

ГЛАВА IV

ПОТЕНЦИАЛ И ПРИТЯЖЕНИЯ ТЕЛ

64. Введение. В предыдущих главах мы рассматривали задачи об определении движения при данном законе силы и, обратно, об определении закона силы при данном движении.

Во всех этих задачах мы принимали массы за геометрические точки вместо тел конечных размеров. Но вообще не всегда можно считать, что тела конечных размеров притягивают друг друга, как материальные точки. Поэтому необходимо выяснить, каким образом притягивают друг друга конечные тела различных форм.

Из законов Кеплера и из принципов центральной силы следует, что если рассматривать планеты как тела бесконечно малых размеров по сравнению с их расстоянием от Солнца, то они движутся под влиянием сил, направленных к центру Солнца и меняющихся обратно пропорционально квадратам их расстояний от него. Это наводит на мысль, что закон обратных квадратов может еще точнее объяснить движения, если рассматривать тела как имеющие конечные размеры, где каждая частица притягивает всякую другую частицу тела. Соответствующее исследование показывает, что это правильно.

Эта глава посвящается изложению общих методов нахождения притяжений тел любой формы на точку с единицей массы, находящейся в любом положении — внешнем или внутреннем, при силах, обратно пропорциональных квадрату расстояний. Астрономические применения будут относиться к притяжению сфер и сжатых сфероидов, к изменениям тяжести на поверхности планет и к возмущениям движений спутников, происходящим вследствие сжатия планет.

65. Телесные углы. Если прямая, неизменно проходящая через неподвижную точку, движется так, что через некоторое время она снова возвращается в первоначальное положение, то она опишет коническую поверхность с двумя полостями, вершины которых находятся в данной точке. Площадь, вырезаемая одной полостью этого двойного конуса из поверхности сферы радиуса единицы, центр которой находится в данной точке, называется телесным углом конуса; иначе, телесный угол измеряется площадью, вырезанной конусом из любой концентрической сферы, деленной на квадрат ее радиуса. Так как площадь сферической поверхности равняется произведению 4π на квадрат ее радиуса, то отсюда следует, что сумма всех телесных углов вокруг точки равна 4π . Сумма телесных углов половины всех двойных конусов, которые можно построить вокруг точки, не пересекая один другого, равна 2π .

Объем, ограниченный бесконечно малым конусом с телесным углом ω и двумя сферическими поверхностями, центры которых находятся в вершине конуса, при неограниченном сближении поверхностей между собой стремится к пределу, равному произведению телесного угла на квадрат

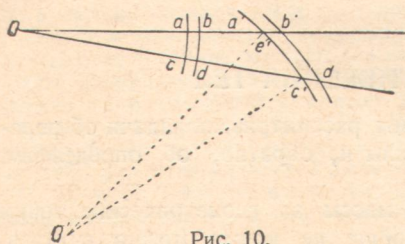


Рис. 10.

радиуса сферических поверхностей и на расстояние между ними. Если центры сферических поверхностей находятся в точке, не лежащей на оси конуса, то этот объем имеет пределом произведение телесного угла на квадрат расстояния от вершины, на расстояние между сферическими поверхностями и на секанс угла между осью конуса и радиусом, проведенным из центра сферы, или произведению телесного угла на квадрат расстояния от вершины и на длину отрезка образующей конуса между сферическими поверхностями. Таким образом объем $abdc$ (рис. 10) равен $V = \omega \overline{Oa}^2 \cdot ab$. Объем $a'b'd'c'$ выражается так:

телесного угла на квадрат расстояния от вершины и на длину отрезка образующей конуса между сферическими поверхностями. Таким образом объем $abdc$ (рис. 10) равен $V = \omega \overline{Oa}^2 \cdot ab$. Объем $a'b'd'c'$ выражается так:

$$V' = \frac{\omega \overline{Oa'}^2 \cdot b'e'}{\cos(\angle Oa'O)} = \omega \overline{Oa'}^2 \cdot a'b'.$$

Иногда удобнее пользоваться первым из этих выражений, а иногда вторым.

66. Притяжение тонкого однородного сферического слоя на точку, находящуюся внутри него. Притяжения шаров и других простых тел были рассмотрены Ньютоном в «Началах», книга I, отдел 12. Следующее доказательство в существенных чертах совпадает с данным им.

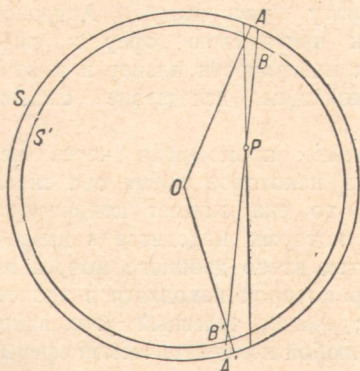


Рис. 11.

Рассмотрим сферический слой, образованный двумя бесконечно близкими сферическими поверхностями S и S' , и пусть P — точка с единицей массы, расположенная внутри него (рис. 11). Построим бесконечно малый конус с телесным углом ω и с вершиной в P . Пусть σ есть плотность слоя. Тогда масса элемента слоя в A равна $m = \sigma \overline{AB} \omega \overline{AP}^2$; подобным образом масса элемента слоя A' равна: $m' = \sigma \overline{A'B'} \omega' \overline{AP'}^2$. Притяжения m и m' на P соответственно равны:

$$\alpha = \frac{k^2 m}{\overline{AP}^2}, \quad \alpha' = \frac{k^2 m'}{\overline{AP'}^2}.$$

Так как $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\alpha = k^2 \overline{AB} \omega \sigma = \sigma \alpha'$. Это справедливо для каждого бесконечно малого телесного угла с вершиной в P ; поэтому тонкий однородный сферический слой притягивает точку внутри него одинаково в противоположных направлениях. Это применимо для любого числа тонких сферических слоев и, следовательно, для слоев конечной толщины.

67. Притяжение тонкого однородного эллипсоидального слоя на точку внутри него. Теорема этого параграфа дана в «Началах» книга I, предложение XCI, отдел 3.

Назовем *гомеоидом* тонкий слой, находящийся между двумя подобными и подобно расположенными поверхностями. Таким образом *эллиптический гомеоид* есть тонкий слой, заключенный между двумя подобными и подобно расположенными поверхностями эллипсоидов.

Рассмотрим притяжение эллиптического гомеоида, ограниченного двумя подобными эллипсоидами E и E' , на внутреннюю точку P с единицей массы (рис. 12). Построим бесконечно малый конус с телесным углом ω и с вершиной в P . Массы двух бесконечно малых элементов A и A' соответственно равны $m = \sigma \overline{AB} \omega \overline{AP}^2$ и $m' = \sigma \overline{A'B'} \omega \overline{AP'}^2$. Притяжения будут $a = \frac{k^2 m}{\overline{AP}^2}$ и $a' = \frac{k^2 m'}{\overline{AP'}^2}$.

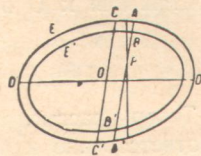


Рис. 12.

Построим диаметр $\overline{CC'}$, параллельный $\overline{AA'}$ в эллиптическом сечении плоскостью, проходящей через ось конуса и центр эллипса, и проведем сопряженный ему диаметр $\overline{DD'}$. Он является сопряженным диаметром для обоих эллиптических сечений E и E' ; следовательно, $\overline{DD'}$ делит пополам каждую хорду, параллельную $\overline{CC'}$, откуда $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Поэтому притяжения элементов A и A' на P равны. Это применимо для каждого бесконечно малого телесного угла, вершина которого находится в P ; отсюда *притяжения тонкого эллиптического гомеоида на внутреннюю точку равны в противоположных направлениях*.

Это применимо для любого числа тонких слоев и поэтому для слоев конечной толщины.

68. Притяжение тонкого однородного сферического слоя на внешнюю точку. Метод Ньютона. Пусть $AHKB$ и $ahkb$ — два одинаковых тонких сферических слоя с центрами соответственно в O и o (рис. 13). Пусть две точки с единицей массы помещены на неравных расстояниях от центра слоев в P и p . Проведем произвольные секущие из P , отсекающие дуги

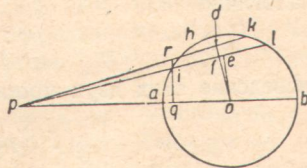
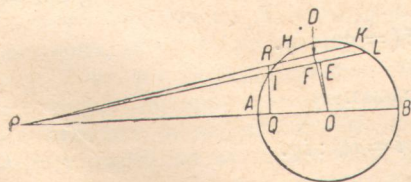


Рис. 13.

il и hk , и пусть угол kpl стремится к нулю как к пределу. Проведем из P секущие PL и PK , отсекающие дуги IL и HK , соответственно равные il и hk . Проведем oe перпендикулярно к pl , od перпендикулярно к pk , iq перпендикулярно к pb и ir перпендикулярно к pk . Проведем соответствующие линии в другой фигуре.

Будем вращать фигуры вокруг диаметров PB и pb и обозначим массы круговых колец, образованных вращением HI и hi , соответственно через M и m , тогда:

$$HI \cdot IQ : hi \cdot iq = M : m. \quad (1)$$

Притяжения единиц масс, расположенных в I и i , соответственно обратно пропорциональны квадратам PI и pi . Составляющие этих притяжений в направлениях PO и po есть соответствующие притяжения, умноженные соответственно на $\frac{PQ}{PI}$ и $\frac{pq}{pi}$. Если A' и a' обозначают составляющие притяжения к O и o , тогда

$$A' : a' = \frac{1}{PI^2} \frac{PQ}{PI} : \frac{1}{pi^2} \frac{pq}{pi}. \quad (2)$$

Теперь рассмотрим притяжения колец на P и p . Их равнодействующие соответственно направлены к O и o благодаря симметрии фигур по отношению к линиям PO и po , и они соответственно в M и m раз больше притяжения точек с единицей массы. Пусть A и a представляют притяжения M и m , тогда:

$$A : a = \frac{M}{PI^2} \frac{PQ}{PI} : \frac{m}{pi^2} \frac{pq}{pi} = \frac{HI}{PI^2} \frac{IQ}{PO} \frac{PF}{PO} : \frac{hi}{i^2} \frac{q}{po} \frac{pf}{po}. \quad (3)$$

Для приведения правой части (3) рассмотрим подобные треугольники PIR и PFD и соответствующие треугольники другой фигуры. В пределе, когда углы KPL и kpl стремятся к нулю, $DF : df = 1$, потому что секущие IL и HK соответственно равны il и hk . Поэтому:

$$PI : PF = RI : DF,$$

$$pf : pi = DF (= df) : ri,$$

и произведение этих пропорций есть

$$PI \cdot pf : PF \cdot pi = RI : ri = HI : hi. \quad (4)$$

Из подобных треугольников PIQ и POE следует, что

$$PI : PO = IQ : OE,$$

и аналогично

$$po : pi = OE (= oe) : iq.$$

Произведение этих двух пропорций равно:

$$PI \cdot po : PO \cdot pi = IQ : iq. \quad (5)$$

Перемножая (4) и (5), получим:

$$\overline{PI^2} \cdot pf \cdot po : \overline{pi^2} \cdot PF \cdot PO = HI \cdot IQ : hi \cdot iq.$$

Следовательно, уравнение (3) принимает вид:

$$A : a = \overline{po^2} : \overline{PO^2}. \quad (6)$$

Поэтому круговые кольца притягивают внешние точки к центрам слоев с силами, обратно пропорциональными квадратам соответствующих рас-

стояний точек от этих центров. Подобным образом то же самое может быть доказано для колец KL и kl .

Теперь пусть прямые PK и pk меняют свое положение, начиная от совпадения с диаметрами PB и pb и до касания со сферическими слоями. Результаты верны при каждом положении прямых в отдельности и, следовательно, для всех сразу. Поэтому *равнодействующие притяжений тонких сферических слоев на внешние точки направлены к их центрам, и напряжения сил обратно пропорциональны квадратам расстояний точек от центров.*

Если тело — однородный шар или образовано из однородных сферических слоев, то теорема применима для каждого слоя в отдельности и, следовательно, для всех вместе.

69. Замечания о методе Ньютона. Хотя вышеприведенное доказательство и дано на языке геометрии, оно на самом деле зависит от принципов, являющихся основными в анализе. Допущение, что угол kpl стремится к нулю как к пределу, равносильно взятию дифференциального элемента; вращение вокруг диаметров эквивалентно интегрированию по одному из полярных углов; изменение линии pk от совпадения с диаметром до касания со слоем эквивалентно интегрированию по другому полярному углу, и суммирование бесконечно тонких слоев до образования полного шара эквивалентно интегрированию по радиусу.

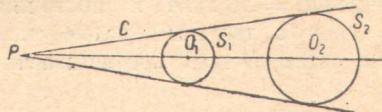


Рис. 14.

Так как метод Ньютона дает лишь отношения притяжения равных сферических слоев на различных расстояниях, то он не объясняет, каким образом притяжение зависит от масс конечных тел, что, однако, не менее важно, чем знать, каким образом оно изменяется с расстоянием.

Для нахождения зависимости притяжения от массы притягиваемого тела возьмем два сферических слоя S_1 и S_2 одинаковой плотности, внутренне касающихся конуса C . Пусть $PO_1 = a_1$, $PO_2 = a_2$ и M_1 и M_2 — соответственно массы S_1 и S_2 (рис. 14). Два слоя притягивают точку одинаково, потому что всякий телесный угол, включающий часть одного слоя, включает также подобную часть другого. Массы этих заключенных частей пропорциональны квадратам их расстояний, а их притяжения обратно пропорциональны квадратам этих же расстояний, откуда следует равенство их притяжений на точку P . Пусть A обозначает общее притяжение; переместим S_1 так, чтобы его центр был также в O_2 . Пусть A' обозначает силу притяжения S_1 в новом положении, тогда по теореме § 63:

$$\frac{A'}{A} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Следовательно, два слоя притягивают одинаково удаленную точку с силами, прямо пропорциональными их массам. Из этой и предыдущей теоремы следует, что точка, лежащая вне шара, состоящего из однородных концентрических слоев, притягивается к его центру с силой, прямо пропорциональной массе шара и обратно пропорцио-

нальной квадрату расстояния от его центра, или как если бы вся масса шара находилась в его центре.

Так как небесные тела можно рассматривать как состоящие из почти однородных концентрических сферических слоев, то при рассмотрении их взаимодействий их можно принимать за материальные точки, за исклю-

чением тех случаев, когда они относительно близки друг к другу, как в случае планет со своими спутниками.

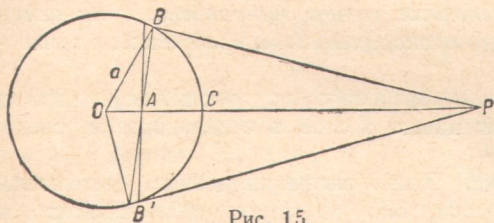


Рис. 15.

70. Притяжение тонкого однородного сферического слоя на внешнюю точку. Метод Томсона и Тэта. Пусть O есть центр сферического слоя (рис. 15), радиус которого a и толщина Δa , пусть P — положение притягиваемой

точки и PO — расстояние от притягиваемой точки до центра, пересекающее сферическую поверхность в C . Возьмем точку A так, чтобы $PO:OC = OC:OA$ и построим бесконечно узкий конус с вершиной в A и с телесным углом ω . Пусть σ — плотность слоя. Тогда элементы массы B и B' соответственно равны:

$$m = \sigma \omega \cdot \overline{AB} \cdot \frac{\Delta a}{\cos(\angle OBA)}, \quad m' = \sigma \omega \overline{AB'}^2 \cdot \frac{\Delta a}{\cos(\angle OB'A)}.$$

Притяжения двух масс на P соответственно таковы:

$$\alpha = k^2 \sigma \omega \cdot \frac{\overline{AB}^2}{B P^2} \cdot \frac{\Delta a}{\cos(\angle OBA)}, \quad \alpha' = k^2 \sigma \omega \cdot \frac{\overline{AB'}^2}{B' P^2} \cdot \frac{\Delta a}{\cos(\angle OB'A)}. \quad (7)$$

Из построения A следует, что

$$PO:OB = OB:OA.$$

Отсюда вытекает подобие треугольников POB и BOA , имеющих общий угол, заключенный между пропорциональными сторонами. Поэтому

$$\frac{AB}{BP} = \frac{OB}{OP} = \frac{a}{OP}.$$

Таким же образом

$$\frac{AB'}{B'P} = \frac{a}{OP}.$$

Угол OBA равен углу $OB'A$. Поэтому уравнения (7) принимают вид:

$$\alpha = k^2 \sigma \omega \cdot \frac{a^2}{OP^2} \cdot \frac{\Delta a}{\cos(\angle OBA)}, \quad \alpha' = k^2 \sigma \omega \cdot \frac{a^2}{OP^2} \cdot \frac{\Delta a}{\cos(\angle OBA)} = \alpha. \quad (8)$$

Углы BPO и $B'PO$ соответственно равны OBA и $OB'A$; следовательно, они равны между собой. Равнодействующая двух равных притяжений α

и a' направлена по биссектрисе угла, заключенного между ними, или по направлению к O , и величина ее определяется формулой:

$$\Delta R = a \cos(BPO) + a' \cos(B'PO) = 2a \cos(OBA),$$

которая вследствие (8) принимает вид:

$$\Delta R = 2k^2\sigma\omega \frac{a^2\Delta a}{OP^2}.$$

Это уравнение действительно для каждого телесного угла с вершиной в A , а следовательно, и для их суммы. Поэтому притяжение всего сферического слоя на внешнюю точку получим, суммируя выражения для ΔR относительно ω , что дает:

$$R = 4\pi k^2\sigma \frac{a^2\Delta a}{OP^2} = \frac{k^2M}{OP^2},$$

т. е. притяжение прямо пропорционально массе слоя и обратно пропорционально квадрату расстояния точки от его центра.

71. Притяжение на точку однородного сферического слоя. В § 66—69 рассмотрены притяжения тонкого однородного сферического слоя на точку, лежащую соответственно внутри и вне его; теперь дополним задачу изучением случая, когда притягиваемая точка является частью самого слоя. Пусть O есть центр сферического слоя толщиной Δa и P — положение притягиваемой точки (рис. 16). Построим конус, имеющий телесный угол ω с вершиной в P . Пусть σ — плотность слоя; тогда масса сечения, вырезанного конусом в A , равна $\sigma\omega \overline{AP}^2 \frac{\Delta a}{\cos(OAP)}$. Притяжение элемента вдоль AP есть $a = k^2\sigma\omega \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AP}^2} \frac{\Delta a}{\cos(OAP)}$. Равнодействующая притяжения слоя направлена по PO , так как масса расположена симметрично по отношению к этой линии.

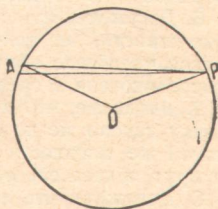


Рис. 16.

Составляющая в направлении PO равна:

$$\Delta R = a \cos(APO) = a \cos(OAP) = k^2\sigma\omega\Delta a.$$

Притяжение всего слоя выражается формулой:

$$R = 2k^2\sigma\pi\Delta a = \frac{k^2M}{2a^2}.$$

Из этого уравнения и из результатов, полученных в § 66 и 69, следует, что притяжение на внутреннюю точку, бесконечно близкую к слою, равно нулю, на точку в слое оно равно $\frac{k^2M}{2a^2}$ и на внешнюю точку,

бесконечно близкую к слою, $\frac{k^2 M}{a^2}$ ¹⁾. Прерывность в притяжении зависит от того, что масса всякой конечной площади слоя считается конечной, хотя предполагается, что она бесконечно тонкая. На поверхности полной сферы нет такой прерывности, потому что бесконечно тонкий слой, взятый от нее, имеет лишь бесконечно малую массу.

ЗАДАЧИ

1. Возьмем два любых подобных тела, подобно расположенных в перспективе. Покажите, что точка, помещенная в центре перспективы, притягивается обратно пропорционально их линейным размерам, если они представляют тонкие прутья одинаковой плотности, так же, если они — тонкие слои одинаковой плотности, и прямо пропорционально их линейным размерам, если они — сплошные тела одинаковой плотности. Рассмотрите туманность с видимыми угловыми размерами, равными Солнцу. Предположим, что она удалена в миллион раз дальше Солнца и что ее плотность равна одной миллионной плотности Солнца. Сравните ее притяжение на Землю с притяжением Солнца.

2. Докажите, что притяжения двух однородных шаров одинаковой плотности для точек, лежащих на их поверхностях, относятся друг к другу как радиусы шаров.

3. Докажите, что притяжение однородного шара на точку, лежащую внутри него, изменяется прямо пропорционально расстоянию точки от центра.

4. Докажите, что все отсеки равной высоты от любого однородного конуса одинаково притягивают точку, лежащую в его вершине.

5. Найдите закон плотности, при котором притяжение шара на точку его поверхности не зависит от размера шара.

6. Докажите, что притяжение тонкого однородного прута, согнутого по дуге окружности, на точку в центре окружности таково же, какое оказывала бы масса подобного прута, равного хорде, соединяющей концы, если бы она была сосредоточена в средней точке дуги.

7. Докажите, что притяжение тонкого однородного прямого прута на внешнюю точку таково же по величине и направлению, как притяжение дуги окружности такой же плотности с центром в данной точке, стягивающей тот же угол, как и прут, и касательной к пруту.

8. Докажите, что если прямой однородный прут образует многоугольник, все стороны которого касательны к окружности, то точка в центре окружности притягивается прутком одинаково в противоположных направлениях.

9. Докажите, что два шара, состоящие из однородных концентрических сферических слоев, притягивают друг друга так, как если бы вся масса их была сосредоточена в их соответствующих центрах.

72. Общие выражения для составляющих притяжения и для потенциала, когда притягиваемая точка не является частью притягивающей массы. Геометрические методы предыдущих параграфов специальные и применимы лишь к отдельным случаям; следующие аналитические методы характеризуются их единообразием и общностью и снова иллюстрируют преимущества анализа.

Рассмотрим притяжение конечной массы M с плотностью τ на точку P с единицей массы (рис. 17), которая не является частью притягивающей массы, т. е. P находится либо вне M или в ее полости, если таковые имеются. Обозначим координаты точки P через x, y, z , а координаты любого элемента массы dm — через ξ, η, ζ , расстояние от dm до P обо-

¹⁾ См. заметку о притяжении сферических слоев в «Собрании сочинений» Лагранжа, т. VII, стр. 591.

