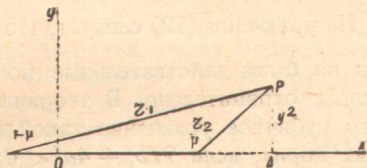


Рис. 41.

Можно избежать трудностей, возникающих от посторонних решений, и сильно понизить порядок уравнения преобразованием в биполярные координаты, т. е. точки кривых могут быть определены при помощи расстояний от двух неподвижных точек на оси x . Этот метод не мог бы быть применен, если бы кривые не были симметричны по отношению к оси, на которой лежат полюсы. Пусть центры тел 1 — μ и μ совпадают с полюсами; расстояния от этих точек соответственно равны r_1 и r_2 . Для завершения преобразования необходимо лишь выразить $x^2 + y^2$ через эти величины.

Пусть P — точка одной из кривых (рис. 41), тогда $OA = x$, $AP = y$, и так как O есть центр массы 1 — μ и μ , то $\overline{O\mu} = 1 - \mu$ и $\overline{O(1-\mu)} = -\mu$. Отсюда следует, что:

$$y^2 = r_1^2 - (x + \mu)^2 = r_1^2 - x^2 - 2\mu x - \mu^2,$$

$$y^2 = r_2^2 - [x - (1 - \mu)]^2 = r_2^2 - x^2 + 2(1 - \mu)x - (1 - \mu)^2.$$

¹⁾ Lunar Theory, «Am. Journ. Math.», т. I, ч. 23, см. также Charlier, Mechanik des Himmels, Bd. 2. Прим. ред.

Исключая из этих уравнений x и решая относительно $x^2 + y^2$, находим:

$$x^2 + y^2 = (1 - \mu)r_1^2 + \mu r_2^2 - \mu(1 - \mu).$$

Вследствие этого уравнение (9) принимает вид:

$$(1 - \mu)\left[r_1^2 + \frac{2}{r_1}\right] + \mu\left[r_2^2 + \frac{2}{r_2}\right] = C + \mu(1 - \mu) = C'. \quad (12)$$

Если взято произвольное значение r_2 , то из этого уравнения может быть вычислено r_1 ; точками пересечения окружностей с центрами в $1 - \mu$ и μ с соответственно вычисленными значениями радиусов r_1 и r_2 будут точки на кривых. Чтобы проследить этот план, напомним уравнение (12) в виде:

$$\left. \begin{aligned} r_1^3 + ar_1 + b &= 0, \\ a &= -\frac{C'}{1 - \mu} + \frac{\mu}{1 - \mu}\left[r_2^2 + \frac{2}{r_2}\right], \\ b &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Так как $b = 2$ положительно, то имеется по меньшей мере один действительный отрицательный корень первого уравнения (13), каково бы ни было значение a . Но так как расстояние r_1 есть существенно положительная величина, то мы должны рассмотреть, при каких условиях уравнение (13) имеет действительные и положительные корни.

Из уравнения (12) следует, что C' всегда больше, чем $\mu\left[r_2^2 + \frac{2}{r_2}\right]$, каковы бы ни были действительные положительные значения r_1 и r_2 , поэтому a всегда отрицательно. В теории алгебраических уравнений доказывается¹⁾, что кубическое уравнение такой формы имеет три различных действительных корня, если $27b^2 + 4a^3 < 0$; или, так как $b = 2$, если

$$a + 3 < 0. \quad (14)$$

Предположим, что это неравенство удовлетворено. Тогда корни уравнения (13) можно получить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{b}{2} \sqrt{\frac{27}{-a^3}}, \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ r_{11} &= 2 \sqrt{\frac{-a}{3}} \sin \frac{\theta}{3}, \\ r_{12} &= 2 \sqrt{\frac{-a}{3}} \sin \left(60^\circ - \frac{\theta}{3}\right), \\ r_{13} &= -2 \sqrt{\frac{-a}{3}} \sin \left(60^\circ + \frac{\theta}{3}\right), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где r_{11} , r_{12} , r_{13} — три корня кубического уравнения.

¹⁾ См., например, Сушкевич, Основы высшей алгебры. Прим. ред.

В предельном случае $a + 3 = 0$, что ввиду (13) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} r_2^3 + a'r_2 + b' &= 0, \\ a' &= -\frac{C'}{\mu} + \frac{3(1-\mu)}{\mu}, \\ b' &= 2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Решение этого уравнения определяет то крайнее значение r_2 , для которого (13) имеет действительные корни.

Условия, при которых уравнение (16) будет иметь действительные положительные корни, аналогично (14) напишется в виде:

$$a' + 3 \leq 0;$$

подставляя вместо a' его значение и сохраняя только знак равенства, мы получим:

$$-\frac{C'}{\mu} + \frac{3(1-\mu)}{\mu} = -3,$$

откуда $C' = 3$.

Поэтому, чтобы кривые имели действительные точки в плоскости xu , C' должно быть больше, в крайнем случае равно 3. Для $C' = 3$ кривые исчезают с этой плоскости, и тогда уравнение (12) удовлетворяется при $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, т. е. поверхности исчезают с плоскости xu в точках, образующих равнобедренные треугольники с $1 - \mu$ и μ .

158. Двойные точки поверхностей и частные решения задачи о трех телах. Из общей формы поверхностей следует, что двойные точки, появляющиеся при уменьшении C , находятся все в плоскости xu . Поэтому здесь достаточно рассмотреть уравнения кривых пересечения поверхностей с плоскостью xu . Эти кривые имеют три двойных точки на оси x , когда овалы, расположенные вокруг конечных тел, соприкасаются друг с другом и когда они касаются внешней кривой, которая их окружает. Кроме того, имеются еще две двойные точки, появляющиеся, когда поверхности исчезают с плоскости xu , в двух точках, образующих равнобедренные треугольники с конечными телами.

Покажем, что эти двойные точки связаны с важными динамическими свойствами системы. Напишем уравнение кривых пересечения с плоскостью xu :

$$F(x, y) \equiv x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C = 0. \quad (17)$$

Координаты двойных точек определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} &\equiv x - (1-\mu) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} - \mu \frac{(x-x_2)}{r_2^3} = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} &\equiv y - (1-\mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

В левых частях этих уравнений так же, как и в правых частях уравнений (4), нужно положить $z = 0$. Выражения $\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y}$ пропорцио-

нальны направляющим косинусам нормали во всех обыкновенных точках кривой, и так как $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ равны нулю на поверхностях нулевой скорости, то из (4) следует, что направления ускорения или линии действующей силы ортогональны к поверхностям нулевой относительной скорости. Поэтому если бесконечно малое тело помещено на поверхности нулевой относительной скорости, то оно начнет двигаться в направлении нормали. Но в двойных точках положение нормали становится двойным, поэтому можно предположить, что если бесконечно малое тело поместить в одной из этих точек, то оно остается относительно конечных масс в покое¹⁾.

Условия, налагаемые уравнениями (17) и (18), являются также условиями, при которых исчезают составляющие ускорения в уравнениях (4) или $\frac{d^2x}{dt^2}$ и $\frac{d^2y}{dt^2}$. Отсюда, если бесконечно малое тело помещено в двойной точке с нулевой относительной скоростью, то его координаты тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения и оно останется навсегда в относительном покое, если не будет возмущено силами внешними по отношению к рассматриваемой системе. Это дает частные решения задачи трех тел и специальные случаи решения Лагранжа.

Рассмотрим уравнения (18), второе из которых удовлетворяется при $y=0$. Двойные точки на оси x и решения задачи в форме прямой даются условиями:

$$\left. \begin{aligned} x - (1-\mu) \frac{(x-x_1)}{[(x-x_1)^2]^2} - \mu \frac{(x-x_2)}{[(x-x_2)^2]^2} &= 0, \\ y &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Левая часть первого уравнения, рассматриваемая как функция от x , положительна для $x=+\infty$, отрицательна для $x=x_1+\epsilon$, где ϵ — очень малая положительная величина; положительна для $x=x_2-\epsilon$, отрицательна для $x=x_1+\epsilon$; положительна для $x=x_1-\epsilon$ и отрицательна для $x=-\infty$. Так как функция конечна и непрерывна за исключением, когда $x=+\infty$, x_2 , x_1 или ∞ , то отсюда следует, что функция три раза меняет знак, переходя через нуль: а) один раз между $+\infty$ и x_2 , б) один раз между x_2 и x_1 и с) один раз между x_1 и $-\infty$. Поэтому на линии, проходящей через $1-\mu$ и μ , имеется три положения, в которых остается бесконечно малое тело, если его поместить туда с нулевой начальной скоростью.