значим через ρ . Тогда составляющие притяжения, параллельные координатным осям, определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} X &= -k^2 \int_{(M)} \frac{dm}{\rho^2} \cdot \frac{(x-\xi)}{\rho} = -k^2 \int_{(M)} \frac{(x-\xi)}{\rho^3} dm, \\ Y &= -k^2 \int_{(M)} \frac{(y-\eta)}{\rho^3} dm, \\ Z &= -k^2 \int_{(M)} \frac{(\xi-\zeta)}{\rho^3} dm, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$dm = \sigma d\xi d\eta d\zeta, \quad \rho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2, \quad \sigma = f(\xi, \eta, \zeta).$$

Знак интеграла $\int_{(M)}$ означает, что интеграл должен быть распространен на всю массу M . Тогда, если σ — конечная непрерывная функция координат, как это всегда будет в дальнейшем, то X , Y и Z суть конечные определенные величины. На практике dm выражается через σ и обыкновенные прямоугольные или полярные координаты; X , Y и Z находятся тройным интегрированием.

Три интеграла (9) можно привести к одному единственному интегралу. Для этого положим

$$V = \int_{(M)} \frac{dm}{\rho}. \quad (10)$$

V называется *потенциальной функцией* (термин, введенный Грином в 1828 г.). Это есть функция x , y и z , и мы будем называть ее потенциалом тела M на точку P с координатами (x, y, z) .

Так как P не является частью массы M , то ρ не обращается в нуль в области интегрирования. Пределы интеграла не зависят от положения притягиваемой точки, поэтому функция под знаком интеграла может быть дифференцируема по x , y , z , которые при вычислении определенных интегралов рассматриваются как постоянные. Частные производные от V по x , y и z будут иметь вид:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - \int_{(M)} \frac{(x-\xi)}{\rho^3} dm, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = - \int_{(M)} \frac{(y-\eta)}{\rho^3} dm, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = - \int_{(M)} \frac{(\xi-\zeta)}{\rho^3} dm.$$

Сравнивая эти уравнения с (9), находим:

$$\left. \begin{aligned} X &= k^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \\ Y &= k^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \\ Z &= k^2 \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

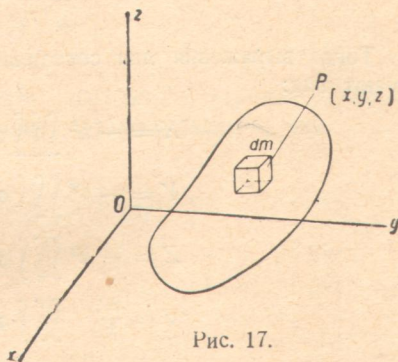


Рис. 17.

Поэтому в случае, когда P не является частью M , решение задачи о нахождении составляющих притяжения сводится к вычислению единственной функции V .

73. Случай, когда притягиваемая точка является частью притягивающей массы. Теперь докажем, что составляющие притяжения и потенциал имеют конечные определенные значения и тогда, когда точка является частью притягивающей массы, и что уравнения (11) применимы также в этом случае.

Чтобы показать, что X , Y и Z имеют в этом случае конечные определенные значения, выразим dm и его положение в полярных координатах с началом в притягиваемой точке P . Формулы, связывающие прямоугольные координаты с полярными, имеют вид:

$$\begin{aligned}\xi - x &= \rho \cos \varphi \cos \theta, \\ \eta - y &= \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ \zeta - z &= \rho \sin \varphi, \\ dm &= \sigma \rho^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho.\end{aligned}$$

Тогда выражения для составляющих притяжения и потенциала принимают вид:

$$\begin{aligned}X &= -k^2 \iiint \sigma \cos^2 \varphi \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho, \\ Y &= -k^2 \iiint \sigma \cos^2 \varphi \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\rho, \\ Z &= -k^2 \iiint \sigma \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho, \\ V &= + \iiint \sigma \rho \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho,\end{aligned}$$

где пределы должны быть определены таким образом, чтобы интегрирование распространялось на все тело M . Подынтегральные функции конечны для всех положений точки P в M , и поэтому интегралы имеют конечные определенные значения.

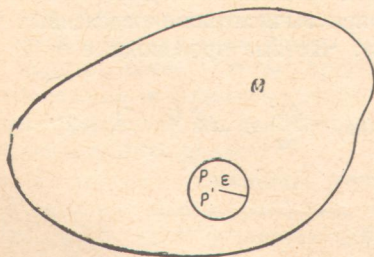


Рис. 18.

Простейший метод доказательства того, что уравнения (11) применимы и тогда, когда P находится в притягиваемой массе M , исходит из определения производной V по x . По определению

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V' - V}{\Delta x},$$

где V' есть потенциал в точке P' , координаты которой $(x + \Delta x, y, z)$. Построим малую сферу радиуса ϵ , включающую P и P' (рис. 18). Обозначим массу, находящуюся внутри сферы, через M_1 , а лежащую вне ее —

через M_2 . Пусть соответствующие части составляющих притяжения и потенциал различаются индексами 1 и 2. Тогда:

$$X = X_1 + X_2, \quad \dots, \quad V = V_1 + V_2, \quad (12)$$

потому что все эти количества определены однозначно. Кроме того, из § 72 следует, что

$$X_2 = k^2 \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad Y_2 = k^2 \frac{\partial V_2}{\partial y}, \quad Z_2 = k^2 \frac{\partial V_2}{\partial z}.$$

Теперь рассмотрим производную V по x . Она принимает вид:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V'_2 - V_2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} + \frac{1}{k^2} X_2. \quad (13)$$

Пусть расстояние от P до dm есть ρ , и от P' до dm есть ρ' . Тогда

$$\frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} = \int_{(M)} \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{dm}{\Delta x}.$$

Из треугольника $PdmP'$ следует, что $|\Delta x| \geq |\rho' - \rho|$, где прямые черточки обозначают абсолютную величину. Отсюда следует, что

$$\left| \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{1}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{\rho\rho'} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} \right).$$

Поэтому

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{2} \int_{(M)} \frac{dm}{\rho^2} + \frac{1}{2} \int_{(M)} \frac{dm}{\rho'^2}.$$

Вставляя в dm его выражение в полярных координатах, мы перепишем это неравенство в виде:

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} \sigma \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho'} \sigma \cos \varphi' \, d\varphi' \, d\theta' \, d\rho'.$$

Пусть σ_0 есть максимальное значение σ в ϵ . Заменяя σ через σ_0 , мы только усилим неравенство.

Интегрируя затем по ρ и ρ' , получим:

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} \right| \leq \frac{\sigma_0}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta + \frac{\sigma_0}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho' \cos \varphi' \, d\varphi' \, d\theta'.$$

Так как P и P' находятся в сфере ε , то расстояния ρ и ρ' не могут превышать 2ε . Тогда

$$\left| \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} \right| < \sigma_0 \varepsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta + \sigma_0 \varepsilon \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \, d\varphi' \, d\theta' = 8\pi \sigma_0 \varepsilon$$

и"

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{V'_1 - V_1}{\Delta x} \right| < 8\pi \sigma_0 \varepsilon.$$

Из этого неравенства и уравнения (13) следует, что

$$k^2 \frac{\partial V}{\partial x} - 8k^2 \pi \sigma_0 \varepsilon < X_2 < k^2 \frac{\partial V}{\partial x} + 8k^2 \pi \sigma_0 \varepsilon$$

Теперь перейдем к пределу при $\varepsilon = 0$. Употребляя полярные координаты, легко доказать, что предел X_1 для $\varepsilon = 0$ равен нулю. Поэтому из (12) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} X_2 = X,$$

и, следовательно, из последнего неравенства:

$$X = k^2 \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Соответствующие соотношения для производных по y и z доказываются подобным образом, и поэтому уравнения (11) применимы независимо от того, составляет ли P часть от M или нет.

74. Поверхности уровня. Уравнение $V = c$, где c имеет постоянное значение, определяет так называемые *поверхности уровня или эквипотенциальные поверхности*.

Всякое перемещение δx , δy , δz притягиваемой точки от точки (x_0, y_0, z_0) по уровенной поверхности должно удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z = 0,$$

что представляет условие того, чтобы точки (x_0, y_0, z_0) и $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$ лежали на одной и той же уровенной поверхности. Вследствие (11) это уравнение принимает вид:

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0. \quad (14)$$

Направляющие косинусы равнодействующей притяжения, которому подвержена точка, пропорциональны x, y, z , а направляющие косинусы линии перемещения пропорциональны $\delta x, \delta y, \delta z$. Так как сумма парных произведений этих направляющих косинусов равна нулю, то отсюда следует, что *равнодействующее притяжение перпендикулярно к уровенной поверхности*. Следовательно, если точка выведена из состояния покоя, то она начинает двигаться перпендикулярно к уровенной поверхности из ее начального

положения; но после приобретения заметной скорости она вообще не будет двигаться перпендикулярно к уровненным поверхностям, потому что движение зависит не только от сил, которые, как было показано, ортогональны к уровненным поверхностям, но также и от скорости.

75. Потенциал и притяжение тонкого однородного круглого диска на точку, лежащую на его оси. Возьмем начало в центре диска с радиусом R . Пусть P имеет координаты $(x, 0, 0)$ (рис. 19). Тогда

$$V = \int \frac{dm}{\rho} = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

После интегрирования находим, что

$$\left. \begin{aligned} V &= 2\pi\sigma [\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2}], \\ X &= k^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi k^2 \sigma \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Если x остается постоянным, а R стремится к бесконечности, то в пределе притяжение становится равным:

$$X = \mp 2\pi k^2 \sigma, \quad (16)$$

согласно тому, находится ли точка на положительной или отрицательной стороне плоскости xy . Правая часть этого уравнения не зависит от x ; поэтому тонкий круглый бесконечно протяженный диск притягивает вышележащую точку с силой, не зависящей от ее высоты. Любое число наложенных



Рис. 19.

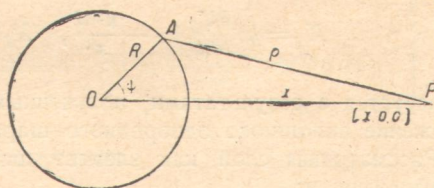


Рис. 20.

друг на друга дисков действует вместе таким же образом. Поэтому, если бы Земля была бесконечно протяженной плоскостью, как это обычно предполагали в древности, то тела на всех высотах притягивались бы к ней с постоянными силами и законы падения тел, выведенные при гипотезе постоянного ускорения, были бы совершенно верными.

76. Потенциал и притяжение тонкого однородного сферического слоя на внутреннюю и внешнюю точку. Пусть φ обозначает угол между OP и радиусом и θ^1 — угол между основной плоскостью и плоскостью OAP (рис. 20). Тогда

$$V = \int \frac{dm}{\rho} = \sigma \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta}{\rho}. \quad (17)$$

¹⁾ Заметим, что здесь φ и θ не являются обычными полярными углами, употребляемыми в других местах.

Одну из трех переменных φ , θ , ρ можно выразить через две остальные. Например, из чертежа видно, что

$$\rho^2 = x^2 + R^2 - 2xR \cos \varphi,$$

откуда

$$\rho d\rho = xR \sin \varphi d\varphi. \quad (18)$$

Тогда, если P находится вне слоя, то уравнение (17) принимает вид¹⁾:

$$V_E = \frac{R\sigma}{x} \int_{x-R}^{x+R} \int_0^{2\pi} d\rho d\theta, \quad (19)$$

а если P находится внутри слоя, то

$$V_I = \frac{R\sigma}{x} \int_{R-x}^{R+x} \int_0^{2\pi} d\rho d\theta. \quad (20)$$

Вычисляя интегралы, мы получим:

$$V_E = \frac{4\pi\sigma R^2}{x} = \frac{M}{x}, \quad V_I = 4\pi\sigma R = \frac{M}{R}. \quad (21)$$

Компоненты по оси x соответственно равны:

$$X_E = k^2 \frac{\partial V_E}{\partial x} = -\frac{k^2 M}{x^2}, \quad X_I = k^2 \frac{\partial V_I}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

что согласуется с результатами, полученными в § 66 и 70.

Притяжение сплошного однородного шара также может быть найдено сразу. Рассматривая слой как элемент шара, мы должны заменить M в (22) выражением:

$$M = 4\pi r^2 dr.$$

Пусть \bar{X} обозначает притяжение всего шара с массой \bar{M} ; тогда:

$$\bar{X} = -\frac{4k^2\pi\sigma}{x^2} \int_0^a r^3 dr = -\frac{4k^2}{3} \frac{\pi\sigma a^3}{x^2} = -k^2 \frac{\bar{M}}{x^2}.$$

Рассмотрим взаимное притяжение двух шаров. Согласно только что полученным результатам каждый из них притягивает каждую точку другого, как если бы вся его масса находилась в его центре. Отсюда следует, что два шара притягивают друг друга так, как если бы все их массы находились в их соответствующих центрах.

¹⁾ Через V_E и V_I обозначены потенциалы слоя на внешнюю и внутреннюю точки соответственно. *Прим. ред*

77. Второй метод вычисления притяжения однородного шара. Теперь дадим очень простой способ нахождения притяжения сплошного однородного шара на внешнюю точку при условии, что оно известно для внутренних точек. Эта задача решается очень просто, и мы приводим ее только потому, что соответствующий прием имеет большое значение в гораздо более трудном случае притяжения эллипсоидов и составляет знаменитый метод Айвори.

Пусть требуется найти притяжение шара S на внешнюю точку P' , предполагая, что нахождение притяжения на внутренние точки известно (рис. 21). Проведем через P' концентрическую сферу S' и предположим, что она имеет ту же плотность, как и S . Установим однозначное соответствие между точками сферы S и сферы S' при помощи формул:

$$x = \frac{R}{R'} x', \quad y = \frac{R}{R'} y', \quad z = \frac{R}{R'} z'. \quad (23)$$

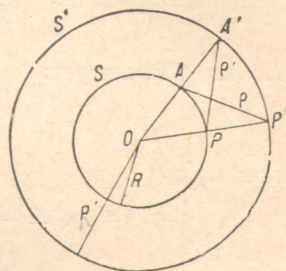


Рис. 21.

Соответствующие точки находятся на линиях, проходящих через общий центр сфер, и пусть P соответствует P' . Пусть далее X и X' обозначают соответственно притяжения S' и S на P и P' . Они даются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} X &= -k^2 \int_{(S')} \frac{R - x'}{\rho'^3} dm' = -k^2 \sigma \iiint \frac{R - x'}{\rho'^3} dx' dy' dz', \\ X' &= -k^2 \int_{(S)} \frac{R' - x}{\rho^3} dm = -k^2 \sigma \iiint \frac{R' - x}{\rho^3} dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Но из определения ρ и ρ' следует, что

$$\left. \begin{aligned} k^2 \sigma \iiint \frac{R - x'}{\rho'^3} dx' dy' dz' &= +k^2 \sigma \iiint \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho'} \right)}{\partial x} dx' dy' dz' = \\ &= k^2 \sigma \iint \left(\frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho'_1} \right) dy' dz', \\ k^2 \sigma \iiint \frac{R' - x}{\rho^3} dx dy dz &= k^2 \sigma \iint \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где ρ_2 и ρ_1 — крайние значения ρ , полученные интегрированием по x . Иными словами, первое интегрирование дает притяжение элементарного столбика, простирающегося через шар параллельно оси x , а ρ_1 и ρ_2 — расстояния притягиваемой точки P от концов этого столбика. При дальнейшем интегрировании берется сумма всех таких элементарных столбиков.

Предположим, что интегралы (25) вычислены таким образом, что соответствующие столбики двух шаров берутся одновременно. Рассмотрим

любые две пары соответствующих элементов, как например в A и A' . Для них $\rho = \rho'$, и это соотношение сохраняется при всем вышеприведенном интегрировании. Поэтому из уравнений (24) и (25) следует, что

$$X' = -k^2 \sigma \iint \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) dy dz = -k^2 \tau \iint \left(\frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho'_1} \right) dy dz.$$

Но из (23) следует:

$$dy = \frac{R}{R'} dy', \quad dz = \frac{R}{R'} dz',$$

поэтому

$$X' = -k^2 \tau \frac{R^2}{R'^2} \iint \left(\frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho'_1} \right) dy' dz' = \frac{R^2}{R'^2} X.$$

Пусть M представляет массу шара S и M' — массу шара S' . Притяжение S' на внутреннюю точку P дается выражением:

$$X = -\frac{k^2 M}{R^2},$$

поэтому из соотношения $R'^2 X' = R^2 X$ следует, что притяжение S на внешнюю точку P' равно:

$$X' = -\frac{k^2 M}{R'^2},$$

что согласуется с ранее полученными результатами (§ 69, 70).

ЗАДАЧИ

1. Докажите переходом к пределу, что потенциал и составляющие притяжения имеют конечные определенные значения и что уравнения (11) применимы, когда точка находится на поверхности притягивающей массы.

2. Найдите выражение потенциальной функции для точки, лежащей вне притягивающего тела, когда сила изменяется обратно пропорционально n -й степени расстояния.

$$\text{Отв. } V = \frac{1}{n-1} \int \frac{d' m}{\rho^n}.$$

3. Найдите переходом к пределу, для какого значения n потенциал в последней задаче конечен и определен, когда точка является частью притягивающей массы.

4. Покажите, что уровенные поверхности для прямого однородного стержня представляют вытянутые сфероиды, фокусами которых являются концы стержня.

5. Найдите составляющие притяжения однородного полушария радиуса R на точку, лежащую на его краю: а) в направлении центра его основания, б) перпендикулярно к этому направлению в плоскости основания, с) перпендикулярно к этим двум направлениям.

$$\text{Отв. а) } X = \frac{2}{3} \pi \sigma k^2 R; \quad \text{б) } Y = 0; \quad \text{с) } Z = \frac{4}{3} \pi \sigma k^2 R^2.$$

6. Найдите отклонение отвеса, вызванное полусферическим холмом радиуса r и плотности σ_1 . Пусть R обозначает радиус Земли, которая считается шарообразной, и σ_2 — ее среднюю плотность.

Отв. Если λ есть угол отклонения, то

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\frac{2}{3} \sigma_1 r}{\frac{4}{3} \pi \sigma_2 R - \frac{4}{3} \sigma_1 r} = \frac{\frac{1}{2} \pi \sigma_1 r}{\pi \sigma_2 R - \sigma_1 r}$$

или приближенно

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{r}{R}.$$

7. Докажите, что если притяжение меняется прямо пропорционально расстоянию, то тело любой формы притягивает точку так, как если бы вся его масса была сконцентрирована в центре массы.

78. Потенциал и притяжение сплошного однородного сжатого сфероида на удаленную точку с единицей массы. Планеты очень близки к сжатым сфероидам и почти однородны, так что результаты, полученные в этом параграфе, с достаточным приближением представляют действительные притяжения для большинства астрономических применений.

Предположим, что притягиваемая точка находится на достаточно большом расстоянии по сравнению с размерами притягивающего сфероида. Возьмем начало координат в центре сфероида и направим ось z по оси вращения. Пусть R обозначает расстояние от O до P и r — расстояние от O до элемента массы (рис. 22). Тогда

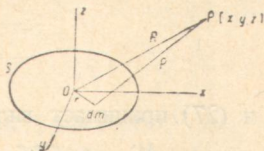


Рис. 22.

$$\left. \begin{aligned} V &= \int_S \frac{dm}{\rho}, \quad \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \\ R &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Из этих уравнений следует, что:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2(\xi x + \eta y + \zeta z)}} = \frac{1}{R \sqrt{1 + \frac{r^2 - 2(\xi x + \eta y + \zeta z)}{R^2}}}.$$

Считая $\frac{\xi}{R}$, $\frac{\eta}{R}$ и $\frac{\zeta}{R}$ малыми величинами первого порядка, разложим выражение для ρ^{-1} по формуле бинома до малых третьего порядка. Имеем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \left\{ 1 + \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{R^2} - \frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2} \frac{(x^2 \xi^2 + y^2 \eta^2 + z^2 \zeta^2 + 2xy\xi\eta + 2yz\eta\zeta + 2zx\xi\zeta)}{R^4} + \dots \right\}$$

Поэтому

$$V = \frac{1}{R} \int dm + \frac{x}{R^3} \int \xi dm + \frac{y}{R^3} \int \eta dm + \frac{z}{R^3} \int \zeta dm - \frac{1}{2R^3} \int r^2 dm + \left. \begin{aligned} &+ \frac{x^2}{2R^5} \int \xi^2 dm + \frac{3}{2} \frac{y^2}{R^5} \int \eta^2 dm + \frac{3}{2} \frac{z^2}{R^5} \int \zeta^2 dm + \\ &+ \frac{3xy}{R^5} \int \xi \eta dm + \frac{3yz}{R^5} \int \eta \zeta dm + \frac{3zx}{R^5} \int \xi \zeta dm + \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Пусть M обозначает массу сфероида; тогда

$$\int dm = M,$$

и так как начало находится в центре тяжести, то

$$\int \xi dm = 0, \quad \int \eta dm = 0, \quad \int \zeta dm = 0.$$

Пусть далее σ обозначает плотность, тогда

$$dm = \sigma r^2 \cos \varphi d\varphi d\theta dr,$$

$$\xi = r \cos \varphi \cos \theta,$$

$$\eta = r \cos \varphi \sin \theta,$$

$$\zeta = r \sin \varphi,$$

и (27) принимает вид:

$$\begin{aligned} V = & \frac{M}{R} - \frac{\sigma}{2R^3} \iiint r^4 \cos \varphi d\varphi d\theta dr + \frac{3x^2\sigma}{2R^5} \iiint r^4 \cos^3 \varphi \cos^2 \theta d\varphi d\theta dr + \\ & + \frac{3y^2\sigma}{2R^5} \iiint r^4 \cos^3 \varphi \sin^2 \theta d\varphi d\theta dr + \frac{3z^2\sigma}{2R^5} \iiint r^4 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta dr + \\ & + \frac{3xy\sigma}{R^5} \iiint r^4 \cos^3 \varphi \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta dr + \\ & + \frac{3yz\sigma}{R^5} \iiint r^4 \sin \varphi \cos^3 \varphi \sin \theta d\varphi d\theta dr + \\ & + \frac{3zx\sigma}{R^5} \iiint r^4 \sin \varphi \cos^3 \varphi \cos \theta d\varphi d\theta dr + \dots, \end{aligned}$$

где пределы интегрирования таковы: для r от 0 до r ; для φ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$; для θ от 0 до 2π . Так как r и φ не зависят от θ , то проинтегрируем сначала по θ . Получим:

$$\begin{aligned} V = & \frac{M}{R} - \frac{\pi\sigma}{R^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r r^4 \cos \varphi d\varphi dr + \frac{3}{2} \frac{\pi x^2\sigma}{R^5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r r^4 \cos^3 \varphi d\varphi dr + \\ & + \frac{3}{2} \frac{\pi y^2\sigma}{R^5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r r^4 \cos^3 \varphi d\varphi dr + \frac{3\pi z^2\sigma}{2R^5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r r^4 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi dr + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Последние три интеграла равны нулю.

Следующее интегрирование должно быть по r , так как эта переменная зависит от φ . Пусть большая и малая полуоси меридианного сечения сфероида соответственно равны a и b и пусть e — эксцентриситет. Тогда

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}.$$

Проинтегрировав (28) по r и разлагая результат по степеням e , находим, что до членов второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} V = & \frac{M}{R} - \frac{\pi \sigma b^3}{5R^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{5}{2} e^2 \cos^2 \varphi + \dots \right) \cos \varphi d\varphi + \\ & + \frac{3}{10} \frac{\pi \sigma b^5}{R^5} (x^2 + y^2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{5}{2} e^2 \cos^2 \varphi + \dots \right) \cos^3 \varphi d\varphi + \\ & + \frac{3}{5} \frac{\pi \sigma b^5 z^2}{R^5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{5}{2} e^2 \cos^2 \varphi + \dots \right) \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Интегрируя, наконец, по φ и располагая выражение для V по степеням e , мы получим:

$$V = \frac{M}{R} + \frac{2}{15} \frac{\pi \sigma b^5}{R^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) e^2 + \dots$$

Но

$$M = \frac{4}{3} \pi \sigma a^2 b, \quad b^2 = a^2 (1 - e^2).$$

Поэтому

$$V = \frac{M}{R} \left[1 + \frac{b^2 (x^2 + y^2 - 2z^2)}{10 R^4} e^2 + \dots \right]. \quad (29)$$

Из уравнений (11) и (29) находим выражения для составляющих притяжения:

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{k^2 M x}{R^3} \left[1 + \frac{3}{10} b^2 \frac{(x^2 + y^2 - 4z^2)}{R^4} e^2 + \dots \right], \\ Y &= -\frac{k^2 M y}{R^3} \left[1 + \frac{3}{10} b^2 \frac{(x^2 + y^2 - 4z^2)}{R^4} e^2 + \dots \right], \\ Z &= -\frac{k^2 M z}{R^3} \left[1 + \frac{3}{10} b^2 \frac{(x^2 + y^2) - 2z^2}{R^4} e^2 + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Если сфероид превращается в сферу такой же массы, то выражение для составляющих притяжения приводятся к первым членам правых частей выражений (30), так как для сферы $e=0$. Если притягиваемая точка находится в плоскости экватора притягивающего сфероида, то $z=0$, а если она лежит на оси вращения, то $x=y=0$. Отсюда из уравнений (30) следует, что притяжение сжатого сфероида на точку, находящуюся на некотором расстоянии от центра и лежащую в плоскости его экватора, больше, чем притяжение шара равной массы; а на точку, лежащую на продолжении полярной оси, меньше, чем притяжение шара равной массы. Когда точка удаляется от притягивающего тела, то притяжение приближается к притяжению шара равной массы. Поэтому если точка удаляется в плоскости экватора, то притяжение уменьшается быстрее, чем увеличивается квадрат расстояния, и если она приближается, то притяжение увеличивается быстрее, чем уменьшается квадрат расстояния. Обратные результаты имеют место, когда точка находится на полярной оси.

79. Потенциал и притяжение сплошного однородного эллипсоида на точку с единицей массы внутри него. Напишем уравнение поверхности эллипсоида в виде:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (31)$$

и пусть притягиваемая точка расположена внутри эллипсоида и имеет координаты (x, y, z) . Возьмем эту точку за начало полярных координат ρ, θ и φ . Возьмем основные плоскости этой системы параллельно плоскостям первой системы. Тогда переменные ρ, θ и φ связаны с прямоугольными координатами формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + \rho \cos \varphi \cos \theta, \\ \eta &= y + \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ \zeta &= z + \rho \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Потенциал эллипсоида на точку P с единицей массы равен:

$$V = \int_{(M)} \frac{dm}{r} = \sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_1} \rho \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho.$$

Так как значение ρ зависит от полярных углов, то сначала нужно интегрировать по этой переменной. Интегрирование дает:

$$V = \frac{\sigma}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho_1^2 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta. \quad (33)$$

Для выражения ρ_1 через полярные углы подставим (32) в (31), откуда находим:

$$A\rho_1^2 + 2B\rho_1 + C = 0, \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}, \\ B &= \frac{x \cos \varphi \cos \theta}{a^2} + \frac{y \cos \varphi \sin \theta}{b^2} + \frac{z \sin \varphi}{c^2}, \\ C &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Из (34) находим:

$$\rho_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Очевидно, что для ρ_1 нужно взять положительное значение; так как A существенно положительно, а C отрицательно, потому что точка (x, y, z) находится внутри поверхности эллипсоида, то для того чтобы ρ_1 было положительно, перед радикалом должен быть взят знак $+$. Подставляя это значение для ρ_1 в (33), находим:

$$V = \frac{\sigma}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{(2B^2 - 2B\sqrt{B^2 - AC} - AC)}{A^2} \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta. \quad (36)$$

Рассмотрим интеграл:

$$V_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{B \sqrt{B^2 - AC}}{A^2} \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Из выражения для B следует, что дифференциальные элементы, соответствующие $\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ и $\theta = \pi + \theta_0$, $\varphi = -\varphi_0$, по абсолютной величине равны, но имеют противоположные знаки. Так как все элементы, входящие в интеграл, можно разбить на пары таким образом, то отсюда следует, что $V_1 = 0$, после чего формула (36) принимает вид,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sigma}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} (2v^2 - C) + \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} (2y^2 - C) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2} (2z^2 - C) \right\} \frac{\cos \varphi \, d\varphi \, d\theta}{A^2} + \\ &+ 2\sigma \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{xy \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta}{a^2 b^2} + \frac{yz \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta}{b^2 c^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{zx \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta}{c^2 a^2} \right\} \frac{\cos \varphi \, d\varphi \, d\theta}{A^2}. \quad (37) \end{aligned}$$

Сравнивая опять попарно взятые элементы, мы видим, что второй интеграл также равен нулю. Положим

$$W = \frac{\sigma}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi d\theta}{\cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}}, \quad (38)$$

тогда (37) может быть написано в виде:

$$V = -CW + \frac{x^2}{a} \frac{\partial W}{\partial a} + \frac{y^2}{b} \frac{\partial W}{\partial b} + \frac{z^2}{c} \frac{\partial W}{\partial c}. \quad (39)$$

Для данного эллипсоида W постоянно, и уравнения уровенных поверхностей имеют вид:

$$C_1 x^2 + C_2 y^2 + C_3 z^2 = \text{const.},$$

что является уравнением подобных concentрических эллипсоидов, оси которых пропорциональны. Чтобы привести W к интегрируемой форме, положим:

$$M = \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}, \quad N = \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}, \quad (40)$$

тогда (38) принимает вид:

$$W = \frac{\sigma}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi d\varphi d\theta}{M \cos^2 \theta + N \sin^2 \theta} = 4\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi d\theta}{M \cos^2 \theta + N \sin^2 \theta}.$$

Так как M и N не зависят от θ , то, интегрируя по этой переменной, находим ¹⁾:

$$\begin{aligned} W &= 2\pi\sigma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{MN}} = \\ &= 2\pi\sigma abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi) \cdot (b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для восстановления симметрии относительно a , b и c , которая существовала в (38), Якоби ввел преобразование:

$$\sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s}},$$

откуда

$$W = \pi\sigma abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}}.$$

¹⁾ Подстановкой $\text{tg } \theta = x$, интеграл приводится к одной из стандартных форм.

Вычисляя производные по a , b и c и подставляя в (39), находим:

$$V = \pi \varepsilon abc \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}. \quad (42)$$

Составляющие притяжения определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} X &= k^2 \frac{\partial V}{\partial x} = - \int_0^{\infty} \frac{2\pi \varepsilon abc x k^2 ds}{(a^2 + s) V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}, \\ Y &= k^2 \frac{\partial V}{\partial y} = - \int_0^{\infty} \frac{2\pi \varepsilon abc y k^2 ds}{(b^2 + s) V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}, \\ Z &= k^2 \frac{\partial V}{\partial z} = - \int_0^{\infty} \frac{2\pi \varepsilon abc z k^2 ds}{(c^2 + s) V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Так как (41) однородно и второй степени относительно a , b и c , то $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, образованные из (39), также будут однородны и нулевой степени относительно тех же величин.

Отсюда следует, что если a , b и c увеличены в одно и то же число раз λ , то составляющие притяжения X , Y и Z не изменятся; или *эллиптический гомеоид*¹⁾, ограниченный поверхностями эллипсоидов, оси которых a , b , c и λa , λb и λc , притягивает лежащую внутри него точку P одинаково в противоположных направлениях (ср. § 67).

Составляющая притяжения X не зависит от y и z и содержит x в первой степени, поэтому *составляющая притяжения по оси x пропорциональна координате x точки и постоянна повсюду внутри эллипсоида в плоскости $\xi = x$* . Аналогичные результаты получаются и для двух других координат.

Предположим, что $a > b > c$. Тогда уравнение (41) может быть приведено к нормальной форме эллиптического интеграла первого рода путем подстановки:

$$\sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad x^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} < 1.$$

Опуская вычисления, напомним для W окончательное выражение:

$$W = \frac{2\pi \varepsilon abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\int_0^a \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - x^2 u^2)}}}. \quad (44)$$

Если x^2 мало, то интеграл легко вычислить, разлагая подинтегральную функцию в ряд по степеням x^2 и интегрируя почленно.

1) Гомеоидом мы называем тело, ограниченное двумя подобными и подобно расположенными поверхностями.

ЗАДАЧИ

1. Исследуйте уровенные поверхности, данные уравнением (29).
2. Найдите выражения для составляющих притяжения вместо потенциала, как в § 79. Определите, какие части интегралов исчезают, проинтегрируйте по θ и покажите, что результаты таковы:

$$X = -4\pi abc k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}{V(b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)(c^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)},$$

$$Y = -4\pi acay k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}{V(c^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)},$$

$$Z = -4\pi abzk^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi}{V(a^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)(b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)}.$$

Указание. Найдите результаты для Z и получите другие составляющие круговой перестановкой букв a, b, c .

3. Преобразуйте уравнения второй задачи при помощи подстановок:

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + s}}, \quad \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s}},$$

и покажите, что получаются уравнения (43).

4. Покажите, что потенциал эллипсоида на точку в его центре равен:

$$V_0 = \pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)} = W.$$

5. Получите значение потенциала (42) из значения для V_0 и уравнений (43).

6. Преобразуйте уравнения задачи 2 таким образом, чтобы интегралы приняли вид:

$$\int \frac{u' du}{V(1-u)(1-k^2 u)}.$$

7. Вычислите интегралы, входящие в формулу (28), не разлагая выражение для r^2 в ряд по степеням e^2 .

8'. Притяжение сплошного однородного эллипсоида на внешнюю точку. Метод Айвори. В случае внешней точки интегралы настолько сложны, что составляющие притяжения не могут быть найдены прямым интегрированием, если не прибегать к разложению в ряды. Эти интегралы вычисляют косвенным путем, выражая их через составляющие притяжения вспомогательного эллипсоида на внутреннюю точку. Этот прием составляет метод Айвори ¹⁾.

¹⁾ *Philosophical Transactions*, 1803.

Пусть требуется найти притяжение эллипсоида E на внешнюю точку $P'(x', y', z')$ (рис. 23). Пусть полуоси E равны a, b и c . Проведем через P' эллипсоид E' , софокусный с E , с полуосями a', b', c' и предположим, что он имеет такую же плотность, как E . Оси двух эллипсоидов связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a' &= \sqrt{a^2 + \chi}, & b' &= \sqrt{b^2 + \chi}, \\ c' &= \sqrt{c^2 + \chi}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где χ определяется уравнением:

$$\frac{x'^2}{a^2 + \chi} + \frac{y'^2}{b^2 + \chi} + \frac{z'^2}{c^2 + \chi} - 1 = 0. \quad (46)$$

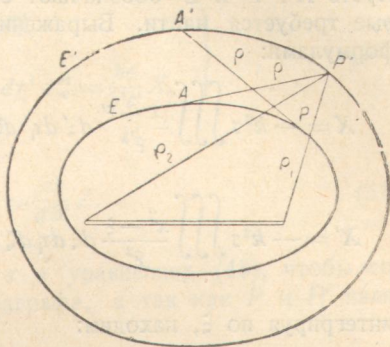


Рис. 23

Очевидно, что для χ нужно взять действительный и положительный корень этого уравнения. Уравнение (46) третьей степени относительно χ и имеет один положительный и два отрицательных корня. Действительно, левая часть уравнения (46), рассматриваемая как функция χ , отрицательна при $\chi = +\infty$; положительна при $\chi = 0$ [так как (x', y', z') лежит вне эллипсоида E]; положительна при $\chi = -c^2 + \varepsilon$ (где ε — очень маленькая положительная величина); отрицательна при $\chi = -c^2 - \varepsilon$; положительна при $\chi = -b^2 + \varepsilon$; отрицательна при $\chi = -b^2 - \varepsilon$; положительна при $\chi = -a^2 + \varepsilon$, отрицательна при $\chi = -a^2 - \varepsilon$ и отрицательна при $\chi = -\infty$. Течение функции изображено на рис. 24.

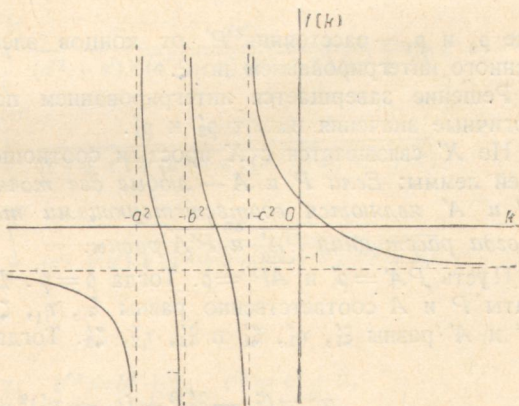


Рис. 24.

Когда взят положительный корень, тогда a', b' и c' определяются однозначно.

Установим однозначное соответствие между точками эллипсоидов E и E' при помощи формул:

$$\xi' = \frac{a'}{a} \xi, \quad \eta' = \frac{b'}{b} \eta, \quad \zeta' = \frac{c'}{c} \zeta. \quad (47)$$

Пусть P есть точка, соответствующая P' . Покажем, что притяжение E на P' связано простым образом с притяжением E' на P .

Пусть X, Y, Z означают составляющие притяжения E' на внутреннюю точку P в точке (x, y, z) . Они могут быть вычислены методами, рассмотренными в § 79, и, следовательно, могут считаться известными. Пусть X', Y' и Z' обозначают составляющие притяжения E на P' , которые требуется найти. Выражения для составляющих по оси x даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} X &= -k^2 \sigma \iiint \frac{x - \xi'}{\rho'^3} d\xi' d\eta' d\zeta' = k^2 \sigma \iiint \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho'} \right)}{\partial \xi'} = d\xi' d\eta' d\zeta', \\ X' &= -k^2 \sigma \iiint \frac{x' - \xi}{\rho^3} d\xi d\eta d\zeta = k \sigma \iiint \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta; \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

интегрируя по ξ , находим:

$$\left. \begin{aligned} X &= k^2 \sigma \iint \left(\frac{1}{\rho'_2} - \frac{1}{\rho'_1} \right) d\eta' d\zeta', \\ X' &= k^2 \sigma \iint \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) d\eta d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

где ρ_2 и ρ_1 — расстояния P' от концов элементарного столбика, полученного интегрированием по ξ .

Решение завершается интегрированием по всей поверхности E . Аналогичные значения имеют ρ'_2 и ρ'_1 .

Но X' связывается с X простым соотношением при помощи следующей леммы: *Если P и A — любые две точки на поверхности E и если P' и A' являются соответствующими точками на поверхности E' , тогда расстояния $\overline{PA'}$ и $\overline{P'A}$ равны.*

Пусть $\overline{PA'} = \rho'$ и $\overline{AP'} = \rho$. Тогда $\rho = \rho'$. Действительно, пусть координаты P и A соответственно равны ξ_1, η_1, ζ_1 и ξ_2, η_2, ζ_2 и координаты P' и A' равны $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1$ и $\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho'^2 &= (\xi_1 - \xi'_2)^2 + (\eta_1 - \eta'_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta'_2)^2, \\ \rho^2 &= (\xi_2 - \xi'_1)^2 + (\eta_2 - \eta'_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta'_1)^2, \end{aligned}$$

Пользуясь уравнениями (45) и (47), находим:

$$\rho'^2 - \rho^2 = \kappa \left(\frac{\xi_2^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} + \frac{\zeta_2^2}{c^2} \right) - \kappa \left(\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} + \frac{\zeta_1^2}{c^2} \right).$$

Так как P и A находятся на поверхности эллипсоида с полуосями a, b и c , то каждая скобка равна единице. Поэтому $\rho'^2 - \rho^2 = 0$ или $\rho = \rho'$.

Предположим, что интегралы (49) вычислены так, что элементы в соответствующих точках двух поверхностей всегда берутся одновре-

менно. Тогда во всем интегрировании $\rho_1 = \rho'_1$ и $\rho_2 = \rho'_2$. Более того, из уравнения (47) следует, что $d\eta = \frac{b}{b'} d\eta'$ и $d\zeta = \frac{c}{c'} d\zeta'$. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} X &= k^2 \iint \left(\frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_1'} \right) d\eta' d\zeta', \\ X' &= k^2 \sigma \frac{bc}{b'c'} \iint \left(\frac{1}{\rho_2'} - \frac{1}{\rho_1'} \right) d\eta' d\zeta' = \frac{bc}{b'c'} X, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

и аналогично находим:

$$Y' = \frac{ca}{c'a'} Y, \quad Z' = \frac{ab}{a'b'} Z. \quad (51)$$

Припишем штрихи буквам a , b , c и s в уравнениях (43), чтобы согласовать с обозначениями этого параграфа, а так как P и P' являются соответствующими точками, то

$$x = \frac{a}{a'} x', \quad y = \frac{b}{b'} y', \quad z = \frac{c}{c'} z'.$$

Подставив после вышеприведенных изменений выражения (43) в (50) и (51), находим:

$$\begin{aligned} X' &= -2\pi\sigma abck^2 x' \int_0^\infty \frac{ds'}{(a'^2 + s') V(a'^2 + s') (b'^2 + s') (c'^2 + s')}, \\ Y' &= -2\pi\sigma abck^2 y' \int_0^\infty \frac{ds'}{(b'^2 + s') V(a'^2 + s') (b'^2 + s') (c'^2 + s')}, \\ Z' &= -2\pi\sigma abck^2 z' \int_0^\infty \frac{ds'}{(c'^2 + s') V(a'^2 + s') (b'^2 + s') (c'^2 + s')}. \end{aligned}$$

Из формул (45) следует:

$$a'^2 = a^2 + \chi, \quad b'^2 = b^2 + \chi, \quad c'^2 = c^2 + \chi,$$

отсюда, полагая еще $s = s' + \chi$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} X' &= -2\pi\sigma abck^2 x' \int_\chi^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) V(a^2 + s) (b^2 + s) (c^2 + s)}, \\ Y' &= -2\pi\sigma abck^2 y' \int_\chi^\infty \frac{ds}{(b^2 + s) V(a^2 + s) (b^2 + s) (c^2 + s)}, \\ Z' &= -2\pi\sigma abck^2 z' \int_\chi^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) V(a^2 + s) (b^2 + s) (c^2 + s)}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Из уравнений (40) и (41) следует, что составляющие притяжения для внутренних точек однородны и нулевой степени относительно a , b и c и что они пропорциональны соответствующим координатам притягиваемой точки. Пусть X , как и выше, обозначает притяжение эллипсоида E с полуосями a' , b' , c' на внутреннюю точку (x, y, z) . Пусть X'' обозначает притяжение E' на внутреннюю точку (x'', y'', z'') , которая связана с точкой (x, y, z) уравнениями той же формы, как и (47). Тогда мы имеем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{x''}{x}, \quad \frac{Y''}{Y} = \frac{y''}{y}, \quad \frac{Z''}{Z} = \frac{z''}{z}.$$

Пусть точка (x'', y'', z'') , всегда соответствующая (x, y, z) , неограниченно приближается к поверхности E . Тогда в пределе имеем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{a'}{a}, \quad \frac{Y''}{Y} = \frac{b'}{b}, \quad \frac{Z''}{Z} = \frac{c'}{c};$$

соединяя эти уравнения с (50) и (51), находим:

$$\frac{X''}{X'} = \frac{Y''}{Y'} = \frac{Z''}{Z'} = \frac{a'b'c'}{abc} = \frac{M'}{M}, \quad (53)$$

т. е. притяжение сплошного эллипсоида на внешнюю точку относится к притяжению софокусного эллипсоида, проходящего через эту точку, как массы соответствующих эллипсоидов.

Рассмотрим другой эллипсоид, софокусный с проходящим через рассматриваемую точку и расположенный внутри него; на основании такого же рассуждения найдем, что отношение составляющих притяжения этих двух эллипсоидов равно отношению их масс. Пусть X''' , Y''' , Z''' — составляющие притяжения нового эллипсоида с полуосями a''' , b''' , c''' . Тогда

$$\frac{X''}{X'''} = \frac{Y''}{Y'''} = \frac{Z''}{Z'''} = \frac{a'b'c'}{a'''b'''c'''} = \frac{M'}{M'''}$$

Сравнивая эти отношения с (53), находим:

$$\frac{X'}{X''} = \frac{Y'}{Y''} = \frac{Z'}{Z''} = \frac{M}{M'}.$$

Поэтому два софокусных эллипсоида притягивают точки, внешние по отношению к ним обоим, в одинаковом направлении и с силами, пропорциональными их массам.

Эта теорема была найдена Маклореном и Лагранжем для эллипсоидов вращения и обобщена Лапласом для случая трехосного эллипсоида. Однако ее легче получить методом Айвори, примененным выше, и она называется поэтому теоремой Айвори.

Правым частям уравнений (52) можно придать вид более удобный для вычисления, полагая в первом $\frac{a}{\sqrt{a^2+s}} = u$; во втором $\frac{b}{\sqrt{b^2+s}} = u$ и в третьем $\frac{c}{\sqrt{c^2+s}} = u$. Результаты подстановок следующие:

$$\left. \begin{aligned} X &= -4\pi\sigma bck^2x' \int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+x}}} \frac{u' du}{\sqrt{[a^2 - (a^2 - b^2)u^2][a^2 - (a^2 - c^2)u^2]}}, \\ Y &= -4\pi\sigma cak^2y' \int_0^{\frac{b}{\sqrt{b^2+x}}} \frac{u^2 du}{\sqrt{[b^2 - (b^2 - c^2)u^2][b^2 - (b^2 - a^2)u^2]}}, \\ Z &= -4\pi\sigma abk^2z' \int_0^{\frac{c}{\sqrt{c^2+x}}} \frac{u^2 du}{\sqrt{[c^2 - (c^2 - a^2)u^2][c^2 - (c^2 - b^2)u^2]}}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Когда притягиваемая точка находится внутри эллипсоида, то формы интегралов остаются теми же, кроме верхних пределов, которые обращаются в единицу.