а) Обозначим расстояние от μ до двойной точки на оси x между $+\infty$ и x_2 через ρ . Тогда $x-x_2=\rho$, $x-x_1=r_1=1+\rho$, $x=1-\mu+\rho$, и первое уравнение (19) после освобождения от дробей принимает вид:

$$\rho^5 + (3-\mu)\rho^4 + (3-2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 - 2\mu\rho - \mu = 0. \quad (20)$$

¹⁾ Особые точки поверхностей Хилла, или точки относительного равновесия, называются обыкновенно точками либрации. *Прим. ред.*

Это уравнение пятой степени, и оно имеет только одну переменную знаков, а поэтому лишь один действительный положительный корень. Значение этого корня зависит от μ . Рассмотрим левую часть уравнения как функцию от ρ и μ . Для $\mu=0$ уравнение принимает вид:

$$\rho^3(\rho^2 + 3\rho + 3) = 0$$

и имеет тройной корень $\rho=0$ и два других комплексных, происходящих от второго множителя. Из теории алгебраических уравнений следует, что для μ отличного от нуля, но достаточно малого три корня уравнения выражаются в виде рядов по степени $\mu^{\frac{1}{3}}$, исчезающих вместе с этим параметром. Один из этих трех корней, получающийся при действительном значении $\mu^{\frac{1}{3}}$, действителен; два других комплексны. Поэтому действительный корень имеет форму:

$$\rho = a_1 \mu^{\frac{1}{3}} + a_2 \mu^{\frac{2}{3}} + a_3 \mu^{\frac{3}{3}} + \dots$$

Подставляя это выражение для ρ в (20) и приравнявая нулю коэффициенты соответствующих степеней $\mu^{\frac{1}{3}}$, находим:

$$a_1 = \frac{2}{3^{\frac{2}{3}}}, \quad a_2 = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}, \quad a_3 = -\frac{1}{27}, \quad \dots$$

Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} r_2 = \rho &= \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \dots \\ r_1 &= 1 + \rho. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Подставляя эти значения r_1 и r_2 в уравнения (12), находим соответствующее значение C' .

б) Обозначим расстояние от μ до двойной точки на оси x между x_2 и x_1 через ρ . Тогда в этом случае $x - x_2 = -\rho$, $x - x_1 = r_1 = 1 - \rho$, $x = (1 - \mu) - \rho$, и первое уравнение (19) принимает вид:

$$\rho^3 - (3 - \mu)\rho^4 + (3 - 2\mu)\rho^3 - \mu\rho^2 + 2\mu\rho - \mu = 0.$$

Решая так же, как в (а), находим значения для r_2 и r_1 :

$$\left. \begin{aligned} r_2 = \rho &= \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{9} \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \dots, \\ r_1 &= 1 - \rho. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Соответствующее значение C' находим подстановкой этих значений r_1 и r_2 в уравнение (12).

с) Обозначим расстояние от $1-\mu$ до двойной точки на оси x между x_1 и ∞ через $1-\rho$. В этом случае $x-x_2=-2+\rho$, $x-x_1=-1+\rho$, $x=-\mu-1+\rho$, и первое уравнение (19) принимает вид:

$$\rho^5 - (7+\mu)\rho^4 + (19+6\mu)\rho^3 - (24+13\mu)\rho^2 + (12+14\mu)\rho - 7\mu = 0. \quad (23)$$

Если $\mu=0$, то это уравнение принимает вид:

$$\rho^5 - 7\rho^4 + 19\rho^3 - 24\rho^2 + 12\rho = 0$$

и имеет один корень $\rho=0$. Поэтому ρ может быть выражено в виде ряда по степеням μ , сходящегося для достаточно малых значений этого параметра и исчезающего вместе с ним. Этот ряд напишется в виде:

$$\rho = c_1\mu + c_2\mu^2 + c_3\mu^3 + c_4\mu^4 + \dots$$

Подставляя это выражение для ρ в (23) и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях μ , находим:

$$c_1 = \frac{7}{12}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{23 \cdot 7^2}{12^4}, \dots$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{7}{12}\mu + \frac{23 \cdot 7^2}{12^4}\mu^3 + \dots, \\ r_1 &= 1 - \rho, \\ r_2 &= 1 + r_1 = 2 - \rho. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Соответствующее значение C' получаем, подставляя эти значения r_1 и r_2 в уравнение (12).

Если значения r_1 и r_2 , данные первыми тремя членами рядов (21), (22) и (24), недостаточно точны, то более точные значения находятся при помощи дифференциальных поправок.

Решения, определяемые формулами (21), (22) и (24), составляют первую группу частных решений.

Для нахождения двойных точек, не лежащих на оси x , снова рассмотрим уравнения (18). Эти уравнения или любые две независимые функции от них определяют двойные точки. Так как теперь u отлично от нуля, то второе уравнение может быть разделено на него, и мы получим:

$$1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0.$$

Помножим это уравнение на $x-x_2$ и $x-x_1$ и вычтем каждое произведение отдельно из первого уравнения (18). Мы получим:

$$x_2 - (1-\mu) \frac{(x_2-x_1)}{r_1^3} = 0,$$

$$x_1 - \mu \frac{(x_1-x_2)}{r_2^3} = 0,$$

$$z = 0.$$

Но $x_2 = 1 - \mu$, $x_1 = -\mu$ и $x_2 - x_1 = 1$, поэтому эти уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{r_1^3} &= 0, \\ -1 + \frac{1}{r_2^3} &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Единственные действительные решения этих уравнений суть $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, и точки образуют равносторонние треугольники с конечными телами независимо от их относительных масс. Как было показано в конце § 157, они встречаются в тех местах, где поверхности исчезают из плоскости xu .

Эти два частных решения составляют вторую группу частных решений.

ЗАДАЧИ

1. Единицы, определенные в § 152, называются каноническими единицами. Какова каноническая единица времени в сутках для Земли и Солнца?

2. Исходя из априорных соображений, покажите, что когда движение системы отнесено к осям, вращающимся, как в § 152, то дифференциальные уравнения не содержат времени явным образом.

3. Почему интеграл, соответствующий (7), не может быть выведен непосредственно из уравнений (1) без преобразований? Докажите, что имеется интеграл уравнений (1).

4. Каковы поверхности нулевой скорости для тела, брошенного вертикально вверх против силы тяжести? Для тела, движущегося под влиянием центральной силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния?

5. Покажите прямыми преобразованиями из (13) и (14), что

$$(r_1 - r_{11})(r_1 - r_{12})(r_1 - r_{13}) \equiv r_1^3 + ar_1 + b = 0.$$

6. Докажите, что решение (16) дает крайние значения r_2 , для которых (14) имеет действительные корни.

Указание. Рассмотрите график: $y = r_2^3 + a'r_2 + b'$.

7. Наложите условия на (12), чтобы C' было минимумом, и покажите, что оно удовлетворено лишь для $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ и что минимальное значение C' есть 3.

8. Почему линии действующей силы не ортогональны ко всем поверхностям постоянной скорости?

9. Докажите, что двойная точка между μ и $1 - \mu$ ближе к μ , чем точка между μ и $+\infty$.

10. Докажите, что при уменьшении C' первая из появляющихся двойных точек находится между μ и $1 - \mu$, вторая — между μ и $+\infty$, третья — между $1 - \mu$ и $-\infty$, и последние образуют равносторонний треугольник с конечными телами.

11. Найдите значения для r_1 , r_2 и C' из (21), (22), (24) и (12), если $\mu = \frac{1}{11}$, $1 - \mu = \frac{10}{11}$.

Отв. $r_2 = 0,340, \quad r_1 = 1,340, \quad C' = 3,535, \quad (21)$

$r_2 = 0,276, \quad r_1 = 0,724, \quad C' = 3,653, \quad (22)$

$r_2 = 1,947, \quad r_1 = 0,947, \quad C' = 3,173. \quad (24)$

12. При помощи метода дифференциальных поправок найдите более точные значения из приближенных значений последнего примера.

$$\text{Отв.} \quad r_2 = 0,347, \quad r_1 = 1,347, \quad C' = 3,534, \quad (21)$$

$$r_2 = 0,282, \quad r_1 = 0,718, \quad C' = 3,653, \quad (22)$$

$$r_2 = 1,947, \quad r_1 = 0,947, \quad C' = 3,173. \quad (23)$$

13. Принимая земную орбиту за окружность, найдите в километрах расстояние от Земли до двойной точки, противоположной Солнцу. Достигнет ли тень Земли этой точки?

159. Критерий Тиссерана для установления тождественности комет ¹⁾. В своем движении вокруг Солнца кометы иногда проходят вблизи планет, и тогда элементы их орбит сильно изменяются. В образовании этих возмущений особенно сильно действие планеты Юпитер благодаря ее большой массе и тому, что на ее расстоянии притяжение Солнца значительно меньше, чем на расстоянии таких планет, как Земля. Так как комета не имеет характерных черт, по которым ее можно было бы с уверенностью определить, то ее тождественность находится под вопросом, если во время возмущений она не была прослежена визуально.

Один способ испытания тождественности двух комет, появляющихся в разные эпохи, состоит в том, что берут орбиту более ранней кометы и вычисляют возмущения, которым она подверглась, и затем сравнивают выведенные элементы с полученными из позднейших наблюдений или начинают с элементов последней кометы и обратным процессом вычисляют более ранние элементы, а затем их сравнивают. До последних лет пользовались тем или другим из этих методов.

Но возникает вопрос, не существует ли некоторого соотношения между элементами, остающегося при возмущениях неизменным. На этот вопрос ответил утвердительно Тиссеран в одной важной статье.