81. Притяжение сфероидов. Составляющие притяжения получим из уравнений (54), которые годятся и для внешних точек. Предположим, что притягивающее тело есть сжатый сфероид, в котором $a = b > c$, и пусть e обозначает эксцентриситет меридианного сечения. Тогда

$$c^2 = a^2(1 - e^2),$$

и формулы (54) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} &= -4\pi\sigma k^2 \sqrt{1 - e^2} \int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2+x}}} \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - e^2 u^2}}, \\ \frac{Z'}{z'} &= -4\pi\sigma k^2 \int_0^{\frac{c}{\sqrt{c^2+x}}} \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - e^2 + e^2 u^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} &= -2\pi\sigma k^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \left[\frac{-ae}{\sqrt{a^2+x}} \sqrt{1 - \frac{a^2 e^2}{a^2+x}} + \right. \\ &\quad \left. + \arcsin\left(\frac{ae}{\sqrt{a^2+x}}\right) \right], \\ \frac{Z'}{z'} &= -4\pi\sigma k^2 \left[\frac{ce}{\sqrt{c^2+x}} - \sqrt{1 - e^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{ce}{\sqrt{(1 - e^2)(c^2+x)}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Составляющие притяжения для внутренних точек получаются из формул (56), полагая $\chi = 0$.

Теперь предположим, что притягивающее тело есть вытянутый сфероид и что $a = b < c$. Тогда $a^2 = b^2 = c^2 (1 - \varepsilon^2)$, и формулы (54) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X'}{y'} = \frac{Y'}{x'} &= -4\pi\sigma k^2 \int_0^{\frac{a}{\sqrt{a^2 + \chi}}} \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 u^2}}, \\ \frac{Z'}{z'} &= -4\pi\sigma k^2 (1 - \varepsilon^2) \int_0^{\frac{c}{\sqrt{c^2 + \chi}}} \frac{u^2 du}{1 - \varepsilon^2 u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} &= -\frac{2\pi\sigma k^2}{\varepsilon^3} \left[\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2 + \chi}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{a^2 + \chi}} - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \varepsilon^2) \ln \left(\frac{a\varepsilon}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)(a^2 + \chi)}} + \sqrt{1 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)(a^2 + \chi)}} \right) \right], \\ \frac{Z'}{z'} &= -2\pi\sigma k^2 \frac{(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^3} \left(\frac{-2c\varepsilon}{\sqrt{c^2 + \chi}} + \ln \frac{1 + \frac{c\varepsilon}{\sqrt{c^2 + \chi}}}{1 - \frac{c\varepsilon}{\sqrt{c^2 + \chi}}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Когда точка находится внутри сфероида, то выражения для составляющих имеют такой же вид, только $\chi = 0$.

82. Притяжения на поверхности сфероидов. Составляющие притяжения для внутренней точки, получающиеся в случае сжатого сфероида из формул (56), полагая $\chi = 0$ и опуская штрихи, напишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} &= -2\pi\sigma k^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} [-e \sqrt{1 - e^2} + \arcsin e], \\ \frac{Z}{z} &= -4\pi\sigma \frac{k^2}{e^3} \left[e - \sqrt{1 - e^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Вычисляя пределы этих выражений, когда притягиваемая точка приближается к поверхности сфероида, получим составляющие притяжения точки, лежащей на поверхности. Если притягиваемая точка проходит наружу через поверхность, то χ в уравнении (56) начинает непрерывно возрастать от нуля таким образом, что оно всегда удовлетворяет уравнению (46). Поэтому функции (59), оставаясь непрерывными, когда притягиваемая точка достигает поверхности, сохраняют силу, когда x, y, z удовлетворяют уравнению эллипсоида.

Когда e мало, как в случае планет, то удобнее формулы (59) разложить в ряды по степеням e . Подставляя разложения

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8} - \dots,$$

$$\arcsin e = e + \frac{e^3}{6} + \frac{3e^5}{40} + \dots,$$

$$\sqrt{1-e^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \right) = e - \frac{e^3}{3} - \frac{2e^5}{15} + \dots$$

в формулы (59), находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} &= -\frac{4}{3} \pi \mathcal{J} k^2 \left(1 - \frac{1}{5} e^2 + \dots \right), \\ \frac{Z}{z} &= -\frac{4}{3} \pi \mathcal{J} k^2 \left(1 + \frac{2}{5} e^2 + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Масса сфероида равна:

$$M = \frac{4}{3} \pi \mathcal{J} a^2 c = \frac{4}{3} \pi \mathcal{J} a^3 \sqrt{1-e^2}.$$

Радиус шара, имеющего такую же массу определяется уравнением:

$$M = \frac{4}{3} \pi \mathcal{J} R^3 = \frac{4}{3} \pi \mathcal{J} a^3 \sqrt{1-e^2},$$

откуда

$$R = a (1 - e^2)^{\frac{1}{6}}.$$

Притяжение этого шара на точку, лежащую на его поверхности, дается формулой:

$$F = -\frac{k^2 M}{R^2} = -\frac{3}{4} \pi \mathcal{J} k^2 a (1 - e^2)^{\frac{1}{6}}. \quad (61)$$

Когда притягиваемая точка находится на экваторе сфероида, то $\sqrt{x^2 + y^2} = a$, отсюда отношение притяжения сфероида на точку его экватора к притяжению равновеликого шара на точку его поверхности равно:

$$\frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{F} = \frac{\left(1 - \frac{1}{5} e^2 \dots \right)}{(1 - e^2)^{\frac{1}{6}}} = 1 - \frac{e^2}{30} + \dots$$

Это отношение меньше единицы при малых значениях e , поэтому притяжение сфероида на точку его экватора меньше, чем притяжение шара, имеющего равную массу и объем, на точку его поверхности. Когда при-

тягиваемая точка находится на полюсе сфероида, то $z=c=a\sqrt{1-e^2}$; следовательно, в этом случае:

$$\frac{Z}{F} = \sqrt{1-e^2} \frac{\left(1 + \frac{2}{5}e^2 \dots\right)}{(1-e^2)^{\frac{1}{6}}} = 1 + \frac{e^2}{15} + \dots$$

Это отношение больше единицы при малом e , поэтому притяжение сфероида на точку в его полюсе больше, чем таковое шара равной массы и объема на точку его поверхности.

Между экватором и полюсом имеется место, где притяжения в точности одинаковы. Найдем широту этого места. Координаты этой точки должны удовлетворять уравнению сфероида, поэтому:

$$f(x, y, z) \equiv \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \quad (62)$$

Направляющие косинусы нормали к поверхности в точке (x, y, z) равны:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}; \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Последнее есть косинус угла между нормалью в точке (x, y, z) и осью z и поэтому равно синусу географической широты, которую обозначим через φ . Отсюда из уравнения (62) следует:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1-e^2) + z^2}}. \quad (63)$$

Из (62) и (63) находим далее:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = a^2 \cos^2 \varphi \cdot \{1 - e^2 \sin^2 \varphi + \dots\}, \\ z^2 &= \frac{a^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = a^2 \sin^2 \varphi \{1 - e^2 (1 + \cos^2 \varphi) + \dots\}. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Пусть G обозначает полное притяжение сфероида, тогда из (60) и (64) получаем:

$$\begin{aligned} G &= -\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \\ &= -\frac{4}{3} \pi \sigma k^2 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5} e^2 \dots\right)^2 (x^2 + y^2) + \left(1 + \frac{2}{5} e^2 \dots\right)^2 z^2} = \\ &= -\frac{4}{3} \pi \sigma k^2 a \left\{1 - \frac{e^2}{10} (1 + \cos^2 \varphi) + \dots\right\}. \end{aligned}$$

Отношение этого выражения к выражению для притяжения шара равной массы и объема, данному уравнением (61), таково:

$$\frac{G}{F} = \frac{1 - \frac{e^2}{10}(1 + \cos^2 \varphi) \dots}{(1 - e^2)^6} = 1 - \frac{e^2(1 - 3 \sin^2 \varphi)}{30} \dots \quad (65)$$

Это отношение обращается в единицу, если пренебречь членами высшего порядка, когда $3 \sin^2 \varphi = 1$, откуда находим, что

$$\varphi = 35^\circ 15' 52''.$$

Пусть r обозначает радиус сфероида, тогда:

$$r^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 \varphi},$$

где φ есть угол между радиусом и плоскостью экватора. Так как этот угол отличается от φ лишь членами второго и выше порядков относительно e , то следует, что с нашей степенью приближения

$$r^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} = a^2(1 - e^2)(1 + e^2 \cos^2 \varphi + \dots).$$

Когда $\varphi = 35^\circ 15' 52''$,

$$r^2 = a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} + \dots \right).$$

Радиус шара равного объема дается формулой:

$$R^2 = a^2(1 - e^2)^{\frac{1}{3}} = a^2 \left(1 - \frac{e^2}{3} + \dots \right),$$

откуда видно, что он равен радиусу сфероида до членов второго порядка включительно. Поэтому в случае сжатого сфероида малого эксцентриситета притяжение на точку его поверхности с широтой $35^\circ 15' 52''$ почти равно притяжению шара равной массы и объема на точку его поверхности, или благодаря равенству R и r сфероид малого эксцентриситета притягивает точку его поверхности с широтой $35^\circ 15' 52''$ почти с такой же силой, как если бы вся его масса была сосредоточена в его центре.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что метод Айвори может быть применен также, когда притяжение изменяется пропорционально любой степени расстояния.

2. Покажите, почему метод Айвори не может быть использован для нахождения потенциала сплошного эллипсоида на внешнюю точку, если он известен для внутренней точки.

3. Найдите потенциал тонкого эллипсоидального слоя, заключенного между двумя подобными эллипсоидами, на внутреннюю точку.

Указание. Было доказано (§ 79), что равнодействующая притяжения равна нулю во всех внутренних точках, поэтому потенциал постоянен, и достаточно найти его значение для центра. Пусть полуоси двух поверхностей a, b, c и $(1+\mu) \cdot a, (1+\mu) \cdot b, (1+\mu) \cdot c$; тогда расстояние между поверхностями, измеряемое вдоль радиуса от центра, равно μr . Поэтому:

$$V = \sigma \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3 \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta}{\rho} = \sigma \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \, d\varphi \, d\theta}{\frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{c^2}} =$$

$$= 2\pi \sigma \mu a b c \int_0^{\infty} \frac{ds}{V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}.$$

4. Докажите, что в случае двух тонких софокусных слоев подобные элементы масс в точках, определяемых выражениями (47), пропорциональны произведению трех осей соответствующих эллипсоидов. Затем покажите, применяя задачу 3 и метод Айвори, что потенциал эллипсоидального слоя на внешнюю точку равен:

$$V' = 2\pi \sigma \mu a b c \int_0^{\infty} \frac{ds'}{V(a'^2 + s')(b'^2 + s')(c'^2 + s')} =$$

$$= 2\pi \sigma \mu a b c \int_x^{\infty} \frac{ds}{V(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}.$$

5. Докажите, что уровенные поверхности тонких однородных эллипсоидов являются совокупными эллипсоидами. Каковы силовые линии, ортогональные к этим поверхностям?

6. Исследуйте уровенные поверхности, лежащие всецело вне однородных сплошных эллипсоидов.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Притяжения тел были впервые исследованы Ньютоном. Его результаты даны в «Началах», книга I, отд. XII и XIII, и выведены синтетическим процессом, сходным с употребленным в первой части этой главы. Проблема притяжения эллипсоида была предметом многих мемуаров, и случай однородных эллипсоидов был вполне разрешен в начале XIX в. Среди работ, имеющих значение, мы находим работы Стирлинга (Stirling), 1735, *Phil. Trans.*; Эйлера, СПб 735; Лагранжа, 1773 и 1775 «Собр. соч.», т. III, стр. 619; Лапласа, 1782, *Méc. Cél.*, т. II; Айвори, 1809—1828, *Phil. Trans.*; Лежандра, 1811, *Mém. de l'Inst. de France*, т. XI; Гаусса, «Собр. соч.» т. V; Родригеса (Rodriguez), 816, «Corres. sur l'Ecole Polyt.», т. III; Пуассона (Poisson), 1829, «Conn. des Temps; Грина (Green), 1835, *Math. Papers*, т. XIII; Шалля (Chasles), 1837—1846, *Journ. l'Ecole Polyt.* и *Mém. des Savants Etrangers*, т. IX; Маккулаха (Mac Cullagh), 1847, *Dublin Proc.*, т. III; Лежен-Дирихле (Lejeune-Dirichlet), *Journal de Liouville*, т. IX, и *Crelle*, т. XXXII.

Более ранние работы посвящены преимущественно притяжениям однородных эллипсоидов вращения на точки, находящиеся в особых положениях, как, например, на оси. Лагранж дал общее решение для притяжений однородных эллипсоидов вообще на внутренние точки Айвори и Маклорен (с обобщениями Лапласа) распространили решение на внешние точки. Теорема Айвори была чрезвычайно интересна; ее образом расширена Дарбу (Darboux) в примечании XVI ко второму тому «Механики» Десперу (Despeyroux). В *Mémoires de Savants*

Etrangers, т. IX, Шаль дал синтетическое доказательство теорем, касающихся притяжений однородных эллипсоидов, а Лежен-Дирихле в одном рассмотрении соединил изящным способом случай внутренней и внешней точек, употребляя разрывный множитель (*Liouville's Journal*, т. IV).

Лаплас доказал, что потенциал для внешней точки удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

и определил V по условию, что оно должно быть функцией, удовлетворяющей этому уравнению. Это прием большой общности и сравнительно простой за исключением некоторых случаев. Он сделался исходной точкой большинства исследований последней части прошлого столетия, особенно для случаев неоднородных притягивающих тел. В 1828 г. в статье об электричестве и магнетизме Грин ввел для V термин *потенциальная функция* и рассмотрел многие ее математические свойства. Примерно до 1846 г. мемуары Грина оставались почти неизвестными, и в течение этого времени многие его теоремы были снова открыты Шалем, Гауссом, Штурмом (Sturm) и Томсоном (Thomson); одна из теорем Грина нашла чрезвычайно полезное применение в теории функций, когда число независимых переменных равно двум.

Пуассон показал, что потенциальная функция для внутренней точки удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma.$$

Среди книг, трактующих вопрос о притяжении и потенциале, можно упомянуть «*Natural Philosophy*», ч. II, Томсона и Тэта (Thomson and Tait), «*Potential*» Пуанкаре, «*Potential*» Неймана (Neumann); «*Analytical Statics*» Рауса (Routh) и «*Mécanique Céleste*», т. II, Тиссерана. Последний из упомянутых авторов развивает наиболее полно астрономические применения, куда и отсылает читателя.

Притяжение сфероидов и эллипсоидов имело основное значение при рассмотрении возможных фигур равновесия вращающихся жидкостей. Причина, конечно, та, что условия для равновесия включают составляющие притяжения. В 1742 г. Маклорен доказал, что при медленном вращении фигурой равновесия является сжатый сфероид, эксцентриситет которого есть функция скорости вращения и плотности жидкости. На самом деле имеется две таких фигуры: для медленного вращения одна почти сферическая, а другая сильно сжатая. При более быстром вращении фигуры приближаются к одинаковой форме; для известной большей скорости вращения они совпадают, и для еще более быстрого вращения сфероид невозможен как фигура равновесия. В 1834 г. Якоби (Jacobi) доказал, что когда скорость вращения не слишком велика, то эллипсоид с тремя неравными осями, который является фигурой равновесия, совпадает при известной скорости вращения с одним из сфероидов Маклорена, который близок к шару. Подробности об этом см. у Тиссерана «*Mécanique Céleste*», т. II. В мемуаре («*Acta Mathematica*», т. VII) Пуанкаре доказал, что существует бесконечно много других фигур равновесия, которые для известных значений скорости вращения совпадают с соответствующим эллипсоидом Якоби, как последний при известной скорости вращения совпадает со сфероидом Маклорена. Наименее удлинённая из этих фигур, шире на одном конце, чем на другом, называется апиоидом, т. е. грушевидной фигурой. Позднейшие вычисления Дж. Дарвина (*Philosophical Transactions*, т. 198) показали, что она столь удлинёна, что скорее похожа на огурец.

[Отметим еще значительные работы А. Ляпунова, опубликованные в «Известиях С.-Петербургской академии наук». Часть мемуаров Ляпунова переиздана Академией наук СССР. *Прим. ред.*]

ГЛАВА V

ЗАДАЧА О ДВУХ ТЕЛАХ

83. Уравнения движения. В этой главе мы будем предполагать, что притягивающие тела имеют шарообразную форму и состоят из однородных concentрических сферических слоев. Тогда согласно результатам, полученным в § 69, они притягивают друг друга с силой, пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Пусть m_1 и m_2 обозначают массы двух тел и $m_1 + m_2 = M$. Выберем произвольную систему прямоугольных координат в пространстве с неизменными направлениями осей, и обозначим координаты m_1 и m_2 относительно этой системы через ξ_1, η_1, ζ_1 и ξ_2, η_2, ζ_2 . Обозначим далее расстояние между m_1 и m_2 через r ; тогда из законов движения и закона тяготения следует, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют координаты тел m_1 и m_2 , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \frac{(\xi_1 - \xi_2)}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} &= -k^2 m_2 m_1 \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{r^3}, \\ m_1 \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \frac{(\eta_1 - \eta_2)}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} &= -k^2 m_2 m_1 \frac{(\eta_2 - \eta_1)}{r^3}, \\ m_1 \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} &= -k^2 m_2 m_1 \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Чтобы решить эти шесть совместных уравнений второго порядка, надо найти двенадцать первых интегралов. При интегрировании войдет двенадцать произвольных постоянных, которые могут быть определены в каждом данном случае по трем начальным координатам и по трем составляющим начальной скорости каждого из тел.

84. Движение центра массы. Складывая первое и четвертое, второе и пятое, третье и шестое уравнения системы (1), находим:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} &= 0, \\ m_1 \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} &= 0, \\ m_1 \frac{d^2 \zeta_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \zeta_2}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения немедленно интегрируются и дают:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d\tilde{z}_1}{dt} + m_2 \frac{d\tilde{z}_2}{dt} &= \alpha_1, \\ m_1 \frac{d\tilde{\eta}_1}{dt} + m_2 \frac{d\tilde{\eta}_2}{dt} &= \beta_1, \\ m_1 \frac{d\tilde{\zeta}_1}{dt} + m_2 \frac{d\tilde{\zeta}_2}{dt} &= \gamma_1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Интегрируя снова, мы получим:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \tilde{z}_1 + m_2 \tilde{z}_2 &= \alpha_1 t + \alpha_2, \\ m_1 \tilde{\eta}_1 + m_2 \tilde{\eta}_2 &= \beta_1 t + \beta_2, \\ m_1 \tilde{\zeta}_1 + m_2 \tilde{\zeta}_2 &= \gamma_1 t + \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Равенства (2) и (3) дают шесть из двенадцати первых интегралов, причем произвольные постоянные интегрирования суть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$.

Пусть \tilde{x}, \tilde{y} и \tilde{z} — координаты центра массы системы; тогда из § 19 и формул (3) мы находим:

$$\left. \begin{aligned} M \tilde{x} &= m_1 \tilde{x}_1 + m_2 \tilde{x}_2 = \alpha_1 t + \alpha_2, \\ M \tilde{y} &= m_1 \tilde{y}_1 + m_2 \tilde{y}_2 = \beta_1 t + \beta_2, \\ M \tilde{z} &= m_1 \tilde{z}_1 + m_2 \tilde{z}_2 = \gamma_1 t + \gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из этих уравнений видно, что координаты центра массы изменяются прямо пропорционально времени, и поэтому центр массы движется равномерно и прямолинейно. Дифференцируя формулы (4), возводя полученные производные в квадрат и складывая, находим:

$$M^2 \left\{ \left(\frac{d\tilde{x}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{y}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{z}}{dt} \right)^2 \right\} = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2,$$

откуда

$$\bar{V} = \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}}{M},$$

где \bar{V} представляет скорость, с которой движется центр массы. Поэтому скорость \bar{V} постоянна. Исключая t из (4), находим уравнения:

$$\frac{M\tilde{x} - \alpha_2}{\alpha_1} = \frac{M\tilde{y} - \beta_2}{\beta_1} = \frac{M\tilde{z} - \gamma_2}{\gamma_1}.$$

Координаты центра массы удовлетворяют этим соотношениям, являющимся симметричными уравнениями прямой линии в пространстве; поэтому центр массы движется по прямой линии с постоянной скоростью.

85. **Уравнения относительного движения.** Возьмем новую систему осей, параллельных старым, но с началом в центре массы двух тел. Пусть координаты m_1 и m_2 относительно этой новой системы будут соответственно x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 . Они связаны со старыми координатами уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 - \bar{\xi}, & x_2 &= \xi_2 - \bar{\xi}, \\ y_1 &= \eta_1 - \bar{\eta}, & y_2 &= \eta_2 - \bar{\eta}, \\ z_1 &= \zeta_1 - \bar{\zeta}, & z_2 &= \zeta_2 - \bar{\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Определяя из этих соотношений ξ_1, η_1, ζ_1 и ξ_2, η_2, ζ_2 и подставляя их в уравнения (1), мы получим уравнения движения в новых координатах в виде:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \frac{(x_1 - x_2)}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k^2 m_2 m_1 \frac{(x_2 - x_1)}{r^3}, \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \frac{(y_1 - y_2)}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -k^2 m_2 m_1 \frac{(y_2 - y_1)}{r^3}, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -k^2 m_1 m_2 \frac{(z_1 - z_2)}{r^3}, & m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= -k^2 m_2 m_1 \frac{(z_2 - z_1)}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

которые имеют ту же форму, как уравнения абсолютного движения.

Координаты центра массы даются формулами (4); поэтому, если x_1, y_1, \dots, z_2 определены и известны постоянные $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ и γ_2 , то можно найти абсолютные положения тел m_1 и m_2 в пространстве. Но так как нет способа определения этих постоянных, то можно решить лишь задачу об относительном движении, выражаемом уравнениями (6).

Вследствие того, что новое начало находится в центре массы, новые координаты связаны уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= 0, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 &= 0, \\ m_1 z_1 + m_2 z_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Поэтому, когда известны координаты одного тела по отношению к центру массы обоих, то координаты второго тела можно получить из уравнений (7).

Уравнения (7) могут быть использованы для исключения x_2, y_2 и z_2 из первых трех уравнений (6) и x_1, y_1 и z_1 из последних трех. Результаты исключения таковы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k^2 M \frac{x_1}{r^3}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= -k^2 M \frac{y_1}{r^3}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= -k^2 M \frac{z_1}{r^3}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k^2 M \frac{x_2}{r^3}, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= -k^2 M \frac{y_2}{r^3}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= -k^2 M \frac{z_2}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В первых трех уравнениях r , которое входит в правые части, должно быть выражено через x_1, y_1 и z_1 , а во вторых трех — через x_2, y_2 и z_2 . Из уравнений (7) следует, что

$$\frac{M}{m_2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \frac{M}{m_2} r_1 = \frac{M}{m_1} r_2 = r.$$

Теперь три первых уравнения (8) не зависят от x_2, y_2, z_2 , а три последние не зависят от x_1, y_1, z_1 . Но обычно на практике требуется определить движение одного тела по отношению к другому. Пусть x, y и z обозначают координаты m_2 по отношению к m_1 , тогда:

$$x = x_2 - x_1, \quad y = y_2 - y_1, \quad z = z_2 - z_1.$$

Чтобы получить уравнения относительного движения тела m_2 , вычтем первое, второе и третье уравнения (8) из четвертого, пятого и шестого.

Так как $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 M \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 M \frac{y}{r^3}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -k^2 M \frac{z}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Система (9) шестого порядка, и мы получили ее из первоначальной системы двенадцатого порядка при помощи шести первых интегралов (2) и (3). При интегрировании системы (9) войдут еще шесть новых постоянных, которые определятся начальными значениями координат и составляющих скорости тела m_2 относительно m_1 .

86. Интегралы площадей. Умножим первое уравнение (9) на $-y$, а второе на $+x$ и сложим; имеем:

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Два последних уравнения получены аналогичным образом. Интегрируя эти уравнения, найдем:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= a_1, \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= a_2, \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= a_3. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из § 16 следует, что a_1, a_2, a_3 суть проекции удвоенной секториальной скорости тела m_1 на плоскости xu, yz и zx . Умножая уравнения (10) соответственно на z, x и y и складывая, находим:

$$a_1 z + a_2 x + a_3 y = 0. \quad (11)$$

Это есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат, и способ его получения показывает, что координаты m_1 всегда удовлетворяют этому уравнению, поэтому движение одного тела по отношению к другому происходит в плоскости, проходящей через центр другого тела.

Постоянные a_1, a_2 и a_3 определяют положение плоскости орбиты по отношению к осям координат. В полярных координатах уравнение (11) принимает вид:

$$a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi \cos \theta + a_3 \cos \varphi \sin \theta = 0. \quad (12)$$

Пусть плоскость xu и плоскость орбиты пересекаются по линии L (рис. 25). Предположим, что полупрямая OL проходит через точку, в которой тело m_1 переходит с отрицательной стороны плоскости xu на положитель-

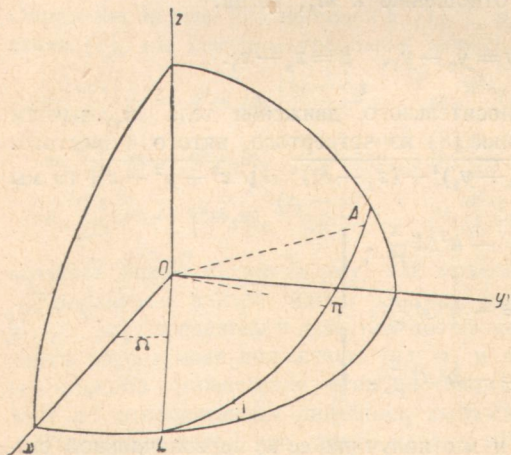


Рис. 25.

ную. Пусть φ обозначает угол между положительным концом оси x и линией OL , считаемый в положительном направлении от Ox . Этот угол может иметь любое значение от 0° до 360° . Пусть i обозначает наклон между двумя плоскостями, считаемый в направлении положительного вращения вокруг OL . Угол i может иметь любое значение от 0° до 180° . Он меньше или больше 90° в зависимости от того, будет ли a_1 положительно или отрицательно. Тогда, если $\varphi = 0$, то значение для θ есть φ или $\varphi + \pi$. Когда $\theta = \varphi + \frac{1}{2}\pi$, то значение для φ равно i или $\pi - i$ в зависимости от того, будет ли i меньше или больше, чем 90° . В этих случаях уравнение (12) принимает соответственно вид:

$$\left. \begin{aligned} a_2 \cos \varphi + a_3 \sin \varphi &= 0, \\ a_1 \sin i \mp a_2 \cos i \sin \varphi &= a_3 \cos i \cos \varphi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где у второго уравнения надо брать верхние знаки, если i меньше 90° , и нижние, если оно больше 90° .

Так как проекции секториальной скорости на три основные плоскости суть величины постоянные (а именно $\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_2$ и $\frac{1}{2}a_3$), то сектори-

альная скорость в плоскости орбиты также постоянна. Обозначим эту постоянную через $\frac{1}{2} c_1$; тогда:

$$c_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad (14)$$

где перед корнем взят положительный знак. Решая (13) и (14) относительно a_1, a_2 и a_3 , находим, что

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= +c_1 \cos i, \\ a_2 &= \pm c_1 \sin i \sin \varnothing, \\ a_3 &= \mp c_1 \sin i \cos \varnothing, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где в последних двух уравнениях надо брать верхние или нижние знаки в зависимости от того, будет ли i больше или меньше, чем 90° , т. е. в зависимости от того, будет ли a_1 положительно или отрицательно. При этом условии уравнения (15) однозначно определяют i и \varnothing , которые в свою очередь однозначно определяют положение плоскости орбиты.

87. Плоская задача. Так как орбита лежит в некоторой плоскости, определяемой начальными условиями задачи, то система координат может быть выбрана таким образом, чтобы оси x и y лежали в этой плоскости. Обозначая координаты, как и прежде, через x и y , получаем следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2 M \frac{x}{r^3}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2 M \frac{y}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Теперь при помощи интегралов (10) задача понижена до четвертого порядка вместо шестого, как это имело место в уравнениях (9). Так как положение плоскости определяется двумя элементами \varnothing и i или отношениями a_1, a_2 и a_3 в уравнении (11), то это понижение затрагивает лишь две произвольные постоянные. Система (16) может быть решена, если выводить дифференциальное уравнение орбиты, как в § 54 и интегрировать — как в § 62, причем последний интеграл выводится из интеграла площадей, но предпочтительнее получить результаты непосредственно тем методом, которым обычно пользуются в небесной механике.

Уравнения (16) дают:

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

откуда интегрированием получаем:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_1,$$

что в полярных координатах принимает вид:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c_1. \quad (17)$$

Пусть A представляет площадь, описанную радиусом вектором r ; тогда

$$2 \frac{dA}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt} = c_1,$$

откуда

$$2A = c_1 t + c_2, \quad (18)$$

из чего следует, что площади, описанные радиусом-вектором, пропорциональны времени, в течение которого они описаны.

Помножим теперь уравнения (16) соответственно на $2 \frac{dx}{dt}$ и $2 \frac{dy}{dt}$ и сложим.

Мы имеем:

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} = -2 \frac{k^2 M}{r^3} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = -\frac{2k^2 M}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{2k^2 M}{r} + c_3. \quad (19)$$

Это уравнение, содержащее лишь квадрат скорости и расстояния, есть не что иное, как интеграл *живых сил* (§ 52). Преобразовывая левую часть (19) к полярным координатам, мы напишем это уравнение в виде:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2k^2 M}{r} + c_3.$$

Но

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

и предыдущее уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left\{ \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right\} = \frac{2k^2 M}{r} + c_3.$$

Исключая $\frac{d\theta}{dt}$ при помощи (17), мы получим из последнего уравнения:

$$d\theta = \frac{c_1 dr}{r \sqrt{-c_1^2 + 2k^2 M r + c_3 r^2}},$$

то может быть написано в виде:

$$d\theta = \frac{-d \left(\frac{c_1}{r} \right)}{\sqrt{c_3 + \frac{k^4 M^2}{c_1^2} - \left(\frac{k^2 M}{c_1} - \frac{c_1}{r} \right)^2}}. \quad (20)$$

Определим B^2 и u при помощи формул:

$$c_3 + \frac{k^4 M^2}{c_1^2} = B^2,$$

$$\frac{k^2 M}{c_1} - \frac{c_1}{r} = -u,$$

причем для действительной орбиты B^2 должно быть положительным; тогда (20) принимает вид:

$$d\theta = \frac{-du}{\sqrt{B^2 - u^2}}.$$

Интегрируя это уравнение, мы получим:

$$\theta = \arccos \frac{u}{B} + c_4.$$

Возвращаясь от u , B и c_4 к r и прежним постоянным, находим:

$$r = \frac{c_1}{\frac{k^2 M}{c_1} - \sqrt{c_3 + \frac{k^4 M^2}{c_1^2} \cos(\theta - c_4)}}, \quad (21)$$

что является полярным уравнением конического сечения относительно одного из его фокусов.

88. Выражение элементов орбиты через постоянные интегрирования. Узел и наклонность выражены через постоянные интегрирования уравнениями (15).

Обычное уравнение конического сечения относительно правого фокуса таково:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)},$$

где p — параметр, e — эксцентриситет и ω — угол между полярной осью и большой осью конического сечения.

Сравнивая это уравнение с (21), находим:

$$p = \frac{c_1^2}{k^2 M}, \quad e^2 = 1 + \frac{c^2 c_3}{k^4 M^2},$$

$$\omega = c_4 - \pi, \quad c_1 = k \sqrt{Mp}, \quad c_3 = -\frac{k^2(1-e^2)}{p} M. \quad (22)$$

Если $e^2 < 1$, то орбита — эллипс и $p = a(1 - e^2)$, где a является большой полуосью; если $e = 1$, то орбита — парабола и $p = 2q$, где q — расстояние фокуса от вершины параболы, и если $e^2 > 1$, то орбита — гиперболы и $p = a(e^2 - 1)$.

Пусть A_0 обозначает площадь, описанную в то время, когда тело проходит через перигелий¹⁾; в таком случае время прохождения через перигелий находим из уравнения (18):

$$T = \frac{2A_0 - c_2}{c_1}. \quad (23)$$

Это завершает определение элементов по постоянным интегрирования. Последние определяются через начальные координаты и составляющие начальной скорости при помощи формул (10), (17), (18), (19) и (21).

89. Свойства движения. Предположим, что орбита — эллипс. Тогда если значения постоянных интегрирования, данные в (22), подставить в (17) и (19), то эти уравнения принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= k \sqrt{Ma(1-e^2)}, \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= V^2 = k^2 M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \end{aligned} \right\}$$

где V есть скорость в орбите на расстоянии r от начала.

Если орбита — окружность, то $r = a$ и

$$V_c^2 = \frac{k^2 M}{r}.$$

Если орбита — парабола, то $a = \infty$ и

$$V_p^2 = \frac{2k^2 M}{r}.$$

Поэтому на данном расстоянии от начала отношение скоростей в параболической и круговой орбите равно:

$$V_p : V_c = \sqrt{2} : 1. \quad (25)$$

Таким образом кометы, двигаясь вокруг Солнца, пересекают орбиты планет со скоростями примерно в 1,414 раза больше тех, с которыми движутся соответствующие планеты.

Скорость, которую приобретает тело, падая с расстояния s до расстояния r по направлению к центру силы $k^2 M$, дается уравнением (см. § 35):

$$V^2 = 2k^2 M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right).$$

Если s определено условием, что V равно скорости в орбите, то после приравнивания правой части этого выражения к правой части второго уравнения (24) находим, что $s = 2a$ и

$$V^2 = 2k^2 M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right). \quad (26)$$

¹⁾ Если m_2 обозначает какое-либо тело, а m_1 — Солнце, то ближайшую апсиду мы будем называть точкой перигелия. Вообще эта точка называется перицентром.

Поэтому скорость тела, движущегося по эллипсу, в каждой точке равна той, которую оно приобрело бы, падая от периферии окружности с центром в начале и радиусом, равным большой оси конического сечения, до эллипса.

Скорость в точке P в эллипсе равна той скорости, которую оно приобрело бы, падая от P' до P (рис. 26).

Уравнение (26) дает интересное заключение о возможном движении m_2 лишь на основании одного этого уравнения, без использования подробных свойств движения по коническому сечению. Так как левая часть по необходимости положительна (или нуль), то r может принять лишь такие значения, при которых правая часть будет положительна (или нуль). Следовательно, $r \leq 2a$ во всем движении, каково бы оно ни было. Этот результат очевиден в этом простом случае, где все обстоятельства движения вполне известны, но аналогичные рассуждения в «Задаче трех тел» (глава VII) дают некоторые ценные указания, которые не получаются иным путем.

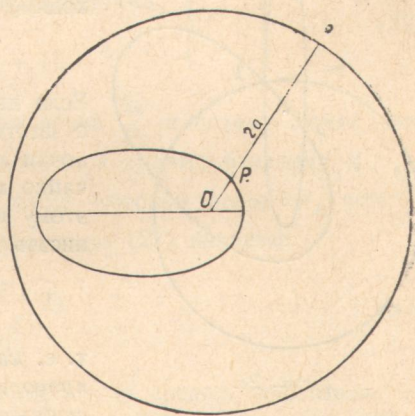


Рис. 26.

Рассмотрим второе уравнение (24) и предположим, что тело выбрасывается из точки, расположенной на расстоянии r от тела m_1 . Тогда непосредственно следует, что большая ось конического сечения зависит от первоначального расстояния от начала и от начальной скорости, но не от направления, по которому выброшено тело. Если $V^2 < \frac{2k^2M}{r} = U^2$, где U — скорость, которую приобретает тело m_2 , падая из бесконечности, то a положительно и орбита есть эллипс; если $V^2 = U^2$, то a бесконечно и орбита — парабола; если $V^2 > U^2$, то a отрицательно и орбита — гипербола.

Пусть t_1 и t_2 — два момента времени, а A_1 и A_2 — соответствующие значения площади, описанной радиусом-вектором. Тогда уравнение (18) дает:

$$2(A_2 - A_1) = (t_2 - t_1)c_1.$$

Пусть $t_2 - t_1 = P$ — период обращения, тогда $2(A_2 - A_1)$ равняется двойной площади эллипса $2\pi ab$. Подставляя еще вместо c_1 его значение (22), получим:

$$P = \frac{2\pi a^2}{k\sqrt{M}}. \quad (27)$$

Из этого уравнения следует, что период зависит только от большой оси, или на основании (26) период зависит лишь от начального расстояния от начала и от начальной скорости, а не от направления движения.

Большая полуось называется *средним расстоянием*¹⁾, хотя надо заметить, что она *не* является *средним* из всех расстояний, когда за независимую переменную берется время.

Три орбиты, изображенные на рис. 27, имеют одну и ту же длину большой оси и, следовательно, описываются в равные времена. Начальная скорость также одинакова во всех трех случаях; различия в формах и положениях происходят от различных направлений начальной скорости.

Рассмотрим две системы m_1, m_2 и m_1, m_3 и возьмем отношение их периодов, тогда найдем, что

$$\frac{P_{1,2}^2}{P_{3,1}^2} = \frac{a_{1,2}^3}{a_{3,1}^3} \cdot \frac{M_{3,1}}{M_{1,2}}.$$

Если две системы состоят из Солнца и соответственно двух планет, тогда $M_{1,2}$ и $M_{3,1}$ почти равны, так как массы планет чрезвычайно малы по сравнению с Солнцем. Поэтому приближенно это уравнение можно написать в следующем виде:

$$\frac{P_{1,2}^2}{P_{3,1}^2} = \frac{a_{1,2}^3}{a_{3,1}^3},$$

т. е. *квадраты времен обращения планет пропорциональны кубам их средних расстояний*. Это третий закон Кеплера.

Надо заметить, что когда брали отношение периодов, предполагалось, что k имеет одинаковое значение для разных планет, т. е. что ускорение, сообщаемое Солнцем обоим планетам, одно и то же на единице расстояния. С другой стороны, из последнего уравнения, установленного Кеплером из непосредственных наблюдений, следует, что k имеет одинаковое значение для разных планет. Это означает, что сила притяжения между Солнцем и несколькими планетами пропорциональна соответствующим массам, измеряемым их инерцией. Этот результат непосредственно не очевиден, потому что можно предполагать, что сила тяготения зависит от химического состава или физического состояния тела, подобно тому как химическое сродство, магнетизм и все другие известные силы зависят от одной или обеих этих причин. На самом деле замечательно, что сила тяготения пропорциональна инерции и не зависит ни от чего другого.

90. Выбор единиц и определение постоянной k . Если выбраны единицы времени, массы и расстояния, то можно определить k из уравнения (27). Очевидно, что все они могут быть взяты произвольно, но удобнее употреблять такие единицы, которые чаще всего встречаются в астрономических проблемах. Возьмем за единицу времени средние солнечные сутки, за единицу массы — массу Солнца и за единицу расстояния — большую полуось земной орбиты. Значение k_1 вычисленное с помощью этих единиц, называется гауссовой постоянной, так как оно было таким путем определено Гауссом в «Theoria Motus», § 1.

¹⁾ Среднее расстояние равно среднему арифметическому из перигелийного и афелийного расстояний. *Прим. ред.*

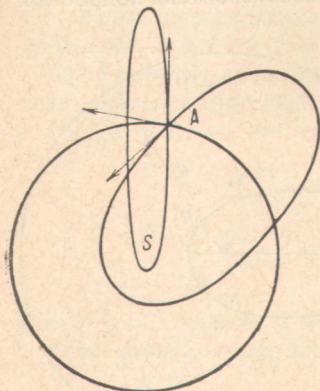


Рис. 27.

Пусть m_1 обозначает массу Солнца и m_2 общую массу Земли и Луны, тогда из наблюдения найдено, что в этих единицах:

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= \frac{m_1}{354\,710} = \frac{1}{354\,710}, \\ P &= 365,2563835. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Подставляя эти числа в (27), находим:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{P\sqrt{1+m_1}} = 0,01720209895, \\ \lg k &= 8,2355814414 - 10. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Так как m_2 очень мало, то k почти равно $\frac{2\pi}{P}$ и потому почти равняется среднему суточному движению Земли в орбите, близкому к $\frac{1}{60} \cdot \frac{2\pi}{P}$. Среднее суточное движение планеты, масса которой равна m_i , есть $\frac{2\pi}{P_i}$ и обычно обозначается через n_i . Из уравнения (27) находим:

$$n_i = \frac{k\sqrt{1+m_i}}{a_i^{\frac{3}{2}}}. \quad (30)$$

Период обращения Земли вокруг Солнца и ее среднее расстояние не были известны с совершенной точностью во время Гаусса, они неизвестны и теперь, и ясно, что значение k меняется с разными определениями этих значений. Если бы астрономы строго придерживались определений вышеприведенных единиц, то было бы необходимо всякий раз, как делается поправка в значениях постоянных, перевычислять те таблицы, которые зависят от k . Этих неудобств избежали, сохраняя числовое значение k таким, как его определил Гаусс, и выбирая единицу расстояния так, чтобы уравнение (27) было всегда выполнено¹⁾.

Если среднее расстояние между двумя телами взято за единицу расстояния, а сумма их масс — за единицу массы и если единица времени взята так, чтобы k равнялось единице, тогда единицы образуют так называемую *каноническую систему*. Так как в этой системе $M=1$ и $k^2=1$ и из уравнения (30) $n=1$, то уравнения несколько упрощаются и более удобны в чисто теоретических исследованиях.

ЗАДАЧИ

1. Найдите дифференциальные уравнения для задачи относительного движения двух тел в полярных координатах.

$$\text{Отв. } \frac{d^2 r}{dt^2} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{k^2 M}{r^2}, \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0.$$

2. Проинтегрируйте уравнения задачи 1 и объясните геометрическое значение постоянных интегрирования.

¹⁾ Поэтолу согласно Ньюкомбу полюсь земной орбиты принимается равной 1,00000023. Прим. ред.

3. Земля движется по своей орбите, которую можно принять за окружность со скоростью 30 км/сек. Предположим, что метеоры приближаются к Солнцу по параболам; между какими пределами будет заключаться их относительная скорость, когда они влетают в земную атмосферу?

Отв. 12,4 и 72,4 км/сек. Метеоры 14 ноября встречают Землю и имеют относительную скорость, близкую к верхнему пределу; метеоры 27 ноября догоняют Землю и имеют относительную скорость, близкую к нижнему пределу.

4. Найдите среднее значение по времени радиуса-вектора эллипса в функции a и e .

Отв. Среднее $r = \frac{\int r dt}{\int dt} = a \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$.

5. Найдите среднее значение радиуса-вектора эллипса, беря за независимую переменную угол θ .

Отв. Среднее $r = \frac{\int r d\theta}{\int d\theta} = \frac{2\pi a \sqrt{1-e^2}}{2\pi} = b$.

6. Докажите, что количество тепла, полученного от Солнца планетами на единицу площади, в среднем обратно пропорционально произведению большой и малой осей их орбит. Как зависит общее количество тепла, полученного в течение обращения планеты, от эксцентриситета орбиты при заданном значении большой оси?

7. Пусть материальные точки выбрасываются из данной точки с данной скоростью, но в различных направлениях. Найдите геометрическое место: а) точек перигелиев, б) афелиев, в) центров эллипсов, г) концов малых осей.

8. Найдите геометрическое место тех же точек, как и в задаче 7, и выразите координаты этих точек через начальные значения координат и составляющих скорости, если материальные точки выбрасываются из данной точки в данном направлении, но с разными скоростями.

9. Предположим, что комета, двигающаяся по параболической орбите с перигелийным расстоянием q , сталкивается и соединяется с равной массой, которая до столкновения находилась в покое. Найдите эксцентриситет и перигелийное расстояние орбиты соединенной массы.

10. Предположим, что масса Юпитера, выраженная в долях массы Солнца, равна $1/1047$ и что его среднее расстояние от Солнца равно 777 800 000 км (среднее расстояние Земли от Солнца равно 149 500 000 км). Найдите период обращения Юпитера вокруг Солнца и размер орбиты, которую описывает Солнце по отношению к общему центру тяжести.

91. Определение положения тела, двигающегося по параболической орбите. Мы нашли кривые, по которым движутся тела, теперь остается показать, как найти их положения в орбитах в любую данную эпоху.

Рассмотрим сначала случай параболической орбиты как наиболее простой и для определенности предположим, что берется движение кометы по отношению к Солнцу. Так как массами комет можно пренебречь, то $M=1$ и уравнение (17) принимает вид:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = k \sqrt{p} = k \sqrt{2q}. \quad (31)$$

Если полярный угол в орбите отсчитывается от вершины параболы, то он обозначается через v и называется *истинной аномалией*.

Тогда

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{dt}, \quad r = \frac{p}{1 + \cos v} = q \sec^2 \frac{v}{2}.$$

Отсюда уравнение (31) дает:

$$\frac{\sqrt{2k}}{q^{\frac{3}{2}}} dt = \sec^4 \frac{v}{2} dv = \left(\sec^2 \frac{v}{2} + \sec^2 \frac{v}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} \right) dv.$$

Интегрируя это соотношение, получим:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{k(t-T)}{\sqrt{2} q^{\frac{3}{2}}}, \quad (32)$$

где T — время прохождения через перигелий. Это уравнение третьей степени относительно $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$. Переносим правую часть налево, видим, что для $t-T > 0$ левая часть отрицательна, если $v=0$, и что она непрерывно увеличивается вместе с v до бесконечности при $v=180^\circ$. Поэтому существует лишь одно действительное решение (32) для $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$, и оно положительно. Подобным же образом мы видим, что для $t-T < 0$ имеется одно действительное отрицательное решение.