Предположим, что эксцентриситет орбиты Юпитера равен нулю, а масса кометы бесконечно мала. Хотя оба эти предположения неправильны, но они очень близки к действительности, и происходящая ошибка не ощутительна, в особенности, если комета лишь короткое время находится настолько близко к Юпитеру, чтобы испытать заметные возмущения. С этими предположениями, выбрав подходящим образом единицы, мы имеем интеграл Якоби:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C, \quad (7)$$

который является ответом на вопрос, потому что если элементы известны, то скорости и координаты могут быть вычислены в любой момент времени. Поэтому для испытания тождества двух комет вычислим функцию (7) для каждой орбиты и посмотрим, одинакова ли постоянная C для обеих. Если два значения C одинаковы, то очень вероятно, что была наблюдена лишь одна комета; если они различны, то две кометы, безусловно, являются разными телами.

Только что объясненный процесс неудобен тем, что требует значительного вычисления. Этого можно в значительной степени избежать, вы-

¹⁾ «Bulletin Astronomique», т. VI, стр. 289 и «Méc. Céle», т. IV, стр. 203.

ражая (7) через обыкновенные элементы орбиты. Первый шаг состоит в том, чтобы выразить (7) через координаты, отнесенные к неподвижным осям. Уравнения преобразования обратны уравнениям (2), т. е.:

$$x = +\xi \cos t + \eta \sin t,$$

$$y = -\xi \sin t + \eta \cos t,$$

$$z = \zeta.$$

Из этих уравнений находим, что:

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 + \xi + \eta^2 - 2\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right).$$

Поэтому уравнение (7) принимает вид:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - 2\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right) = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C. \quad (25)$$

Обозначим расстояние кометы от начала через r , угол между плоскостью ее мгновенной орбиты и плоскостью $\xi\eta$ через i . Тогда уравнения (24) § 89 дают:

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a},$$

$$\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right) = \sqrt{a(1-e^2)} \cos i,$$

и уравнение (25) принимает вид:

$$\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - C. \quad (26)$$

В случае Юпитера и Солнца μ меньше одной тысячной. Поэтому начало координат очень близко к центру Солнца, и r_1 почти равно r . Элементы определяются тогда, когда комета далека и от Юпитера и от Солнца, так что $-\frac{2\mu}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2}$ будет так мало, что им можно пренебречь без значительной ошибки; тогда (26) приводится к простому выражению:

$$\frac{1}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)} \cos i = C.$$

Заметим, что элементы в этой формуле являются мгновенными элементами для движения вокруг единицы массы, расположенной в центре массы конечных тел. Действительные элементы, употребляемые в астро-

номии, — это элементы, относящиеся к центру Солнца с Солнцем как притягивающей массой. Тем не менее вследствие малости относительной массы Юпитера обе группы элементов почти одинаковы, и если две орбиты принадлежат одному и тому же телу, то уравнение

$$\frac{1}{a_1} + 2\sqrt{a_1(1-e_1^2)} \cos i_1 = \frac{1}{a_2} + 2\sqrt{a_2(1-e_2^2)} \cos i_2 \quad (27)$$

должно быть выполнено, где входят такие элементы, которыми действительно пользуются астрономы. Таков критерий, данный Тиссераном и примененный позднее Шульгофом (Schulhof) и другими.

160. Устойчивость частных решений. Мы нашли пять частных решений задачи о движении бесконечно малого тела. Если бесконечно малое тело немного смещено из одной из точек второго решения и ему сообщена малая скорость, то оно будет либо колебаться вокруг этой точки по крайней мере в течение значительного времени, либо быстро удалится от нее. В первом случае соответствующее частное решение называется устойчивым, во втором случае оно называется неустойчивым.

Сформулируем вопрос об устойчивости математически. Рассмотрим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= g(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Предположим, что $x = x_0$, $y = y_0$, где x_0 и y_0 — постоянные, является частным решением (28). Тогда мы должны иметь:

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

$$g(x_0, y_0) = 0.$$

Сообщим телу малое смещение и малую скорость так, чтобы его координаты и составляющие скорости были:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x', & \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt}, \\ y &= y_0 + y', & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где x' , y' , $\frac{dx'}{dt}$ и $\frac{dy'}{dt}$ очень малы в начальный момент. После подстановки в (28) дифференциальные уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x'}{dt^2} - 2\frac{dy'}{dt} &= f(x_0 + x', y_0 + y'), \\ \frac{d^2y'}{dt^2} + 2\frac{dx'}{dt} &= g(x_0 + x', y_0 + y'). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Разложив правые части этих уравнений в ряды Тейлора, мы получим:

$$\begin{aligned} f(x_0 + x', y_0 + y') &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} x' + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \dots, \\ g(x_0 + x', y_0 + y') &= g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x} x' + \frac{\partial g}{\partial y} y' + \dots \end{aligned}$$

В выражениях частных производных нужно положить $x = x_0$ и $y = y_0$. Первые члены в правых частях соответственно равны нулю, и уравнения (30) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2 \frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x'} x' + \frac{\partial f}{\partial y'} y' + \dots, \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2 \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x'} x' + \frac{\partial g}{\partial y'} y' + \dots \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Если начальные значения x' и y' очень малы, то влияние высших степеней в правых частях будет неощутительно по крайней мере в течение значительного времени¹⁾. Пренебрегая членами со вторыми и высшими степенями x' и y' , мы приведем дифференциальные уравнения к линейной системе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2 \frac{dy'}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x'} x' + \frac{\partial f}{\partial y'} y', \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2 \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x'} x' + \frac{\partial g}{\partial y'} y'. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами могут быть выражены через показательные функции в виде:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} + \alpha_4 e^{\lambda_4 t}, \\ y' &= \beta_1 e^{\lambda_1 t} + \beta_2 e^{\lambda_2 t} + \beta_3 e^{\lambda_3 t} + \beta_4 e^{\lambda_4 t}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ — постоянные интегрирования, а β_1, \dots, β_4 — постоянные, зависящие от них и параметров, входящих в дифференциальные уравнения. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ — чисто мнимые числа, тогда x' и y' выражаются через периодические функции, и решение $x = x_0$, $y = y_0$ называется *устойчивым*; если хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ действительно или комплексно, тогда x' и y' не будут периодическими функциями t и решение $x = x_0$, $y = y_0$ называется *неустойчивым*.

Бывают исключительные случаи, в которых решение вместо показательных функций содержит постоянные члены; эти решения безусловно устойчивы, если все показатели чисто мнимы. Имеются другие исключительные случаи, в которых решение содержит показательные функции, умноженные на некоторые степени t . Эти решения обычно рассматриваются как неустойчивые.

¹⁾ См. добавление II в конце книги. *Прим. ред.*

161. Применение критерия устойчивости к первой группе частных решений. Применим определения и общие методы последнего параграфа к рассмотренным частным случаям движения бесконечно малого тела. Первоначальные дифференциальные уравнения (§ 152) имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} &= x - (1-\mu) \frac{(x-x_1)}{r_1^3} - \mu \frac{(x-x_2)}{r_2^3} \equiv f(x, y, z), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} &= y - (1-\mu) \frac{y}{r_1^3} - \mu \frac{y}{r_2^3} \equiv g(x, y, z), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -(1-\mu) \frac{z}{r_1^3} - \mu \frac{z}{r_2^3} \equiv h(x, y, z).\end{aligned}$$

Прямолинейные решения определяются уравнениями:

$$x = x_{0i}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

где $i=1, 2, 3$ согласно тому, лежит ли точка между $+\infty$ и μ , μ и $1-\mu$ или $1-\mu$ и $-\infty$, и эти значения x , y и z удовлетворяют уравнениям (19). Выполним подстановку:

$$\begin{aligned}x &= x_{0i} + x', & y &= y', & z &= z', \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dx'}{dt}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dy'}{dt}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dz'}{dt}.\end{aligned}$$

Тогда находим:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x'} x' + \frac{\partial f}{\partial y'} y' + \frac{\partial f}{\partial z'} z' &\equiv x' + \frac{2(1-\mu) x'}{[(x_{0i} - x_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\mu x'}{[(x_{0i} - x_2)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial g}{\partial x'} x' + \frac{\partial g}{\partial y'} y' + \frac{\partial g}{\partial z'} z' &\equiv y' - \frac{(1-\mu) y'}{[(x_{0i} - x_1)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu y'}{[(x_{0i} - x_2)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial h}{\partial x'} x' + \frac{\partial h}{\partial y'} y' + \frac{\partial h}{\partial z'} z' &\equiv -\frac{(1-\mu) z'}{[(x_{0i} - x_1)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu z'}{[(x_{0i} - x_2)^2]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Положим

$$A_i = \frac{1-\mu}{[(x_{0i} - x_1)^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{[(x_{0i} - x_2)^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (34)$$

Тогда уравнения, соответствующие (32), в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d^2x'}{dt^2} - 2 \frac{dy'}{dt} &= (1 + 2A_i) x', \\ \frac{d^2y'}{dt^2} + 2 \frac{dx'}{dt} &= (1 - A_i) y', \\ \frac{d^2z'}{dt^2} &= -A_i z'.\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Последнее уравнение не зависит от первых двух и может быть рассмотрено отдельно. Его решение напишется в виде (§ 32):

$$z' = c_1 e^{\sqrt{-1} \sqrt{A_i} t} + c_2 e^{-\sqrt{-1} \sqrt{A_i} t}. \quad (36)$$

Поэтому движение, параллельное оси z , для малых смещений периодически с периодом $\frac{2\pi}{\sqrt{A_i}}$.