Уравнение (32) может быть написано в виде:

$$25 \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} + 75 \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \frac{75k(t-T)}{\sqrt{2} q^{\frac{3}{2}}} = K \frac{(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}}.$$

Существуют таблицы, дающие значение правой части этого уравнения для различных значений v . Если $t-T$ дано, то v находится из этих таблиц интерполированием; обратно, если дано v , из этих таблиц может быть найдено $t-T$. Эти таблицы носят название таблиц Баркера и даны в теоретической астрономии Уотсона (Watson) и в «ahnbestimmung» Оппольцера (Oppolzer)¹⁾.

Решение кубического уравнения (32) можно найти и без таблиц непосредственным путем. Для этого положим:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = 2 \operatorname{ctg} 2w = \operatorname{ctg} w - \operatorname{tg} w,$$

откуда

$$\operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = -3 \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w.$$

¹⁾ Эти таблицы имеются также в «Теоретической астрономии» А. Я. Орлова (Одесса 1920) и у Bauschinger, Tafeln zur theoretischen Astronomie, Leipzig 1901. Прим. ред.

Эта подстановка приводит уравнение (32) к виду:

$$\operatorname{ctg}^3 w - \operatorname{tg}^3 w = \frac{3k(t-T)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}}.$$

Пусть

$$\operatorname{ctg} w = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{s}{2}},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} s = \frac{3k(t-T)}{2^{\frac{3}{2}}q^{\frac{3}{2}}},$$

и для вычисления $\operatorname{tg} \frac{v}{2}$ мы будем иметь следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} s &= \frac{3k(t-T)}{(2q)^{\frac{3}{2}}}, \\ \operatorname{ctg} w &= \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \frac{s}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= 2 \operatorname{ctg} 2w. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

После того как v найдено, r определяется из полярного уравнения параболы:

$$r = \frac{P}{1 + \cos v} = q \sec^2 \frac{v}{2}.$$

92. Уравнение, связывающее два радиуса и хорду. Уравнение Эйлера. Рассмотрим положения кометы в моменты t_1 и t_2 . Обозначим соответствующие радиусы через r_1 и r_2 , а хорду, соединяющую их концы, — через s . Пусть соответствующие истинные аномалии равны v_1 и v_2 . Тогда уравнение (32) дает:

$$\frac{k(t_1-T)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v_1}{2},$$

$$\frac{k(t_2-T)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v_2}{2}.$$

Вычитая из второго уравнения первое, имеем:

$$\frac{k(t_2-t_1)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} = \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} + \frac{1}{3} (\operatorname{tg}^3 \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg}^3 \frac{v_1}{2})$$

или

$$\frac{3k(t_2-t_1)}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} = (\operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}) [3(1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_2}{2}) + (\operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2})^2] \quad (34)$$

Хорда s определяется формулой:

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1) = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 \cos^2\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right),$$

откуда находим:

$$2\sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right) = \pm \sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}. \quad (35)$$

Если $v_2 - v_1 < \pi$, то перед радикалом нужно взять знак $+$; если $v_2 - v_1 > \pi$, то знак $-$. Из полярного уравнения параболы следует, что

$$r_1 = q \sec^2 \frac{v_1}{2}, \quad r_2 = q \sec^2 \frac{v_2}{2}.$$

Подставляя эти выражения r_1 и r_2 в (35), получим:

$$1 + \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} = \pm \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)}}{2q}. \quad (36)$$

Из выражений для r_1 и r_2 следует также, что

$$r_1 + r_2 = q \left(2 + \operatorname{tg}^2 \frac{v_1}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{v_2}{2} \right).$$

Последние два уравнения дают:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2q} (r_1 + r_2 + s) + (r_1 + r_2 - s) &= 2 \sqrt{(r_1 + r_2 + s)(r_1 + r_2 - s)} \\ &= \left(\operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\sqrt{r_1 + r_2 + s} \mp \sqrt{r_1 + r_2 - s}}{\sqrt{2q}} = \operatorname{tg} \frac{v_2}{2} - \operatorname{tg} \frac{v_1}{2}. \quad (37)$$

Ввиду формул (36) и (37) уравнение (34) принимает вид:

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r_1 + r_2 - s)^{\frac{3}{2}}. \quad (38)$$

Это уравнение замечательно тем, что оно не содержит q . Оно было открыто Эйлером и носит его имя. В некоторых методах определения элементов параболической орбиты из геоцентрических наблюдений оно имеет первостепенное значение.

Ламберт получил соответствующее уравнение для эллиптических орбит. Правая часть этого уравнения разлагается в ряд по степени $\frac{1}{a}$, причем первый член совпадает с правой частью уравнения Эйлера.

93. Определение положения тела, движущегося по эллиптической орбите. Интеграл площадей и интеграл живых сил соответственно дают:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = k \sqrt{(1+m)a(1-e^2)},$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = k^2(1+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Исключая $\frac{dv}{dt}$ из второго из этих уравнений при помощи первого, получаем:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)a(1-e^2)}{r^2} = k^2(1+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \quad (39)$$

Пусть n есть среднее угловое движение тела по его орбите, тогда

$$n = \frac{2\pi}{P} = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Вводя n в (39) и разделяя переменные, находим:

$$n dt = \frac{r}{a} \frac{dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}}. \quad (40)$$

Для интегрирования уравнения (40) введем вспомогательный угол E , определяемый уравнением:

$$a - r = ae \cos E, \text{ откуда } r = a(1 - e \cos E). \quad (41)$$

Этот угол E называется эксцентрической аномалией. Тогда (40) принимает вид:

$$n dt = (1 - e \cos E) dE,$$

интегрируя которое получим:

$$n(t - T) = E - e \sin E.$$

Величина $n(t - T)$ есть угол, который описывался бы радиусом-вектором, если бы он двигался равномерно со средней скоростью. Обычно этот угол обозначается M и называется *средней аномалией*. Поэтому

$$n(t - T) = M = E - e \sin E. \quad (42)$$

Если $(t - T)$ дано, то M может быть найдено сразу, после чего уравнение (42) должно быть решено относительно E . Тогда r и v могут быть найдены из уравнения (41) и из полярного уравнения эллипса. Уравнение (42) называется *уравнением Кеплера*. Оно трансцендентно относительно E , и его решение не может быть проведено в элементарных функциях. Так как очень желательно иметь наиболее простой и короткий метод решения, то астрономы посвятили этому уравнению много времени, вследствие чего было найдено несколько сот методов его решения

94. Геометрический вывод уравнения Кеплера. Построим эллипс, по которому движется тело, а также вспомогательную окружность AQB (рис. 28). Угол AFP равняется истинной аномалии v , угол ACQ назовем эксцентрической аномалией E и покажем, что связь между M и E дается уравнением Кеплера.

Из закона площадей и свойств вспомогательной окружности следует что

$$\frac{M}{2\pi} = \frac{\text{площадь } AFP}{\text{площадь эллипса}} = \frac{\text{площадь } AFQ}{\text{площадь круга}}.$$

Площадь AFQ = площади ACQ — площадь

$$FCQ = \frac{a^2 E}{2} - \frac{a}{2} ae \sin E. \text{ Поэтому:}$$

$$\frac{M}{2\pi} = \frac{a^2 (E - e \sin E)}{2\pi a^2},$$

Откуда

$$M = E - e \sin E,$$

$$FP = r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v} = \sqrt{PD^2 + FD^2} = a(1 - e \cos E),$$

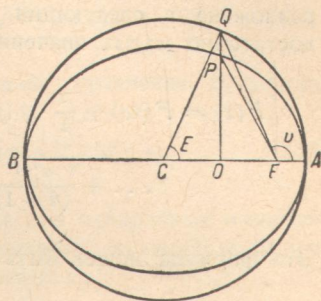


Рис. 28.

что есть определение эксцентрической аномалии, данной в (41).

95. Решение уравнения Кеплера. Покажем сперва, что для каждого значения M и для каждого e в пределах $0 \leq e < 1$ уравнение Кеплера всегда имеет одно и только действительное решение. Напишем уравнение в виде:

$$\varphi(E) \equiv E - e \sin E - M = 0.$$

Предположим, что M имеет некоторое данное значение, заключающееся между $n\pi$ и $(n+1)\pi$, где n — любое целое число; тогда существует только одно действительное значение E , удовлетворяющее этому уравнению и также заключающееся между $n\pi$ и $(n+1)\pi$. Действительно, так как при $E = n\pi$ функция $\varphi(E)$ отрицательная:

$$\varphi(n\pi) = n\pi - M < 0,$$

а при $E = (n+1)\pi$ $\varphi(E)$ положительна:

$$\varphi[(n+1)\pi] = (n+1)\pi - M > 0,$$

то в промежутке между $n\pi$ и $(n+1)\pi$ уравнение $\varphi(E) = 0$ может иметь только нечетное число действительных решений. Но производная

$$\varphi'(E) \equiv 1 - e \cos E$$

всегда положительна, поэтому $\varphi(E)$ постоянно возрастает вместе с E и лишь один раз принимает значение, равное нулю.

Удобный метод практического решения уравнения путем разложения в ряд был предложен Лагранжем. Предположим, что z определено как функция от w уравнением:

$$z = w + \alpha \varphi(z), \quad (43)$$

где α — параметр. Лагранж показал, что любая функция от z может быть разложена в следующий ряд по степеням α , который сходится для достаточно малых значений α^1 :

$$\begin{aligned} F(z) = F(w) + \frac{\alpha}{1} \cdot \varphi(w) F'(w) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{dw} [\{\varphi(w)\}^2 F'(w)] + \dots \\ \dots + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{dw^n} [\{\varphi(w)\}^{n+1} F'(w)] + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Эта формула может быть применена к решению уравнения Кеплера:

$$E = M + e \sin E,$$

которое имеет ту же форму, как и уравнение (43). Разложение E по степеням e может быть получено из (44), полагая $F(z) = E$, $\varphi(z) = \sin E$, $w = M$ и $\alpha = e$.

В результате находим:

$$E = M + \frac{e}{1} \sin M + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \sin 2M + \dots \quad (45)$$

Все члены правой части, кроме первого, выражены в радианах и должны быть приведены к градусам путем умножения каждого из них на число градусов в радиане. Высшие члены значительно сложнее, чем написанные, и их вычисление довольно утомительно. Но ввиду того, что орбиты планет и их спутников имеют очень малые эксцентриситеты, ряд (45) сходится быстро, и уже первые три члена его дают очень точное значение.

96. Дифференциальные поправки. Теперь рассмотрим метод, имеющий большое значение для многих астрономических задач. Предположим, что мы нашли приближенное значение E при помощи первых трех членов разложения (45).

Обозначим это приближенное значение через E_0 и постараемся найти более точное значение E .

Уравнение Кеплера дает:

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0.$$

Для определенного значения M , а именно M_0 , соответствующее значение E , т. е. E_0 , известно. Требуется найти значение E , соответствующее значению M , очень мало отличающемуся от M_0 .

¹ См. например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, ч. 2, стр. 86, ГГИ 1933. *Прим. ред.*

Так как M есть функция от E , то мы можем написать:

$$M = M_0 + \Delta M_0 = f(E_0 + \Delta E_0).$$

Разлагая правую часть этого равенства в ряд Тейлора, получаем:

$$M = M_0 + \Delta M_0 = f(E_0) + f'(E_0) \Delta E_0 + \dots$$

По определению $M_0 = f(E_0)$, поэтому последнее уравнение принимает вид:

$$M - M_0 = f'(E_0) \Delta E_0 + \dots = (1 - e \cos E_0) \Delta E_0 + \dots \quad (46)$$

Так как ΔE_0 очень мало, то можно пренебречь его квадратами и высшими степенями¹⁾, и тогда уравнение (46) дает поправку, которую надо при-
дать к E , чтобы получить более точное значение E_0 .

$$\Delta E_0 = \frac{M - M_0}{1 - e \cos E_0}. \quad (47)$$

С более точным значением

$$E, E_1 = E_0 + \Delta E_0$$

вычисляем соответствующее значение M , которое обозначим через M_1 , и аналогичным образом определяем вторую поправку к E :

$$\Delta E_1 = \frac{M - M_1}{1 - e \cos E_1}.$$

Этот процесс может быть повторен до тех пор, пока не будет найдено сколь угодно точное значение E^2). В планетных орбитах два применения формул почти всегда дают довольно точные результаты, и обычно достаточно одной поправки.

97. Графическое решение уравнения Кеплера. Когда эксцентриситет больше 0,2, то вышеприведенный метод решения уравнения Кеплера труден из-за того, что первое приближение очень неточно. Эти большие эксцентриситеты встречаются в орбитах двойных звезд и комет и иногда достигают величины 0,9. В случае орбит двойных звезд обычно достаточно иметь решение с точностью до десятой доли градуса.

В этой работе большое практическое значение имеет удобный графический метод.

¹⁾ Если бы не пренебрегать более высокими членами ΔE_0 , то ΔE_0 могло бы быть выражено в виде ряда по степеням $M - M_0$, из которых первый член был бы правой частью уравнения (47).

²⁾ Для доказательства сходимости подобного, но несколько более сложного процесса см. Appell, Mécanique, т. I, стр. 391.

Рассмотрим уравнение Кеплера:

$$E - e \sin E - M = 0,$$

где дано M и требуется найти E . Возьмем прямоугольную систему осей и построим синусоиду и прямую линию (рис. 29), уравнения которых таковы:

$$y = \sin E,$$

$$y = \frac{1}{e} (E - M).$$

Абсцисса точки их пересечения дает значение E , удовлетворяющее уравнению, так как, исключая y , получаем кеплерово уравнение. Первая

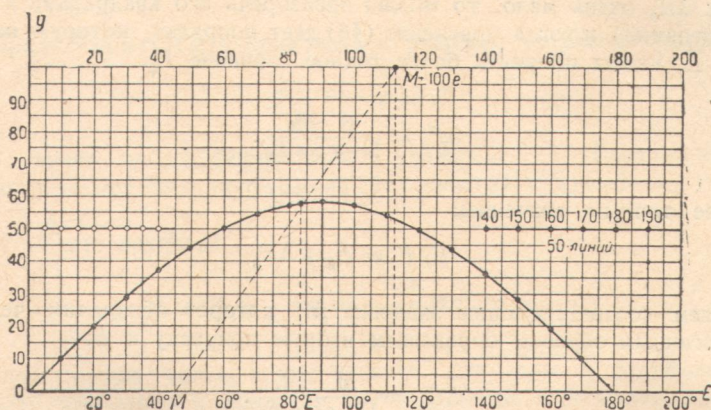


Рис. 29.

линия есть известная синусоида, которую можно построить раз навсегда; вторая линия — это прямая, образующая с осью E угол, тангенс которого равен $\frac{1}{e}$. Вместо проведения прямой линии можно положить линейку, образующую нужный наклон с осью. Чтобы облегчить определение положения, построим линию с отмеченными на ней градусами на высоте 100¹⁾, затем положим линейку так, чтобы она проходила через точку с данным M на оси, а наверху — через $M + 100e$, и она будет иметь нужный наклон.

Если M так близко к 180° , что край линейки уходит за пределы диаграммы, то верхняя часть ее может быть проложена через точку $M + 50e$ на линии 50. Когда M приближается к 180° , то средняя и эксцентрическая аномалии становятся почти равными, точно совпадая при $M = 180^\circ$.

¹⁾ Этот прием предложен С. А. Юнгом.

98. Перечисление формул. Теперь перечислим формулы для вычисления полярных координат, в данный момент времени, в том порядке, в котором они употребляются:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{k\sqrt{1+m}}{a^2}, \\ M &= n(t-T), \\ E_0 &= M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M, \\ M_0 &= E_0 - e \sin E_0, \\ \Delta E &= \frac{M - M_0}{1 - e \cos E_0}, \\ E_1 &= E_0 + \Delta E_0 = E, \\ r &= a(1 - e \cos E) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \cos v &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \\ \sin v &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \\ 1 + \cos v &= \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E}, \\ 1 - \cos v &= \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{1 - e \cos E}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Деля последнюю из формул (49) на предпоследнюю и извлекая квадратный корень, получаем следующую формулу, удобную для вычисления v :

$$\sqrt{\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}} = \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (50)$$

Если E найдено, то полярные координаты r и v получаются из формул (48) и (50).

99. Разложение E в ряд. При помощи выведенных формул мы можем вычислить полярные, а следовательно, и прямоугольные, координаты для любого момента времени. Но в некоторых случаях, как, например, в теории возмущений, необходимо иметь для полярных координат разложения в ряды по степеням эксцентриситета e . Эти ряды легко получить, если известно разложение E по степеням e .

В § 95 мы применили для разложения E метод Лагранжа, но нетрудно также получить то же самое разложение и непосредственно при помощи элементарных соображений. Действительно, рассмотрим опять уравнение Кеплера:

$$M = E - e \sin E. \quad (51)$$

Если $M = j\pi$, где $j = 0, 1, 2, \dots$, то при любом значении e это уравнение имеет единственное решение, также равное $j\pi$. Поэтому мы можем предполагать, что $M \neq j\pi$. Введем вместо E новую переменную u формулой:

$$E - M = u.$$

Тогда уравнение Кеплера принимает вид:

$$u = e \sin (M + u), \quad (52)$$

откуда можно определить u в функции M и e . Это значение u , удовлетворяющее уравнению (52), можно найти следующим образом. Напишем уравнение (52) в виде:

$$e = \frac{u}{\sin (M + u)}. \quad (53)$$

Так как по предположению $M \neq j\pi$, то правую часть этого равенства можно разложить в сходящийся ряд по степеням u , и мы получим:

$$e = e_1 u + e_2 u^2 + \dots,$$

где коэффициенты e_1, e_2, \dots зависят от M . Свободный член ряда равен нулю, так как из уравнения (53) видно, что, при $u = 0$, e также должно быть нулем. Обращая полученный ряд¹⁾, мы получим u также в виде сходящегося ряда по степеням e вида:

$$u = u_1 e + u_2 e^2 + u_3 e^3 + \dots, \quad (54)$$

коэффициенты которого u_1, u_2, u_3, \dots будут функциями от M .

Но разложение (54) проще получить, не прибегая к задаче об обращении рядов. Действительно, предполагая, что выражение (54) для u удовлетворяет уравнению (52), мы после подстановки (54) в (52) получим тождество относительно e :

$$\begin{aligned} u_1 e + u_2 e^2 + u_3 e^3 + \dots &\equiv e \sin M \cos u + e \cos M \sin u \equiv \\ &\equiv e \sin M \left[1 - \frac{(u_1 e + u_2 e^2 + \dots)^2}{2!} + \frac{(u_1 e + \dots)^4}{4!} - \dots \right] + \\ &+ e \cos M \left[(u_1 e + u_2 e^2 + \dots) - \frac{(u_1 e + \dots)^3}{3!} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Приравнявая теперь коэффициенты при одинаковых степенях e в левой и правой частях этого тождества, мы получим без труда:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \sin M, \\ u_2 &= u_1 \cos M = \frac{1}{2} \sin 2M, \\ u_3 &= -\frac{1}{2} u_1^2 \sin M + u_2 \cos M = \frac{3}{8} \sin 3M - \frac{1}{8} \sin M \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

¹⁾ Об обращении рядов см., например, Э. Г у р с а, Курс математического анализа, т. I, ч. 2, стр. 87, ГТТИ, 1933. Прим. ред.

Нетрудно найти некоторые общие свойства решения, которое определяется формулой (55).

Из уравнения (53) видно, что u не изменяется, когда M увеличивается на $2j\pi$ (j — любое целое число), следовательно, u есть периодическая функция от M с периодом 2π , и коэффициенты u_j ряда (55) также должны быть периодическими функциями с тем же периодом. Далее, изменяя M и u на $-M$ и $-u$, мы опять не изменим уравнения (53), откуда следует, что u есть нечетная функция от M , и, следовательно, коэффициенты u_j ряда (55) суть однородные линейные функции от синусов кратных дуг M . Наконец, прибавляя π к M и изменяя знак у e , мы опять не изменим уравнения (53), откуда следует, что u_j с нечетными индексами содержит только синусы нечетных дуг, а u_j с четными индексами — только синусы четных дуг.

Кроме того, можно показать, что наибольшее кратное угла, входящее в u_j , есть jM , и мы можем написать для коэффициентов u_j следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} u_{2k} &= a^{(2k)} \sin 2M + \dots + a_{2k}^{(2k)} \sin 2kM, \\ u_{2k+1} &= a_1^{(2k+1)} \sin M + \dots + a_{2k+1}^{(2k+1)} \sin (2k+1)M, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где все коэффициенты при синусах суть постоянные числа, не зависящие от e .

Легко получить контрольные формулы для проверки вычислений этих постоянных. Так как $E = M + u$, то мы имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial M} = 1 + \frac{\partial u}{\partial M} = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial M} e + \frac{\partial u_2}{\partial M} e^2 + \dots + \frac{\partial u_j}{\partial M} e^j + \dots$$

С другой стороны, из уравнения Кеплера имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial M} = \frac{1}{1 - e \cos E}.$$

Для $M=0$, E так же равно нулю, так что для этого значения M имеем:

$$\frac{\partial E}{\partial M} = \frac{1}{1-e} = 1 + e + e^2 + \dots + e^j + \dots$$

Сравнивая два выражения для $\frac{\partial E}{\partial M}$ при $M=0$, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} 2a_2^{(2k)} + 4a_4^{(2k)} + \dots + 2ka_{2k}^{(2k)} &= 1, \\ a_1^{(2k+1)} + \dots + (2k+1)a_{2k+1}^{(2k+1)} &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

что дает хороший контроль для вычислений. Точно так же из уравнения Кеплера мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial M^2} &= \frac{-e \sin E}{(1 - e \cos E)^2} \frac{\partial E}{\partial M} = \frac{-e \sin E}{(1 - e \cos E)^3}, \\ \frac{\partial^3 E}{\partial M^3} &= \frac{-e \cos E}{(1 - e \cos E)^4} + \frac{E e^2 \sin^2 E}{(1 - e \cos E)^5}. \end{aligned}$$

При $M=0$ первое из этих выражений обращается тождественно в нуль, а второе дает:

$$\frac{\partial^3 E}{\partial M^3} = \frac{-e}{(1-e)^{\frac{3}{2}}} = - \left[e + 4e^2 + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} e^3 + \dots + \frac{4 \cdot 5 \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} e^n + \dots \right].$$

Путем сравнения этой формулы с выражением для $\frac{\partial^3 E}{\partial M^3}$, полученным из $E=M+u$, находим:

$$\left. \begin{aligned} 2^3 a_2^{(2k)} + 4^3 a_4^{(2k)} + \dots + (2k)^3 a_{2k}^{(2k)} &= \frac{4 \cdot 5 \dots (2k+2)}{1 \cdot 2 \dots (2k-1)}, \\ 1^3 a_1^{(2k+1)} + 3^3 a_3^{(2k+1)} + \dots + (2k+1)^3 a_{2k+1}^{(2k+1)} &= \frac{4 \cdot 5 \dots (2k+3)}{1 \cdot 2 \dots 2k}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Аналогичные формулы можно получить из рассмотрения всех нечетных производных от E по M .

Уравнения (57), (58) и им аналогичные линейны относительно коэффициентов $a_j^{(k)}$, и из них можно определить эти коэффициенты. Рассмотрим для примера случай, когда $k=0$. Тогда второе уравнение (57) дает $a_1^{(1)}=1$, откуда $u_1=\sin M$, что согласуется с ранее полученным результатом.

Пусть далее $k=1$. Тогда первое уравнение (57) дает $2a_2^{(2)}=1$, откуда $u_2=\frac{1}{2}\sin 2M$. Рассмотрим теперь вторые уравнения (57) и (58). При $k=1$ они имеют вид:

$$a_1^{(3)} + 3a_3^{(3)} = 1, \quad a_1^{(3)} + 27a_3^{(3)} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2},$$

откуда $a_1^{(3)} = -\frac{1}{8}$, $a_3^{(3)} = +\frac{3}{8}$, что согласуется с результатами, приведенными в (53).

Выполнив разложение методом Лагранжа или только что объясненным, найдем, что значение E с членами до шестого порядка включительно таково:

$$\left. \begin{aligned} E = M + e \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{e^3}{3! 2^2} (3^2 \sin 3M - 3 \sin M) + \\ + \frac{e^4}{4! 2^3} (4^3 \sin 4M - 4 \cdot 2^3 \sin 2M) + \\ + \frac{e^5}{5! 2^4} (5^4 \sin 5M - 5 \cdot 3^4 \sin 3M + 10 \sin M) + \\ + \frac{e^6}{6! 2^5} (6^5 \sin 6M - 6 \cdot 4^5 \sin 4M + 15 \cdot 2^5 \sin 2M) + \\ + \dots \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

100. Разложение r и v в ряды. Можно выразить r через e и M методом Лагранжа, полагая $F(z)=\cos E$ и используя последнее уравнение (48). Недостатком этого метода является его громоздкость¹⁾.

¹⁾ Метод, примененный в этом параграфе, предложен Мак-Милланом.

Из уравнения Кеплера следует, что

$$e \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{e \sin E}{1 - e \cos E}, \quad dM = (1 - e \cos E) dE.$$

Поэтому:

$$e \frac{\partial E}{\partial e} dM = e \sin E dE.$$

Интегрируя это выражение, имеем:

$$e \int_0^M \frac{\partial E}{\partial e} dM = -e \cos E + c; \quad (60)$$

отсюда можно выразить $-e \cos E$ через M путем подстановки в левую часть развернутого выражения для E , представленного в (59). Выпишем первые члены получающегося ряда:

$$\begin{aligned} -e \cos E &= -c + e \int_0^M \left[\sin M + e \sin 2M + \frac{3}{8} e^2 (3 \sin 3M - \sin M) + \dots \right] dM = \\ &= -c - e \cos M - \frac{1}{2} e^2 \cos 2M - \frac{3}{8} e^3 (\cos 3M - \cos M) + \dots \end{aligned}$$

Последние уравнения (48) и (60) дают для r ряд:

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos E = 1 - c - e \cos M - \frac{1}{2} e^2 \cos 2M + \dots \quad (61)$$

Остается определить постоянную c . Так как r измеряется от фокуса эллипса, то при $M=0$, $r=a(1-e)$, откуда

$$1 - e = 1 - c - e - \frac{1}{2} e^2 + \dots + b_j e^j + \dots,$$

где b_j — коэффициент при e^j в ряде для $-\cos E$ при $M=0$. Две части этого уравнения должны быть равны между собой для всех значений e , для которых (61) сходится; поэтому c должно иметь формулу:

$$c = c_2 e^2 + c_3 e^3 + \dots,$$

где c_2, c_3, \dots должны быть определены таким образом, чтобы правая часть не содержала членов с e^2, e^3, \dots , т. е. $-c_j + b_j = 0$, $j=2, 3, \dots$. Так как выражение $-e \cos E$ согласно уравнению (60) есть интеграл ряда синусов, то оно не содержит постоянных членов, поэтому b_j являются суммами коэффициентов ряда синусов. Теперь рассмотрим

$$\int_0^{2\pi} \frac{r}{a} dM = \int_0^{2\pi} \left[1 - c - e \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M + \dots \right] dM.$$

В задаче 4 было показано, что значение этого интеграла есть $2\pi \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)$. Поэтому коэффициенты e^3, e^4, \dots не содержат постоянных членов, и точное значение c равно $-\frac{1}{2}e^2$.

Ряд для $\frac{r}{a}$ до шестой степени e таков:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{a} = & 1 - e \cos M - \frac{e^2}{2} (\cos 2M - 1) - \frac{e^3}{2!2^2} (3 \cos 3M - 3 \cos M) - \\ & - \frac{e^4}{3!2^3} (4^2 \cos 4M - 4 \cdot 2^2 \cos 2M) - \\ & - \frac{e^5}{4!2^4} (5^3 \cos 5M - 5 \cdot 3^3 \cos 3M + 10 \cos M) - \\ & - \frac{e^6}{5!2^5} (6^4 \cos 6M - 6 \cdot 4^4 \cos 4M + 15 \cdot 2^4 \cos 2M) - \\ & - \dots \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Теперь рассмотрим вычисление ряда для v . Из первых двух уравнений (49) находим:

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E)^2} dM,$$

что вследствие уравнения Кеплера принимает вид:

$$dv = \sqrt{1-e^2} \left(\frac{dE}{dM} \right)^2 dM. \quad (63)$$

Величина $\frac{dE}{dM}$ находится сразу из (59). Возводя (59) в квадрат, разлагая $\sqrt{1-e^2}$ в ряд по степени e^2 и интегрируя, получим:

$$\left. \begin{aligned} v = & M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{e^3}{12} (13 \sin 3M - 3 \sin M) + \\ & + \frac{e^4}{96} (103 \sin 4M - 44 \sin 2M) + \\ & + \frac{e^5}{960} (1097 \sin 5M - 645 \sin 3M + 50 \sin M) + \\ & + \frac{e^6}{960} (1223 \sin 6M - 902 \sin 4M + 85 \sin 2M) + \\ & + \dots \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Если e мало, как в планетных орбитах, то эти ряды очень быстро сходятся; если e превышает 0,6627..., то они расходятся для некоторых значений M , как это впервые показал Лаплас. Это значение e превышает в солнечной системе лишь в случае орбит некоторых комет, но подобные разложения не употребляются при вычислении возмущений комет.

101. Прямое вычисление полярных координат¹⁾. Отмечено, что нахождение координат для любого момента в случае эллиптического движения требует много труда. Возникает вопрос, не зависит ли это отчасти от того, что конечный результат получается путем определения E как промежуточной функции из уравнения Кеплера. Возникает также вопрос, нельзя ли находить координаты прямо из дифференциальных уравнений. Покажем, что ответ на последний вопрос положителен.

Уравнения (16) в полярных координатах принимают вид:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{k^2 (1+m)}{r^2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dv}{dt} \right) = 0.$$

Интегрируя второе из этих уравнений и исключая $\frac{dv}{dt}$ из первого при помощи этого интеграла, получаем:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{k^2 (1+m)}{r^2} = 0, \quad r^2 \frac{dv}{dt} = h = k \sqrt{(1+m) a (1-e^2)}.$$

Исключая $k^2 (1+m)$ при помощи первого уравнения (48) и переходя от независимой переменной t к M при помощи второго уравнения (48), мы напомним эти уравнения в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dM^2} - \frac{a^4 (1-e^2)}{r^3} + \frac{a^3}{r^2} &= 0, \\ \frac{dv}{dM} &= \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Первое уравнение (65) не зависит от второго и может быть интегрировано отдельно. Оно удовлетворяется при $r=a$ и $e=0$, в этом случае орбита есть окружность. Чтобы получить эллиптическую орбиту, положим:

$$r = a(1 - \rho e), \quad (66)$$

где ρe есть отклонение от окружности. Когда планета находится в перигелии, $r = a(1 - e)$. Поэтому для $M=0$, $\rho=1$. Когда планета в афелии $r = a(1 + e)$. Поэтому $\rho = -1$ для $M=\pi$, и ρ изменяется между -1 и $+1$. Так как $\frac{dr}{dM}$ есть нуль для M , равного 0 и π , то $\frac{d\rho}{dM}$ также есть нуль для M , равного 0 и π .

Подставив (66) в (65), мы перепишем эти уравнения в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dM^2} + \frac{\rho - e}{(1 - \rho e)^3} &= 0, \\ \frac{dv}{dM} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1 - \rho e)^2} &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ Этот метод был впервые опубликован автором в *Astronomical Journal*, т. 25, 1907.

Так как e меньше единицы и ρ изменяется от -1 до $+1$, то вторые члены этих уравнений могут быть разложены в сходящиеся ряды по степеням e , и мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dM^2} + \rho &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) [i - (i+2)\rho^2] \rho^{i-1} e^i, \\ \frac{dv}{dM} &= \sqrt{1-e^2} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \rho^i e^i. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Мы видели, что r , а поэтому также и ρ разлагаются в ряд по степеням e . Это вытекает также из формы первого уравнения (67) и общих принципов дифференциальных уравнений. Отсюда ρ может быть написано в виде:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 e + \rho_2 e^2 + \dots, \quad (68)$$

где $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ суть функции от M , которые остается определить. Так как ρ периодически с периодом 2π для всех значений e , меньших единицы, то каждое ρ_j в отдельности есть сумма тригонометрических членов. Так как движение симметрично по отношению к большой оси орбиты и так как $M=0$, когда планета находится в перигелии, то ρ есть четная функция от M . Это верно для всех значений e , для которых ряд сходится, и поэтому каждое ρ_j представится в виде суммы косинусов.

Изменение в знаке e равносильно перенесению начала в другой фокус эллипса. Поэтому, если изменить знак e и прибавить к M число π , то значение r не изменится, а из уравнения (66) следует, что знак ρ изменится на обратный. Так как это верно для всех значений e , для которых ряд сходится, то

$$\rho_j(M) e^j = -\rho_j(M + \pi) (-e)^j.$$

Поэтому, если j четное, то ρ_j представится в виде суммы косинусов нечетных кратных дуг M , а если j нечетное, то ρ_j будет суммой косинусов четных кратных дуг M . Обращаясь к уравнениям (68) и (66), видим, что это такое же свойство, как установленное в 100.

Из свойств ρ_j и из второго уравнения (67) можно легко доказать, что v выражается в форме ряда:

$$v = v_0 + v_1 e + v_2 e^2 + \dots, \quad (69)$$

где каждое v_j ($j > 1$) есть сумма синусов целых кратных дуг от M . Более подробные рассуждения показывают, что если j четное, то v_j есть сумма синусов четных кратных дуг от M , а если j нечетное, то v_j есть сумма синусов нечетных кратных дуг от M .

Для определения коэффициентов ρ_j подставим (68) в первое уравнение (67), что дает:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2\rho_0}{dM^2} + \frac{d^2\rho_1}{dM^2} e + \frac{d^2\rho_2}{dM^2} e^2 + \dots \right] + [\rho_0 + \rho_1 e + \rho_2 e^2 + \dots] = \\ = [1 - 3\rho_0^2] e + [3\rho_0 - 6\rho_0\rho_1 - 6\rho_0^3] e^2 + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях e в левой и правой частях этого равенства, находим:

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \frac{d^2 \rho_0}{dM^2} + \rho_0 &= 0, \\ \text{b) } \frac{d^2 \rho_1}{dM^2} + \rho_1 &= 1 - 3\rho_0^2, \\ \text{c) } \frac{d^2 \rho_2}{dM^2} + \rho_2 &= 3\rho_0(1 - 2\rho_1 - 2\rho_0^2), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Уравнения (70) могут быть интегрированы в том порядке, как они написаны. Каждый раз появляются две постоянные интегрирования, и они определяются так, чтобы $\rho = 1$ и $\frac{d\rho}{dM} = 0$ для $M = 0$, каково бы ни было значение e . Из (68) следует, что эти условия дают:

$$\begin{aligned} \rho(0) &= \rho_0(0) + \rho_1(0)e + \rho_2(0)e^2 + \dots = 1, \\ \frac{d\rho}{dM} &= \frac{d\rho_0}{dM} + \frac{d\rho_1}{dM}e + \frac{d\rho_2}{dM}e^2 + \dots = 0, \end{aligned}$$

где в выражениях производных нужно положить M равным нулю. Так как эти уравнения справедливы для всех значений e , то мы должны иметь:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(0) &= 1, \quad \rho_1(0) = 0, \quad \rho_2(0) = 0, \dots \\ \frac{d\rho_0}{dM} &= 0, \quad \frac{d\rho_1}{dM} = 0, \quad \frac{d\rho_2}{dM} = 0, \dots \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Общее решение уравнения «а» из (70) имеет вид (§ 32):

$$\rho_0 = a_0 \cos M + b_0 \sin M,$$

где a_0 и b_0 — постоянные интегрирования. Из (71) следует, что $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, и поэтому:

$$\rho_0 = \cos M.$$

Тот факт, что b_0 равно нулю, также следует из общего свойства, что ρ_j содержит одни лишь косинусы.

Подставляя значение ρ_0 в правую часть уравнения «b» из (70), мы получим:

$$\frac{d^2 \rho_1}{dM^2} + \rho_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cos 2M.$$

Это уравнение может быть решено методом вариации произвольных постоянных (37). Но так как часть решения, которая происходит от правой части этого уравнения, содержит члены той же формы, как и правая часть, то проще искать решение в виде:

$$\rho_1 = a_1 \cos M + b_1 \sin M + c_1 + d_1 \cos 2M.$$

Подставляя это выражение для ρ_1 в дифференциальное уравнение и определяя c_1 и d_1 так, чтобы оно было удовлетворено, мы найдем:

$$\rho_1 = a_1 \cos M + b_1 \sin M - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2M,$$

что является общим решением, так как оно удовлетворяет дифференциальному уравнению и имеет две произвольных постоянных a_1 и b_1 . Определяя a_1 и b_1 при помощи (71), мы получим для ρ_1 выражение вида:

$$\rho_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2M.$$

С найденными значениями ρ_0 и ρ_1 уравнение «с» из (70) принимает вид:

$$\frac{d^2 \rho_2}{dM^2} + \rho_2 = -3 \cos 3M,$$

общее решение которого таково:

$$\rho_2 = a_2 \cos M + b_2 \sin M + \frac{3}{8} \cos 3M.$$

Определяя a_2 и b_2 при помощи (71), мы получим окончательное выражение для ρ_2 в виде:

$$\rho_2 = \frac{3}{8} (-\cos M + \cos 3M).$$

Этот процесс интегрирования может быть продолжен сколь угодно далеко. Подставляя найденные выражения для ρ_j в (66), мы получим:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - \rho e = 1 - (\rho_0 + \rho_1 e + \rho_2 e^2 + \dots) e = \\ &= 1 - e \cos M - \frac{1}{2} e^2 (\cos 2M - 1) - \frac{3}{8} e^3 (\cos 3M - \cos M) + \dots, \end{aligned}$$

что согласуется с результатами, полученными в (62).

Подставляя затем найденные значения для ρ_0, ρ_1, \dots во второе уравнение (67), мы будем иметь:

$$\frac{dv}{dM} = 1 + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M + \dots,$$

откуда интегрированием найдем:

$$v = c + M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots$$

Так как $v=0$, когда $M=0$, то произвольная постоянная равна нулю и результат согласуется с полученным в (64).

Возможно, что изложенный здесь метод не превосходит в этой специальной задаче метод, зависящий от решения уравнения Кеплера. Но если условия задачи немного изменены, например присоединением членов

которые происходят от сжатия планеты, когда тело движется в плоскости экватора планеты [уравнения (30) главы IV], то уравнение Кеплера больше неприменимо, и метод, зависящий от него, непригоден, в то время как метод, рассматриваемый здесь, может быть применен без всякого изменения, кроме числовых значений коэффициентов, зависящих от членов, прибавленных к дифференциальным уравнениям. Но присоединенные члены в дифференциальных уравнениях меняют период движения, если, конечно, оно остается периодичным, и, чтобы явно показать периодичность, необходимы некоторые изменения в методах определения постоянных интегрирования. Этот метод интегрирования при помощи рядов типичен для теории возмущений и более трудных отделов небесной механики, и поэтому с ним надо основательно познакомиться.

102. Определение положения тела, движущегося по гиперболической орбите. Между этой задачей и задачей нахождения тела в эллиптической орбите существует тесная аналогия. Однако из полярного уравнения гиперболы:

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos v},$$

где a есть большая полуось и ε — эксцентриситет, следует, что в этом случае v может изменяться лишь от $-\pi + \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ до $+\pi - \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Интегралы площадей и живой силы в случае гиперболических орбит определяются следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \frac{dv}{dt} &= k \sqrt{(1+m)a(\varepsilon^2 - 1)}, \\ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 &= k^2(1+m) \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Исключая v из второго из этих уравнений при помощи первого и разделяя переменные, находим:

$$avdt = \frac{r dr}{\sqrt{(a+r)^2 - a^2\varepsilon^2}},$$

где

$$v = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Это уравнение может быть непосредственно проинтегрировано при помощи гиперболических функций, но предпочтительнее ввести сначала вспомогательную величину F , соответствующую эксцентрической аномалии в эллиптических орбитах. Пусть¹⁾

$$a + r = \frac{a\varepsilon}{2}(e^F + e^{-F}) = a\varepsilon \operatorname{ch} F, \quad (73)$$

тогда

$$v dt = \left\{ -1 + \frac{\varepsilon}{2}(e^F + e^{-F}) \right\} dF = [-1 + \varepsilon \operatorname{ch} F] dF.$$

¹⁾ В этом параграфе e обозначает основание натуральных логарифмов. *Прим. ред.*

Интегрируя это уравнение, получим:

$$M = \nu(t - T) = -F + \frac{\varepsilon}{2} (e^F - e^{-F}) = -F + \varepsilon \operatorname{sh} F, \quad (74)$$

что дает t , когда известно F . Обратная задача найти F , когда дано $\nu(t - T)$, труднее.

Вообще быстрее всего было бы найти приближенное значение F путем графического процесса, а затем более точное значение при помощи дифференциальных поправок.

Значение F , удовлетворяющее (74), есть абсцисса точки пересечения прямой линии:

$$y = \frac{1}{\varepsilon} (F + M)$$

и гиперболической синусоиды

$$y = \frac{e^F - e^{-F}}{2} = \operatorname{sh} F.$$

Дифференциальные поправки могут быть вычислены методом, аналогичным примененному в случае эллиптических орбит.

Из (73) и полярного уравнения гиперболы следует, что

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos v} = a[-1 + \varepsilon \operatorname{ch} F],$$

из этого уравнения:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} \frac{\sqrt{-1 + \frac{1}{2}(e^F + e^{-F})}}{\sqrt{+1 + \frac{1}{2}(e^F + e^{-F})}} = \sqrt{\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1}} \operatorname{th} \frac{F}{2},$$

что является удобной формулой для вычисления v , когда найдено F .

103. Определение положения тела, двигающегося по эллиптической или гиперболической орбите, когда e почти равно единице. Аналитические решения, приведенные выше, зависят от разложения по степеням e .

Если e велико, как в случае некоторых орбит периодических комет, то ряды делаются или расходящимися или сходящимися настолько медленно, что эти методы становятся непригодными. Однако графический процесс обходит эту трудность.

Чтобы получить удобное для употребления аналитическое решение, применим для эллиптических орбит разложение по степеням $\frac{1-e}{1+e}$. Исходное положение берется из уравнения площадей и полярного уравнения орбиты, принимаемой за эллипс.

Пусть

$$w = \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad \lambda = \frac{1-e}{1+e},$$

тогда уравнение площадей принимает вид:

$$\frac{n \sqrt{1+e}}{2(1-e)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{(1+w^2)}{(1+\lambda w^2)^2} d w.$$

При малом λ правая часть этого уравнения может быть разложена в быстро сходящийся ряд по степеням λ для всех значений v , не слишком близких к 180° .

Так как периодические кометы невидимы вблизи афелия, то редко требуется решение в этой области. Разлагая правую часть и интегрируя, находим следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{n(1+e)^{\frac{1}{2}}}{2(1-e)^{\frac{3}{2}}}(t-T) = w + \frac{w^3}{3} - 2\lambda \left(\frac{w^3}{3} + \frac{w^5}{5} \right) + \\ + 3\lambda^2 \left(\frac{w^5}{5} + \frac{w^7}{7} \right) - 4\lambda^3 \left(\frac{w^7}{7} + \frac{w^9}{9} \right) + \dots \end{aligned} \quad (75)$$

Когда орбита — парабола, то $e=1$ и $\lambda=0$, и это уравнение приводится к (32), которое кубично относительно w . Так как перигелийное расстояние в эллипсе есть $q=a(1-e)$ и $n=\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$, то следует, что

$$\frac{n \sqrt{1+e}}{2(1-e)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k \sqrt{1+e}}{2q^{\frac{3}{2}}}.$$

Желательно найти значение w для любого значения t . Если эксцентриситет равен единице, то вместо (75) мы имеем:

$$\frac{k(1+e)^{\frac{1}{2}}}{2q^{\frac{3}{2}}}(t-T) = W + \frac{1}{3} W^3, \quad (76)$$

где W есть тангенс половины истинной аномалии в параболической орбите. Из этого уравнения W может быть определено при помощи таблиц Баркера (Barker) или из уравнений (33).