Теперь рассмотрим совместные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2 \frac{dy'}{dt} &= (1 + 2A_i) x', \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2 \frac{dx'}{dt} &= (1 - A_i) y'. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Для нахождения решения положим:

$$\left. \begin{aligned} x' &= K e^{\lambda t}, \\ y' &= L e^{\lambda t}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где K и L — постоянные. Подставляя эти выражения в уравнения (37) и деля на $e^{\lambda t}$, находим:

$$\left. \begin{aligned} [\lambda^2 - (1 + 2A_i)]K - 2\lambda L &= 0, \\ 2\lambda K + [\lambda^2 - (1 - A_i)]L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Чтобы функции (38) были частными решениями (37), необходимо, чтобы были выполнены уравнения (39). Они удовлетворяются при $K=0$ и $L=0$, но в этом случае $x'=0$, $y'=0$, и мы получаем то же решение, из которого исходили. Уравнения (39) могут быть удовлетворены значениями K и L , отличающимися от нуля лишь в том случае, если детерминант, составленный из коэффициентов, исчезает. Это условие пишется в виде:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - (1 + 2A_i) & -2\lambda \\ +2\lambda & \lambda^2 - (1 - A_i) \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Это уравнение является условием, налагаемым на λ , для того чтобы функции (38) могли быть решением уравнений (37).

Это биквадратное уравнение имеет четыре корня, из которых каждый дает частное решение, а общее решение есть сумма четырех частных решений, умноженных на произвольные постоянные. Таким образом, если четыре корня (40) равны λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 , то общее решение напишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} x' &= K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + K_3 e^{\lambda_3 t} + K_4 e^{\lambda_4 t}, \\ y' &= L_1 e^{\lambda_1 t} + L_2 e^{\lambda_2 t} + L_3 e^{\lambda_3 t} + L_4 e^{\lambda_4 t}, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где K_j являются произвольными постоянными интегрирования, а L_j определяются через них при помощи любого из уравнений (39). λ_i , конечно,

зависит от индекса i при A , но нет надобности усложнять этим обозначений, так как все уравнения имеют ту же форму, независимо от того, что i равно 1, 2 или 3.

Остается определить характер корней биквадратного уравнения (40). Из уравнений (34) и (21), (22) и (24) соответственно получаем:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\equiv \frac{1-\mu}{(1-r_2)^3} + \frac{\mu}{r_2^3} = 4 - 2 \cdot 3 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots, \\ A_2 &\equiv \frac{1-\mu}{(1-r_2)^3} + \frac{\mu}{r_2^3} = 4 + 2 \cdot 3 \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \dots, \\ A_3 &\equiv \frac{1-\mu}{(1-\rho)^3} + \frac{\mu}{(2-\rho)^3} = 1 + \frac{7}{8}\mu + \dots \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Из этих выражений следует, что для малых значений μ свободный член уравнения (40) удовлетворяет неравенству:

$$1 + A_i - 2A_i^2 < 0 \quad (i=1, 2, 3);$$

и на самом деле это соотношение имеет место для значений $\mu < \frac{1}{2}$, что легко проверить ¹⁾. Поэтому биквадратное уравнение имеет два действительных корня, которые равны по числовым значениям и противоположны по знаку, и два сопряженных чисто мнимых корня. Из приведенных определений следует, что движение неустойчиво. Если бесконечно-малое тело очень мало смещено из точек точного решения, то оно вообще удалится на сравнительно большое расстояние.

162. Частные значения постоянных интегрирования. Выразим постоянные интегрирования через начальные условия и покажем, что последние могут быть выбраны так, что движение будет периодичным.

Предположим, что λ_1 и λ_2 — действительные корни уравнения (40); тогда $\lambda_1 = -\lambda_2$. Мнимые корни напишем в виде:

$$\lambda_3 = +\sqrt{-1}\sigma, \quad \lambda_4 = -\sqrt{-1}\sigma,$$

где σ — действительное число. L_j выражается через K_j при помощи уравнения (39):

$$L_j = \frac{[\lambda_j^2 - (1 + 2A_i)]}{2\lambda_j} k_j = c_j K_j \quad (i=1, 2, 3; j=1, 3, 4). \quad (43)$$

Так как числовые значения λ_j попарно равны, но противоположны по знаку и два последних мнимы, то нетрудно проверить, что:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -c_2, \\ c_3 &= +\sqrt{-1}c, \\ c_4 &= -\sqrt{-1}c, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

где c — действительная постоянная, зависящая от i .

¹⁾ Плюммер дал общее доказательство в «Monthly Notices of the R. A. S.», LXII, 1901.

Пусть $x'_0, y'_0, \frac{dx'_0}{dt}$ и $\frac{dy'_0}{dt}$ — начальные координаты и составляющие скорости, тогда уравнения (41) при $t=0$ дают:

$$\begin{aligned}x'_0 &= K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \\y'_0 &= c_1(K_1 - K_2) + \sqrt{-1}c(K_3 - K_4), \\ \frac{dx'_0}{dt} &= \lambda_1(K_1 - K_2) + \sqrt{-1}\sigma(K_3 - K_4), \\ \frac{dy'_0}{dt} &= c_1\lambda_1(K_1 + K_2) - c\sigma(K_3 + K_4).\end{aligned}$$

Значения постоянных интегрирования определяются по начальным координатам и составляющим скорости решением этих уравнений.

Значения x' и y' вообще беспрестанно возрастают вместе с временем, но если начальные условия таковы, что $K_1 = K_2 = 0$, то они становятся чисто периодическими. Рассмотрим этот случай. Начальные координаты x'_0, y'_0 определяют K_3 и K_4 , при помощи которых определяются затем $\frac{dx'_0}{dt}, \frac{dy'_0}{dt}$.

Таким образом:

$$x'_0 = K_3 + K_4, \quad y'_0 = \sqrt{-1}c(K_3 - K_4),$$

откуда

$$K_3 = \frac{x'_0}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2c} y'_0, \quad K_4 = \frac{x'_0}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2c} y'_0.$$

Формулы (4) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned}x' &= \frac{x'_0}{2} (e^{\sqrt{-1}\sigma t} + e^{-\sqrt{-1}\sigma t}) - \frac{\sqrt{-1}}{2c} y'_0 (e^{\sqrt{-1}\sigma t} - e^{-\sqrt{-1}\sigma t}) = \\ &= x'_0 \cos \sigma t + \frac{y'_0}{c} \sin \sigma t, \\ y' &= \sqrt{-1} \frac{c}{2} x'_0 (e^{\sqrt{-1}\sigma t} - e^{-\sqrt{-1}\sigma t}) + \frac{y'_0}{2} (e^{\sqrt{-1}\sigma t} + e^{-\sqrt{-1}\sigma t}) = \\ &= cx'_0 \sin \sigma t + y'_0 \cos \sigma t.\end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Исключая t из этих уравнений, получим уравнение орбиты. Для этого решим (45) относительно $\cos \sigma t$ и $\sin \sigma t$, затем возведем в квадрат и сложим. Получим:

$$\frac{x'^2}{c^2 x_0'^2 + y_0'^2} + \frac{y'^2}{c^2 x_0'^2 + y_0'^2} = 1. \quad (46)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат и с центром в начале. Так как λ_3 мнимо, то из (43) и (44) следует, что $c^2 > 1$, поэтому большая ось эллипса направлена по оси y . Эксцентриситет дается формулой:

$$e^2 = \frac{c^2 - 1}{c^2},$$

что для больших значений c очень близко к единице. Орбиты имеют замечательное свойство, что их эксцентриситет не зависит от начальных дан-

ных, завися лишь от распределения масс между конечными телами и от одного из трех прямолинейных решений, из которых они возникают.

Очевидно, что это рассуждение не вполне строго, потому что в правых частях дифференциальных уравнений были отброшены члены высших порядков. Одни линейные члены не дают достаточных условий для существования периодических орбит, и, следовательно, когда рассмотрение ограничено таким образом, то оно отвечает лишь на вопрос, касающийся устойчивости решения. Но в настоящем случае периодические орбиты действительно существуют вокруг всех трех точек, если $0 < \mu < \frac{1}{2}$.

Несколько частных примеров для $\mu = \frac{1}{11}$ были найдены Дарвином в его мемуаре («Acta Mathematica», т. 21). Полный анализ для этих орбит, включающий гораздо более трудный случай, в котором конечные тела описывают эллиптические орбиты, дан автором в «Mathematische Annalen», т. LXXIII, 1912, стр. 441—479 и в «Publications of the Carnegie Institution of Washington» № 161, «Периодические орбиты», гл. V, VI и VII.

163. Применение к противосиянию (Gegenschein). Если постоянные K_1 и K_2 равны нулю, то бесконечно малое тело обращается по эллипсу вокруг точки равновесия. Если эти постоянные не равны нулю, но малы по числовой величине сравнительно с K_3 и K_4 , то движение происходит в течение значительного времени почти по эллипсу, но в конце концов далеко отходит от него. Возможно существование большого числа бесконечно малых тел, вращающихся вокруг одной и той же точки не возмущая друг друга.

Рассмотрим движение Земли вокруг Солнца. Оно происходит по кривой, которая почти окружность. Одна из точек прямолинейного решения в точности противоположна Солнцу, если метеор пройдет вблизи нее приблизительно с такими начальными условиями, которые определены в последнем параграфе, то он сделает одно или больше обращения вокруг этой точки, прежде чем продолжать свой путь в другие области. Если вокруг этой точки в одно и то же время соберется большое количество метеоров, то они будут казаться с Земли туманным пятном света, вытянутым вдоль эклиптики с центром против Солнца. Таков вид противосияния, которое было открыто независимо Брорзенем (Brorsen), Бакхаузом (Backhouse) и Барнардом (Barnard) соответственно в 1855, 1868 и 1875 гг. Повидимому, вопрос, достаточно ли имеется метеоров с приближенными начальными условиями для объяснения наблюдаемого явления, является решающим, но на него нельзя дать определенного ответа. Однако несомненно, что число метеоров чрезвычайно велико, например согласно Г. А. Ньютону ежедневно около 8 000 000 влетают в земную атмосферу, и естественно предположить, что они вызывают зодиакальный свет, который очень ярк по сравнению с противосиянием. Предположение, что это является причиной противосияния, было впервые сделано Гюльденом в заключительном параграфе мемуара в «Bulletin Astronomique», т. I, озаглавленном: «Sur un Cas Particulier du Problème et Trois Corps» ¹⁾.

¹⁾ См. также статью Мультон в *Astronomical Journal* № 483.

164. Применение критериев устойчивости ко второй группе частных решений. Частные решения начальных дифференциальных уравнений в этом случае следующие:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1.$$

Уравнения, соответствующие (33), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x'} x' + \frac{\partial f}{\partial y'} y' + \frac{\partial f}{\partial z'} z' &= \frac{3}{4} x' + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) y', \\ \frac{\partial g}{\partial x'} x' + \frac{\partial g}{\partial y'} y' + \frac{\partial g}{\partial z'} z' &= \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) x' + \frac{9}{4} y', \\ \frac{\partial h}{\partial x'} x' + \frac{\partial h}{\partial y'} y' + \frac{\partial h}{\partial z'} z' &= -z', \end{aligned}$$

и дифференциальные уравнения до членов второго порядка напишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'}{dt^2} - 2 \frac{dy'}{dt} &= \frac{3}{4} x' + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) y', \\ \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2 \frac{dx'}{dt} &= \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) x' + \frac{9}{4} y', \\ \frac{d^2 z'}{dt^2} &= -z'. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Последнее уравнение не зависит от первых двух, и его решение таково:

$$z' = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Поэтому движение, параллельное оси z , для малых смещений периодически с периодом 2π , таким же, как для обращения конечных тел.

Для нахождения решения первых двух уравнений положим опять:

$$x' = K e^{\lambda t}, \quad y' = L e^{\lambda t}. \quad (48)$$

Подставляя эти выражения в первые два уравнения (47) и сокращая, находим:

$$\left. \begin{aligned} \left[\lambda^2 - \frac{3}{4} \right] K - \left[2\lambda + \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) \right] L &= 0, \\ \left[2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) \right] K + \left[\lambda^2 - \frac{9}{4} \right] L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Чтобы эти уравнения имели не нулевые решения, детерминант, составленный из коэффициентов, должен быть нулем, что дает уравнение для λ :

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \frac{3}{4} & -2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) \\ 2\lambda - \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu) & \lambda^2 - \frac{9}{4} \end{vmatrix} \equiv \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4} \mu (1 - \mu) = 0. \quad (50)$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — корни этого биквадратного уравнения. Тогда общее решение уравнений (47) напишется в виде:

$$x' = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + K_3 e^{\lambda_3 t} + K_4 e^{\lambda_4 t},$$

$$y' = L_1 e^{\lambda_1 t} + L_2 e^{\lambda_2 t} + L_3 e^{\lambda_3 t} + L_4 e^{\lambda_4 t},$$

где K_1, K_2, K_3, K_4 — постоянные интегрирования, а L_1, L_2, L_3, L_4 — постоянные, связанные с ними любым из уравнений (49).

Из (50) находим, что:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}}, \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{-1 - \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}}.$$

Число μ никогда не превышает 0,5, и если $1 - 27\mu(1-\mu) \geq 0$, то корни чисто мнимы и попарно сопряжены; если это неравенство не выполнено, тогда они — комплексные величины. Неравенство может быть написано так:

$$1 - 27\mu(1-\mu) = \varepsilon,$$

где ε — положительная величина, предел которой нуль. Решение этого уравнения дает:

$$\mu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{23 + 4\varepsilon}{108}}; \quad (51)$$

так как $\mu < \frac{1}{2}$, то должен быть взят отрицательный знак. В пределе $\varepsilon = 0$ и $\mu = 0,0385\dots$. Поэтому, если $\mu < 0,0385\dots$, то корни (50) чисто мнимые и рассматриваемые частные решения устойчивы; если $\mu > 0,0385\dots$, то корни (50) комплексны и решения неустойчивы.

ЗАДАЧИ

1. Каково будет соотношение между новой наклонностью и старой, если комета при сближении к Солнцу по параболе, будет возмущена Юпитером так, что ее орбита останется параболой, в то время как перигелийное расстояние удвоится.

$$\text{Отв. } \cos i_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos i_1.$$

2. Докажите, что если орбита кометы, наклонность которой к орбите Юпитера равна нулю, изменена возмущениями Юпитера из параболы в эллипс, то параметр орбиты обязательно увеличивается. Исследуйте изменения параметра при изменении большой оси, соответствующей переходу к другим коническим сечениям.

3. Предположим, что комета движется по эллипсу в плоскости орбиты Юпитера и что возмущающее действие Юпитера неощутимо за исключением короткого времени, когда они близки друг к другу. Докажите, что если возмущение от Юпитера увеличило эксцентриситет, то период увеличился или уменьшился в зависимости от того, что произведение большой полуоси на корень квадратный из параметра в первоначальном эллипсе больше или меньше единицы при выражении в канонических единицах.

4. Частица, помещенная посередине между двумя равными неподвижными массами, находится в равновесии. Исследуйте характер этого равновесия методом § 161.

5. Предположим, что $1 - \mu$ и μ — соответственно Солнце и Земля. Найдите период колебания, параллельного оси z , для бесконечно малого тела, слегка смещенного из плоскости xu вблизи точки, соответствующей решению в виде прямой, противоположащей Солнцу по отношению к Земле, принятой за начало.

Отв. 183 304 средних солнечных суток.

6. В том же случае найдите период колебания в плоскости xu .

Отв. 139,6 средних солнечных суток.

7. Докажите, что обычно для малых значений μ периоды колебаний как параллельные оси z , так и в плоскости xu , самые длинные для точки, противоположной $1 - \mu$ по отношению к $1 - \mu$, взятой за начало, следующие по длине — для точки, противоположной к $1 - \mu$ по отношению к μ , взятому за начало, и самые короткие — для точки между $1 - \mu$ и μ .

8. Найдите эксцентриситет орбиты в плоскости xu , противоположной Солнцу, в случае Солнца и Земли.

9. Дифференциальные уравнения (35) допускают интеграл:

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 = (1 + 2A_1)x'^2 + (1 - A_1)y'^2 - A_1 z'^2 + C.$$

Рассмотрите значение интеграла по способу § 154—159.

10. Что можно сказать относительно независимости уравнений (9), после того как были наложены условия, чтобы детерминант исчез?

11. Если объяснение противосияния, данное в § 163, правильно, то каков будет его максимальный параллакс по эклиптической широте для наблюдателя, находящегося на широте в 40° .

Отв. Приблизительно $15'$ (слишком малый для уверенного наблюдения столь неопределенного объекта).

12. Предположите, что $\mu = \frac{1}{2}$, и приведите задачу нахождения движения бесконечно малого тела через начало вдоль оси z к эллиптическим интегралам.