Предположим, что W найдено, тогда w можно выразить в виде ряда по степеням λ , коэффициенты которого суть функции от W . Для этого примем разложение:

$$w = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + \dots; \quad (77)$$

подставим его в правую часть уравнения (75), которое равно правой части уравнения (76). Результат подстановки таков:

$$\begin{aligned} W + \frac{W^3}{3} = & a_0 + \frac{a_0^3}{3} + \left[a_1 + a_0^2 a_1 - \frac{2}{3} a_0^3 - \frac{2}{5} a_0^5 \right] \lambda + \\ & + \left[a_2 + a_0^2 a_2 + a_0 a_1^2 - 2a_0^2 a_1 - 2a_0^4 a_1 + \frac{3}{5} a_0^5 + \frac{3}{7} a_0^7 \right] \lambda^2 + \\ & + \left[a_3 + a_0^3 a_3 + \frac{a_1^3}{3} - 2a_0^2 a_2 - 2a_0^4 a_2 - 2a_0 a_1^2 - \right. \\ & \left. - 4a_0^3 a_1^2 + 3a_0^4 a_1 + 3a_0^6 a_1 - \frac{4}{7} a_0^7 - \frac{4}{9} a_0^9 \right] \lambda^3 + \\ & + \dots \end{aligned}$$

Так как это уравнение тождественно относительно λ , то коэффициенты при соответствующих степенях λ равны. Отсюда:

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{a_0^3}{3} &= W + \frac{W^3}{3}, & a_1 (1 + a_0^2) &= \frac{2}{3} a_0^3 + \frac{2}{5} a_0^5, \\ a_2 (1 + a_0^2) &= -a_0 a_1^2 + 2a_0^2 a_1 + 2a_0^4 a_1 - \frac{3}{5} a_0^5 - \frac{3}{7} a_0^7, \\ a_3 (1 + a_0^2) &= -\frac{a_1^3}{3} + 2a_0^2 a_2 + 2a_0^4 a_2 + 2a_0 a_1^2 + 4a_0^3 a_1^2 - \\ &\quad - 3a_0^4 a_1 - 3a_0^6 a_1 + \frac{4}{7} a_0^7 + \frac{4}{9} a_0^9, \\ &\dots \end{aligned}$$

Имеется три решения для a_0 , из которых лишь одно действительно. Беря действительный корень первого уравнения, находим, что

$$\begin{aligned} a_0 &= W, \\ a_1 &= \frac{\frac{2}{3} W^3 + \frac{2}{5} W^5}{1 + W^2}, \\ a_2 &= \frac{\frac{11}{15} W^5 + \frac{439}{315} W^7 + \frac{33}{35} W^9 + \frac{35}{175} W^{11}}{(1 + W^2)^3}, \\ a_3 &= \frac{\frac{292}{315} W^7 + \frac{7928}{2835} W^9 + \frac{10328}{2835} W^{11} + \frac{432}{175} W^{13} + \frac{6692}{7875} W^{15} + \frac{184}{1575} W^{17}}{(1 + W^2)^5}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Подставив значение этих коэффициентов в уравнение (77), определим тангенс половины истинной аномалии. Первый член дает то, что получилось бы в параболической орбите, остальные члены исчезают при $e = 1$. В ряде (64) первый член правой части является истинной аномалией для круговой орбиты, а высшие члены представляют поправки к движе-

нию по окружности. В ряде (77) первый член в правой части дает тангенс половины истинной аномалии для параболической орбиты, а высшие члены представляют поправки к параболическому движению.

Эти уравнения одинаково применимы к гиперболическим орбитам, в которых эксцентриситет близок к единице, если $1 - e$ и $1 + e$ повсюду заменить через $\epsilon - 1$ и $\epsilon + 1$, где ϵ — эксцентриситет гиперболы.

ЗАДАЧИ

1. Покажите, как можно при помощи графического построения быстро получить приближенное решение кубического уравнения (32) относительно $\tan \frac{v}{2}$.

2. Выведите уравнения для дифференциальных поправок к приближенным значениям, найденным графическим методом. Примените к частному случаю и проверьте результат.

3. Найдите E_0, M_0, E_1, M_1, E_2 и M_2 , если $e = 0,2$ и $M = 214^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Отв. } E_0 &= 208^\circ 39' 16'', 6, & M_0 &= 214^\circ 8' 58'', 6, \\ E_1 &= 208^\circ 31' 38'', 4, & M_1 &= 213^\circ 59' 59'', 8, \\ E_2 &= 208^\circ 31' 38'', 6, & M_2 &= 214^\circ 00' 00''. \end{aligned}$$

4. Покажите при помощи кривых, применяемых при решении уравнения Кеплера, что решение единственно для всех значений $e < 1$ и M .

5. Уравнение (50) не определяет квадранта, покажите, что соответствующие значения $\frac{1}{2}v$ и $\frac{1}{2}E$ всегда лежат в одном квадранте.

6. Выразите прямоугольные координаты $x = r \cos v$, $y = r \sin v$ через эксцентрическую аномалию и затем при помощи ряда Лагранжа выразите через M .

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos M + \frac{e}{2} (\cos 2M - 3) + \frac{e^2}{2! 2^2} (3 \cos 3M - 3 \cos M) + \\ &+ \frac{e^3}{3! 2^3} (4^2 \cos 4M - 4 \cdot 2^2 \cos 2M) + \dots, \\ \frac{y}{a} &= \sin M + \frac{e}{2} \sin 2M + \frac{e^2}{3! 2^2} (3^2 \sin 3M - 15 \sin M) + \\ &+ \frac{e^3}{4! 2^3} (4^3 \sin 4M - 10 \cdot 2^3 \sin 2M) + \dots \end{aligned}$$

7. Покажите, что свойства E , представленного в виде ряда по степеням e выведенные в § 99, вытекают из ряда Лагранжа.

8. Выведите три первых члена ряда для r при помощи формулы Лагранжа.

9. Дайте геометрическую интерпретацию для F (§ 102), соответствующую E в эллиптической орбите.

10. Выразите v в виде ряда по степеням e методом, аналогичным употребленному в § 103.

11. Покажите, что ветвь гиперболы, обращенная выпуклостью к Солнцу, описывается телом в чисто мнимое время.

12. Прибавьте к правым частям уравнений (16) члены $-\frac{3}{10}(1+m)b^2e_1^2\frac{x}{r^3}$ и $-\frac{3}{10}(1+m)b^2e_1^2\frac{y}{r^3}$, происходящие от сплюснутости центрального тела [уравнения (30), глава IV], где e_1 — эксцентриситет меридианного сечения, и проинтегрируйте методом § 101.

104. **Гелиоцентрическое положение в системе эклиптики.** Выше даны были методы нахождения положений в орбитах для различных случаев. Теперь выведем формулы определения положения относительно различных систем осей. Возьмем начало координат в теле, по отношению к которому рассматривается движение второго тела. Так как большинство применений относится к солнечной системе, где начало — в центре Солнца, то такие координаты называются *гелиоцентрическими*.

Положения тел в солнечной системе обычно относятся к одной из двух систем координат: к *ekliптической* или к *экваториальной* системе. Основная плоскость в *ekliптической* системе есть плоскость земной орбиты; в *экваториальной* системе — это плоскость земного экватора. Нуль-пунктом основного круга обеих систем является точка *весеннего равноденствия*, т. е. точка, в которой *ekliптика* пересекает экватор с юга на север, и обозначается через Υ . Полярные координаты в *ekliптической* системе называются *долготой* и *широтой*, а в *экваториальной* — *прямым восхождением* и *склонением*. Если начало находится в центре Солнца, то для обозначения координат употребляются латинские буквы, а если оно находится в центре Земли, то — греческие. Итак:

Начало в центре Солнца		Начало в центре Земли	
Долгота	l	λ	измеряется к востоку
Широта	b	β	+ северная; — южная
Прямое восхождение	a	α	измеряется к востоку
Склонение	d	δ	+ северное; — южное
Расстояние	r	ρ	

a и d употребляются очень редко. Абсолютные положения опорных звезд даны в *экваториальной* системе, а наблюдаемые положения комет определяются путем сравнения с ними. В некоторых теориях, относящихся к планетам и кометам, особенно в рассмотрении взаимных возмущений планет и возмущений ими комет, удобнее употреблять систему *ekliптики*, поэтому надо уметь преобразовывать уравнения из одной системы в другую.

Восходящий узел есть проекция на *ekliптику* из Солнца точки, где тело пересекает плоскость *ekliптики* с юга на север. Его долгота измеряется от неподвижной точки *ekliптики* — *весеннего равноденствия* и обозначается через Ω . Проекция точки, где тело пересекает плоскость *ekliптики* с севера на юг, называется *нисходящим узлом* и обозначается через ϖ .

Наклонность есть угол между плоскостью орбиты и плоскостью *ekliптики* и обозначается через i . Прежде был обычай брать наклонность всегда меньше 90° и определять направление движения как *прямое* или *обратное* согласно тому, направлено ли оно в ту же сторону, как движение Земли или в обратную. В настоящее время употребляется другой метод, рассматривающий все движения как прямые, а наклонность изменяющейся от 0° до 180° . В последнем методе избегается употребление двойных знаков в формулах, и он принят здесь (см. § 83). Узел и наклонность определяют положение плоскости орбиты в пространстве.

Угловое расстояние от восходящего узла до точки перигелия, считаемое в направлении движения тела в орбите, обозначается через ω и определяет положение орбиты в ее плоскости. Долгота перигелия обозначается через π и дается формулой:

$$\pi = \Omega + \omega.$$

Этот элемент не является долготой в обычном смысле слова, потому что он считается в двух различных плоскостях.

Задача относительного движения одного тела есть задача шестого порядка (§ 85), и при ее интегрировании появляются шесть произвольных постоянных. Поэтому имеется шесть элементов, которые являются независимыми функциями этих постоянных. Они следующие:

a — большая полуось, которая определяет размер орбиты и период обращения;

e — эксцентриситет, определяющий форму орбиты;

Ω — долгота восходящего узла и

i — наклонность к плоскости эклиптики, которые вместе определяют положение плоскости орбиты;

ω — долгота перигелия, измеренная от узла, или π — долгота перигелия, каждое из них определяет ориентировку орбиты в ее плоскости;

T — время прохождения через перигелий, определяющее вместе с другими элементами положение тела в его орбите в любое время.

Если полярные координаты тела вычислены, то прямоугольные координаты в системе координат, с положительным концом оси x , направленным к точке перигелия, и осью y в плоскости орбиты, даются формулами:

$$x_0 = r \cos v, \quad y_0 = r \sin v, \quad z_0 = 0. \quad (78)$$

Если ось x повернуть обратно и направить по линии узлов, то координаты в новой системе будут:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos(v + \omega) = r \cos(v + \pi - \Omega), \\ y &= r \sin(v + \omega) = r \sin(v + \pi - \Omega), \\ z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

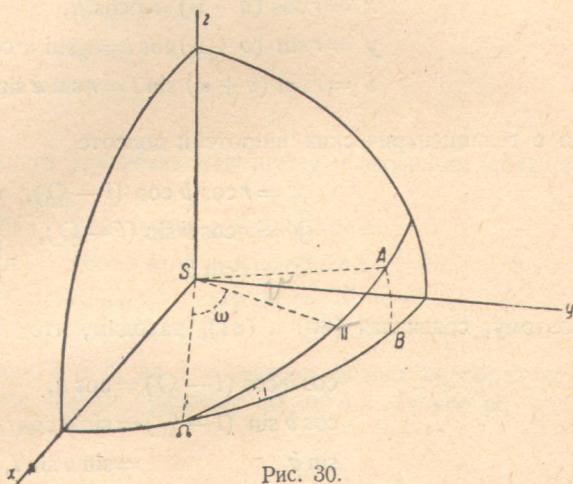


Рис. 30.

Долгота тела в его орбите, отсчитанная от восходящего узла, называется *аргументом широты* и обозначается через u . Она дается формулой

$$u = v + \omega,$$

следовательно, если найдено u , то v известно.

Пусть S — Солнце (рис. 30), $S\kappa y$ — плоскость эклиптики, $S\oslash A$ — плоскость орбиты, \oslash — восходящий узел, π — точка перигелия, A — проекция положения тела и угол $\pi SA = v$. Тогда $\oslash A = \omega + v = u$.

Пусть положение тела относится теперь к прямоугольной системе осей с началом в центре Солнца, осью x направленной по линии узлов, и осью y в плоскости эклиптики. Тогда уравнения (79) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos (v + \omega) = r \cos u, \\ y' &= r \sin (v + \omega) \cos i = r \sin u \cos i, \\ z' &= r \sin (v + \omega) \sin i = r \sin u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Но в гелиоцентрических широте и долготе

$$\left. \begin{aligned} x' &= r \cos b \cos (l - \oslash), \\ y' &= r \cos b \sin (l - \oslash), \\ z' &= r \sin b. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Поэтому, сравнивая (80) и (81), находим, что

$$\left. \begin{aligned} \cos b \cos (l - \oslash) &= \cos u, \\ \cos b \sin (l - \oslash) &= \sin u \cos i, \\ \sin b &= \sin u \sin i, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} (l - \oslash) &= \operatorname{tg} u \cos i, \\ \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg} i \sin (l - \oslash). \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Так как b всегда положительно, то уравнения (82) и (83) однозначно определяют гелиоцентрическую долготу и широту l и b , когда \oslash , i и u известны.

105. Перенос начала координат в центр Земли. Пусть Ξ , H , Z — гелиоцентрические координаты центра Солнца, относящиеся к системе координат с осью x , направленной к весеннему равноденствию и осью y в плоскости эклиптики. Пусть P , Λ и B обозначают соответственно гелиоцентрическое расстояние, долготу и широту Солнца. Эти величины даются в «Nautical Almanac» для каждого дня года. Прямоугольные координаты выражаются через них следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Xi &= P \cos B \cos \Lambda, \\ H &= P \cos B \sin \Lambda, \\ Z &= P \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Угол B обычно меньше секунды дуги, и если не требуется большой точности, то эти уравнения могут быть заменены следующими:

$$E = P \cos \Lambda,$$

$$H = P \sin \Lambda,$$

$$Z = 0.$$

Пусть ξ'' , η'' и ζ'' — геоцентрические, а x'' , y'' и z'' — гелиоцентрические координаты тела в системе координат с осью x , направленной к весеннему равноденствию, и осью y в плоскости эклиптики. Поэтому

$$\xi'' = x'' + E,$$

$$\eta'' = y'' + H,$$

$$\zeta'' = z'' + Z.$$

В полярных координатах эти уравнения напишутся следующим образом:

$$\rho \cos \beta \cos \lambda = r \cos b \cos l + P \cos B \cos \Lambda,$$

$$\rho \cos \beta \sin \lambda = r \cos b \sin l + P \cos B \sin \Lambda,$$

$$\rho \sin \beta = r \sin b + P \sin B.$$

Из этих уравнений находим λ и β ; но эту систему можно преобразовать в более удобную, умножая первое уравнение на $\sin \Lambda$ и второе на $\cos \Lambda$ и складывая. Результаты таковы:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \beta \cos (\lambda - \Lambda) &= r \cos b \cos (l - \Lambda) + P \cos B, \\ \rho \cos \beta \sin (\lambda - \Lambda) &= r \cos b \sin (l - \Lambda), \\ \rho \sin \beta &= r \sin b + P \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Эти уравнения дают геоцентрическое расстояние, долготу и широту, т. е. ρ , λ и β .

106. Переход к геоцентрическим экваториальным координатам. Обозначим наклонность плоскости эклиптики к плоскости экватора через ϵ . Пусть ξ'' , η'' и ζ'' — геоцентрические координаты тела, отнесенные к эклиптической системе с осью x , направленной в точку весеннего равноденствия. Тогда можно получить экваториальную систему, вращая эклиптическую систему вокруг оси x в отрицательном направлении на угол ϵ ; соотношения между координатами в двух системах таковы:

$$\xi''' = \xi'',$$

$$\eta''' = \eta'' \cos \epsilon - \zeta'' \sin \epsilon,$$

$$\zeta''' = \eta'' \sin \epsilon + \zeta'' \cos \epsilon,$$

или в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon - \sin \beta \sin \epsilon, \\ \sin \delta &= \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon + \sin \beta \cos \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Для наиболее удобного решения этих уравнений относительно δ и α введем вспомогательные величины n и N , определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \sin \beta, \\ n \cos N &= \cos \beta \sin \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

в которых n — положительная величина. Тогда уравнения (86) принимают вид:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda, \\ \cos \delta \sin \alpha &= n \cos (N + \epsilon), \\ \sin \delta &= n \sin (N + \epsilon), \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} n \sin N &= \sin \beta, & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\cos (N + \epsilon) \operatorname{tg} \lambda}{\cos N}, \\ n \cos N &= \cos \beta \sin \lambda, & \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} (N + \epsilon) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Эти уравнения вместе с первым из (86), определяющим квадрант, в котором лежит α , вполне определяют α и δ , если известны λ и β .

Если даны α и δ , а требуется найти λ и β , то уравнения, из которых они могут быть определены, получаются путем замены α и δ через λ и β и изменения знака у ϵ в (86). Они таковы¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} m \sin M &= \sin \delta, & \operatorname{tg} \lambda &= \frac{\cos (M - \epsilon) \operatorname{tg} \alpha}{\cos M}, \\ m \cos M &= \cos \delta \sin \alpha, & \operatorname{tg} \beta &= \operatorname{tg} (M - \epsilon) \sin \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

107. Прямое вычисление геоцентрических экваториальных координат. Геоцентрические экваториальные координаты α и δ могут быть найдены непосредственно из элементов i и \varnothing и аргумента широты u , без нахождения эклиптических координат λ и β .

В системе координат с осью x , направленной к узлу, и осью y в плоскости эклиптики выражения для гелиоцентрических координат имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos u, \\ y' &= r \sin u \cos i, \\ z' &= r \sin u \sin i. \end{aligned}$$

¹⁾ m и M — новые вспомогательные величины, не имеющие никакого отношения к величинам, которые были обозначены этими буквами выше.

Если систему повернуть около оси z так, чтобы ось x оказалась направленной в точку весеннего равноденствия, то координаты будут:

$$\begin{aligned}x'' &= x' \cos \varnothing - y' \sin \varnothing, \\y'' &= x' \sin \varnothing + y' \cos \varnothing, \\z'' &= z',\end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned}x'' &= r (\cos u \cos \varnothing - \sin u \cos i \sin \varnothing), \\y'' &= r (\cos u \sin \varnothing + \sin u \cos i \cos \varnothing), \\z'' &= r \sin u \sin i.\end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Если теперь повернуть систему около оси x на угол $-\epsilon$, то координаты определяются формулами:

$$\begin{aligned}x''' &= x'', \\y''' &= y'' \cos \epsilon - z'' \sin \epsilon, \\z''' &= y'' \sin \epsilon + z'' \cos \epsilon,\end{aligned}$$

или в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned}x''' &= r \{ \cos u \cos \varnothing - \sin u \cos i \sin \varnothing \}, \\y''' &= r \{ (\cos u \sin \varnothing + \sin u \cos i \cos \varnothing) \cos \epsilon - \sin u \sin i \sin \epsilon \}, \\z''' &= r \{ (\cos u \sin \varnothing + \sin u \cos i \cos \varnothing) \sin \epsilon + \sin u \sin i \cos \epsilon \}.\end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Чтобы облегчить вычисления, Гаусс ввел новые вспомогательные величины A, a, B, b, C и c , определяемые уравнениями:

$$\left. \begin{aligned}\sin a \sin A &= \cos \varnothing, \\ \sin a \cos A &= -\sin \varnothing \cos i, & \sin a > 0, \\ \sin b \sin B &= \sin \varnothing \cos \epsilon, & \sin b > 0, \\ \sin b \cos B &= \cos \varnothing \cos i \cos \epsilon - \sin i \sin \epsilon, \\ \sin c \sin C &= \sin \varnothing \sin \epsilon, & \sin c > 0, \\ \sin c \cos C &= \cos \varnothing \cos i \sin \epsilon + \sin i \cos \epsilon.\end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Эти постоянные зависят только от элементов, так что для данной орбиты их вычисляют лишь один раз. Они особенно удобны, когда надо вычислить координаты для большого числа эпох, как, например, при составлении эфемериды. Подставив эти постоянные в (91), мы получим простые формулы для гелиоцентрических координат:

$$\left. \begin{aligned}x''' &= r \sin a \sin (A + u), \\y''' &= r \sin b \sin (B + u), \\z''' &= r \sin c \sin (C + u),\end{aligned} \right\} \quad (93)$$

откуда могут быть найдены x''' , y''' и z''' .

Тогда окончательно геоцентрические экваториальные координаты определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos \delta \cos \alpha &= x''' + X', \\ \rho \cos \delta \sin \alpha &= y''' + Y', \\ \rho \sin \delta &= z''' + Z', \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

где X' , Y' и Z' — прямоугольные геоцентрические координаты Солнца, отнесенные к экваториальной системе. В «Nautical Almanac» они даются для каждого дня года, и поэтому эти уравнения определяют ρ , α и δ . Это завершает теорию определения гелиоцентрических и геоцентрических координат тела, движущегося по любой орбите, когда употребляется эклиптическая или экваториальная система.

ЗАДАЧИ

1. Найдите геометрический смысл угла N в уравнении (87) и покажите, что p есть просто множитель пропорциональности.
2. Предположим, что долгота восходящего узла берется всегда меньше 180° и что наклонность изменяется от -90° до $+90^\circ$; рассмотрите изменения, которые произойдут в уравнениях (78) — (83), и в частности напишите определения гауссовых постоянных a , A , ..., C для этого метода определения элементов.
3. Найдите геометрическое значение гауссовых постоянных, определенных уравнениями (92).

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК И БИБЛИОГРАФИЯ

Задача двух тел для шаров конечного размера была впервые решена Ньютоном около 1685 г. и дана в «Началах», книга I, отдел II. Доказательство геометрическое. Аналитические методы усердно разрабатывались в континентальной Европе в начале XVIII в., но ньютонова система механики не получила немедленного признания; в самом деле, французы придерживались вихревой теории Декарта (1596—1650), пока Вольтер после своего посещения Лондона не поддержал энергично ньютоновскую теорию в 1728—1739 гг. Это, наряду с тем, что англичане продолжали употреблять геометрические методы «Начал», задержало аналитическое решение задачи. Вероятно, оно было выполнено Даниилом Бернулли в межуаре, за который он в 1734 г. получил премию от французской Академии, и несомненно, задача подробно решена Эйлером в 1744 г. в его «Thoria motuum planetarum et cometarum». С тех пор изменения главным образом касались выбора переменных, через которые выражалась задача.

Решение уравнения Кеплера естественно впервые было дано самим Кеплером. Следующее решение было выполнено Ньютоном в «Началах». Ему удалось легко найти из графического построения, содержащего циклоиду, приближенное решение для эксцентрической аномалии. Было предложено очень много аналитических и графических решений; до середины прошлого столетия почти каждый выдающийся математик уделял этому вопросу большее или меньшее внимание. Библиография, содержащая указания на 123 работы об уравнении Кеплера, дана «Bulletin Astronomique», январь 1900, но даже этот обширный список не полон.

Преобразования координат включают лишь решения сферических треугольников, изучению которых в совершенно общей форме математический мир обязан Гауссу (1777—1855).

Задача двух тел излагается во всех сочинениях по аналитической механике. Можно порекомендовать читателю познакомиться дальше с «Mécanique Céleste» Тиссерана, т. I, гл. VI и VII.

[См. также: «Курс небесной механики» М. Ф. Субботина и «Курс теоретической астрономии» А. А. Иванова. *Прим. ред.*]