СЛУЧАЙ ТРЕХ КОНЕЧНЫХ ТЕЛ

155. Условия для круговых орбит. В этой главе будет доказана теорема Лагранжа о том, что возможно сообщить такое движение трем конечным телам, чтобы их орбиты были подобными эллипсами, описываемыми в одно и то же время. Сначала докажем это для частного случая, когда орбиты — окружности. Предположим, что трем телам сообщено движение в одной и той же плоскости. Возьмем начало в центре их массы и плоскость $\xi\eta$ за плоскость движения. Тогда дифференциальные уравнения движения напишутся в виде (§ 143):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \\ U &= \frac{k^2 m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{k^2 m_2 m_3}{r_{2,3}} + \frac{k^2 m_1 m_3}{r_{3,1}}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Отнесем движение системы к осям, вращающимся с равномерной угловой скоростью n , при помощи подстановки:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= x_i \cos nt - y_i \sin nt, \\ \eta_i &= x_i \sin nt + y_i \cos nt. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Производя подстановку и приводя, как в § 152, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} - 2n \frac{dy_i}{dt} - n^2 x_i - \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2n \frac{dx_i}{dt} - n^2 y_i - \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial y_i} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Если тела двигаются по кругам вокруг начала с угловой скоростью n , то их координаты по отношению к вращающимся осям постоянны. Так как тогда первые и вторые производные равны нулю, то уравнения (54) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} -n^2 x_1 + k^2 m_2 \frac{(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} &= 0, \\ -n^2 x_2 + k^2 m_1 \frac{(x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} &= 0, \\ -n^2 x_3 + k^2 m_1 \frac{(x_3 - x_1)}{r_{1,3}^3} + k^2 m_2 \frac{(x_3 - x_2)}{r_{2,3}^3} &= 0, \\ -n^2 y_1 + k^2 m_2 \frac{(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} &= 0, \\ -n^2 y_2 + k^2 m_1 \frac{(y_2 - y_1)}{r_{1,2}^3} + k^2 m_3 \frac{(y_2 - y_3)}{r_{2,3}^3} &= 0, \\ -n^2 y_3 + k^2 m_1 \frac{(y_3 - y_1)}{r_{1,3}^3} + k^2 m_2 \frac{(y_3 - y_2)}{r_{2,3}^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

И обратно, если массы и начальные данные таковы, что эти шесть уравнений удовлетворены, то тела движутся по кругам вокруг начала с равномерной угловой скоростью n .

Так как начало находится в центре массы, то координаты удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Если первое уравнение (55) умножить на m_1 , второе на m_2 , и произведения сложить, то сумма вследствие первого уравнения (56) принимает вид третьего уравнения (55). Подобным образом последнее уравнение (55) может быть выведено из других и последнего из (56). Поэтому третье и шестое уравнения (55) можно отбросить и вместо них употребить уравнения (56), что дает несколько более простую систему уравнений.

Единицы времени, пространства и массы были до сих пор произвольными. Без ущерба для общности можно их выбрать так, чтобы $r_{1,2} = 1$

и $k^2 = 1$. Тогда необходимые и достаточные условия для существования круговых решений, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ -n^2 x_1 + m_2 (x_1 - x_2) + m_3 \frac{(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} &= 0, \\ -n^2 x_2 + m_1 (x_2 - x_1) + m_3 \frac{(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0, \\ -n^2 y_1 + m_2 (y_1 - y_2) + m_3 \frac{(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} &= 0, \\ -n^2 y_2 + m_1 (y_2 - y_1) + m_3 \frac{(y_2 - y_1)}{r_{2,3}^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

166. Решения в виде равносторонних треугольников. Для каждой системы действительных значений переменных, удовлетворяющих уравнениям (57), существует одно решение задачи. Нетрудно показать, что уравнения удовлетворяются, если тела расположены в вершинах равностороннего треугольника. Действительно, тогда $r_{1,2} = r_{2,3} = r_{1,3} = 1$, и уравнения (57) принимают вид:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ (m_2 + m_3 - n^2) x_1 - m_2 x_2 - m_3 x_3 &= 0, \\ (m_1 + m_3 - n^2) x_2 - m_1 x_1 - m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0, \\ (m_2 + m_3 - n^2) y_1 - m_2 y_2 - m_3 y_3 &= 0, \\ (m_1 + m_3 - n^2) y_2 - m_1 y_1 - m_3 y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения линейны и однородны относительно x_1, x_2, \dots, y_3 . Чтобы они могли иметь решение, отличное от $x_1 = x_2 = \dots = y_3 = 0$, которое несовместимо с $r_{1,2} = r_{2,3} = r_{1,3} = 1$, необходимо, чтобы детерминант, составленный из коэффициентов, был равен нулю. Полагая $M = m_1 + m_2 + m_3$, легко найти, что условие примет вид:

$$m_3^2 (M - n^2)^4 = 0,$$

следовательно, мы должны иметь $n^2 = M$. Тогда два из x_i и два из y_i произвольны, и отсюда уравнения имеют решение, совместимое с $r_{i,j} = 1$. Поэтому конфигурация в форме равностороннего треугольника с соответствующими начальными составляющими скоростей есть частное решение задачи трех тел, и если единицы таковы, что взаимные расстояния и k^2 равны единице, то квадрат угловой скорости вращения равен сумме масс трех тел.

167. Прямолинейные решения. Последние три уравнения (57) удовлетворяются при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$; в этом случае все тела находятся на оси x .

Предположим, что они расположены в порядке m_1, m_2, m_3 , считая от отрицательного конца по направлению к положительному.

Тогда $x_3 > x_2 > x_1$, $r_{1,2} = x_2 - x_1 = 1$ и первые три уравнения из (57) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 (1 + x_1) + m_3 x_3 &= 0, \\ m_2 + \frac{m_3}{(x_3 - 1)^2} + n^2 x_1 &= 0, \\ -m_1 + \frac{m_1}{(x_3 - x_1 - 1)^2} + n^2 (1 + x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Исключая x_3 и n^2 , находим:

$$m_2 + (m_1 + m_2) x_1 + \frac{m_3^2 (1 + x_1)}{(M c_1 + m_2)^2} - \frac{m_3^2 x_1}{(M x_1 + m_2 + m_3)^2} = 0. \quad (59)$$

Если это уравнение освободить от дробей, то получится уравнение пятой степени относительно x_1 , коэффициенты которого все положительны. Поэтому здесь нет действительного положительного корня, но существует по крайней мере один действительный отрицательный корень и поэтому имеется по меньшей мере одно решение задачи.

Возьмем за неизвестное вместо x_1 разность $x_3 - x_2$, которую обозначим через A . Расстояние x_1 должно быть выражено через эту новую переменную. Соотношения между x_1, x_2, x_3 и A таковы:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 &= 1, \quad x_3 - x_2 = A, \end{aligned}$$

откуда

$$x_1 = -\frac{m_2 + m_1 + m_3 A}{M}.$$

Подставляя это выражение для x_1 в (59), освобождая от дробей и сокращая на общие множители, мы получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) A^5 + (3m_1 + 2m_2) A^4 + (3m_1 + m_2) A^3 - \\ - (m_2 + 3m_3) A^2 - (2m_2 + 3m_3) A - (m_2 + m_3) = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Это в точности уравнение пятой степени Лагранжа относительно A ¹⁾ и имеет лишь один действительный положительный корень, так как коэффициенты меняют знак лишь один раз. Единственное A , имеющее значение в задаче для выбранного порядка масс, положительно, поэтому уравнение (60) имеет единственное решение, определяющее распределение тел в решении задачи трех тел в форме прямой. Очевидно, что еще два другие решения в форме прямой можно получить при помощи круговой перестановки трех тел.

168. Динамические свойства решений. Так как тела обращаются по кругам с постоянной угловой скоростью вокруг центра массы, то закон площадей применим для каждого тела в отдельности, поэтому *равнодействующая всех сил, действующих на каждое тело, постоянно направлена к центру масс* (§ 48).

¹⁾ См. «Собрание сочинений» Лагранжа, т. VI, стр. 277 и Тиссеран, *Mécanique Céleste*, т. I, стр. 155.

Пусть расстояния m_1, m_2 и m_3 от их центра массы соответственно равны a_1, a_2 и a_3 . Тогда центробежное ускорение, которому подвержено m_i , есть $a_i = \frac{v_i^2}{a_i}$, где v_i — линейная скорость m_i . Но это может быть написано так: $a_i = n^2 a_i$. Центробежная сила в точности уравновешивает центробежную, поэтому ускорение в сторону центра массы равно:

$$a_i = n^2 a_i,$$

т. е. ускорения различных тел по направлению к их общему центру массы прямо пропорциональны соответствующим расстояниям от этой точки.

169. Решение в форме конических сечений. Рассмотрение решения задачи трех тел характеризуется тем, что их орбиты — окружности. Покажем, что для каждого из них имеется решение, в котором орбиты суть конические сечения произвольного эксцентриситета. Эти решения характеризуются тем фактом, что в них отношения взаимных расстояний тел постоянны, хотя сами расстояния переменны.

Дифференциальные уравнения движения, когда система отнесена к неподвижным осям с началом в центре массы системы, таковы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -\frac{m_2 (\xi_1 - \xi_2)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3 (\xi_1 - \xi_3)}{r_{1,3}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} &= -\frac{m_2 (\eta_1 - \eta_2)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3 (\eta_1 - \eta_3)}{r_{1,3}^3}, \\ \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -\frac{m_1 (\xi_2 - \xi_1)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3 (\xi_2 - \xi_3)}{r_{2,3}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} &= -\frac{m_1 (\eta_2 - \eta_1)}{r_{1,2}^3} - \frac{m_3 (\eta_2 - \eta_3)}{r_{2,3}^3}, \\ \frac{d^2 \xi_3}{dt^2} &= -\frac{m_1 (\xi_3 - \xi_1)}{r_{1,3}^3} - \frac{m_2 (\xi_3 - \xi_2)}{r_{2,3}^3}, \\ \frac{d^2 \eta_3}{dt^2} &= -\frac{m_1 (\eta_3 - \eta_1)}{r_{1,3}^3} - \frac{m_2 (\eta_3 - \eta_2)}{r_{2,3}^3}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Предположим, что координаты m_1, m_2 и m_3 при $t = t_0$ соответственно обозначены через (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) , и пусть соответствующие расстояния от начала обозначены через $r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, r_3^{(0)}$. Предположим, что углы, которые $r_1^{(0)}, r_2^{(0)}, r_3^{(0)}$ образуют с осью ξ , равны φ_1, φ_2 и φ_3 , тогда

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r_1^{(0)} \cos \varphi_1, & x_2 &= r_2^{(0)} \cos \varphi_2, & x_3 &= r_3^{(0)} \cos \varphi_3, \\ y_1 &= r_1^{(0)} \sin \varphi_1, & y_2 &= r_2^{(0)} \sin \varphi_2, & y_3 &= r_3^{(0)} \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Обозначим теперь текущие координаты через (ξ_1, η_1) , (ξ_2, η_2) и (ξ_3, η_3) . Предположим, что отношения взаимных расстояний являются постоянными, тогда взаимные расстояния в момент t равны:

$$\rho r_{1,2}, \quad \rho r_{2,3}, \quad \rho r_{1,3},$$

где ρ есть множитель пропорциональности.

Так как форма фигуры, образованной тремя телами, не изменяется, то следует, что

$$r_1 = r_1^{(0)} \rho, \quad r_2 = r_2^{(0)} \rho, \quad r_3 = r_3^{(0)} \rho. \quad (63)$$

Кроме того, радиусы r_1 , r_2 и r_3 повернутся на тот же угол θ (рис. 42), откуда:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= r_1^{(0)} \rho \cos(\theta + \varphi_1) = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \rho, \\ \eta_1 &= r_1^{(0)} \rho \sin(\theta + \varphi_1) = (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \rho, \\ \xi_2 &= r_2^{(0)} \rho \cos(\theta + \varphi_2) = (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta) \rho, \\ \eta_2 &= r_2^{(0)} \rho \sin(\theta + \varphi_2) = (x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \rho, \\ \xi_3 &= r_3^{(0)} \rho \cos(\theta + \varphi_3) = (x_3 \cos \theta - y_3 \sin \theta) \rho, \\ \eta_3 &= r_3^{(0)} \rho \sin(\theta + \varphi_3) = (x_3 \sin \theta + y_3 \cos \theta) \rho. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Если уравнения (61) преобразовать при помощи (64), то в них войдут только две зависящих переменных ρ и θ , они будут необходимыми усло-

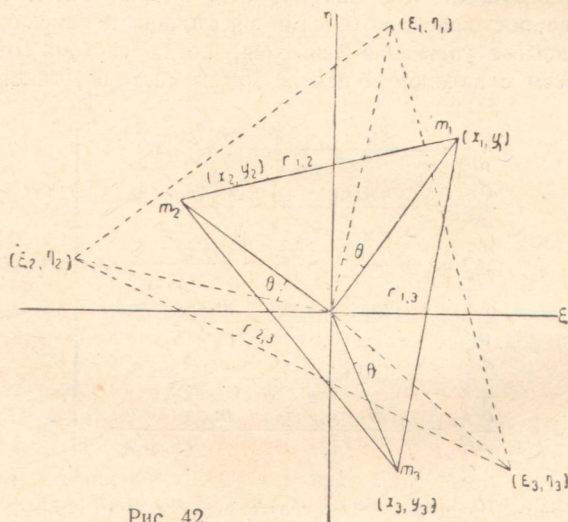


Рис. 42.

виями для существования решений, в которых отношения взаимных расстояний постоянны. Из первых двух уравнений (61) и (64) после умножения результатов преобразования на $\cos \theta$ и $\sin \theta$ и сложения и затем на $-\sin \theta$ и $\cos \theta$ и сложения следует, что:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \frac{d^2 \rho}{dt^2} - 2y_1 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} - x_1 \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - y_1 \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \\ &= - \left\{ \frac{m_2 (x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3 (x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}, \\ y_1 \frac{d^2 \rho}{dt^2} + 2x_1 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} - y_1 \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + x_1 \rho \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \\ &= - \left\{ \frac{m_2 (y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3 (y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Пусть

$$\rho^2 \frac{d\psi}{dt} = \psi, \quad (66)$$

тогда

$$2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\psi}{dt} + \rho \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{dt}, \quad \rho \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{\psi^2}{\rho^3},$$

и уравнения (65) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{y_1}{\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{x_1} \left\{ \frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{x_1}{y_1\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{y_1} \left\{ \frac{m_2(y_1 - y_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Подобным образом из последних четырех уравнений (61) и (65) можно вывести следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{y_2}{x_2\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{x_2} \left\{ \frac{m_1(x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{x_2}{y_2\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{y_2} \left\{ \frac{m_1(y_2 - y_1)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(y_2 - y_3)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{y_3}{x_3\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{x_3} \left\{ \frac{m_1(x_3 - x_1)}{r_{1,3}^3} + \frac{m_2(x_3 - x_2)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{x_3}{y_3\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{y_3} \left\{ \frac{m_1(y_3 - y_1)}{r_{1,3}^3} + \frac{m_2(y_3 - y_2)}{r_{2,3}^3} \right\} \frac{1}{\rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Уравнения (67) и (68) дают необходимые условия для существования решений, в которых отношения расстояний тел постоянны. Надо определить лишь две переменных ρ и ψ . Первая дает размеры системы при помощи (63), а вторая — ее ориентировку при помощи (66). Чтобы требуемые решения могли существовать, эти уравнения должны быть совместными. Когда начальные условия заданы, то они попарно определяют ρ и ψ . Для того чтобы для данных начальных условий ρ и ψ , определяемые каждой из трех пар дифференциальных уравнений, были тождественны, коэффициенты у соответствующих членов с ρ и ψ должны быть одинаковыми. Это можно доказать, рассматривая разложение решений в степенные ряды по $t - t_0$. Для того чтобы решения были одинаковы, надо, чтобы коэффициенты у соответствующих степеней $t - t_0$ были тождественны, а чтобы эти условия были удовлетворены, надо, чтобы коэффициенты соответствующих членов в дифференциальных уравнениях были тождественны. Поэтому условия для совместности уравнений (67) и (68) будут или:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}, \quad (69)$$

или:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad (70)$$

и система шести уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(x_1 - x_3)}{r_{1,3}^3} &= n^2 x_1, \\ \frac{m_1(x_2 - x_1)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(x_2 - x_3)}{r_{2,3}^3} &= n^2 x_2, \\ \frac{m_1(x_3 - x_1)}{r_{1,3}^3} + \frac{m_2(x_3 - x_2)}{r_{2,3}^3} &= n^2 x_3, \\ \frac{m(y_1 - y_3)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(y_1 - y_3)}{r_{1,3}^3} &= n^2 y_1, \\ \frac{m_1(y_2 - y_1)}{r_{1,2}^3} + \frac{m_3(y_2 - y_3)}{r_{2,3}^3} &= n^2 y_2, \\ \frac{m_1(y_3 - y_1)}{r_{1,3}^3} + \frac{m_2(y_3 - y_2)}{r_{2,3}^3} &= n^2 y_2, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где n^2 — общее постоянное значение скобок в правых частях (67) и (68). Из уравнений (71), также как из начальных определений x_i и y_i , следует, что уравнения для центра массы:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0, \end{aligned}$$

удовлетворены.

Уравнения (69) удовлетворяются лишь в том случае, если три тела находятся на прямой линии в момент $t=t_0$. Так как по гипотезе форма конфигурации постоянна, то в этом случае они всегда остаются на прямой линии. Положение осей может быть выбрано в $t=t_0$ так, что $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, и условия существования решения приводятся к первым трем уравнениям (71). Эти уравнения таковы же, как уравнения (55) в § 165, а в § 167 показано, что они имеют лишь три действительных решения.

Предположим, что уравнения (69) удовлетворены и что тела остаются на одной прямой; тогда равнодействующая всех сил, которым подчинено каждое тело, направлена неизменно к центру массы системы, и, следовательно, закон площадей применим по отношению к этой точке. Отсюда:

$$r_1^2 \frac{d\theta}{dt} = c_1, \quad r_2^2 \frac{d\theta}{dt} = c_2, \quad r_3^2 \frac{d\theta}{dt} = c_3,$$

где c_1 , c_2 и c_3 — постоянные. Из (63) следует, что $\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{c_1}{(r_1^{(0)})^2}$, а затем из (66), что $\frac{d\phi}{dt} = 0$. Поэтому уравнения (66), (67) и (68) в этом случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{\phi^2}{\rho^3} &= -n^2 \frac{1}{\rho^2}, \\ \phi &= c^0 = \text{const.}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\phi}{\rho^2} = \frac{c_0}{\rho^2}. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Это — дифференциальные уравнения в полярных координатах для задачи двух тел. За исключением различия в обозначениях они таковы же, как уравнения (65) главы V. Поэтому ρ и θ удовлетворяют условиям движения по коническому сечению согласно закону тяготения, и из уравнения (63) и из определения θ следует, что три тела описывают подобные конические сечения, имеющие произвольные эксцентриситеты. Эти решения включают решения в форме прямой, где в частном случае орбиты являются окружностями.

Предположим, что уравнения (69) не удовлетворены; тогда тела не располагаются по одной прямой. Если это так, то, для того чтобы уравнения (67) и (68) могли быть совместимы, должно быть удовлетворено уравнение (70). Из уравнений (66) и (63) следует, что закон площадей по отношению к началу имеет место для каждого тела в отдельности. В § 163 показано, что уравнения (71) удовлетворены, если тела находятся в вершинах равностороннего треугольника. Легко показать, что если они не располагаются на одной прямой, то не существует другого решения. В случае решения равностороннего треугольника уравнения (67) и (68) также приводятся к (72), и орбиты должны быть подобными коническими сечениями произвольного эксцентриситета.

ЗАДАЧИ

1. Примите за гипотезу, что существует решение, в котором три тела всегда расположены на одной прямой. Докажите, что закон площадей имеет место для каждого тела в отдельности по отношению к центру массы системы, по отношению к каждому из других тел и по отношению к центру массы любой пары тел.

2. Напишите условия, чтобы ускорения, которым подвергаются тела, были направлены к общему центру массы и пропорциональны их соответствующим расстояниям.

Отв. Уравнения (55).

3. Равнодействующая сил, действующих на каждое тело, всегда проходит через неподвижную точку. Докажите, что конфигурация в форме равностороннего треугольника является единственным решением уравнений (55), если тела не находятся на прямой линии.

4. Предположим, что $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ и что тела движутся согласно решению в форме равностороннего треугольника. Найдите радиус круга, по которому стала бы обращаться точка вокруг одного из них с периодом обращения их вокруг центра массы.

Отв. $R = 3^{\frac{1}{3}}$.

5. Докажите, что решение в форме равностороннего треугольника с круговыми орбитами имеет место, когда взаимное притяжение тел изменяется пропорционально любой степени расстояния.

6. Найдите число прямолинейных решений, когда сила меняется пропорционально любой степени расстояния.

7. Докажите, что когда сила изменяется обратно пропорционально пятой степени, то одно решение таково, что каждое из тел движется по кругу через их центр массы таким образом, что тела всегда находятся в вершинах равностороннего треугольника.

8. Докажите, что если три тела помещены с нулевой начальной скоростью в одну из конфигураций, допускающую круговые решения, то они упадут к их центрам массы по прямым линиям в одно и то же время.

9. Найдите распределение массы среди тех тел, для которых время падения к их центру массы будет наименьшим, наибольшим.

10. Докажите, что если любые четыре массы помещены в вершинах правильного тетраэдра, то равнодействующая всех сил, действующих на каждое тело, проходит через центр массы четырех тел и что величины ускорений пропорциональны соответственным расстояниям тел от их центра массы.

11. Докажите, что не существует круговых решений в задаче четырех тел, когда не все тела движутся в одной плоскости.

12. Исследуйте устойчивость решений в форме треугольника и прямой линии в задаче трех тел, когда все массы конечны.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Первые частные решения задачи трех тел были найдены Лагранжем в его премированном мемуаре «*Essai sur le Problème des Trois Corps*», представленном в Парижскую академию в 1772 г. (Собрание сочинений, т. VI, стр. 22, Тиссеран, Мéc. Céle., т. I, гл. VIII). Решения, найденные им, в точности те, что даны в последней части этой главы. Его метод состоял в разделении задачи на две части: а) определение взаимных расстояний тел, б) решив «а», определение плоскости треугольника в пространстве и ориентировка треугольника в плоскости. Он доказал, что если часть «а» решена, то часть «б» может быть также решена. Чтобы решить «а», необходимо вывести три дифференциальных уравнения для трех взаимных расстояний. Он нашел три уравнения, одно из которых третьего порядка, а остальные два каждое второго порядка, что приводит всю задачу к седьмому порядку. Приведение общей задачи трех тел при помощи десяти интегралов оставляет ее восьмого порядка, поэтому анализ Лагранжа понижает порядок задачи еще на единицу. Лагранж нашел, что можно проинтегрировать дифференциальные уравнения до конца, принимая, что отношения взаимных расстояний постоянны. Это доказательство было повторено Лапласом в «*Mécanique Céleste*», т. V, стр. 310. В «Системе мира» («*L'Exposition du Système du Monde*») он замечает, что если бы Луна была дана Земле providением для того, чтобы освещать ночь, как это утверждали некоторые, то эта цель не вполне достигнута, потому что если бы Луна была помещена в противостояние с Солнцем с требуемой начальной скоростью, то она всегда осталась бы там и для всей Земли была бы всегда видна или полная Луна или Солнце. Доказательство, на котором он основывал свои замечания, было сделано при предположении, что нет возмущающей силы. При наличии возмущающих сил конфигурация не сохранилась бы за исключением случая, когда решение устойчиво, каковым оно не является, как это доказано Лиувиллем (Liouville) в *Journal des Mathématiques*, т. VII, 1845.

Ряд мемуаров более или менее близко придерживается линии, намеченной Лагранжем. Среди них можно упомянуть один Радо (Radau) в *Bulletin Astronomique*, т. III, стр. 113, Линдстета (Lindstedt) в *Annales de l'École Normale*, 3-я серия, т. I, стр. 85, Аллегре (Allegret) в *Journal des Mathématiques*, 1875, стр. 277, Буря (Bour) в *Journal de l'École Polytechnique*, т. XXXVI и Матье (Mathieu) в *Journal des Mathématiques*, 1876, стр. 345.

Якоби, не зная о работе Лагранжа, привел общую задачу трех тел к седьмому порядку в *Crelle's Journal*, 1843, стр. 115 (Собрание сочинений, т. IV, стр. 478). Ее порядок больше не был понижен.

Имеется целый ряд статей, касающихся решений задачи более чем трех тел, в которых отношения взаимных расстояний постоянны, среди этих статей одна принадлежит Леман-Филе (Lehman-Filhes) в *Astronomische Nachrichten*, т. 127, стр. 137, одна — Мультону в *Transactions of the American Mathematical Society*, т. I, стр. 17, и одна — Лонглю (Longley) в *Bulletin of the American Mathematical Society*, т. XIII, стр. 324.

После Лагранжа никаких новых периодических решений задачи трех тел не было открыто, пока Хилл (Hill) не развил свою теорию Луны *The American Journal of Mathematics*, т. I, 1875. Эти решения Хилла имеют гораздо большее практическое значение, чем решения типа Лагранжа. Однако надо сказать, что они не точно периодические решения каждого действительного случая, потому что отброшена малая доля возмущающего действия Солнца.

Следующий важный шаг был сделан Пуанкаре в мемуаре в *Bulletin Astronomique*, т. I, в котором он доказал, что если массы двух тел малы по

сравнению с массой третьего тела, то имеется бесконечное число систем начальных условий, для которых движение периодически. Эти идеи были разработаны и результаты расширены в мемуаре, появившемся в «Acta Mathematica», т. XIII. Методы, употребленные Пуанкаре, несравнимо более глубокие и могущественные, чем какие-либо из предшествующих в небесной механике, и составляют эпоху в развитии науки. Работа Пуанкаре, исправленная и расширенная во многих направлениях, опубликована в трех томах, озаглавленных «Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Céleste». Она написана с удивительной прямоот и ясностью и дана достаточно подробно, чтобы сделать такую глубокую работу возможно легкой для чтения.

Важный мемуар о периодических орбитах Дж. Дарвина появился в «Acta Mathematica», т. XXI, 1895. В этом исследовании было принято, что одна из трех масс бесконечно мала и что конечные массы, имея отношение 10:1, обращаются по кругам. Большое число периодических орбит, принадлежащих к различным семействам, было открыто числовыми методами главным образом копенгагенской школой под руководством Стремгрена (Stromgren). Вопрос об их устойчивости был решен методом, употребленным Хиллом в его изучении движения лунного перигелия.

Значительное число исследований в области периодических орбит, пользующихся аналитическими процессами, основанными на методах Пуанкаре, были опубликованы Мультоном и его бывшими учениками: D. Buchanan, T. Luck, F. Griffin, W. Longley и W. McMillan. Эти статьи появились в *Transactions of the American Mathematical Society*, *Proceedings of the London Mathematical Society*, *Mathematische Annalen* и в *Proceedings of the First International Congress of Mathematicians*.

Наряду с анализом разнообразных периодических орбит они показывают существование бесконечных групп замкнутых орбит, которые образуют границы между различными классами периодических орбит. Эти исследования опубликованы под заглавием «Периодические орбиты» в *Publication*, 161, Института Карнеги в Вашингтоне.

Весьма важные результаты, касающиеся устойчивости частных решений задачи о трех телах, были получены А. Ляпуновым, исследования которого, к сожалению, почти неизвестны иностранным астрономам.

Важнейшие результаты А. Ляпунова будут изложены в добавлении II.